مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۰، شماره ٤، زمستان ۱۳۸۹ ص‌ص ۱۳-۲٦
(دریافت مقاله: شهریور ۱۳۸۷، پذیرش مقاله: بهمن ۱۳۸۹)

حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریۀ تغییرشکل برشی

مهدی قنّاد[۱]، غلامحسین رحیمی[۲*]، سیامک اسماعیل‌زاده خادم[۳]

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
۲- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
۳- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
* تهران، صندوق پستی ۱۴۳- ۱۴۱۱۵ rahimi_gh@modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله با استفاده از تغییرشکل برشی مرتبه اول(FSDT)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG در حالت کلی استخراج شده و سپس جابه‌جایی شعاعی و تنش بیشینه برای استوانه‌ای با دو سر بسته و مقیّد، به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است. جابه‌جایی و تنش، به‌ازای تغییرات ضرایب ناهمگنی مطالعه شده و با حالت استوانۀ جدار ضخیم همگن مقایسه و نتایج، با نتایج نظریۀ الاستیسیتۀ مستوی(PET) مقایسه و شباهت‌ها نشان داده شده است. جنس استوانه، مادۀ ناهمگن و همسانگردی با تغییرات مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌صورت توانی و با نسبت پواسون ثابت است.

کلیدواژگان: استوانۀ جدار ضخیم، مادۀ ناهمگن FG ، نظریه تغییرشکل برشی.

General Solution of Shear Deformation of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylinderical Shells

M. Ghannad[1], G. H. Rahimi[2*], S. Esmaeilzadeh Khadem[3]
1- Ph.D. Student of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
2- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
3- Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
*P.O.Box 14115-143, Tehran, Iran rahimi_gh@modares.ac.ir

Abstract- In this paper, an analytical formulation of FGM axisymmetric thick-walled cylinders, based on the first shear deformation theory (FSDT) is presented. The displacements and maximum stress in thick cylindrical shells are calculated. Solutions are obtained under generalized plane strain assumptions. It is assumed that the material is isotropic and heterogeneous with constant Poissn's ratio and radially varying elastic modulu. The results have been compared with findings of the plane elasticity theory (PET).

Keywords: Thick-Walled Cylinder, FGM, Plane Elasticity.

۱- مقدمه

پوسته‌ها به‌طور کلّی، سازه‌های خمیده هستند که در برابر نیروها و لنگرها، مقاومت مطلوب ویژه‌ای دارند. مطالعهٔ رفتار و به‌کارگیری نظریه‌های مختلف از گذشته‌ای نه‌چندان دور مورد توجّه پژوهشگران قرار گرفته و به‌دلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای، اهمّیت ویژه‌ای دارند و همواره پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی بر روی جدار و مادّهٔ این پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر بارگذاری‌ها افزایش و وزن آنها را کاهش دهند.

لامه[1] نخستین بار در سال ۱۸۵۲[۱] با استفاده از نظریهٔ الاستیسیتهٔ مستوی[2]، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مادهٔ همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت را ارائه کرد و توزیع تنش و جابه‌جایی را در استوانه‌های توخالی به‌دست آورد که آن در حل مسایل مختلف مهندسی استفاده شده و در کتب درسی گنجانیده شد. نقدی[3] در ۱۹۵۶[۲] با در نظر گرفتن اثر برش عرضی، نظریه تغییرشکل برشی را پایه‌گذاری کرد. میرسکی و هرمان[4] در ۱۹۵۸[۳] با به‌کارگیری نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول[5]، حل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم از مواد همگن و همسانگرد را ارائه کرد. گرینس‌پن[6] در ۱۹۶۰[۴] مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های مختلف تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای انجام داده است. زیو و پرل[7] در ۱۹۷۳[۵] با به‌کارگیری نظریه میرزسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای نیمه بلند را به‌دست آوردند. سوزوکی و تاکاهاشی[8] در ۱۹۸۱[۶] ارتعاش آزاد استوانه‌های دایروی و در ۱۹۸۶[۷] ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی ساخته شده از مواد همگن و همسانگرد را با استفاده FSDT بررسی و به‌کمک سری فربینیوس‌آن را حل کردند. ایپک‌چی و همکاران در ۲۰۰۳[۸] معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیّر را با استفاده از FSDT استخراج و به‌کمک نظریه اغتشاش‌ها[9] حل کردند.

لخنیتسکی[10] در ۱۹۵۰[۹] نظریه الاستیسیتهٔ اجسام مرکب[11] را فرمول‌بندی کرد. در پوسته‌های ساخته شده از مواد مرکب به‌دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده یا ترکیب دو مادهٔ ناهمساز در کنار یکدیگر و درنتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها ایجاد می‌شود. مواد پیشرفته با تغییرات پیوسته خواص(مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) یا FGM[12] توسط نینو[13] و همکاران در ۱۹۸۴ مطرح [۱۰] و به‌دنبال آن مطالعات تحلیلی قابل توجهی در سال‌های نخستین قرن جدید بر روی سازه‌های ساخته شده از این مواد در نقاط مختلف جهان انجام شد.

فوکویی و یاماناکا[14] در ۱۹۹۲[۱۱] روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را به‌کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به‌روش عددی رانگ-کوتا حل کردند. هورگان و چان[15] در ۱۹۹۹[۱۲] معادلات حاکم بر استوانه توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به‌کمک معادلات لامه استخراج کردند و توزیع تنش را به‌دست آوردند. توتونچو و اُزترک[16] در ۲۰۰۱[۱۳] حل دقیق مخازن تحت فشار استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM را ارائه کردند. در مقاله ایشان رابطه و کردار تنش محیطی و

1. Lamé
2. Plane Elasticity Theory(PET)
3. Naghdi
4. Mirsky & Hermann
5. First-Order Shear Deformation Theory(FSDT)
6. Greenspon
7. Ziv & Perl
8. Suzuki & Takahashi
9. Perturbation Theory
10. Lekhnitskii
11. Composite Bodies
12. Functionally Graded Materials
13. Niino
14. Fukui & Yamanaka
15. Horgan & Chan
16. Tutuncu & Ozturk

کردار تنش شعاعی دچار اشتباه شده است. جبّاری و همکاران در ۲۰۰۲[۱۴] تنش‌های مکانیکی و حرارتی در استوانه توخالی تحت بارهای متقارن ودر ۲۰۰۳[۱۵] تحت بارهای پایدار نامتقارن محوری را با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی ارائه کردند. ژیفای و هونگ‌جون[1] در ۲۰۰۶[۱۶] حل دقیق استوانه‌های توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با لایه‌های همگن ارائه کردند. ایشان در ۲۰۰۷[۱۷] با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به‌صورت خطی و توانی، استوانه FGM را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو(۲۰۰۱) مقایسه کردند. توتونچو در ۲۰۰۷[۱۸] مشابه مقاله پیشین اما با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به‌صورت نمایی، توزیع تنش‌ها را در استوانه ناهمگن به‌دست آورد.

قنّاد و همکاران در ۲۰۰۸[۱۹] حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM را برمبنای نظریه الاستیسیتهٔ مستوی به‌ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه بسته ارائه و اشتباه مقاله [۱۳] را تصحیح کردند. در مقاله حاضر با استفاده از FSDT، حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم FGM متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه می‌شود.

۲- روابط اساسی

در نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییرشکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمی‌شود. در نظریه کلاسیک پوسته‌های نازک، فرض می‌شود که خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، همچنان راست و عمود باقی بمانند و جابه‌جایی هر نقطه از پوسته، جابه‌جایی صفحه میانی در نظر گرفته می‌شود. در این نظریه نیز از کرنش برشی و تنش برشی چشم‌پوشی می‌شود. در نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول، خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل، راست باقی می‌مانند اما الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفتن می‌شود.

مطابق شکل ۱، فاصله هر نقطه از پوسته از محور تقارن (r)، برابر است با مجموع شعاع صفحه میانی(R) و فاصلهٔ آن نقطه از صفحهٔ میانی(z).

$$r = R + z \quad و \quad -\frac{h}{۲} \le z \le +\frac{h}{۲} \tag{۱}$$

h ضخامت و L طول استوانه است.

$$h = r_o - r_i \quad و \quad 0 \le x \le L \tag{۲}$$

براساس نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$u_r = C_۱ r + \frac{C_۲}{r} = C_۱(R+z) + \frac{C_۲}{R+z} \tag{۳}$$

با توجه به شرط $\left|\frac{z}{R}\right| < ۱$ و به‌کمک بسط تیلور، جابه‌جایی شعاعی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

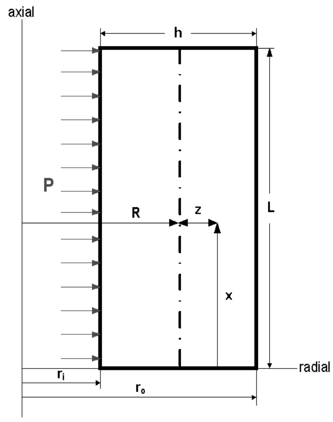
$$\begin{aligned} u_r &= C_۱(R+z) + \frac{C_۲}{R}\left(۱ - \frac{z}{R} + \frac{z^۲}{R^۲} - \frac{z^۳}{R^۳} + ...\right) \\ &= \left(C_۱ R + \frac{C_۲}{R}\right) + \left(C_۱ - \frac{C_۲}{R^۲}\right) z + \frac{C_۲}{R^۳} z^۲ + ... \end{aligned} \tag{۴}$$

درنتیجه می‌توان نوشت:

$$u_r = u_0 + u_۱ z + u_۲ z^۲ + ... \tag{۵}$$

براساس رابطهٔ (۵) جابه‌جایی شعاعی استوانه را به‌صورت چندجمله‌ای برحسب z می‌توان نوشت. اگر z = ۰ باشد، جابه‌جایی صفحهٔ میانی داریم.

1. Zhifei & Hongjun



شکل ۱ پروفیل استوانهٔ جدار ثابت

در این مقاله از تقریب مرتبهٔ یک (نظریه میرسکی-هرمان مرتبهٔ اول) استفاده می‌شود. جابه‌جایی‌ها برای استوانه متقارن محوری[1] عبارتند از[۳]:

$$\begin{cases} U_x = u(x) + \phi(x) z \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w(x) + \psi(x) z \end{cases} \tag{۶}$$

و کرنش‌ها براساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{d\phi}{dx} z \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{U_z}{r} = \dfrac{w}{R+z} + \dfrac{\psi}{R+z} z \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\partial U_x}{\partial z} + \dfrac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \dfrac{dw}{dx}\right) + \dfrac{d\psi}{dx} z \end{cases} \tag{۷}$$

مدول الاستیسیته تابعی از شعاع استوانه به‌صورت توانی با نسبت پواسون ثابت فرض می‌شود:

$$E(r) = E_i \bar{r}^n = E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^n \quad \text{و} \quad \bar{r} = \frac{r}{r_i} \tag{۸}$$

E_i مدول یانگ و r_i شعاع در سطح داخلی استوانه و n ثابت ناهمگنی ماده است که n=0 یعنی مادّه همگن است. $r = R + z$ را در رابطهٔ (۸) قرار می‌دهیم:

$$E(z) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n = \frac{E_i}{r_i^{\,n}} (R+z)^n \tag{۹}$$

تنش‌ها براساس روابط رفتاری[2] برای مواد ناهمگن و همسانگرد عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \dfrac{E(z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \\ \tau_{xz} = \dfrac{E(z)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \tag{۱۰}$$

و به شکل خلاصه‌تر:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(z) \left[(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k) \right] \\ \tau_{xz} = \dfrac{1-2\nu}{2} \lambda E(z) \gamma_{xz} \\ \lambda = \dfrac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \tag{۱۱}$$

نیروهای محوری برحسب منتجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \dfrac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \dfrac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} dz \tag{۱۲- الف}$$

لنگرهای خمشی برحسب منتجه‌های تنش برابرند با:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(1 + \dfrac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \dfrac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z dz \tag{۱۲- ب}$$

1. Axisymmetric

2. Constitutive Equations

نیروی برشی برحسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = \int_{-h/۲}^{h/۲} \tau_{xz}\left(۱+\frac{z}{R}\right)dz \qquad (۱۲\text{-پ})$$

و لنگر پیچشی برحسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = \int_{-h/۲}^{h/۲} \tau_{xz}\left(۱+\frac{z}{R}\right)zdz \qquad (۱۲\text{-ت})$$

براساس اصل کار مجازی[1]، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta \mathrm{U} = \delta \mathrm{W} \qquad (۱۳)$$

انرژی کرنشی:

$$U = \iiint_V U^* dV \text{ و } dV = rdrd\theta dx = (R+z)dxd\theta dz$$

$$U^* = \frac{۱}{۲}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_\theta\varepsilon_\theta + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right) \qquad (۱۴)$$

و کار نیروهای خارجی:

$$W = \iint_S \left(\vec{f}\cdot\vec{u}\right)dS \text{ و } dS = r_i d\theta dx = (R-\frac{h}{۲})d\theta dx$$

$$\vec{f}\cdot\vec{u} = PU_z \qquad (۱۵)$$

انتگرال‌گیری در محدوده زیر انجام می‌شود:

$$0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{L} \text{ و } -\frac{\mathrm{h}}{۲} \le \mathrm{z} \le \frac{\mathrm{h}}{۲} \qquad (۱۶)$$

تغییرات انرژی کرنشی برابر است با:

$$\delta U = R\int_0^{۲\pi}\int_0^L\int_{-h/۲}^{h/۲} \delta U^*\left(۱+\frac{z}{R}\right)dzdxd\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{۲\pi} = R\int_0^L\int_{-h/۲}^{h/۲}(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_\theta\delta\varepsilon_\theta + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz})\left(۱+\frac{z}{R}\right)dzdx \qquad (۱۷)$$

1. Virtual Work Principle

و تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است با:

$$\delta W = \int_۰^{۲\pi}\int_۰^L P\,\delta U_z\left(R-\frac{h}{۲}\right)dxd\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{۲\pi} = PR\int_۰^L \delta U_z\left(۱-\frac{h}{۲R}\right)dx \qquad (۱۸)$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه (۷) در روابط (۱۷) و (۱۸) و نیز با به‌کارگیری اصول حساب وردشی[2] و اصل کار مجازی داریم:

$$\frac{\delta \mathrm{U}}{۲\pi} = \frac{\delta \mathrm{W}}{۲\pi}$$

$$\begin{cases} R\dfrac{dN_x}{dx} = ۰ \\ R\dfrac{dM_x}{dx} - RQ_x = ۰ \\ R\dfrac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -PR\left(۱-\dfrac{h}{۲R}\right) \\ R\dfrac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = PR\dfrac{h}{۲}\left(۱-\dfrac{h}{۲R}\right) \end{cases} \qquad (۱\text{-}۱۹)$$

$$\mathrm{R}\left[\mathrm{N_x}\delta\mathrm{u} + \mathrm{M_x}\delta\phi + \mathrm{Q_x}\delta\mathrm{w} + \mathrm{M_{xz}}\delta\psi\right]_0^{\mathrm{L}} = 0 \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

رابطهٔ (۱۹-۲) شرایط مرزی است که باید در دو انتهای استوانه صفر باشند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۹-۱) باید نیروها ولنگرها را با استفاده از روابط (۱۲) به منتجه‌های تنش و با استفاده از روابط (۱۱) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به‌کمک روابط (۷) برحسب جابه‌جایی‌ها نوشت. در نتیجه دستگاهی با چهار معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به‌دست می‌آید که به‌طور خلاصه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} [A_۱]\dfrac{d^۲}{dx^۲}\{y\} + [A_۲]\dfrac{d}{dx}\{y\} + [A_۳]\{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \\ \{F\} = \dfrac{\mathrm{Pr}_i^n}{\lambda E_i}\left(R-\dfrac{h}{۲}\right)\{۰ \quad ۰ \quad -۱ \quad h/۲\}^T \end{cases} \qquad (۲۰)$$

2. Variational Calculus

ماتریس‌های $[A_1]_{4\times4}$ و $[A_2]_{4\times4}$ متقارن و $[A_3]_{4\times4}$ پادمتقارن است. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۰) دارای حل کلی و حل خصوصی است.

$$A_1\{y''\}+A_2\{y'\}+A_3\{y\}=\{F\} \Rightarrow \{y\}=\{y\}_g+\{y\}_p \quad (۲۱)$$

برای حل کلی دستگاه (۲۱)، مقدار $\{y\}=\{v\}e^{mx}$ را در معادلات آن قرار می‌دهیم.

$$e^{mx}\left[m^2A_1+mA_2+A_3\right]\{v\}=\{0\} \quad (۲۲)$$

$$e^{mx}\neq 0$$
$$\left|m^2A_1+mA_2+A_3\right|=0 \quad (۲۳)$$

از حل معادله (۲۳)، مقادیر ویژهٔ[1] m_i محاسبه می‌شود که با قرار دادن آنها در معادلهٔ (۲۲)، بردارهای ویژه[2] $\{v\}_i$ به‌دست می‌آیند. در نتیجه حل کلی عبارت است از:

$$\{y\}_g=\sum_{i=1}^{6}C_i\{v\}_i e^{m_i x} \quad (۲۴)$$

برای حل خصوصی با توجه به اینکه $\{F\}$ ثابت است، جواب تابعی از x نمی‌شود:

$$\{y\}_p=\{K_0\} \quad (۲۵)$$

در نتیجه جواب کلی:

$$\{y\}=\{y\}_p+\{y\}_g=\{K_0\}+\sum_{i=1}^{6}C_i\{v\}_i e^{m_i x} \quad (۲۶)$$

در یک استوانه ضخیم متقارن محوری با دو سر بسته–مقّد (کرنش صفحه‌ای)، اگر ضخامت ثابت و فشار یکنواخت باشد، جابه‌جایی شعاعی در نقاط دور از مرز به x بستگی ندارد. بنابراین معادلهٔ (۲۰) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$[A_3]\{y\}=\{F\}\Rightarrow\{y\}=[A_3]^{-1}\{F\} \quad (۲۷)$$

از حل معادله (۲۷) و (۷) نتیجه می‌شود که کرنش برشی و تنش برشی برابر صفر بوده و این نتیجه با فرضیه‌های نظریه الاستیسیتهٔ مستوی هم‌خوانی دارد. در نتیجه ماتریس $[A_3]_{2\times2}$ برای محاسبه جابه‌جایی شعاعی به‌کار می‌رود.

$$\begin{Bmatrix} w\\ \psi\end{Bmatrix}=\frac{P(R-h/2)r_i^n}{\lambda E_i}[A_3]^{-1}_{2\times2}\begin{Bmatrix}-1\\ h/2\end{Bmatrix} \quad (۲۸)$$

جابه‌جایی شعاعی عبارت است از:

$$U_z=w+\psi z\rightarrow u_r=(w-R\psi)+\psi r \quad (۲۹)$$

کرنش‌ها براساس روابط سینماتیک عبارتند از:

$$\begin{cases}\varepsilon_r=\dfrac{du_r}{dr}=\psi\\ \varepsilon_\theta=\dfrac{u_r}{r}=\psi+\dfrac{w-R\psi}{r}\end{cases} \quad (۳۰)$$

و تنش بیشینه در استوانه براساس روابط رفتاری:

$$\sigma_{\max}=\sigma_\theta=\lambda E_i\bar{r}^n\left[(1-\nu)\varepsilon_\theta+\nu\varepsilon_r\right] \quad (۳۱)$$

۳- حل استوانه‌های همگن

در استوانه همگن و همسانگرد، مدول یانگ و نسبت پواسون (هر دو) ثابت است. با قرار دادن $n=0$ در رابطه (۹)، مادهٔ همگن نتیجه می‌شود:

$$E=E_i=const. \quad (۳۲)$$

روابط سینماتیک (۷) را در روابط رفتاری (۱۰) قرار داده، منتجه‌های تنش را در معادلات (۱۲) می‌گذاریم و انتگرال‌گیری می‌کنیم:

1. Eigenvalues
2. Eigenvectors

$$
\begin{cases}
N_x = \lambda Eh\left[(1-\nu)\left(\dfrac{du}{dx}+\dfrac{h^2}{12R}\dfrac{d\phi}{dx}\right)\right. \\
\left.+\nu\left(\dfrac{w}{R}+\psi\right)\right] \\
N_\theta = \lambda E\left[\nu h\dfrac{du}{dx}+(1-\nu)\alpha w\right. \\
\left.+\left(h-(1-\nu)R\alpha\right)\psi\right] \\
N_z = \lambda Eh\left[\nu\left(\dfrac{du}{dx}+\dfrac{h^2}{12R}\dfrac{d\phi}{dx}\right)\right. \\
\left.+\nu\dfrac{w}{R}+(1-\nu)\psi\right]
\end{cases}
$$
(۳۳- الف)

$$
\begin{cases}
M_x = \lambda E\dfrac{h^3}{12R}\left[(1-\nu)\left(\dfrac{du}{dx}+R\dfrac{d\phi}{dx}\right)+2\nu\psi\right] \\
M_\theta = \lambda E\left\{\nu\dfrac{h^3}{12}\dfrac{d\phi}{dx}+(1-\nu)\times\right. \\
\left.\left[(h-R\alpha)w+\left(R^2\alpha-Rh\right)\psi\right]\right\}
\end{cases}
$$
(۳۳- ب)

$$Q_x = K(1-2\nu)\lambda E\frac{h}{2}\left[\phi+\frac{dw}{dx}+\frac{h^2}{12R}\frac{d\psi}{dx}\right] \quad \text{(۳۳- پ)}$$

$$M_{xz} = K(1-2\nu)\lambda E\frac{h^3}{24R}\left[\phi+\frac{dw}{dx}+R\frac{d\psi}{dx}\right] \quad \text{(۳۳- ت)}$$

K ضریب تصحیح برشی[1] است که بسته به هندسهٔ پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این ضریب در حالت استاتیک برای استوانه $K=\frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است[۲۰].

$$
\begin{cases}
\alpha = \ln\left(\dfrac{R+h/2}{R-h/2}\right)=\ln k \quad \text{و} \quad k=\dfrac{r_o}{r_i} \\
\mu = \dfrac{K}{2}(1-2\nu)
\end{cases}
\quad (۳۴)
$$

1. Shear Correction Factor

نیروها و لنگرهای روابط (۳۳) را در معادلات دیفرانسیل (۱۹-۱) می‌گذاریم و ماتریس‌های رابطه (۲۰) را به‌دست می‌آوریم.

$$
A_1 = \begin{bmatrix}
(1-\nu)Rh & (1-\nu)\dfrac{h^3}{12} & 0 & 0 \\
(1-\nu)\dfrac{h^3}{12} & (1-\nu)\dfrac{Rh^3}{12} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu Rh & \mu\dfrac{h^3}{12} \\
0 & 0 & \mu\dfrac{h^3}{12} & \mu\dfrac{Rh^2}{12}
\end{bmatrix}
$$
(۱-۳۵)

$$
A_2 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \nu h & \nu Rh \\
0 & 0 & -\mu Rh & -(\mu-2\nu)\dfrac{h^3}{12} \\
-\nu h & \mu Rh & 0 & 0 \\
-\nu Rh & (\mu-2\nu)\dfrac{h^3}{12} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\quad (۲-۳۵)
$$

$$
A_3 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mu Rh & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(1-\nu)\alpha & -[h-(1-\nu)R\alpha] \\
0 & 0 & -[h-(1-\nu)R\alpha] & -(1-\nu)R^2\alpha
\end{bmatrix}
$$
(۳-۳۵)

$$\{F\}=\frac{P}{\lambda E}\left(R-\frac{h}{2}\right)\{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/2\}^T$$
(۴-۳۵)

برای استوانه ضخیم با جدار ثابت و فشار یکنواخت در حالت کرنش صفحه‌ای در نقاط دور از مرز و با استفاده از معادله (۲۷) داریم:

$$
\begin{cases}
\mu Rh\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \\
\gamma_{xz} = \phi+\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{d\psi}{dx}z = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = 0
\end{cases}
\quad (۳۶)
$$

صفر شدن کرنش برشی و تنش برشی برای استوانه مذکور با فرضیه‌های نظریه الاستیسیتهٔ مستوی هم‌خوانی دارد. براساس رابطه (۲۸) داریم:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (۱-\nu)\alpha & h-(۱-\nu)R\alpha \\ h-(۱-\nu)R\alpha & (۱-\nu)R^{۲}\alpha \end{bmatrix}^{-۱} \times \frac{P(R-h/۲)}{\lambda E}\begin{Bmatrix} ۱ \\ -h/۲ \end{Bmatrix} \qquad (۳۷)$$

و جابه‌جایی شعاعی مطابق رابطه (۲۹) نتیجه می‌شود:

$$u_r = \frac{\mathrm{P} r_i^{۲}}{\lambda E h\left[h-۲(۱-\nu)R\alpha\right]}\left\{\left[h-(۱-\nu) r_i \alpha\right]\bar{r} - hk\right\} \qquad (۳۸)$$

۴- مقایسهٔ نتایج FSDT و PET

براساس نظریهٔ الاستیسیتهٔ مستوی، جابه‌جایی شعاعی در حالت کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۱۹]:

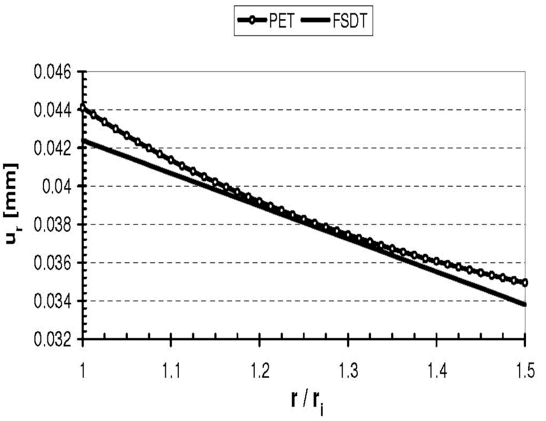
$$u_r^P = \frac{\mathrm{P} r_i \bar{r}(۱+\nu)}{E(k^{۲}-۱)}\left[(۱-۲\nu)+\frac{k^{۲}}{\bar{r}^{۲}}\right] \qquad (۳۹)$$

برای مقایسه و بررسی نتایج دو روش، استوانه جدار ضخیمی را با مشخصات: شعاع داخلی $r_i = ٤٠\ mm$ و شعاع خارجی $r_o = ٦٠\ mm$ تحت فشار یکنواخت داخلی $\mathrm{P} = ۸۰\ \mathrm{MPa}$ با مدول یانگ $\mathrm{E} = ۲۰۰\ \mathrm{GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = ۰/۳$ در نظر می‌گیریم.

شکل ۲ نشان می‌دهد که جابه‌جایی شعاعی ناشی از دو روش در محدودهٔ لایهٔ میانی، تقریباً یکسان است و در سطح داخلی اختلاف بیشتر می‌شود اما در مجموع اختلاف اندکی وجود دارد(کمتر از ۴٪). برای بررسی تأثیر ضخامت جدار بر جابه‌جایی شعاعی، (۳۸) و (۳۹) را برحسب $\bar{h} = \frac{h}{R}$ در جدار داخلی که منشأ بروز بیشترین اختلاف است، می‌نویسیم.

$$u_r^P = \frac{(۱+\nu)\mathrm{P} R\left(1-\bar{h}/۲\right)}{E(k^2-۱)}\left[(۱-۲\nu)+k^{۲}\right] \quad \& \quad k = \frac{۲+\bar{h}}{۲-\bar{h}} \qquad (۴۰)$$

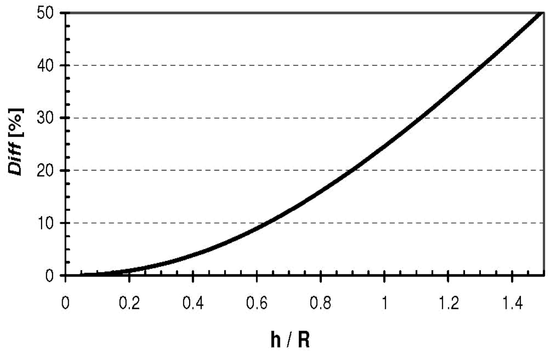
$$u_r^F = -\frac{PR\left(۱-\bar{h}/۲\right)}{\lambda E\bar{h}\left[\bar{h}-۲(۱-\nu)\alpha\right]}\left[\bar{h}^{۲}+(۱-\nu) \times \left(۱-\bar{h}/۲\right)^{۲}\alpha\right] \quad \& \quad \alpha = \ln\left(\frac{۲+\bar{h}}{۲-\bar{h}}\right) \qquad (۴۱)$$



شکل ۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه همگن

شکل ۳ درصد اختلاف مقادیر جابه‌جایی شعاعی به‌دست آمده از FSDT و PET را نشان می‌دهد. هرچه استوانه به‌سمت توپر شدن بیشتر پیش می‌رود، اختلاف نتایج نیز بیشتر می‌شود. بیشینه اختلاف در محدوده $\frac{۱}{۲۰} \le \frac{h}{R} \le \frac{۱٦}{۲۰}$ به حدود ۱۵٪ می‌رسد، که برای تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم دقّت قابل قبولی است. در حالتی که ضخامت جدار با شعاع صفحه میانی برابر باشد ($\bar{h} = ۱$) اختلاف در حدود ۲۵٪ می‌شود.

$$Diff = \left(\frac{u_r^P - u_r^F}{u_r^P}\right)\times ۱۰۰ \qquad (۴۲)$$



شـــکل ۳ تغییـر درصـد اخـتلاف جابـه‌جـایی شـعاعی بـا تغییر ضخامت

۵- حل استوانه‌های ناهمگن

با استفاده از روابط (۹ و ۱۰) و توزیع مـدول الاسـتیک در محدوده $-2 \le n \le 2$، تنش‌ها را برحسب کرنش‌ها، سـپس بـا بهـره‌گیـری از (۷)، کـرنش‌هـا را برحـسب پارامترهـای جابه‌جایی و سرانجام بـا انتگـرال‌گیـری از (۱۲)، نیروهـا و لنگرها را به‌دست می‌آوریم. با قرار دادن آنهـا در معـادلات (۱۹-۱)، ماتریس‌های معادلـه (۲۰) و در نهایـت براسـاس روابط (۲۸) و (۲۹)، جابه‌جایی شـعاعی و بـا رابطـه (۳۱)، تنش بیشینه را بـه‌صـورت پـارامتری محاسـبه مـی‌کنـیم. ماتریس‌های معادله (۲۰) عبارتند از:

$$\begin{cases}[A_1]_{4\times4}=[a_{ij}] \quad \& \quad [A_3]_{4\times4}=[c_{ij}]\\ [A_2]_{4\times4}=[b_{ij}]\end{cases} \qquad (۴۳)$$

که در آن ثابت‌های به‌کار رفته عبارتند از:

$$\begin{cases}k=\dfrac{r_o}{r_i} \qquad \alpha=\ln k \qquad \mu=\dfrac{K}{2}(1-2\nu)\\ \beta=\dfrac{h}{(R-h/2)(R+h/2)}=\dfrac{k-1}{kr_i}\end{cases} \qquad (۴۴)$$

۵-۱- ثابت ناهمگنی n=1

مدول الاستیک براساس رابطه (۹) عبارت است از:

$$E(z)=\frac{E_i}{r_i}(R+z) \qquad (۴۵)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_1]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned}
a_{11}&=(1-\nu)\left(R^2h+\frac{h^3}{12}\right)\\
a_{22}&=(1-\nu)\left(\frac{R^2h^3}{12}+\frac{h^5}{80}\right)\\
a_{33}&=\mu\left(R^2h+\frac{h^3}{12}\right)\\
a_{44}&=\mu\left(\frac{R^2h^3}{12}+\frac{h^5}{80}\right)\\
a_{12}&=a_{21}=(1-\nu)\frac{Rh^3}{6}\\
a_{34}&=a_{43}=\mu\frac{Rh^3}{6}
\end{aligned} \qquad (۴۶-۱)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A_2]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned}
b_{13}&=-b_{31}=\nu Rh\\
b_{14}&=-b_{41}=\nu\left(R^2h+\frac{h^3}{6}\right)\\
b_{23}&=-b_{32}=-\mu\left(R^2h+\frac{h^3}{12}\right)+\nu\frac{h^3}{12}\\
b_{24}&=-b_{42}=-(2\mu-3\nu)\frac{Rh^3}{12}
\end{aligned} \qquad (۴۶-۲)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_3]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned}
c_{22}&=-\mu\left(R^2h+\frac{h^3}{12}\right)\\
c_{33}&=-(1-\nu)h\\
c_{44}&=-(1-\nu)R^2h-\frac{h^3}{6}\\
c_{34}&=c_{43}=-\nu Rh
\end{aligned} \qquad (۴۶-۳)$$

و بردار $\{F\}_{4\times1}$:

$$\{F\}=\frac{\Pr_i}{\lambda E_i}\left(R-\frac{h}{2}\right)\{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/2\}^T \qquad (۴۶-۴)$$

جابه‌جایی شعاعی براساس رابطه (۲۹) برابر است با:

$$u_r = \frac{\mathrm{P} r_i^{2}}{\lambda E_i h\left[(1-2\nu)R^{2}+(1-\nu)\frac{h^{2}}{6}\right]} \times\left[\left(Rkr_i+\frac{h^{2}}{6}\right)-\left(\frac{h}{2}+\nu r_i\right)r_i\bar{r}\right] \quad (47)$$

۵-۲- ثابت ناهمگنی n=-1

مدول الاستیک براساس رابطه (۹) عبارت است از:

$$E(z)=\frac{E_i r_i}{(R+z)} \quad (48)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_1]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\nu)\mathrm{h} \\ a_{22} &= (1-\nu)\frac{\mathrm{h}^{3}}{12} \\ a_{33} &= \mu \mathrm{h} \\ a_{44} &= \mu\frac{\mathrm{h}^{3}}{12} \end{aligned} \quad (1\text{-}49)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A_2]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned} b_{13} &= -b_{31} = \nu\alpha \\ b_{14} &= -b_{41} = \nu(2\mathrm{h}-\mathrm{R}\alpha) \\ b_{23} &= -b_{32} = \nu(\mathrm{h}-\mathrm{R}\alpha)-\mu \mathrm{h} \\ b_{24} &= -b_{42} = \nu(\mathrm{R}^{2}\alpha-\mathrm{Rh}) \end{aligned} \quad (2\text{-}49)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_3]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned} c_{22} &= -\mu \mathrm{h} \\ c_{33} &= -(1-\nu)\beta \\ c_{44} &= 2(\mathrm{R}\alpha-\mathrm{h})-(1-\nu)\mathrm{R}^{2}\beta \\ c_{34} &= c_{43} = -\alpha+(1-\nu)\mathrm{R}\beta \end{aligned} \quad (3\text{-}49)$$

و بردار $\{F\}_{4\times1}$:

$$\{F\}=\frac{P}{\lambda E_i r_i}\left(R-\frac{h}{2}\right)\{0 \quad 0 \quad -1 \quad h/2\}^{T} \quad (4\text{-}49)$$

و جابه‌جایی شعاعی براساس رابطه (۲۹) برابر است با:

$$u_r = \frac{\mathrm{P} r_i}{\lambda E_i\left[\alpha^{2}-2(1-\nu)h\beta\right]} \times\left\{\left[\alpha-(1-\nu)\beta r_i\right]\bar{r}+\left(\alpha-\frac{2h}{r_i}\right)\right\} \quad (50)$$

۵-۳- ثابت ناهمگنی n= 2

مدول الاستیک براساس رابطه (۹) عبارت است از:

$$E(z)=\frac{E_i}{r_i^{2}}(R+z)^{2} \quad (51)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_1]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\nu)\left(\mathrm{R}^{3}\mathrm{h}+\frac{\mathrm{Rh}^{3}}{4}\right) \\ a_{22} &= (1-\nu)\left(\frac{\mathrm{R}^{3}\mathrm{h}^{3}}{12}+\frac{3\mathrm{Rh}^{5}}{80}\right) \\ a_{33} &= \mu\left(\mathrm{R}^{3}\mathrm{h}+\frac{\mathrm{Rh}^{3}}{4}\right) \\ a_{44} &= \mu\left(\frac{\mathrm{R}^{3}\mathrm{h}^{3}}{12}+\frac{3\mathrm{Rh}^{5}}{80}\right) \\ a_{12} &= a_{21} = (1-\nu)\left(\frac{\mathrm{R}^{2}\mathrm{h}^{3}}{4}+\frac{\mathrm{h}^{5}}{80}\right) \\ a_{34} &= a_{43} = \mu\left(\frac{\mathrm{R}^{2}\mathrm{h}^{3}}{4}+\frac{\mathrm{h}^{5}}{80}\right) \end{aligned} \quad (1\text{-}52)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A_2]_{4\times4}$:

$$\begin{aligned} b_{13} &= -b_{31} = \nu\left(\mathrm{R}^{2}\mathrm{h}+\frac{\mathrm{h}^{3}}{12}\right) \\ b_{14} &= -b_{41} = \nu\left(\mathrm{R}^{3}\mathrm{h}+\frac{5\mathrm{Rh}^{3}}{12}\right) \\ b_{23} &= -b_{32} = -\mu\left(\mathrm{R}^{3}\mathrm{h}+\frac{\mathrm{Rh}^{3}}{4}\right)+\nu\frac{\mathrm{Rh}^{3}}{6} \\ b_{24} &= -b_{42} = -\mu\left(\frac{\mathrm{R}^{2}\mathrm{h}^{3}}{4}+\frac{\mathrm{h}^{5}}{80}\right)+\nu\left(\frac{\mathrm{R}^{2}\mathrm{h}^{3}}{3}+\frac{\mathrm{h}^{5}}{40}\right) \end{aligned} \quad (2\text{-}52)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_3]_{4\times4}$:

$$
\begin{aligned}
c_{22} &= -\mu\left(R^{3}h+\frac{Rh^{3}}{4}\right)\\
c_{33} &= -(1-\nu)Rh\\
c_{44} &= -(1-\nu)R^{3}h-\frac{Rh^{3}}{6}\\
c_{34} &= c_{43} = -\left(\nu R^{2}h+\frac{h^{3}}{12}\right)
\end{aligned}
\qquad (۳-۵۲)
$$

و بردار $\{F\}_{4\times1}$:

$$
\{F\}=\frac{Pr_i^{2}}{\lambda E_i}\left(R-\frac{h}{2}\right)\{0\quad 0\quad -1\quad h/2\}^{T}
\qquad (۴-۵۲)
$$

جابه‌جایی شعاعی براساس رابطه(۲۹) برابر است با:

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{Pr_i^{4}}{\lambda E_i h\left[\dfrac{h^{4}}{144}-(1-2\nu)\left(R^{2}+h^{2}/6\right)R^{2}\right]}\\
&\times\left\{\left[\left(R+h/6\right)\frac{h}{2}+\nu R r_i\right]\bar{r}\right.\\
&\left.-\left[\left(R+h/6\right)\frac{h^{2}}{4r_i}+R^{2}k\right]\right\}
\end{aligned}
\qquad (۵۳)
$$

۵-۴- ثابت ناهمگنی n=-۲

مدول الاستیک براساس رابطه‌ی (۹) عبارت است از:

$$
E(z)=\frac{E_i r_i^{2}}{(R+z)^{2}}
\qquad (۵۴)
$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_1]_{4\times4}$:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= (1-\nu)\alpha\\
a_{22} &= (1-\nu)\left(R^{2}\alpha-Rh\right)\\
a_{33} &= \mu\alpha\\
a_{44} &= \mu\left(R^{2}\alpha-Rh\right)\\
a_{12} &= a_{21} = (1-\nu)(h-R\alpha)\\
a_{34} &= a_{43} = \mu(h-R\alpha)
\end{aligned}
\qquad (۱-۵۵)
$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس پادمتقارن $[A_2]_{4\times4}$:

$$
\begin{aligned}
b_{13} &= -b_{31} = \nu\beta\\
b_{14} &= -b_{41} = \nu\left(2\alpha-R\beta\right)\\
b_{23} &= -b_{32} = -\mu\alpha+\nu\left(\alpha-R\beta\right)\\
b_{24} &= -b_{42} = -\mu(h-R\alpha)\\
&+\nu\left(2h-3R\alpha+R^{2}\beta\right)
\end{aligned}
\qquad (۲-۵۵)
$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس متقارن $[A_3]_{4\times4}$:

$$
\begin{aligned}
c_{22} &= -\mu\alpha\\
c_{33} &= -(1-\nu)\frac{R}{h}\beta^{2}\\
c_{44} &= -2\alpha+(1+\nu)R\beta-(1-\nu)\frac{Rh}{4}\beta^{2}\\
c_{34} &= c_{43} = -\nu\beta+(1-\nu)\frac{h}{4}\beta^{2}
\end{aligned}
\qquad (۳-۵۵)
$$

و بردار $\{F\}_{4\times1}$:

$$
\{F\}=\frac{P}{\lambda E_i r_i^{2}}\left(R-\frac{h}{2}\right)\{0\quad 0\quad -1\quad h/2\}^{T}
\qquad (۴-۵۵)
$$

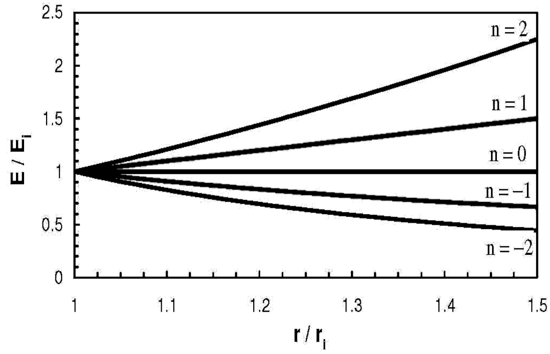
جابه‌جایی شعاعی براساس رابطه (۲۹) برابر است با:

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{P}{\lambda E_i\left[1-2(1-\nu)\dfrac{R\alpha}{h}\right]\beta^{2}}\\
&\times\left\{\left[\nu\beta-(1-\nu)\left(\frac{h}{4}-\frac{R}{2}\right)\beta^{2}\right]\bar{r}+\left(\beta-\frac{2\alpha}{r_i}\right)\right\}
\end{aligned}
\qquad (۵۶)
$$

۶- بررسی نتایج

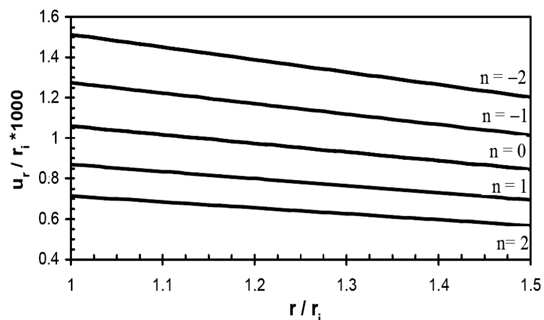
برای مطالعه موردی و بررسی کردارهای به‌دست آمده از نتایج عددی، استوانه‌ای جدار ضخیم با مشخصات زیر را با توزیع متغیر مدول الاستیک در راستای جدار در نظر می‌گیریم. استوانهٔ جدار ثابت با شعاع داخلی $r_i = 40\ mm$ و شعاع خارجی $r_o = 60\ mm$ تحت فشار یکنواخت داخلی

P = ۸۰ MPa قرار گرفته است. مدول الاستیک سطح داخلی استوانه برابر E_i = ۲۰۰ GPa و نسبت پواسون برابر ν = ۰/۳ است. شکل ۴ توزیع مدول الاستیک را نسبت به شعاع $\frac{E}{E_i}=\left(\frac{r}{r_i}\right)^n$ در استوانه ناهمگن و همسانگرد به‌ازای مقادیر صحیح n نشان می‌دهد.



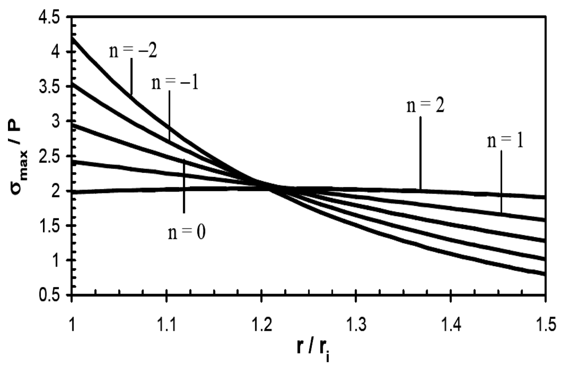
شکل ۴ توزیع مدول الاستیک در راستای شعاعی

شکل ۵ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی استوانهٔ ناهمگن را در راستای جدار به‌ازای مقادیر مختلف n نشان می‌دهد. به‌ازای $n <$ ۰ جابه‌جایی استوانه نسبت به مادهٔ همگن بیشتر بوده و به‌ازای $n >$ ۰ کمتر می‌شود، اما این نسبت در طول جدار تقریباً ثابت باقی می‌ماند؛ یعنی تغییرات جابه‌جایی مادهٔ ناهمگن مشابه تغییرات جابه‌جایی در مادهٔ همگن است و میزان تغییرات به $|n|$ بستگی دارد.



شکل ۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانهٔ ناهمگن

شکل ۶ توزیع نرمال تنش محیطی استوانه ناهمگن را در راستای جدار به‌ازای مقدار مختلف n نشان می‌دهد. (در [۱۳] این کردار به اشتباه ترسیم شده است). تنش محیطی به‌ازای $n < 0$ در نیمه داخلی جدار، بیشتر از مادهٔ همگن و در نیمه خارجی جدار، کمتر از مادهٔ همگن است و برعکس به‌ازای $n > 0$ در نیمه داخلی جدار، کمتر از مادهٔ همگن و در نیمه خارجی جدار، بیشتر از مادهٔ همگن است. در محدوده لایه میانی استوانه، رفتار مادهٔ ناهمگن مانند رفتار مادهٔ همگن می‌شود.



شکل ۶ توزیع تنش بیشینه در استوانه ناهمگن

۷- نتیجه‌گیری

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که جابه‌جایی‌های به‌دست آمده از روش FSDT در سطح میانی با روش PET کاملاً هم‌خوانی داشته و در سطح داخلی، کمتر از ۴٪ اختلاف دارند؛ یعنی روش FSDT با دقّت قابل قبولی، جابه‌جایی‌ها را به‌دست می‌دهد.

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که تنش‌های به‌دست آمده از روش FSDT در سطح میانی با روش PET تقریباً هم‌خوانی دارند اما در سطح داخلی، روش FSDT مقادیر بیشتری را نسبت به روش PET نشان می‌دهد. البته این در طراحی مهندسی، موجب افزایش ضریب اطمینان می‌شود و ازاین‌رو مشکلی برای پیش‌بینی تنش بحرانی(تنش تسلیم) ایجاد نمی‌کند. برای دست‌یابی به

دقّت‌های بالاتر، می‌توان از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه دو[1] یا بالاتر استفاده کرد.

درمجموع می‌توان چنین نتیجه گرفت که به‌ازای n مثبت یا منفی، تنش بیشینه در یک نیمه جدار استوانه، کاهش و در نیمه دیگر جدار، افزایش می‌یابد. به‌ازای n مثبت، جابه‌جایی شعاعی در جدار استوانه، کاهش و به‌ازای n منفی، افزایش می‌یابد و هر چه $|n|$ بزرگتر باشد، کاهش یا افزایش تنش یا جابه‌جایی استوانهٔ ناهمگن نسبت به استوانهٔ همگن بیشتر می‌شود. بنابراین بهتر است $|n|$ بزرگ نباشد. n مثبت موجب کاهش جابه‌جایی و تنش در سطح داخلی می‌شود که برای بسیاری از صنایع اهمیت دارد. به‌ازای $n=\pm۱$ حدود ۲۰٪ تغییرات در رفتار ماده نسبت به مادهٔ همگن ایجاد می‌شود.

جدول ۱ مقایسه نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با PET و FSDT

	$u_r[mm]$	n= -۲	n= -۱	n= ۰	n= ۱	n= -۲
سطح داخلی $r=r_i$	PET[۱۹]	۰/۰۶۲۱۶۳	۰/۰۵۲۶۷۳	۰/۰۴۴۰۹۶	۰/۰۳۶۴۷۱	۰/۰۲۹۸۱۱
	FSDT	۰/۰۶۰۵۱۲	۰/۰۵۰۹۸۴	۰/۰۴۲۳۸۸	۰/۰۳۴۷۶۴	۰/۰۲۸۵۳۸
سطح میانی $r=R$	PET[۱۹]	۰/۰۵۴۵۴۱	۰/۰۴۵۹۸۹	۰/۰۳۸۲۷۲	۰/۰۳۱۴۲۶	۰/۰۲۵۴۵۸
	FSDT	۰/۰۵۴۳۰۹	۰/۰۴۵۷۹۰	۰/۰۳۸۰۹۶	۰/۰۳۱۲۶۶	۰/۰۲۵۵۹۸

جدول ۲ مقایسهٔ نتایج تنش بیشینهٔ محاسبه شده با PET و FSDT

	$\sigma_\theta[MPa]$	n= -۲	n= -۱	n= ۰	n= ۱	n= -۲
سطح داخلی $r=r_i$	PET[۱۹]	۳۰۷/۲۷	۲۵۵/۱۳	۲۰۸	۱۶۶/۱۱	۱۲۹/۵۱
	FSDT	۳۳۵/۷۲	۲۸۳/۲۳	۲۳۵/۷۸	۱۹۳/۶۳	۱۵۸/۱۶
سطح میانی $r=R$	PET[۱۹]	۱۴۱/۳۵	۱۴۹/۳۰	۱۵۵/۶۲	۱۶۰/۰۰	۱۶۲/۳۶
	FSDT	۱۴۴/۱۵	۱۵۱/۰۸	۱۵۶/۱۶	۱۵۹/۱۲	۱۵۹/۸۱

۸- منابع

[1] Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., New York, Van Nostrand Reinhold Co.; 1976.

[2] Naghdi P.M. & Cooper R.M.; Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia, J. Acoustical Sc. America; vol. 28(1), 1956, 56-63.

[3] Mirsky I. & Hermann G.; Axially motions of thick cylindrical shells, J. Appl. Mech.; vol. 25, 1958, 97-102.

[4] Greenspon J.E.; Vibration of a thick-walled cylindrical shell-camparison of the exact theory with approximate theories, J. Acoustical Sc. America; vol. 32(5), 1960, 571-578.

[5] Ziv M. & Perl M.; Impulsive deformation of Mirsky-Hermann’s thick cylindrical shells by a numerical method, J. Appl. Mech.; 1973, 1009-1016.

[6] Suzuki K. & Konno M. & Takahashi S.; Axisymmetric Vibrations of a cylindrical shell with variable thickness, JSME; vol. 24(198), 1981, 2122-2132.

[7] Takahashi S. & Suzuki K. & Kosawada T.; Vibrations of conical shells with variable thickness, JSME; vol. 29(285), 1986, 4306-4311.

[8] Eipakchi H.R. & Rahimi G.H. & Esmaeilzadeh Khadem S.; Closed form solution for displacements of thick cylindrs with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure, J. Struc. Eng. and Mech.; vol. 16(6), 2003, 731-748.

[9] Lekhnitskii S.G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, Mir Pub., 1981.

[10] Koizumi M.; FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering); vol. 28, 1997, 1-4.

[11] Fukui Y., Yamanaka N.; Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, JSME Int. J. Ser. I: Solid Mech.; vol. 35(4), 1992, 379-385.

[12] Horgan C.O., Chan A.M.; The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, J. Elasticity; vol. 55,1999, 43-59.

[13] Tutuncu N., Ozturk M.; Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, composites: Part B(Engineering); vol. 32, 2001, 683-686.

[14] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to

1. Second-Order Shear Deformation Theory

radially symmetric loads, Int. J. Pressure Vessel and Piping; vol. 79, 2002, 493-497.

[15] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmeteic steady-state loads, J. App. Mech.; vol. 70, 2003, 111-118.

[16] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, Mech. Res. Comm.; vol. 33, 2006, 681-691.

[17] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, J. Composite Struc.; vol. 79, 2007, 140-147.

[18] Tutuncu N.; Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, J. Eng. Struc.; vol. 29, 2007, 2032-2035.

[۱۹] قنّاد مهدی و رحیمی غلامحسین و اسماعیل‌زاده خادم سیامک؛ حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری سهخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، مجلّه مهندسی مکانیک مدرّس، دوره ۱۰، شماره ۳ (۱۳۸۹) ص ص ۳۱-۴۳

[20] Vlachoutsis S., Shear correction factors for plates and shells, Int. J. Num. Math. in Eng.; 33, 1992, 1537-1552.