http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

دوره ۱۱ شماره ۳ پاییز ۱۳۹۰ ص ص ۵۷-۷۴

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۶/۱۸
پذیرش ۹۰/۷/۱۰
ارائه در سایت ۹۰/۷/۱۱

# تحلیل دقیق پاسخ- بسته ارتعاشات آزاد ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند با لایه پیزوالکتریک

**شاهرخ حسینی هاشمی[۱*]، هدی اخوان[۲]، محمد فدایی[۳]**

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۳- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
*تهران، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶، Shh@iust.ac.ir

**چکیده**- در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم هدفمند (FG) با لایه‌های هوشمند براساس تئوری میندلین و ارائه یک حل دقیق پاسخ-بسته، مورد بررسی قرار گرفته است. این ساختار متشکل از یک ورق FG و دو لایه پیزوالکتریک می‌باشد. در این حل فرض بر آن است که دو لبه‌ی مقابل ورق دارای شرط مرزی ساده (یعنی ورق مستطیلی Levy-type) باشند. لایه‌های پیزوالکتریک مدار بسته در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین از این ورق می‌توان به عنوان محرک استفاده کرد. برای بیان نحوه توزیع خواص در ماده FG، از یک مدل تابع توانی استفاده می‌شود. با استفاده از اصل همیلتون و معادله الکترواستاتیکی ماکسول، شش معادله دیفرانسیل وابسته بدست می‌آید. به منظور حل معادلات مذکور، یکسری توابع کمکی و پتانسیل جدید معرفی شده و از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. دقت فرکانس‌های بدست آمده به‌وسیله انجام یکسری مطالعات مقایسه‌ای با مقالات موجود و همچنین تحلیل المان محدود تایید می‌شود. در حل دقیق حاضر امکان پیش‌بینی مدهای درون-صفحه‌ای نیز علاوه بر مدهای خارج-صفحه‌ای با دقت بسیار بالایی میسر می‌شود. همچنین، تاثیر پارامترهای ورق مانند شرایط مرزی، اندیس گرادیانی و افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**کلیدواژگان:** تئوری میندلین، فرکانس‌های طبیعی، FGM، مدل تابع توانی.

# Exact closed-form Free Vibration Analysis of Moderately Thick Rectangular Functionally Graded Plates with Two Bonded Piezoelectric Layers

**Sh. Hosseini-Hashemi[1*], H. Akhavan[2], M. Fadaee[3]**

1- Assoc. Prof. of Mech. Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech. Tehran, Iran
2- M.Sc. Student of Mech. Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech. Tehran, Iran
3- P.h.d. Student of Mech. Eng. Dept., Iran Univ. of Science and Tech.Tehran, Iran
*P.O.Box 16846-13114, Tehran, Iran. Shh@iust.ac.ir

**Abstract-** In this paper, free vibration analysis of moderately thick smart FG rectangular plate is presented on the basis of Mindlin plate theory. This structure is composed of a host FG plate and two bonded piezoelectric layers. The plate has two opposite edges simply supported (i.e., Levy-type rectangular plates). The closed circuit piezoelectric layers can be used as an actuator. According to a power-law distribution of the volume fraction of the constituents, material properties vary continuously through the thickness of host plate. Using Hamilton's principle and Maxwell electrostatic equation, six complex coupled equations are introduced. These equations are exactly solved introducing the new potential and auxiliary functions as well as using separation of variables method. The accuracy of the frequencies is verified by the available literature and the finite element method. The present exact solution can accurately predict not only the out of plane, but also the in-plane modes of FG plate. Finally, the effects of various parameters such as boundary conditions, gradient index and thickness of piezoelectric layers on the natural frequency are investigated.

**Keywords:** Mindlin theory, Natural Frequency, FGM, Power-Low Distribution.

## ۱- مقدمه

مواد هدفمند[1] که اصطلاحاً FGM نامیده می‌شوند نسل جدیدی از ساختارهای کامپوزیتی هستند که اولین بار توسط یک گروه از دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ معرفی شدند. مواد FGM، موادی ناهمگن[2] ولی ایزوتروپ هستند. ریزساختار این مواد به‌گونه‌ای است که به‌صورت پیوسته و تدریجی از یک ماده در راستای مشخص به‌ماده‌ای کاملاً متفاوت میل می‌کند. این تغییرات پیوسته خواص در مقایسه با تغییرات گسسته خواص مواد مرکب، مشکل تغییر ناگهانی در سطح تماس دو ماده گوناگون را برطرف کرده و توزیع تنش پیوسته را سبب می‌شود [ ۱,۲].

پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که دارای خواصی، بین خواص الکتریکی و الاستیکی می‌باشند. با توجه به استفاده گسترده‌ای که این مواد در حسگرها[3] و محرک‌ها[4] دارند، مطالعه بر روی ورق‌هایی که دارای لایه پیزوالکتریک می‌باشند توجه بسیاری از محققین را به خود معطوف ساخته است.

امروزه استفاده از مواد پیزوالکتریک همراه با کامپوزیت‌ها کاربردهای مختلفی دارند. از جمله کاربردهای این مواد در کنترل ارتعاشات و ساختارهای هوشمند[5] می‌باشد [۳]. محرک‌ها و حسگرها به سازه‌های اصلی که اصطلاحاً به آن‌ها host گفته می‌شود، متصل می‌شوند و اتصال آن‌ها به شکل‌ها و فرم‌های مختلفی صورت می‌گیرد که به شرایط محیطی و نیازهای عملیاتی مختلف بستگی دارد [۴].

تئوری کلاسیک ورق[6] تاثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در نظر نمی‌گیرد و نتایج حاصل از آن فقط برای ورق‌های نازک قابل قبول است. به منظور برطرف کردن کاستی‌های مربوط به تئوری کلاسیک برای ورق نسبتاً ضخیم، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[7] (FSDT) که تاثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را نیز در نظر می‌گیرد، بوسیله میندلین[8] و همکارانش پیشنهاد شد [۵]. در مقایسه با تئوری-های مرتبه بالاتر تئوری میندلین حجم و پیچیدگی محاسباتی بسیار کمتری دارد و در عین حال پاسخ‌های حاصل از آن دقت مورد نیاز را تامین می‌کنند.

تاکنون بررسی‌های متعددی روی ورق‌های مستطیلی FG، پیزوالکتریک، FGPM[9] و ورق FG با لایه‌های پیزوالکتریک انجام شده است. فریرا[10] و همکاران [۶]، فرکانس‌های طبیعی ورق مربعی FG را برای شرایط مرزی مختلف بدست آوردند. تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مربعی با شرایط مرزی ساده با استفاده از یک روش المان محدود مرتبه بالا توسط پرادیامنا و باندیوپادیای[11] [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. حسینی هاشمی[12] و همکاران [۸,۹]، تحلیل دقیق پاسخ-بسته ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی FG را برمبنای تئوری میندلین و ردی[13] برای شش نوع شرط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. چنگ و باترا[14] [۱۰]، کمانش و ارتعاشات حالت پایدار[15] ورق FG چند ضلعی[16] با شرایط مرزی ساده را ارائه دادند. تحلیل دقیق سه بعدی فرکانس-های طبیعی و شکل مودهای ورق پیزوالکتریک مستطیلی با شرایط مرزی ساده برای دو نوع شرط مرزی الکتریکی مدار باز و مدار بسته توسط کیوپیال[17] [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. چن[18] و همکارانش [۱۲]، ارتعاشات آزاد یک ورق پیزوالکتریک مستطیلی هدفمند که اصطلاحاً FGPM نامیده می‌شود را با استفاده از روش فضای حالت[19] مورد مطالعه قرار دادند و ورق FGPM را بطور تقریبی بصورت یک ساختار

1. Functionally Graded Materials
2. Inhomogeneous
3. Sensors
4. Actuators
5. Smart
6. Classical plate Thoery
7. First-Order shear Deformation Plate Theory
8. Mindlin
9. Functionally Graded Piezoelectric Materials
10. Ferreira
11. Pradyumna and Bandyopadhyay
12. Hosseini-Hashemi
13. Reddy
14. Cheng and Batra
15. Steady state vibrations
16. Polygonal
17. Cupial
17. Chen
18. State space
19. Zhong and Yu

لایه‌ای مدل کردند و حل دقیق را برای شرایط مرزی مختلف بدست آوردند. ژانگ و یو[1] [۱۳]، حل دقیق سه بعدی برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری یک ورق پیزوالکتریک FGPM مستطیلی با شرایط مرزی ساده را ارائه کردند. جابجایی و پتانسیل الکتریکی ورق را به‌شکل سری فوریه بسط داده و سپس معادلات حالت را استخراج کردند.

ردی و چنگ [۱۴]، یک ورق هوشمند FG شامل یک ورق ساخته شده از مواد هدفمند، که لایه پیزوالکتریک به‌عنوان محرک فقط روی سطح غنی شده از فلز[2] آن نصب شده است را مورد مطالعه قرار دادند. هنگامی که سطح غنی شده از سرامیک در معرض بارگذاری ترمومکانیکی قرار گرفت، جابجایی و تنش را تحت کنترل درآوردند و دامنه ارتعاشات را بوسیله محرک با منبع الکتریکی خنثی کردند. فخاری و همکاران [۱۵]، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری ورق FG با دو لایه پیزوالکتریک تحت بارهای حرارتی، مکانیکی و الکتریکی را با استفاده از روابط کرنش-جابجایی غیر خطی فون کارمن[3] و روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند.

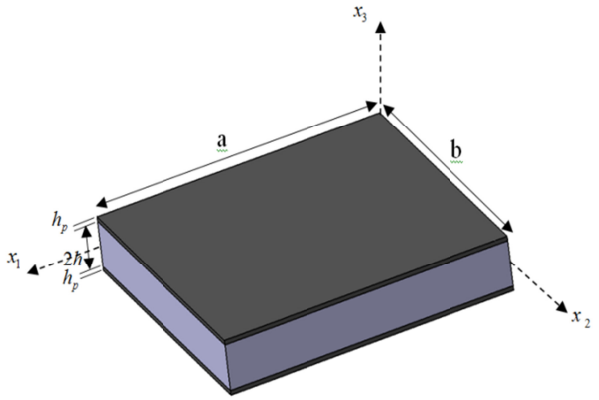
در این مقاله یک روش دقیق برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق میندلین مستطیلی FG با لایه‌های پیزوالکتریک برای شش نوع شرط مرزی مختلف که اصطلاحاً لوی-گونه[4] گفته می‌شود، ارائه شده است. همچنین تاثیر تغییر شکل‌های برشی و اثر اینرسی دورانی در نظر گرفته شده است. لایه‌های پیزوالکتریک مدار بسته در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین این ساختار به عنوان یک محرک عمل می‌کند. اصل همیلتون و معادلات الکترواستاتیکی ماکسول برای استخراج معادلات حاکم برمسئله، بکار گرفته شده است. در پایان نیز تاثیر پارامترهای ورق نظیر شرایط مرزی، ضخامت لایه پیزوالکتریک و اندیس گرادیانی مورد بررسی قرار داده شده است. از جمله نکات مثبت مقاله حاضر، در نظر گرفتن وابستگی[5] بین ارتعاشات درون-صفحه‌ای[6] و خارج-صفحه‌ای[7] می‌باشد، بنابراین فرکانس‌های درون-صفحه‌ای نیز قابل اندازه‌گیری می‌باشند. همچنین بررسی‌ها نشان داده‌اند که در نظر نگرفتن این وابستگی خطاهای چشم‌گیری ایجاد می‌کند. برای بدست آوردن نتایج حل دقیق، کدنویسی در نرم افزار Mathematica انجام شده و نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از نرم افزار ABAQUS مقایسه شده است و دقت و صحت حل حاضر مورد تایید قرار گرفته شده است.

## ۲- معادلات حاکم بر مسئله

### ۲-۱- آرایش هندسی

یک ورق FG مستطیلی نسبتاً ضخیم و مسطح به طول a و عرض b، که دو لایه پیزوالکتریک یکسان در بالا و پایین به آن متصل شده را در نظر بگیرید. همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده، ضخامت ورق FG، ۲h و ضخامت لایه پیزوالکتریک $h_p$ می‌باشد. دو لبه‌ی مقابل ورق که در امتداد محور $x_2$ قرار دارد (یعنی در امتداد لبه‌های $x_1=0$ و $x_1=a$) همواره دارای شرایط مرزی ساده می‌باشند، درحالی که دو لبه‌ی دیگر می‌توانند آزاد، ساده و یا گیردار باشد. سیستم مختصات کارتزین $(x_1,x_2,x_3)$ برای استخراج معادلات ریاضی در نظر گرفته شده است، به طوریکه مبدا مختصات در یک گوشه ورق واقع شده و محورهای $x_1,x_2$ در صفحه‌ی میانی ورق واقع شده‌اند. سطح بالایی و پایینی هر لایه پیزوالکتریک به‌طور کامل از الکترودهای اتصال کوتاه پوشانده شده است. ضخامت الکترودها خیلی کوچکتر از ضخامت ورق FG فرض شده است. بنابراین در روابطی که در ادامه آورده شده، از تاثیر مکانیکی الکترودها چشم پوشی شده است. هر دو لایه‌ی پیزوالکتریک در امتداد عمود بر صفحه میانی در جهت مثبت ضخامت قطبی شده‌اند.

1. Metal-rich
2. Ceramic-rich
3. Von karman
4. Levy-type
5. Coupling
6. In-plane
7. Out of plane




**شکل ۱** ورق نسبتاً ضخیم FG با دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین آن

## ۲-۲- خواص مواد هدفمند

مواد هدفمند (FGMs) مواد مرکبی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور پیوسته به‌دلیل تغییرات تدریجی کسر حجمی[1] مواد تشکیل دهنده، معمولاً در امتداد ضخامت ورق تغییر می‌کند. در این مطالعه، فرض بر آن است که خواص ورق در امتداد ضخامت با مدل تابع توانی تغییر می‌کند. سطح بالایی ورق ($x_3$=h) کاملاً سرامیک، در حالیکه سطح پایینی ورق ($x_3$=-h) کاملاً فلز می‌باشد. مقدار ضریب پوآسون $\nu$ در طول تحلیل ثابت درنظر گرفته شده است. مدول یانگ و چگالی جرمی به‌طور پیوسته در امتداد ضخامت ورق به‌صورت بیان شده در ادامه تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned} E(x_3) &= (E_c - E_m)V_f(x_3) + E_m \\ \rho(x_3) &= (\rho_c - \rho_m)V_f(x_3) + \rho_m \end{aligned} \qquad (۱)$$

زیرنویس m و c به‌ترتیب اجزا فلزی و سرامیکی را نشان می‌دهد و کسر حجمی $V_f$ به‌صورت:

$$V_f(x_3) = \left(\frac{x_3}{2h} + \frac{1}{2}\right)^g \qquad (۲)$$

در نظر گرفته شده است. $g$ اندیس گرادیانی است و فقط مقادیر مثبت را می‌پذیرد.

1. Volume fraction

## ۲-۳- میدان جابجایی

برمبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول میندلین، جابجایی‌های درون-صفحه‌ای به‌عنوان تابع خطی از ضخامت ورق بسط داده شده‌اند و خمش عرضی[2] در امتداد ضخامت ورق دارای مقدار ثابتی است. میدان جابجایی به‌طوریکه در ادامه بیان شده، به‌کار برده شده است [۱۶]:

$$\begin{aligned} U(x_1,x_2,x_3,t) &= u(x_1,x_2,t) + x_3\psi_1(x_1,x_2,t) \\ V(x_1,x_2,x_3,t) &= v(x_1,x_2,t) + x_3\psi_2(x_1,x_2,t) \\ W(x_1,x_2,x_3,t) &= w(x_1,x_2,t) \end{aligned} \qquad (۳)$$

$u$ و $v$ جابجایی‌های درون-صفحه‌ای در صفحه‌ی میانی ورق، $w$ جابجایی عرضی و $\psi_1$ و $\psi_2$ چرخش‌های[3] صفحات میانی ورق حول محور $x_1$,$x_2$ و $t$ زمان را مشخص می‌کند.

## ۲-۴- روابط تنش و کرنش

روابط کرنش-جابجایی به‌صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{,1} + z\psi_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= v_{,2} + z\psi_{2,2} \\ \varepsilon_{33} &= 0 \\ \gamma_{12} &= u_{,2} + v_{,1} + z(\psi_{1,2} + \psi_{2,1}) \\ \gamma_{13} &= \psi_1 + w_{,1} \\ \gamma_{23} &= \psi_2 + w_{,2} \end{aligned} \qquad (۴)$$

علامت کاما که به دنبال آن ۱،۲و۳ قرار دارد به‌ترتیب مشتق نسبت به مختصات $x_1$، $x_2$ و $x_3$ را نشان می‌دهد. باید خاطر نشان کنیم که تنش عرضی عمودی $\sigma_{33}$ صفر فرض شده است. براساس قانون هوک، روابط تنش-جابجایی برای ورق میانی به‌صورت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^h \\ \sigma_{22}^h \\ \sigma_{12}^h \\ \sigma_{13}^h \\ \sigma_{23}^h \end{Bmatrix} = \frac{E(x_3)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \qquad (۵)$$

2. Transverse deflection
3. Slope rotations

می‌باشد. کـه $E(x_3)$ و $\nu$ بـه‌ترتیـب مـدول یانـگ و ضـریب پوآسون ورق FG هستند. به‌منظور مدل کـردن تـابع پتانسـیل الکتریکی از یک تابع سینوسی استفاده می‌شود به‌نحوی که این تابع بتواند معادله ماکسول را به‌طور تقریبی ارضا نماید. این تابع به‌صورت زیر درنظر گرفته شده است:

$$\phi(x_1,x_2,x_3,t)=\begin{cases}\varphi(x_1,x_2,t)Sin\dfrac{\pi(x_3-h)}{h_p}\ , & h\le x_3\le H\\ \varphi(x_1,x_2,t)Sin\dfrac{-\pi(x_3+h)}{h_p}\ , & -H\le x_3\le -h\end{cases}$$

(۶)

که در رابطه بالا $\varphi(x_1,x_2,t)$ پتانسیل الکتریکی روی سـطح میانی لایه پیزوالکتریک و $H=h+h_p$ است. همان‌گونـه کـه از تابع فوق مشخص است پتانسیل الکتریکی در بالا و پایین لایه-های پیزوالکتریک صفر می‌باشد.

معادلات تشکیل دهنده[1] در لایه پیزوالکتریک به‌صورت زیـر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^p\\ \sigma_{22}^p\\ \sigma_{12}^p\\ \sigma_{13}^p\\ \sigma_{23}^p\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&0&0&0\\ C_{12}&C_{11}&0&0&0\\ 0&0&C_{44}&0&0\\ 0&0&0&C_{55}&0\\ 0&0&0&0&C_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&e_{31}\\ 0&0&e_{31}\\ 0&0&0\\ e_{15}&0&0\\ 0&e_{15}&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{Bmatrix}$$

$$C_{44}=1/2(C_{11}-C_{12})$$

(۷)

که $C_{44},C_{12},C_{11}$ و $C_{55}$ مـدول الاستیسـیته تحـت میـدان الکتریکـی ثابـت؛ $e_{31}$ و $e_{15}$ ثوابـت پیزوالکتریـک؛ $E_2,E_1$ و $E_3$ مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی به‌ترتیب در جهت $x_2,x_1$ و $x_3$ هستند، که به‌علت تقارن لایـه‌هـای پیزوالکتریـک، در اینجـا از رابطه‌ی اول در معادله‌ی ۶ بـرای محاسـبه‌ی میـدان الکتریکـی به‌صورت زیر استفاده شده است:

$$E_1=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}Sin\frac{\pi(x_3-h)}{h_p}\qquad\text{(a-۸)}$$

$$E_2=-\frac{\partial\phi}{\partial x_2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}Sin\frac{\pi(x_3-h)}{h_p}\qquad\text{(b-۸)}$$

$$E_3=-\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=-\frac{\pi\varphi}{h_p}Cos\frac{\pi(x_3-h)}{h_p}\qquad\text{(c-۸)}$$

با جایگذاری معادلات ۸ نهایتاً بردار جابجایی‌های الکتریکـی متناظر $D_2,D_1$ و $D_3$ در ادامه آورده شده است:

$$D_1=e_{15}\gamma_{13}+\Xi_{11}E_1=e_{15}(\psi_1+w_{,1})-\Xi_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}Sin\frac{\pi(x_3-h)}{h_p}$$

(a-۹)

$$D_2=e_{15}\gamma_{23}+\Xi_{11}E_2=e_{15}(\psi_2+w_{,2})-\Xi_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial y}Sin\frac{\pi(x_3-h)}{h_p}$$

(b-۹)

$$D_3=e_{31}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+\Xi_{33}E_3=e_{31}[(u_{,1}+v_{,2})+x_3(\psi_{1,1}+\psi_{2,2})]-\Xi_{33}\frac{\pi\varphi}{h_p}Cos\frac{\pi(x_3-h)}{h_p}\qquad\text{(c-۹)}$$

$\Xi_{11}$ و $\Xi_{33}$ ثوابت دی الکتریک هستند.

## ۲-۵- معادلات حرکت

برای ارتعاشات آزاد، انرژی جنبشی $T$ و انرژی کرنشی $V$ حـاکم بر مسئله به‌صورت زیر بیان شده است:

$$T=\frac{1}{2}\iint_A\int_{-h}^{h}\rho(x_3)(\dot U^2+\dot V^2+\dot W^2)dx_3\,dA+\iint_A\int_h^H\rho_p(\dot U^2+\dot V^2+\dot W^2)dx_3\,dA\qquad(۱۰)$$

$$V=\frac{1}{2}\iint_A\int_{-h}^{h}(\sigma_{11}^h\varepsilon_x+\sigma_{22}^h\varepsilon_y+\sigma_{12}^h\gamma_{12}+\sigma_{23}^h\gamma_{23}+\sigma_{13}^h\gamma_{13})dx_3\,dA+\iint_A\int_h^H(\sigma_{11}^p\varepsilon_{11}+\sigma_{22}^p\varepsilon_{22}+\sigma_{12}^p\gamma_{12}+\sigma_{23}^p\gamma_{23}+\sigma_{13}^p\gamma_{13}+D_1E_1+D_2E_2+D_3E_3)dx_3\,dA\qquad(۱۱)$$

$\rho$ و $\rho_p$ بـه‌ترتیـب، چگـالی ورق FG و چگـالی لایـه پیزوالکتریک می‌باشند.

می‌دانیم که اصل همیلتون به‌صورت رابطه‌ی زیر می‌باشد:

1. Constitutive relations

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V)dt=0 \qquad (۱۲)$$

بعداز قرار دادن معادلات بالا در (۱۲)، نهایتاً پنج معادله دینامیکی حرکت حاکم بر ورق مستطیلی FG با دو لایه‌ی پیزوالکتریک در بالا و پایین آن بر مبنای تئوری میندلین به‌شکل زیر استخراج شده است:

$$\delta u: N_{1,1}+N_{12,2}=I_1\ddot{u}+I_2\ddot{\psi}_1 \qquad (۱۳\text{-a})$$

$$\delta v: N_{2,2}+N_{12,1}=I_1\ddot{v}+I_2\ddot{\psi}_2 \qquad (۱۳\text{-b})$$

$$\delta\psi_1: M_{1,1}+M_{12,2}-Q_1=I_2\ddot{u}+I_3\ddot{\psi}_1 \qquad (۱۳\text{-c})$$

$$\delta\psi_2: M_{2,2}+M_{12,1}-Q_y=I_2\ddot{v}+I_3\ddot{\psi}_2 \qquad (۱۳\text{-d})$$

$$\delta w: Q_{1,1}+Q_{2,2}=I_1\ddot{w} \qquad (۱۳\text{-e})$$

برای مسئله موجود ترم‌های اینرسی و منتجه‌های تنش به‌صورت روابط (۱۴) و (۱۵) می‌باشند:

$$(I_1,I_2,I_3)=\int_{-h}^{h}\rho(z)(1,x_3,x_3^2)dx_3 +2\int_{h}^{H}\rho_p(1,x_3,x_3^2)dx_3 \qquad (۱۴)$$

$$(N_1,N_2,N_{12})=\int_{-h}^{h}(\sigma_{11}^h,\sigma_{22}^h,\sigma_{12}^h)dx_3 +2\int_{h}^{H}(\sigma_{11}^p,\sigma_{22}^p,\sigma_{12}^p)dx_3 \qquad (۱۵\text{-a})$$

$$(M_1,M_2,M_{12})=\int_{-h}^{h}x_3(\sigma_{11}^h,\sigma_{22}^h,\sigma_{12}^h)dx_3 +2\int_{h}^{H}x_3(\sigma_{11}^p,\sigma_{22}^p,\sigma_{12}^p)dx_3 \qquad (۱۵\text{-b})$$

$$(Q_1,Q_2)=\kappa^2[\int_{-h}^{h}(\sigma_{13}^h,\sigma_{23}^h)dx_3+2\int_{h}^{H}(\sigma_{13}^p,\sigma_{23}^p)dx_3] \qquad (۱۵\text{-c})$$

براساس روابط جابجایی (۳) و توزیع تنش (۵)و (۷)، ممان‌های خمشی، ممان‌های پیچشی و نیروهای برشی برحسب $u$، $v$، $w$، $\psi_1$، $\psi_2$ و $\varphi$ به‌صورت روابط زیر بدست می‌آید:

$$N_1=A(u_{,1}+\nu v_{,2})+B(\psi_{1,1}+\nu\psi_{2,2})+ P_1(C_{11}u_{,1}+C_{12}v_{,2})+P_2(C_{11}\psi_{1,1}+C_{12}\psi_{2,2}) \qquad (۱۶\text{-a})$$

$$N_2=A(\nu u_{,1}+v_{,2})+B(\nu\psi_{1,1}+\psi_{2,2}) +P_1(C_{12}u_{,1}+C_{11}v_{,2})+P_2(C_{12}\psi_{1,1}+C_{11}\psi_{2,2}) \qquad (۱۶\text{-b})$$

$$N_{12}=\frac{1-\nu}{2}[A(u_{,2}+v_{,1})+B(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})] +C_{44}[P_1(u_{,2}+v_{,1})+P_2(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})] \qquad (۱۶\text{-c})$$

$$M_1=B(u_{,1}+\nu v_{,2})+D(\psi_{1,1}+\nu\psi_{2,2})+P_2(C_{11}u_{,1} +C_{12}v_{,2})+P_3(C_{11}\psi_{1,1}+C_{12}\psi_{2,2})-4e_{31}\frac{h_p}{\pi}\varphi \qquad (۱۶\text{-d})$$

$$M_2=B(\nu u_{,1}+v_{,2})+D(\nu\psi_{1,1}+\psi_{2,2})+P_2(C_{12}u_{,1} +C_{11}v_{,2})+P_3(C_{12}\psi_{1,1}+C_{11}\psi_{2,2})-4e_{31}\frac{h_p}{\pi}\varphi \qquad (۱۶\text{-e})$$

$$M_{12}=\frac{1-\nu}{2}[B(u_{,2}+v_{,1})+D(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})] +C_{44}[P_2(u_{,2}+v_{,1})+P_3(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})] \qquad (۱۶\text{-f})$$

$$Q_1=\kappa^2\frac{1-\nu}{2}(A(\psi_1+w_{,1}))+\kappa^2P_1C_{55}(\psi_1+w_{,1}) +4e_{15}\frac{h_p}{\pi}\varphi_{,1} \qquad (۱۶\text{-g})$$

$$Q_2=\kappa^2\frac{1-\nu}{2}(A(\psi_2+w_{,2}))+\kappa^2P_1C_{55}(\psi_2+w_{,2}) +4e_{15}\frac{h_p}{\pi}\varphi_{,2} \qquad (۱۶\text{-h})$$

$\kappa^2$ ضریب تصحیح برشی ورق است که در تئوری میندلین جهت جبران خطای حاصل از ثابت فرض نمودن تنش‌های برشی عرضی ($\sigma_{23},\sigma_{13}$) در سراسر ضخامت ورق معرفی شده است.

در اینجا مقدار $\kappa^2=5/6$ در نظر گرفته شده است.

$B,A$ و $D$ ضرایب سختی ورق FG هستند و $P_i$ها برای ساده سازی در معادلات فرض شده‌اند.

$$A,B,D=\int_{-h}^{h}(1,x_3,x_3^2)\frac{E(x_3)}{1-\nu^2}dx_3 \qquad (۱۷)$$

$$P_1 = 2h_p$$
$$P_2 = (2hh_p + h_p^2)$$
$$P_3 = \frac{2}{3}(3h^2 h_p + 3hh_p^2 + h_p^3) \qquad (۱۸)$$

حال روابط (۱۶) در (۱۳) جایگذاری می‌شود:

$$[\frac{A}{2}(1-\nu)+\frac{P_1}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2 u+[\frac{B}{2}(1-\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2\psi_1$$
$$+[\frac{A}{2}(1+\nu)+\frac{P_1}{2}(C_{11}+C_{12})](u_{,1}+v_{,2})_{,1}+$$
$$[\frac{B}{2}(1+\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}+C_{12})](\psi_{1,1}+\psi_{2,2})_{,1}=I_1\ddot{u}+I_2\ddot{\psi}_1$$

(a-۱۹)

$$[\frac{A}{2}(1-\nu)+\frac{P_1}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2 v+[\frac{B}{2}(1-\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2\psi_2$$
$$+[\frac{A}{2}(1+\nu)+\frac{P_1}{2}(C_{11}+C_{12})](u_{,1}+v_{,2})_{,2}$$
$$[\frac{B}{2}(1+\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}+C_{12})](\psi_{1,1}+\psi_{2,2})_{,2}=I_1\ddot{v}+I_2\ddot{\psi}_2$$

(b-۱۹)

$$[\frac{B}{2}(1-\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2 u+[\frac{D}{2}(1-\nu)+\frac{P_3}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2\psi_1$$
$$+[\frac{B}{2}(1+\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}+C_{12})](u_{,1}+v_{,2})_{,1}$$
$$+[\frac{D}{2}(1+\nu)+\frac{P_3}{2}(C_{11}+C_{12})](\psi_{1,1}+\psi_{2,2})_{,1}$$
$$-\kappa^2[\frac{1-\nu}{2}A+P_1C_{55}](\psi_1+w_{,1})-4(e_{31}+e_{15})\frac{h_1}{\pi}\varphi_{,1}=I_2\ddot{u}+I_3\ddot{\psi}_1$$

(c-۱۹)

$$[\frac{B}{2}(1-\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2 v+[\frac{D}{2}(1-\nu)+\frac{P_3}{2}(C_{11}-C_{12})]\nabla^2\psi_2$$
$$+[\frac{B}{2}(1+\nu)+\frac{P_2}{2}(C_{11}+C_{12})](u_{,1}+v_{,2})_{,2}$$
$$+[\frac{D}{2}(1+\nu)+\frac{P_3}{2}(C_{11}+C_{12})](\psi_{1,1}+\psi_{2,2})_{,2}$$
$$-\kappa^2[\frac{1-\nu}{2}A+P_1C_{55}](\psi_2+w_{,2})]-4(e_{31}+e_{15})\frac{h_1}{\pi}\varphi_{,2}=I_2\ddot{v}+I_3\ddot{\psi}_2$$

(d-۱۹)

$$\kappa^2[\frac{1-\nu}{2}A+P_1C_{55}](\nabla^2 w+\psi_{1,1}+\psi_{2,2})+4e_{15}\frac{h_1}{\pi}\nabla^2\varphi=I_1\ddot{w}$$

(e-۱۹)

در معادلات بالا $\nabla^2$ عملگر لاپلاس است، که به‌شکل زیر می‌باشد:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \qquad (۲۰)$$

برای ارتعاشات آزاد فرض می‌کنیم که توابع $\psi_1,\psi_2$ و $w$ به‌طور هارمونیک نسبت به زمان به‌صورت تابعی از $e^{i\omega t}$ تغییر می‌کند.

معادله ماکسول به‌شکل رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$\int_h^H(\frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}+\frac{\partial D_3}{\partial x_3})dx_3=0 \qquad (۲۱)$$

با جایگذاری بردار جابجایی‌های الکتریکی از معادله (۹) در معادله ماکسول خواهیم داشت:

$$(e_{15}+e_{31})h_p(\psi_{1,1}+\psi_{2,2})+e_{15}h_p\nabla^2 w$$
$$-\frac{2h_p}{\pi}E_{11}\nabla^2\varphi+\frac{2\pi}{h_p}E_{33}\varphi=0 \qquad (۲۲)$$

### ۲-۶- روند حل دقیق برای جابجایی عرضی ($w$)

به‌منظور حل شش معادله دیفرانسیل حرکت، توابع کمکی و پتانسیل $f_4,f_3,f_2,f_1$ و $g_2,g_1$ معرفی شده است[۹]:

$$f_1=\frac{A}{2}(1-\nu)u+\frac{B}{2}(1-\nu)\psi_1 \qquad (a-۲۳)$$

$$f_2=\frac{A}{2}(1-\nu)v+\frac{B}{2}(1-\nu)\psi_2 \qquad (b-۲۳)$$

$$f_3=\frac{B}{2}(1-\nu)u+\frac{D}{2}(1-\nu)\psi_1 \qquad (c-۲۳)$$

$$f_4=\frac{B}{2}(1-\nu)v+\frac{D}{2}(1-\nu)\psi_2 \qquad (d-۲۳)$$

$$g_1=f_{1,1}+f_{2,2} \qquad (a-۲۴)$$

$$g_2=f_{3,1}+f_{4,2} \qquad (b-۲۴)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳a) تا (۲۳d) و (۲۴a) و (۲۴b) در (۱۹a) تا (۱۹e) و (۲۲) معادلات حرکت و ماکسول به‌شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$B_{11}\nabla^2 f_1 + B_{12}\nabla^2 f_3 + B_{13}g_{1,1} + B_{14}g_{2,1} = B_{15}f_1 + B_{16}f_3 \quad \text{(a-۲۵)}$$

$$B_{11}\nabla^2 f_2 + B_{12}\nabla^2 f_4 + B_{13}g_{1,2} + B_{14}g_{2,2} = B_{15}f_2 + B_{16}f_4 \quad \text{(b-۲۵)}$$

$$B_{31}\nabla^2 f_1 + B_{32}\nabla^2 f_3 + B_{33}g_{1,1} + B_{34}g_{2,1} - B_{35}\varphi_{,1} = B_{36}f_1 + B_{37}f_3 + B_{38}w_{,1} \quad \text{(c-۲۵)}$$

$$B_{31}\nabla^2 f_2 + B_{32}\nabla^2 f_4 + B_{33}g_{1,2} + B_{34}g_{2,2} - B_{35}\varphi_{,2} = B_{36}f_2 + B_{37}f_4 + B_{38}w_{,2} \quad \text{(d-۲۵)}$$

$$-B_{51}g_1 + B_{52}g_2 - B_{53}\nabla^2\varphi = B_{54}w + B_{55}\nabla^2 w \quad \text{(e-۲۵)}$$

$$B_{61}g_1 - B_{62}g_2 - B_{63}\nabla^2\varphi + B_{64}\varphi = -B_{63}\nabla^2 w \quad (۲۶)$$

ضرایب $B_{ij}$ در ضمیمه A آورده شده است.

به‌منظور یافتن حل دقیق باید ابتدا با ترکیب شش معادله (a-۲۵) تا (e-۲۵) و (۲۶) یک معادله برحسب $w$ بدست آوریم که برای یافتن این معادله باید مراحل زیر را اجرا کنیم:

۱. از معادله (a-۲۵) نسبت به $x_1$ و از معادله (b-۲۵) نسبت به $x_2$ مشتق می‌گیریم و دو معادله حاصل را با هم جمع می‌کنیم:

$$B_1\nabla^2 g_1 + B_2\nabla^2 g_2 = B_{15}g_1 + B_{16}g_2 \quad (۲۷)$$

۲. به‌طور مشابه، از معادله (c-۲۵) نسبت به $x_1$ و از معادله (d-۲۵) نسبت به $x_2$ مشتق می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم:

$$B_3\nabla^2 g_1 + B_4\nabla^2 g_2 - B_{35}\nabla^2\varphi = B_{36}g_1 + B_{37}g_2 + B_{38}\nabla^2 w \quad (۲۸)$$

برای ساده‌سازی فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} B_1 &= (B_{11} + B_{13}) \\ B_2 &= (B_{12} + B_{14}) \\ B_3 &= (B_{31} + B_{33}) \\ B_4 &= (B_{32} + B_{34}) \end{aligned} \quad (۲۹)$$

با انجام مراحل ۱و۲ شش معادله به چهار معادله کاهش می‌یابد و فقط لازم است که معادلات (۲۷) و (۲۸) و (e-۲۵) و (۲۶) را به نحوی ترکیب کرده و معادله مورد نظر را بیابیم.

۳. معادلات (e-۲۵) و (۲۶) را به‌طور همزمان حل می‌کنیم و $g_1$ و $g_2$ را برحسب $\nabla^2\varphi, \varphi, \nabla^2 w, w$ به‌دست می‌آوریم.

۴. $g_1$ و $g_2$ به‌دست آمده در مرحله ۳ را در معادلات (۲۷) و (۲۸) جایگذاری کرده و با حذف $\varphi$ بین این دو معادله، سرانجام بعد از انجام عملیات ریاضی و ساده‌سازی یک معادله دیفرانسیل جزئی[1] مرتبه هشت برحسب $w$ با ضرایب ثابت حاصل می‌شود:

$$\nabla^8 w + a_1\nabla^6 w + a_2\nabla^4 w + a_3\nabla^2 w + a_4 = 0 \quad (۳۰)$$

که ضرایب ثابت $a_i\ (i = 1-4)$ در ضمیمه B آورده شده است.

معادله (۲۲) را می‌توان به‌صورت زیر حل نمود:

$$w = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \quad (۳۱)$$

که توابع پتانسیل $W_i\ (i = 1-4)$ به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\nabla^2 W_1 + \alpha_1^2 W_1 = 0 \quad \text{(a-۳۲)}$$

$$\nabla^2 W_2 + \alpha_2^2 W_2 = 0 \quad \text{(b-۳۲)}$$

$$\nabla^2 W_3 + \alpha_3^2 W_3 = 0 \quad \text{(c-۳۲)}$$

$$\nabla^2 W_4 + \alpha_4^2 W_4 = 0 \quad \text{(d-۳۲)}$$

و $\alpha_i^2\ (i = 1-4)$ ریشه‌های معادله مرتبه چهارم زیر هستند:

$$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0 \quad (۳۳)$$

که به‌صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\alpha_1^2 = \frac{-a_1}{4} - \frac{1}{2}m_2 - \frac{1}{2} \times\sqrt{\frac{a_1^2}{2} - \frac{4a_2}{3} - \frac{2^{1/3}(a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4)}{3m_1} - \frac{m_1}{32^{1/3}} - (-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3)/(4m_2)} \quad \text{(a-۳۴)}$$

1. Partial Differential Equation

$$\alpha_2^2=\frac{-a_1}{4}-\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{a_1^2}{2}-\frac{4a_2}{3}-\frac{2^{1/3}(a_2^2-3a_1a_3+12a_4)}{3m_1}-\frac{m_1}{32^{1/3}}-(-a_1^3+4a_1a_2-8a_3)/(4m_2)}$$

(b-۳۴)

$$\alpha_3^2=\frac{-a_1}{4}+\frac{1}{2}m_2-\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{a_1^2}{2}-\frac{4a_2}{3}-\frac{2^{1/3}(a_2^2-3a_1a_3+12a_4)}{3m_1}-\frac{m_1}{32^{1/3}}+(-a_1^3+4a_1a_2-8a_3)/(4m_2)}$$

(c-۳۴)

$$\alpha_4^2=\frac{-a_1}{4}+\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{a_1^2}{2}-\frac{4a_2}{3}-\frac{2^{1/3}(a_2^2-3a_1a_3+12a_4)}{3m_1}-\frac{m_1}{32^{1/3}}+(-a_1^3+4a_1a_2-8a_3)/(4m_2)}$$

(d-۳۴)

و $m_2,m_1$ در روابط بالا به‌شکل زیر می‌باشند:

$$m_1=(2a_2^3-9a_1a_2a_3+27(a_3^2+a_4a_1^2)-72a_2a_4+\sqrt{-4(a_2^2-3a_1a_3+12a_4)^3+(2a_2^3-9a_1a_2a_3+27(a_3^2+a_4a_1^2)-72a_2a_4)^2})^{\frac{1}{3}}$$

(a-۳۵)

$$m_2=\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-\frac{2a_2}{3}+\frac{2^{1/3}(a_2^2-3a_1a_3+12a_4)}{3m_1}+\frac{m_1}{32^{1/3}}}$$

(b-۳۵)

حال نوبت به یافتن توابع $g_2,g_1$ و $\varphi$ برحسب $w$ می‌رسد.

۵. به این منظور با جایگذاری $g_2,g_1$ از مرحله ۳ در معادلات (۲۷) و (۲۸) دو معادله برحسب $\nabla^4\varphi,\nabla^2\varphi,\varphi$ و $\nabla^4w,\nabla^2w,w$ حاصل می‌شود که با حل همزمان این دو معادله و حذف $\nabla^4\varphi$ بین آن‌ها معادله‌ای به‌دست می‌آید که $\nabla^2\varphi$ را برحسب $\nabla^4w,\nabla^2w,w$ و $\varphi$ ارائه می‌کند.

۶. $\nabla^2\varphi$ حاصله از مرحله ۵ را در یکی از معادلات (۲۷) یا (۲۸) قرار داده و با انجام یک سری عملیات ریاضی تابع پتانسیل الکتریکی $\varphi$ را به‌دست آوردیم:

$$\varphi=b_1\nabla^6w+b_2\nabla^4w+b_3\nabla^2w+b_4w \qquad (۳۶)$$

۷. $\nabla^2\varphi$ و $\varphi$ به‌دست آمده از مرحله ۵ و ۶ را در $g_2,g_1$ که در مرحله ۳ داشتیم قرار می‌دهیم و بعد از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$g_1=n_1\nabla^6w+n_2\nabla^4w+n_3\nabla^2w+n_4w \qquad (a-۳۷)$$

$$g_2=n_5\nabla^6w+n_6\nabla^4w+n_7\nabla^2w+n_8w \qquad (b-۳۷)$$

۸. در این مرحله، (۳۲a) تا (۳۲d) در (۳۶)، (۳۷a)و (۳۷b) جایگذاری می‌کنیم:

$$\varphi=e_1W_1+e_2W_2+e_3W_3+e_4W_4 \qquad (۳۸)$$

$$g_1=d_1W_1+d_2W_2+d_3W_3+d_4W_4 \qquad (a-۳۹)$$

$$g_2=d_5W_1+d_6W_2+d_7W_3+d_8W_4 \qquad (b-۳۹)$$

به‌دلیل حجم زیاد ضرایب $b_i,e_i\ (i=1-4)$ و $n_i,d_i\ (i=1-8)$ و عدم امکان ارائه‌ی آن‌ها در مقاله، روند به‌دست آوردن این ضرایب در بالا به‌طور کامل شرح داده شد. با انجام مراحل بیان شده به‌سادگی می‌توان این ضرایب را به‌دست آورد.

## ۲-۷- روند حل دقیق برای $\psi_2,\psi_1,v,u$

با جایگذاری معادلات (۳۲a) تا (۳۲d)، (۳۸)، (۳۹a) و (۳۹b) در (۲۵a) تا (۲۵d) می‌توان توابع $f_1,f_2,f_3$ و $f_4$ را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$f_1=C_5W_{1,1}+C_6W_{2,1}+C_7W_{3,1}+C_8W_{4,1}+C_9W_{5,2}+C_{10}W_{6,2} \qquad (a-۴۰)$$

$$f_2=C_5W_{1,2}+C_6W_{2,2}+C_7W_{3,2}+C_8W_{4,2}-C_9W_{5,1}-C_{10}W_{6,1} \qquad (b-۴۰)$$

$$f_3=C_1W_{1,1}+C_2W_{2,1}+C_3W_{3,1}+C_4W_{4,1}+W_{5,2}+W_{6,2} \qquad (c-۴۰)$$

$$f_4=C_1W_{1,2}+C_2W_{2,2}+C_3W_{3,2}+C_4W_{4,2}-W_{5,1}-W_{6,1} \qquad (d-۴۰)$$

توابع $W_5$ و $W_6$ به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\nabla^2 W_5 + \alpha_5^2 W_5 = 0 \qquad \text{(a-۴۱)}$$

$$\nabla^2 W_6 + \alpha_6^2 W_6 = 0 \qquad \text{(b-۴۱)}$$

$\alpha_5^2$ و $\alpha_6^2$ ریشه‌های معادله درجه دو زیر هستند:

$$S^2 + \gamma_1 S + \gamma_2 = 0 \qquad (۴۲)$$

که ضرایب $\gamma_1$ و $\gamma_2$ به‌شکل زیر می‌باشند:

$$\gamma_1 = \frac{r_2 B_{12} - r_1 B_{16} - r_3 B_{11}}{r_1 B_{12}} \qquad \text{(a-۴۳)}$$

$$\gamma_2 = \frac{-r_2 B_{16} + r_3 B_{15}}{r_1 B_{12}} \qquad \text{(b-۴۳)}$$

و ضرایب $C_i\,(i=1-10)$ و $r_i\,(i=1-3)$ در ضمیمه C آورده شده‌اند.

در نهایت، حل دقیق میدان جابجایی ورق مطابق تئوری میندلین با یافتن $\psi_2, \psi_1, v, u$ با استفاده از معادلات (a-۲۳) تا (d-۲۳) و جایگزینی معادلات (a-۴۰) تا (d-۴۰) در معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$u = \xi\left(f_3 - \frac{D}{B} f_1\right) \qquad \text{(a-۴۴)}$$

$$v = \xi\left(f_4 - \frac{D}{B} f_2\right) \qquad \text{(b-۴۴)}$$

$$\psi_1 = \xi\left(f_1 - \frac{A}{B} f_3\right) \qquad \text{(c-۴۴)}$$

$$\psi_2 = \xi\left(f_2 - \frac{A}{B} f_4\right) \qquad \text{(d-۴۴)}$$

که ضریب $\xi$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\xi = \frac{2}{B(1-\nu)(1-\frac{AD}{B^2})} \qquad (۴۵)$$

## ۲-۸- روش جداسازی متغییرها

با استفاده از روش جداسازی متغییرها، می‌توان یک دسته حل برای معادلات (a-۳۲) تا (d-۳۲)، (a-۴۱) و (b-۴۱) به‌صورت زیر نوشت:

$$W_1 = [A_1 Sinh(\mu_1 x_2) + A_2 Cosh(\mu_1 x_2)]Sin(\xi_1 x_1) + [B_1 Sinh(\mu_1 x_2) + B_2 Cosh(\mu_1 x_2)]Cos(\xi_1 x_1) \qquad \text{(a-۴۶)}$$

$$W_2 = [A_3 Sinh(\mu_2 x_2) + A_4 Cosh(\mu_2 x_2)]Sin(\xi_2 x_1) + [B_3 Sinh(\mu_2 x_2) + B_4 Cosh(\mu_2 x_2)]Cos(\xi_2 x_1) \qquad \text{(b-۴۶)}$$

$$W_3 = [A_5 Sin(\mu_3 x_2) + A_6 Cos(\mu_3 x_2)]Sin(\xi_3 x_1) + [B_5 Sin(\mu_3 x_2) + B_6 Cos(\mu_3 x_2)]Cos(\xi_3 x_1) \qquad \text{(c-۴۶)}$$

$$W_4 = [A_7 Sinh(\mu_4 x_2) + A_8 Cosh(\mu_4 x_2)]Sin(\xi_4 x_1) + [B_7 Sinh(\mu_4 x_2) + B_8 Cosh(\mu_4 x_2)]Cos(\xi_4 x_1) \qquad \text{(d-۴۶)}$$

$$W_5 = [A_9 Sinh(\mu_5 x_2) + A_{10} Cosh(\mu_5 x_2)]Cos(\xi_5 x_1) + [B_9 Sinh(\mu_5 x_2) + B_{10} Cosh(\mu_5 x_2)]Sin(\xi_5 x_1) \qquad \text{(e-۴۶)}$$

$$W_6 = [A_{11} Sinh(\mu_6 x_2) + A_{12} Cosh(\mu_6 x_2)]Cos(\xi_6 x_1) + [B_{11} Sinh(\mu_6 x_2) + B_{12} Cosh(\mu_6 x_2)]Sin(\xi_6 x_1) \qquad \text{(f-۴۶)}$$

$$\alpha_1^2 = \mu_1^2 + \xi_1^2, \quad \xi_1^2 > 0, \quad \mu_1^2 < 0 \qquad \text{(a-۴۷)}$$

$$\alpha_2^2 = \mu_2^2 + \xi_2^2, \quad \xi_2^2 > 0, \quad \mu_2^2 < 0 \qquad \text{(b-۴۷)}$$

$$\alpha_3^2 = \mu_3^2 + \xi_3^2, \quad \xi_3^2 > 0, \quad \mu_3^2 < 0 \qquad \text{(c-۴۷)}$$

$$\alpha_4^2 = \mu_4^2 + \xi_4^2, \quad \xi_4^2 > 0, \quad \mu_4^2 < 0 \qquad \text{(d-۴۷)}$$

$$\alpha_5^2 = \mu_5^2 + \xi_5^2, \quad \xi_5^2 > 0, \quad \mu_5^2 < 0 \qquad \text{(e-۴۷)}$$

$$\alpha_6^2 = \mu_6^2 + \xi_6^2, \quad \xi_6^2 > 0, \quad \mu_6^2 < 0 \qquad \text{(f-۴۷)}$$

### ۲-۹- شرایط مرزی در تئوری میندلین

در این مطالعه، از سه شرط مرزی ساده، گیردار و آزاد در لبه‌های ورق استفاده شده است. برمبنای تئوری میندلین، شرایط مرزی برای یک لبه‌ی موازی با محور $x_1$ یعنی لبه‌های $x_2$=۰ و $x_2$=b، می‌تواند به‌صورتی که در ادامه بیان شده بر قرار باشد:

- شرط مرزی ساده

$$u=0 \quad N_2=0 \quad w=0 \quad \psi_1=0 \quad M_2=0 \qquad \text{(a-۴۸)}$$

- شرط مرزی گیردار

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0 \quad \psi_1=0 \quad \psi_2=0 \qquad \text{(b-۴۸)}$$

- شرط مرزی آزاد

$$N_{12}=0 \quad N_2=0 \quad M_{12}=0 \quad M_2=0 \quad Q_2=0 \qquad \text{(c-۴۸)}$$

با عوض کردن اندیس ۱ و ۲ در معادلات (a-۴۸) تا (c-۴۸)، شرایط مرزی برای لبه‌های $x_1$=۰ و $x_1$=a به‌دست می‌آید.

### ۲-۱۰- حل لوی-گونه[1]

حل لوی-گونه به این صورت است که دو لبه‌ی مقابل دارای شرط مرزی ساده هستند و دو لبه‌ی دیگر ورق می‌توانند هر شرط مرزی داشته باشند.

مطابق شکل (۱)، شرایط مرزی ورق در $x_1$=۰ و $x_1$=a ساده فرض شده‌اند، بنابراین معادلات (a-۴۶) تا (f-۴۶ ) به‌شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$W_1=[A_1 Sinh(\mu_1 x_2)+A_2 Cosh(\mu_1 x_2)]Sin(\xi_1 x_1) \qquad \text{(a-۴۹)}$$

$$W_2=[A_3 Sinh(\mu_2 x_2)+A_4 Cosh(\mu_2 x_2)]Sin(\xi_2 x_1) \qquad \text{(b-۴۹)}$$

$$W_3=[A_5 Sin(\mu_3 x_2)+A_6 Cos(\mu_3 x_2)]Sin(\xi_3 x_1) \qquad \text{(c-۴۹)}$$

$$W_4=[A_7 Sinh(\mu_4 x_2)+A_8 Cosh(\mu_4 x_2)]Sin(\xi_4 x_1) \qquad \text{(d-۴۹)}$$

$$W_5=[A_9 Sinh(\mu_5 x_2)+A_{10} Cosh(\mu_5 x_2)]Cos(\xi_5 x_1) \qquad \text{(e-۴۹)}$$

$$W_6=[A_{11} Sinh(\mu_6 x_2)+A_{12} Cosh(\mu_6 x_2)]Cos(\xi_6 x_1) \qquad \text{(f-۴۹)}$$

$$\xi_1=\xi_2=\xi_3=\xi_4=\xi_5=\xi_6=\frac{m\pi}{a}, \quad m=1,2,3,... \qquad (۵۰)$$

با اعمال شرایط مرزی مناسب در امتداد لبه‌های $x_2$=۰ و $x_2$=b می‌توان معادله مشخصه فرکانسی ورق را به‌دست آورد. این معادله برای مسئله حاضر به‌صورت یک دترمینان ۱۲×۱۲ می‌باشد که تماماً برحسب $\omega$ می‌باشد. با مساوی صفر قرار دادن این دترمینان برای هر m می‌توان فرکانس‌های طبیعی ورق را به‌دست آورد.

## ۳- بحث و بررسی نتایج عددی

نتایج عددی برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هوشمند FG نسبتاً ضخیم مستطیلی برای ضخامت‌ها و شرایط مرزی مختلف محاسبه شده است. به‌دلیل وضوح و سادگی روند حل دقیق پاسخ-بسته ارائه شده، فرکانس‌های دقیق ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی FG لوی-گونه با ترکیبات مختلف شرایط مرزی آزاد (F)، ساده (S) و گیردار (C) بسادگی قابل محاسبه می‌باشد. در این بخش نتایج برای مقادیر گوناگون اندیس گرادیان و افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک آورده شده‌اند. خواص مواد در جدول ۱ نشان داده شده است. این جدول خصوصیات PZT4 برای پیزوالکتریک و $Al/Al_2O_3$ و $Al/ZrO_2$ را برای FGM نشان می‌دهد. طبق بررسی‌های انجام شده توسط چی و چانگ[2] [۱۷]، مشاهده شد که تغییرات ضریب پوآسون تاثیر اندکی روی خواص مکانیکی ورق FG دارد، بنابراین می‌توان آن را ثابت فرض کرد. در این مقاله برای تمامی محاسبات، ضریب تصحیح برش $\kappa^2$ و ضریب پوآسون $\nu$ به‌ترتیب ۵/۶ و ۰/۳ در نظر گرفته شده‌اند. به‌منظور تسهیل در ساختار نوشتن، شرایط مرزی به‌صورت مختصر نوشته می‌شوند. به‌طور مثال نماد SFSC به‌ترتیب معرف شرایط مرزی ساده، آزاد، ساده، گیردار در لبه‌های $x_1$=۰ ، $x_2$=۰، $x_1$=a و $x_2$=b می‌باشد.

1. Levy-type solution

2. Chi and Chung

### ۳-۱- نتایج مقایسه‌ای

#### ۳-۱-۱- ورق FGM بدون لایه پیزوالکتریک

به منظور بررسی دقت حل دقیق پاسخ-بسته حاضر، نتایج به‌دست آمده با نتایج ارائه شده توسط حسینی هاشمی و همکاران [۸] برمبنای روش میندلین، برای ورق FG مقایسه شده است. با صفر قرار دادن ضخامت لایه پیزوالکتریک، فرکانس‌های مربوط به ورق FG به‌دست آمده است. از انجام مقایسه‌ی نتایج حاصله از حل حاضر با نتایج مربوط به ورق FG مشاهده می‌شود که توافق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد، به نحوی که با دقت چهار رقم اعشار درصد اختلاف نتایج صفر می‌باشد.

دو فرکانس طبیعی اول برای ورق مربعی (a=b=۱) ساخته شده از $Al/ZrO_2$، در سه ضخامت مختلف ۰/۰۵ (متناظر با ورق نازک)، ۰/۱ و ۰/۲ (متناظر با ورق نسبتاً ضخیم) و هفت مقدار اندیس گرادیانی برای شرایط مرزی SFSC در جدول ۲ آورده شده است. لازم به ذکر است که در مقاله یاد شده، پارامتر فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌صورت رابطه $\beta = \omega a^2 \sqrt{\rho_c / E_c} / h$ ($\beta$ پارامتر فرکانسی نامیده شده) تعریف شده است.

شکل مودهای متناظر m و n که به‌ترتیب به تعداد نیم موج‌ها در راستای $x_1$ و $x_2$ اشاره می‌کنند، برای هر پارامتر فرکانسی $\beta$ در جدول ۲ ارائه شده است. برای مثال بالانویس ۲۱ به معنی دو نیم موج در راستای $x_1$ (m=۲) و یک نیم موج در راستای $x_2$ (n=۱) می‌باشد.

#### ۳-۱-۲- ورق FGM با لایه پیزوالکتریک

در این بخش، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی FG با لایه پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته است. در جداول ۳ و ۴، به‌منظور حصول اطمینان از درستی حل دقیق پاسخ-بسته حاضر مقایسه‌ای با روش المان محدود صورت پذیرفته و نتایج عددی برای شرایط مرزی SSSS و SFSC ورق مربعی FG (a=b=۱) $Al/Al_2O_3$ با لایه پیزوالکتریک PZT4 در حالت g=۱ آورده شده است. برای بررسی ارتعاشات آزاد ۳D از نرم افزار ABAQUS استفاده کردیم. برای یافتن تعداد المان‌های مورد نیاز، همگرایی پاسخ را مورد توجه قرار دادیم. به این ترتیب که افزایش تعداد المان‌ها تا جایی ادامه داده شد که پاسخ به یک همگرایی برسد.

سه ضخامت مختلف برای ورق و لایه‌های پیزوالکتریک (۰/۰۲/۲؛ ۰/۱، ۰/۰۱؛ ۰/۵، ۰/۰۵) مورد بررسی قرار گرفته است به‌طوری‌که نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق FG، مقدار ثابت $h_p / 2h = 1/10$ در نظر گرفته شده است.

**جدول ۱** خواص مواد

| پیزوالکتریک | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | مدول الاستیسیته (GPa) | | | | | ثوابت پیزوالکتریک ($C/m^2$) | | | ثوابت دی الکتریک (nV/Vm) | | | چگالی ($Kg/m^3$) |
| PZT4 | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{33}$ | $C_{55}$ | $e_{15}$ | $e_{31}$ | $e_{33}$ | $\Xi_{11}$ | $\Xi_{22}$ | $\Xi_{33}$ | $\rho$ |
| | ۱۳۲ | ۷۱ | ۷۳ | ۱۱۵ | ۲۶ | ۱۰/۵ | -۴/۱ | ۱۴/۱ | ۷/۱۲۴ | ۷/۱۲۴ | ۵/۸۴۱ | ۷۵۰۰ |

| FGM | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\rho_c\,(Kg/m^3)$ | $E_c\,(Gpa)$ | $\rho_m\,(Kg/m^3)$ | $E_m\,(Gpa)$ |
| $Al/Al_2O_3$ | ۳۸۰۰ | ۳۸۰ | ۲۷۰۲ | ۷۰ |
| $Al/Al_2O_3$ | ۵۷۰۰ | ۲۰۰ | ۲۷۰۲ | ۷۰ |

**جدول ۲** مقایسه پارامترهای فرکانسی برای ورق مربعی $Al/Al_2O_3$، شرط مرزی SFSC با نتایج مقاله[۸]

| ضخامت ورق FG (h) | | شماره مود | اندیس گرادیانی (g) ۰ | ۰.۵ | ۱ | ۲ | ۵ | ۸ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۰۵ | حل حاضر | $\beta_1$ | ۳/۷۹۶۲$^{11}$ | ۳/۵۷۳۲$^{11}$ | ۳/۴۹۲۰$^{11}$ | ۳/۴۸۷۷$^{11}$ | ۳/۵۶۶۵$^{11}$ | ۳/۵۷۰۶$^{11}$ | ۳/۵۵۸۴$^{11}$ |
| | حسینی هاشمی[۸] | $\beta_1$ | ۳/۷۹۶۲$^{11}$ | ۳/۵۷۳۲$^{11}$ | ۳/۴۹۲۰$^{11}$ | ۳/۴۸۷۷$^{11}$ | ۳/۵۶۶۵$^{11}$ | ۳/۵۷۰۶$^{11}$ | ۳/۵۵۸۴$^{11}$ |
| | حل حاضر | $\beta_2$ | ۹/۷۴۸۷$^{12}$ | ۹/۱۸۳۶$^{12}$ | ۸/۹۷۵۵$^{12}$ | ۸/۹۵۹۵$^{12}$ | ۹/۱۴۹۱$^{12}$ | ۹/۱۵۶۲$^{12}$ | ۹/۱۲۴۴$^{12}$ |
| | حسینی هاشمی[۸] | $\beta_2$ | ۹/۷۴۸۷$^{12}$ | ۹/۱۸۳۶$^{12}$ | ۸/۹۷۵۵$^{12}$ | ۸/۹۵۹۵$^{12}$ | ۹/۱۴۹۱$^{12}$ | ۹/۱۵۶۲$^{12}$ | ۹/۱۲۴۴$^{12}$ |
| ۰/۱ | حل حاضر | $\beta_1$ | ۳/۷۰۶۸$^{11}$ | ۳/۴۹۳۶$^{11}$ | ۳/۴۱۴۶$^{11}$ | ۳/۴۰۷۴$^{11}$ | ۳/۴۷۶۶$^{11}$ | ۳/۴۷۸۶$^{11}$ | ۳/۴۶۶۴$^{11}$ |
| | حسینی هاشمی[۸] | $\beta_1$ | ۳/۷۰۶۸$^{11}$ | ۳/۴۹۳۶$^{11}$ | ۳/۴۱۴۶$^{11}$ | ۳/۴۰۷۴$^{11}$ | ۳/۴۷۶۶$^{11}$ | ۳/۴۷۸۶$^{11}$ | ۳/۴۶۶۴$^{11}$ |
| | حل حاضر | $\beta_2$ | ۹/۲۰۲۱$^{12}$ | ۸/۶۹۵۳$^{12}$ | ۸/۵۰۰۶$^{12}$ | ۸/۴۶۷۰$^{12}$ | ۸/۶۰۱۸$^{12}$ | ۸/۵۹۶۴$^{12}$ | ۵/۵۶۵۱$^{12}$ |
| | حسینی هاشمی[۸] | $\beta_2$ | ۹/۲۰۲۱$^{12}$ | ۸/۶۹۵۳$^{12}$ | ۸/۵۰۰۶$^{12}$ | ۸/۴۶۷۰$^{12}$ | ۸/۶۰۱۸$^{12}$ | ۸/۵۹۶۴$^{12}$ | ۵/۵۶۵۱$^{12}$ |
| ۰/۲ | حل حاضر | $\beta_1$ | ۳/۴۳۸۳$^{11}$ | ۳/۲۵۲۸$^{11}$ | ۳/۱۸۰۴$^{11}$ | ۳/۱۶۵۱$^{11}$ | ۳/۲۰۹۲$^{11}$ | ۳/۲۰۵۵$^{11}$ | ۳/۱۹۳۶$^{11}$ |
| | حسینی هاشمی[۸] | $\beta_1$ | ۳/۴۳۸۳$^{11}$ | ۳/۲۵۲۸$^{11}$ | ۳/۱۸۰۴$^{11}$ | ۳/۱۶۵۱$^{11}$ | ۳/۲۰۹۲$^{11}$ | ۳/۲۰۵۵$^{11}$ | ۳/۱۹۳۶$^{11}$ |
| | حل حاضر | $\beta_2$ | ۷/۷۹۳۷$^{12}$ | ۷/۴۱۷۰$^{12}$ | ۷/۲۵۵۳$^{12}$ | ۷/۱۸۹۴$^{12}$ | ۷/۱۸۹۴$^{12}$ | ۷/۱۹۱۶$^{12}$ | ۷/۱۶۲۸$^{12}$ |
| | حسینی هاشمی[۸] | $\beta_2$ | ۷/۷۹۳۷$^{12}$ | ۷/۴۱۷۰$^{12}$ | ۷/۲۵۵۳$^{12}$ | ۷/۱۸۹۴$^{12}$ | ۷/۱۸۹۴$^{12}$ | ۷/۱۹۱۶$^{12}$ | ۷/۱۶۲۸$^{12}$ |

مقادیر برجسته در جداول [۳، ۴] مودهای درون- صفحه‌ای را مشخص می‌کنند. درصد خطای داده شده در جداول مربوطه از رابطه‌ی زیر بدست آمده است:

$$\%\ \mathrm{Diff} = \frac{\left[(\mathrm{FEM}) - (\mathrm{Present\ mehod})\right]}{(\mathrm{FEM})} \times 100$$

همانگونه که از جداول (۳) و (۴) مشاهده می‌شود سازگاری بسیار خوبی بین نتایج حل حاضر و روش المان محدود ۳D در فرکانس‌های بالا و پایین وجود دارد و اختلاف آن‌ها در بدترین حالت از ۲/۷۷ تجاوز نمی‌کند.

فرکانس‌های طبیعی با افزایش ضخامت ورق افزایش پیدا می‌کنند که این پدیده ناشی از افزایش صلبیت ورق می‌باشد. هنگامی که لبه‌های ورق مقیدتر باشند صلبیت سازه بالاتر می‌رود و در نتیجه مقادیر فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابد. بنابراین شرط مرزی گیردار همواره فرکانس‌هایی بالاتر از سایر شرایط مرزی تولید می‌نماید. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که حل حاضر مودهای درون-صفحه‌ای را با دقت بسیار بالایی پیش بینی می‌کند. نتایج همچنین نشان می‌دهد که تعداد مودهای درون-صفحه‌ای در هشت فرکانس طبیعی اول با افزایش ضخامت ورق به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابند، که ناشی از این حقیقت است که انرژی خمشی ورق حساسیت بسیار بالایی نسبت به ضخامت دارد. مودهای خارج-صفحه‌ای نیز به‌طور مستقیم به انرژی خمشی ورق بستگی دارند. بنابراین تعداد مودهای خارج-صفحه‌ای با افزایش ضخامت ورق و افزایش تعداد مودهای درون-صفحه‌ای کاهش می‌یابد.

### ۳-۱-۳- مودهای درون-صفحه‌ای و خارج-صفحه‌ای

مودهای ارتعاشی ورق FG را می‌توان به دو دسته اصلی تقسیم نمود: ۱- مودهای خارج صفحه‌ای (عرضی) و مودهای درون- صفحه‌ای. برای مودهای درون-صفحه‌ای، مقدار جابجایی عرضی نسبت به جابجایی درون-صفحه‌ای u و v خیلی کوچکتر است.

**جدول ۳** هشت فرکانس طبیعی (برحسب هرتز) برای ورق SSSS مربعی $Al/Al_2O_3$ با لایه پیزوالکتریک PZT4 و اندیس گرادیانی g=۱

| روش | | شماره مود | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
| ۲h=۰/۰۵ $h_p$=۰/۰۰۵ | نتایج حاضر | ۳۳۳/۸۴ | ۸۲۲/۸۲ | ۸۲۲/۸۲ | ۱۲۹۸/۶۱ | ۱۶۰۸/۹۶ | ۱۶۰۸/۹۶ | ۲۰۶۴/۸۹ | ۲۰۶۴/۸۹ |
| | روش المان محدود | ۳۳۳/۸۱ | ۸۳۲/۷۴ | ۸۳۲/۷۴ | ۱۳۱۳/۹ | ۱۶۲۸/۷ | ۱۶۲۸/۷ | ۲۰۸۹/۵ | ۲۰۸۹/۵ |
| | خطا٪ | ۱/۱۸ | ۱/۱۹ | ۱/۱۹ | ۱/۱۶ | ۱/۲۱ | ۱/۲۱ | ۱/۱۸ | ۱/۱۸ |
| ۲h=۰/۱ $h_p$=۰/۰۱ | نتایج حاضر | ۶۴۹/۳۰ | ۱۵۴۳/۸۷ | ۱۵۴۳/۸۷ | ۲۲۰۷/۵۴ | ۲۲۰۷/۵۴ | ۲۳۶۳/۳۹ | ۲۸۷۵/۹۳ | ۲۸۷۵/۹۳ |
| | روش المان محدود | ۶۵۶/۹۰ | ۱۵۶۲/۶ | ۱۵۶۲/۶ | ۲۲۰۳/۵ | ۲۲۰۳/۵ | ۲۳۹۲/۶ | ۲۹۱۴/۰ | ۲۹۱۴/۰ |
| | خطا٪ | ۱/۱۶ | ۱/۲۰ | ۱/۲۰ | -۰/۱۸ | -۰/۱۸ | ۱/۲۲ | ۱/۳۱ | ۱/۳۱ |
| ۲h=۰/۲ $h_p$=۰/۰۲ | نتایج حاضر | ۱۱۸۱/۶۹ | ۲۲۰۶/۵۶ | ۲۲۰۶/۵۶ | ۲۵۷۰/۵۸ | ۲۵۷۰/۵۸ | ۳۱۱۸/۶۱ | ۳۷۰۸/۵۶ | ۴۳۷۸/۱۹ |
| | روش المان محدود | ۱۱۹۶/۲ | ۲۱۹۳/۷ | ۲۱۹۳/۷ | ۲۶۱۰/۰ | ۲۶۱۰/۰ | ۳۰۸۵/۱ | ۳۷۷۴/۰ | ۴۳۰۲/۷ |
| | خطا٪ | ۱/۲۱ | -۰/۵۹ | -۰/۵۹ | ۱/۵۱ | ۱/۵۱ | -۱/۰۹ | ۱/۷۳ | -۱/۷۵ |

**جدول ۴** هشت فرکانس طبیعی (برحسب هرتز) برای ورق SFSC مربعی $Al/Al_2O_3$ با لایه پیزوالکتریک PZT4 و اندیس گرادیانی g=۱

| روش | | شماره مود | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
| ۲h=۰/۰۵ $h_p$=۰/۰۰۵ | نتایج حاضر | ۲۱۰/۹۰ | ۵۴۵/۵۲ | ۶۹۰/۱۰ | ۱۰۲۷/۳۵ | ۱۱۷۷/۸۹ | ۱۴۷۰/۲۶ | ۱۶۴۹/۰۲ | ۱۷۹۳/۳۱ |
| | روش المان محدود | ۲۱۶/۹۱ | ۵۵۶/۱۰ | ۷۰۴/۲۵ | ۱۰۴۶/۷ | ۱۱۹۴/۸ | ۱۴۹۶/۶ | ۱۶۷۵/۲ | ۱۸۲۳/۴ |
| | خطا٪ | ۲/۷۷ | ۱/۹۰ | ۲/۰۰ | ۱/۸۵ | ۱/۴۲ | ۱/۷۶ | ۱/۵۶ | ۱/۶۵ |
| ۲h=۰/۱ $h_p$=۰/۰۱ | نتایج حاضر | ۴۱۱/۱۴ | ۱۰۲۶/۰۹ | ۱۳۰۱/۳۷ | ۱۸۷۸/۰۲ | ۲۱۱۶/۶ | ۲۳۶۱/۰۵ | ۲۶۴۰/۳۲ | ۲۸۸۲/۴۱ |
| | روش المان محدود | ۴۲۲/۶۷ | ۱۰۴۳/۷ | ۱۳۲۷/۰ | ۱۹۱۰/۰ | ۲۱۳۹/۲ | ۲۳۴۸/۴ | ۲۶۸۶/۰ | ۲۹۲۵/۸ |
| | خطا٪ | ۲/۷۳ | ۱/۶۹ | ۱/۹۳ | ۱/۶۷ | ۱/۰۶ | -۰/۵۴ | ۱/۷۰ | ۱/۴۸ |
| ۲h=۰/۲ $h_p$=۰/۰۲ | نتایج حاضر | ۷۵۹/۰۷ | ۱۷۲۱/۸۵ | ۲۱۹۷/۳۹ | ۲۳۶۰/۵۶ | ۲۹۸۱/۵۶ | ۳۲۳۴/۳۳ | ۳۶۶۲/۹۲ | ۴۰۸۱/۷۷ |
| | روش المان محدود | ۷۷۸/۲۸ | ۱۷۳۸/۹ | ۲۲۳۶/۲ | ۲۳۳۶/۵ | ۳۰۱۷/۲ | ۳۲۵۴/۴ | ۳۵۹۰/۹ | ۴۱۱۲/۷ |
| | خطا٪ | ۲/۴۷ | ۰/۹۸ | ۱/۷۴ | -۱/۰۳ | ۱/۱۸ | ۰/۶۲ | -۲/۰۰ | ۰/۷۵ |

یک اختلاف اساسی بین مودهای درون-صفحه‌ای ورق ایزوتروپیک و ورق FG وجود دارد. وقتی یک ورق ایزوتروپیک دارای مود درون-صفحه‌ای باشد، جابجایی عرضی وجود ندارد و ورق فقط دارای حرکت درون-صفحه‌ای می‌باشد. اما به‌دلیل وجود وابستگی بین ارتعاشات خارج-صفحه‌ای و درون-صفحه‌ای در ورق FG، مودهای درون-صفحه‌ای دارای هر دو نوع حرکت هستند درحالیکه ارتعاشات درون-صفحه‌ای غالب است.

### ۳-۱-۴- تاثیر اندیس گرادیان g روی فرکانس‌های طبیعی

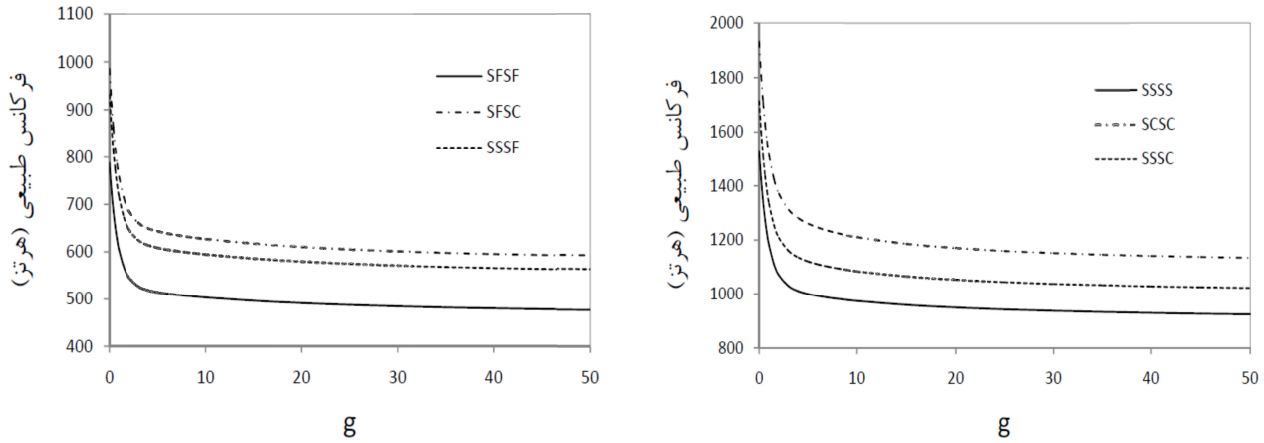
شکل (۲) تغییرات فرکانس‌های طبیعی اساسی (برحسب هرتز) در مقابل اندیس گرادیان g برای یک ورق مربعی (a=b=۱) FG با دو لایه پیزوالکتریک، در شش شرط مرزی ممکن برای حل لوی-گونه را نشان می‌دهد. در این بررسی جنس ورق FG، $Al/Al_2O_3$ با اندیس گرادیان g=۱ و ضخامت ۲h=۰/۲ و جنس ورق پیزوالکتریک PZT4 و ضخامت آن $h_p$=۰/۰۲ در نظرگرفته شده است.

روند کاهش فرکانس‌ها با افزایش اندیس گرادیان به خوبی در این شکل مشخص است، به‌نحوی که با افزایش اندیس گرادیان شیب نمودار به سمت صفر میل می‌نماید. این میزان کاهش در ابتدا دارای شیب نسبتاً تندی می‌باشد و هنگامی که این شاخص بزرگتر می‌گردد، این نرخ کاهش کمتر می‌شود. چنین رفتاری به‌دلیل تاثیر اینرسی دورانی و تغییر شکل‌های برشی است.

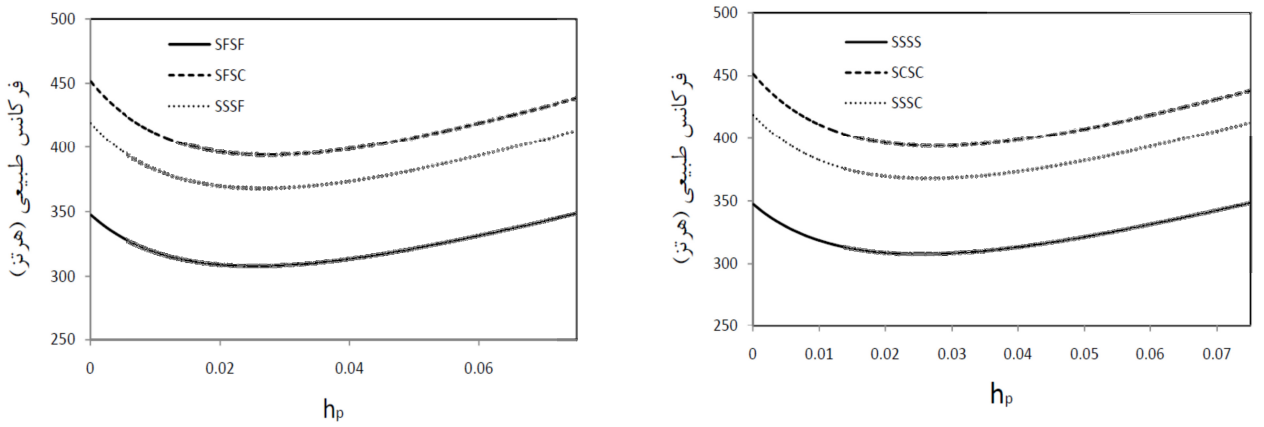
### ۳-۱-۵- تاثیر ضخامت لایه پیزوالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی

در شکل (۳) تغییرات فرکانس‌های طبیعی اساسی (برحسب هرتز) در مقابل افزایش ضخامت لایه پیزوالکتریک برای ورق مربعی مشابه با خصوصیات ورق بیان شده در شکل (۲) نشان داده شده است. ضخامت ورق FG، ۲h=۰/۱ در نظر گرفته شده است و ضخامت لایه پیزوالکتریک از ۰ تا ۰/۰۷۵ افزایش داده شده است، به‌طوری‌که ضخامت کل از بیشترین حد مجاز در محدوده‌ی ورق میندلین یعنی ۰/۲۵ تجاوز نکند.

به‌دلیل این که با افزایش ضخامت پیزوالکتریک صلبیت سازه افزایش می‌یابد، انتظار می‌رود که فرکانس‌ها نیز افزایش یابند؛ اما همانگونه که مشاهده می‌شود، در ابتدا با افزایش ضخامت پیزوالکتریک فرکانس‌ها کاهش می‌یابند، این پدیده به این دلیل است که در این مودها اثر پیزوالکتریسیته در کاهش فرکانس‌ها بر اثر افزایش صلبیت خمشی غلبه می‌نماید و در نهایت موجب کاهش فرکانس می‌گردد.




**شکل ۲** تاثیر اندیس گرادیان برفرکانس‌های (برحسب هرتز) طبیعی اساسی ورق مربعی FG (a=b=۱) $Al/Al_2O_3$ با لایه پیزوالکتریک PZT4 در شرایط مرزی لوی-گونه در حالتی که ۲h=۰/۲ و $h_p$=۰/۰۲




**شکل ۳** تاثیر افزایش ضخامت پیزوالکتریک به ورق FG زمینه برفرکانس‌های (برحسب هرتز) طبیعی اساسی ورق مربعی FG (a=b=۱) $Al/Al_2O_3$با لایه پیزوالکتریک PZT4 در شرایط مرزی لوی-گونه در حالتی که ۲h=۰/۱ و g=۱

## ۴- نتیجه گیری

در این مقاله حل دقیق پاسخ-بسته ارتعاشات آزاد ورق نسبتاً ضخیم مستطیلی FG با لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین آن، با شرایط مرزی لوی-گونه (SSSS-SCSC-SFSF-SCSF-SSSF-SSSC) برمبنای تئوری مرتبه اول برشی میندلین ارائه گردید. لایه‌های پیزوالکتریک مدار بسته در نظر گرفته شد. معادله ماکسول با استفاده از تابع توزیع پتانسیل الکتریکی سینوسی در امتداد ضخامت لایه پیزوالکتریک ارضا گردید. برمبنای تئوری میندلین پنج معادله دیفرانسیل جزئی حرکت برای ارتعاشات آزاد ورق FG و معادله ماکسول، با استفاده از توابع کمکی معرفی شده و استفاده از روش جداسازی متغییرها به‌طور دقیق حل شدند. برای تایید دقت و صحت حل حاضر نتایج بدست آمده با مقالات پیشین و روش المان محدود ۳D مقایسه شد. با صفر کردن ضخامت پیزوالکتریک مشاهده شد که حل حاضر سازگاری بسیار بالایی با نتایج موجود برای ورق FG دارد. برای ارزیابی نتایج مربوط به ورق FG با لایه پیزوالکتریک نیز از نرم افزار ABAQUS استفاده گردید و دقت و کارایی حل حاضر مورد تایید واقع شد. تاثیر پارامترهای ورق از قبیل اندیس گرادیان و افزایش ضخامت پیزوالکتریک بر روی فرکانس‌های طبیعی برای شرایط مرزی لوی-گونه مورد بررسی قرار گرفت.

## ۵- ضمیمه

### ۵-۱- ضمیمه A:

$$B_{11} = 1 + (\frac{P_2}{2} - \frac{D}{B}\frac{P_1}{2})(C_{11} - C_{12})\xi$$

$$B_{12} = (\frac{P_1}{2} - \frac{A}{B}\frac{P_2}{2})(C_{11} - C_{12})\xi$$

$$B_{13} = \frac{(1+\upsilon)}{(1-\upsilon)} + (\frac{P_2}{2} - \frac{D}{B}\frac{P_1}{2})(C_{11} + C_{12})\xi$$

$$B_{14} = (\frac{P_1}{2} - \frac{A}{B}\frac{P_2}{2})(C_{11} + C_{12})\xi$$

$$B_{15} = (\frac{D}{B} I_1 - I_2)\xi\omega^2$$

$$B_{16} = (-I_1 + \frac{A}{B} I_2)\xi\omega^2$$

$$B_{31} = (\frac{P_3}{2} - \frac{D}{B}\frac{P_2}{2})(C_{11} - C_{12})\xi$$

$$B_{32} = 1 + (\frac{P_2}{2} - \frac{A}{B}\frac{P_3}{2})(C_{11} - C_{12})\xi$$

$$B_{33} = (\frac{P_3}{2} - \frac{D}{B}\frac{P_2}{2})(C_{11} + C_{12})\xi$$

$$B_{34} = \frac{(1+\upsilon)}{(1-\upsilon)} + (\frac{P_2}{2} - \frac{A}{B}\frac{P_3}{2})(C_{11} + C_{12})\xi$$

$$B_{35} = 4(e_{31} + e_{15})\frac{h_p}{\pi}$$

$$B_{36} = (\frac{D}{B} I_2 - I_3)\xi\omega^2 + \kappa^2(\frac{1-\upsilon}{2} A + P_1 C_{55})\xi$$

$$B_{37} = (-I_2 + \frac{A}{B} I_3)\xi\omega^2 - \frac{A}{B}\kappa^2(\frac{1-\upsilon}{2} A + P_1 C_{55})\xi$$

$$B_{38} = \kappa^2(\frac{1-\upsilon}{2} A + P_1 C_{55})$$

$$B_{51} = \kappa^2(\frac{1-\upsilon}{2} A + P_1 C_{55})\xi$$

$$B_{52} = \kappa^2 \frac{A}{B}(\frac{1-\upsilon}{2} A + P_1 C_{55})\xi$$

$$B_{53} = 4e_{15}\frac{h_p}{\pi}$$

$$B_{54} = I_1\omega^2$$

$$B_{55} = B_{38}$$

$$B_{61} = (e_{15} + e_{31})\frac{h_p^2}{2\pi}\xi$$

$$B_{62} = \frac{A}{B}(e_{15} + e_{31})\frac{h_p^2}{2\pi}\xi$$

$$B_{63} = \frac{h_p^2}{\pi}\Xi_{11}$$

$$B_{64} = \Xi_{33}$$

$$B_{65} = \frac{h_p^2}{2\pi} e_{15}$$

### ۵-۲- ضمیمه B:

$$a_1 = (-(B_{16}B_3 - B_{15}B_4)(B_{55}B_{63} + B_{53}B_{65}) + B_2(B_{38}B_{53}B_{61} - B_{35}B_{55}B_{61} + B_{38}B_{51}B_{63} + B_3B_{54}B_{63} - B_{36}B_{55}B_{63} - B_3B_{55}B_{64} + B_{35}B_{51}B_{65} - B_{36}B_{53}B_{65}) + B_1(B_{38}B_{53}B_{62} - B_{35}B_{55}B_{62} + B_{38}B_{52}B_{63} - B_4B_{54}B_{63} + B_{37}B_{55}B_{63}) + B_4B_{55}B_{64} + B_{35}B_{52}B_{65} + B_{37}B_{53}B_{65})) / ((B_2B_3 - B_1B_4)(B_{55}B_{63} + B_{53}B_{65}))$$

$$a_2 = -(B_{15}B_{38}B_{53}B_{62} + B_1B_{35}B_{54}B_{62} - B_{15}B_{35}B_{55}B_{62} + B_{15}B_{38}B_{52}B_{63} - B_1B_{37}B_{54}B_{63} - B_{15}B_4B_{54}B_{63} + B_{15}B_{37}B_{55}B_{63} + B_1B_{38}B_{52}B_{64} - B_1B_4B_{54}B_{64} + B_1B_{37}B_{55}B_{64} + B_{15}B_4B_{55}B_{64} + B_2(B_{35}B_{54}B_{61} + B_{36}B_{54}B_{63} + B_{38}B_{51}B_{64} + B_3B_{54}B_{64} - B_{36}B_{55}B_{64}) + B_{15}B_{35}B_{52}B_{65} + B_{15}B_{37}B_{53}B_{65} + B_{16}(B_{38}B_{53}B_{61} - B_{35}B_{55}B_{61} + B_{38}B_{51}B_{63} + B_3B_{54}B_{63} - B_{36}B_{55}B_{63} - B_3B_{55}B_{64} + B_{35}B_{51}B_{65} - B_{36}B_{53}B_{65})) / ((B_2B_3 - B_1B_4)(B_{55}B_{63} + B_{53}B_{65}))$$

$$a_3 = ((B_2B_{36} - B_1B_{37})B_{54}B_{64} + B_{16}(B_{35}B_{54}B_{61} + B_{36}B_{54}B_{63} + B_{38}B_{51}B_{64} + B_3B_{54}B_{64} - B_{36}B_{55}B_{64}) + B_{15}(B_{35}B_{54}B_{62} - B_{37}B_{54}B_{63} + B_{38}B_{52}B_{64} - B_4B_{54}B_{64} + B_{37}B_{55}B_{64})) / ((B_2B_3 - B_1B_4)(B_{55}B_{63} + B_{53}B_{65}))$$

$$a_4 = \frac{(-B_{16}B_{36} + B_{15}B_{37})B_{54}B_{64}}{(B_2B_3 - B_1B_4)(B_{55}B_{63} + B_{53}B_{65})}$$

### ۵-۳- ضمیمه C:

$$r_1 = B_{31} - \frac{B_{32}}{B_{12}} B_{11}$$

$$r_2 = \frac{B_{32}}{B_{12}} B_{15} - B_{36}$$

$$r_3 = \frac{B_{32}}{B_{12}} B_{16} - B_{37}$$

$$C_i = (B_{15}B_{38} - (B_{15}B_{33} - B_{13}B_{36})d_i - (B_{15}B_{34} - B_{14}B_{36})d_{i+4} + B_{15}B_{35}e_i + B_{11}B_{38}\alpha_i^2 + (B_{13}B_{31} - B_{11}B_{33})d_i\alpha_i^2 + (B_{14}B_{31} - B_{11}B_{34})d_{i+4}\alpha_i^2 + B_{11}B_{35}e_i\alpha_i^2) / (B_{16}B_{36} - B_{15}B_{37} + (B_{16}B_{31} - B_{15}B_{32} + B_{12}B_{36} - B_{11}B_{37})\alpha_i^2 + (B_{12}B_{31} - B_{11}B_{32})\alpha_i^4), \qquad i = 1-4$$

$$C_i = ((B_{38} - B_{33}d_{i-4} - B_{34}d_i + B_{35}e_{i-4})(-B_{16} - B_{12}\alpha_{i-4}^2) + (B_{13}d_{i-4} + B_{14}d_i)(-B_{37} - B_{32}\alpha_{i-4}^2)) / ((-B_{16} - B_{12}\alpha_{i-4}^2)(-B_{36} - B_{31}\alpha_{i-4}^2) - (-B_{15} - B_{11}\alpha_{i-4}^2)(-B_{37} - B_{32}\alpha_{i-4}^2)), \qquad i = 5-8$$

$$C_i = \frac{-B_{37} - B_{32}\alpha_{i-4}^2}{B_{36} + B_{31}\alpha_{i-4}^2}, \ i = 9,10$$

## ۶- مراجع

[1] Yamanouchi, M., Koizumi, M. and Hirai, Shiota I., Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, Japan, 1990.

[2] Koizumi, M., The concept of FGM, ceramic transactions, functionally grdient materials, 1993, 3(1): 3-10.

[3] Lien-Wen Chen, Chung-Yi Lin and Ching-Cheng Wang,. Dynamic stability Analysis and Control of a Composite Beam with Piezoelectric Layers. Elsevier, Composite structures, Vol.56, PP.97-109, 2002.

[4] Argillon Gmbh,. Piezoproducts Bending Actuator Germany, April.2001.

[5] Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic Plates. J Appl Mech 1951; 18:A31-8.

[6] Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Jorge RMN. Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. Composite Structures 2006; 75:593-600.

[7] Pradyumna S, Bandyopadhyay JN. Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation. Journal of Sound and Vibration 2008; 318:176-92.

[8] Sh. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. International Journal of Mechanical Science 2011; 53:11-22.

[9] Sh. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour. Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. Composite Structures 2010; 93:722-735.

[10] Cheng ZQ, Batra RC. Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. Archive of Mechanics 2000; 52:43-58.
[11] Piotr Cupial. Tree-dimensional natural vibration analysis and energy considerations for a piezoelectric rectangular plate. Journal of Sound and Vibration 2005; 283:1093-1113.
[12] W.Q.Chen, H.J.Ding, Hangzhou, P.R. China. On free vibration of a functionally graded piezoelectric rectangular plate. Acta Mechanica 2000; 153:207-216.
[13] Zheng Zhong, Tao Yu. Vibration of simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate. Smart materials and structures 2006; 15:1404-1412.
[14] J. N. Reddy, Z.-Q. Cheng. Three-dimentional solutions of smart functionally graded plates. Journal of Applied Mechanics 2001;68:234-241.
[15] Vahid Fakhari, Abdolreza Ohadi, peyman Yousefian. Nonlinear free and forced vibration behavior of functionally graded plate with piezoelectric layer in thermal environment. Composite Structure 2011; 93:2310-2321.
[16] Mindlin RD. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. ASME Journal of Applied Mechanics 1951; 18:31-8.
[17] Chi SH, Chung YL. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load – part II: numerical results. Int J Solids Struct 2006; 43:3675-3691.