



مدل سازی تغییرات غیرخطی مدول الاستیک تحت بارگذاری متناوب

عباس قائی

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان
ghaei@cc.iut.ac.ir، ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱، کد پستی

چکیده- نتایج تجربی بارگذاری-باربرداری روی فلزات نشان می‌دهد که رفتار ماده حین باربرداری و یا بارگذاری مجدد بعد از تغییر شکل پلاستیک پیچیده و غیرخطی است. ولی بیشتر مدل‌ها برای ساده‌سازی، از یک مقدار ثابت کاهش یافته برای مدول الاستیک حین باربرداری استفاده کرده‌اند. در این مقاله با هدف توصیف رفتار غیرخطی باربرداری، یک مدل هایپوالاستیک پیشنهاد گردید. در این مدل با شروع تغییر شکل الاستیک، مدول الاستیک از مقدار اولیه خود به صورت نمایی شروع به کاهش یافته و در لحظه شروع تغییر شکل پلاستیک به مقدار نهایی خود می‌رسد. این مدل به سادگی قابلیت اضافه شدن به هر معادله ساختاری پلاستیسیته را دارد و همچنین برای پیاده‌سازی عددی آن نیاز به اصلاح روش‌های رایج پیاده‌سازی مثل نگاشت برگشتی نیست. به عنوان مثال، یک مدل ساده پلاستیسیته شامل سطح تسلیم فون-میزس و قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک در نظر گرفته شد و مدل هایپوالاستیک پیشنهادی در قالب یک زیر روال برای نرم‌افزار تجاری آباکوس پیاده‌سازی شد. نتایج مقایسه رفتار تجربی فولاد دوفازی ۹۸۰ و رفتار پیش‌بینی شده توسط مدل نشان می‌دهد این مدل ساده قادر است تا رفتار غیرخطی باربرداری را با تقریب خوبی توصیف نماید.

کلیدواژگان: معادله ساختاری، رفتار غیرخطی باربرداری، تغییر مدول الاستیک، مدل هایپوالاستیک.

Modeling of nonlinear elastic modulus variation during cyclic loading

A. Ghaei

Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Isfahan Univ. of Tech., Isfahan, Iran
P.O.B. 84156-83111 Isfahan, Iran. ghaei@cc.iut.ac.ir

Abstract- Complex nonlinear unloading behavior following plastic deformation on metals has been observed by researchers. However, a constant chord modulus has been used by most of the researchers to describe the unloading behavior. In this study, a new hypoelastic model is proposed in order to describe this complex nonlinear behavior. The elastic modulus is assumed to be the initial Young's modulus at the beginning of each loading reversal and is exponentially decreased with the elastic deformation and finally saturates to a particular value at the start of plastic deformation. The model can be easily utilized in any plasticity constitutive law. Furthermore, its numerical implementation is fairly straightforward. As an example, a simple constitutive law was developed using the von-Mises yield function, isotropic hardening law and the proposed hypoelastic model. This constitutive law was implemented into ABAQUS commercial package via a user material subroutine UMAT. A comparison between the experimental response of DP980 and its simulated response showed that the model is able to describe the material response fairly well.

Keywords: Constitutive Law, Nonlinear Unloading Behavior, Elastic Modulus Variation, Hypoelastic Model.

۱- مقدمه

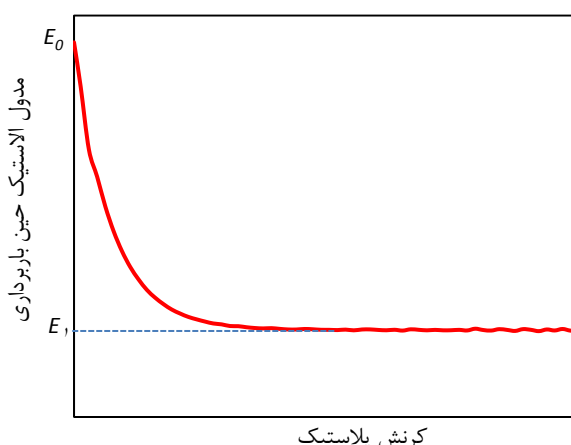
امروزه مدل های عددی یا تحلیلی در حل بسیاری از مسائل مهندسی استفاده می شوند. واضح است که توصیف رفتار ماده یکی از مراحل مدل سازی است و بر دقت مدل سازی تأثیر زیادی دارد. رفتار ماده بسته به عواملی مانند جنس ماده، دما، مقدار بار و نوع بارگذاری می تواند کاملاً پیچیده باشد. بنابراین، استفاده از معادلات ساختاری پیشرفته که توانایی توصیف رفتار پیچیده ماده را در شرایط مورد نظر داشته باشند، امری ضروری است. به همین دلیل، تاکنون بسیاری از محققان معادلات ساختاری جدیدی برای توصیف رفتار ماده پیشنهاد کرده اند.

یکی از شرایطی که منجر به ایجاد رفتار پیچیده در ماده می شود، بارگذاری چرخه ای است. پدیده های متعددی از جمله اثر باوشینگر، نرم شوندگی دائمی، منطقه گذرای باوشینگر با تغییرات زیاد نرخ کارسختی و کاهش مدول الاستیک باربرداری در بارگذاری چرخه ای گزارش شده است [۱-۳]. از بین این پدیده ها، این مقاله سعی دارد تا با تمرکز بر روی پدیده رفتار ماده حین باربرداری به ارائه یک مدل جدید برای توصیف آن بپردازد.

لو و گوش [۴] مدول الاستیک و ضریب پواسون را حین باربرداری و بارگذاری مجدد فولاد اندازه گیری کردند و گزارش دادند که هر دو این پارامترها حین باربرداری و بارگذاری مجدد نسبت به حالت اولیه تغییر یافته اند. بنیتو و همکاران [۵] نیز مدول الاستیک را حین باربرداری بعد از تغییر شکل پلاستیک برای آهن خالص اندازه گیری کرده و گزارش دادند که آن از ۲۱۰ گیگا پاسکال به ۱۹۸ گیگاپاسکال کاهش یافته است. این تغییر در مدول الاستیک توسط محققان دیگری نیز گزارش شده است [۶-۸]. همچنین، مقالات نشان می دهند که رفتار ماده هنگام باربرداری کاملاً غیرخطی است. البته لازم به ذکر است این رفتار غیرخطی برای فلزات پراستحکام جدید مانند فولادهای دوفازی با وضوح بیشتری در منحنی تنش-کرنش خود را نشان می دهد. ولی به هر حال، در راستای مدل سازی این پدیده و البته ساده سازی آن، اکثر محققان فرض کرده اند که منحنی تنش-کرنش حین باربرداری خطی بوده و بنابراین یک شیب ثابت خواهد داشت [۸-۱۳]. این شیب که بیانگر مدول الاستیک باربرداری می باشد به صورت تابعی از کرنش پلاستیک در لحظه باربرداری می باشد. البته لازم به ذکر است مدول الاستیک باربرداری در کرنش های پلاستیک کم به

سرعت کاهش یافته ولی در کرنش های پلاستیک بالا به یک مقدار مشخص میل می کند. این موضوع به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است که در آن E_0 مدول الاستیک ماده اولیه بدون اعمال کرنش پلاستیک و E_1 مدول الاستیک ماده ای است که مقدار زیادی کرنش پلاستیک بر روی آن اعمال شده است.

سان و واگنر [۱۴] ضمن بررسی منحنی تنش-کرنش هنگام بارگذاری چرخه ای بر روی ورق فولادهای دوفازی نیز گزارش کردند که رفتار ماده کاملاً غیرخطی می باشد. شکل ۲ منحنی تنش-کرنش هنگام بارگذاری-باربرداری بر روی فولاد دوفازی ۱۹۸۰ را نشان می دهد. آنها برای انجام این آزمایش ها، نمونه های استاندارد کشش بر اساس استاندارد ASTM-E646 با طول گیج ۷۵ میلی متر و عرض ۱۲/۵ میلی متر ساختند. آزمایش ها در نرخ کرنش نامی 10^{-3} بر ثانیه انجام گرفته است. ماشین کشش مورد استفاده MTS810 بوده و از کشش سنج لیزری برای اندازه گیری کرنش استفاده شده است. کشش سنج لیزری با انجام ۱۰۰ عملیات اسکن خطی بر دقیقه کار کرده و نقاطی که از قبل روی نمونه علامت گذاری شده بوده را شناسایی کرده است. نمونه های کشش تا منطقه پلاستیک بارگذاری شده و سپس باربرداری می شوند. دوباره نمونه ها بارگذاری مجدد شده تا مقدار کرنش پلاستیک بیشتر از مرحله بارگذاری قبل شود و دوباره باربرداری می شوند و این چرخه ها تکرار می شوند.



شکل ۱ شماتیک کاهش مدول الاستیک باربرداری بر حسب کرنش پلاستیک

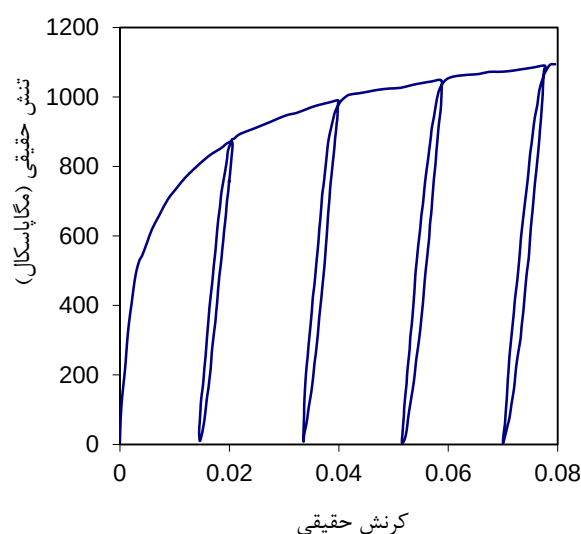
بنابراین با تغییر شکل الاستیک، تانسور الاستیسیته تغییر کرده و باعث می شود رابطه بین تنش و کرنش به صورت غیرخطی تبدیل شود.

۲- مدل پیشنهادی

برای توصیف رفتار پیچیده باربرداری- بارگذاری در محدوده الاستیک، سان و واگنر [۱۴] تانسور کرنش کل را به سه بخش کرنش الاستیک، پلاستیک و شبه الاستیک-پلاستیک تقسیم کردند. تغییر شکل الاستیک بازگشت پذیر بوده و حین آن انرژی در ماده ذخیره می شود. تغییر شکل پلاستیک به صورت دائمی بوده و حین آن اتلاف انرژی صورت می گیرد. در تغییر شکل شبه الاستیک-پلاستیک که برای اولین توسط این محققان مطرح می شود، کرنش بازگشت پذیر بوده (مانند تغییر شکل الاستیک) اما در آن انرژی تلف می شود (مانند تغییر شکل پلاستیک). دلیل این تجزیه این است که هنگام باربرداری و بارگذاری مجدد در محدوده تغییر شکل برگشت پذیر، منحنی تنش-کرنش بر هم منطبق نیست. به عبارت دیگر، منحنی تنش-کرنش در باربرداری منطبق بر بارگذاری مجدد نیست و در نتیجه همان طور که در شکل ۲ مشاهده می شود، مقدار انرژی مورد نیاز (سطح زیر منحنی) برای رسیدن به حالت تسلیم مجدد ماده بیشتر از انرژی آزاد شده حین باربرداری است. برای تعیین محدوده این سه تغییر شکل در فضای تنش، حداقل به دو سطح نیاز است. همچنین علاوه بر تعریف کرنش پلاستیک، نیاز به تعریف قانونی برای کرنش شبه الاستیک-پلاستیک می باشد. بنابراین، حین حل مسأله باید نوع تغییر شکل در هر نمو زمانی تعیین شده و کرنش های مربوطه محاسبه شود. وقتی مسأله در مود تغییر شکل پلاستیک قرار می گیرد، هر سه کرنش ذکر شده هم زمان اتفاق می افتد و در نتیجه محاسبات مربوط به هر کدام باید انجام گرفته و مدول الاستیک نیز به روز شود. تغییر مدول الاستیک حین تغییر شکل پلاستیک فرایند پیاده سازی معادلات پلاستیسیته در المان محدود را مشکل و پر هزینه می کند زیرا در روش نگاشت بازگشتی که معمولاً برای پیاده سازی معادلات پلاستیسیته در المان محدود استفاده می شود، وجود مدول الاستیک متغیر باعث ظهور مشتقات این پارامتر در معادلات و پیچیده تر شدن معادلات می شود. برای توضیح بیشتر این موضوع می توان به مرجع [۱۳] مراجعه کرد.

نتایج کار سان و واگنر نشان می دهد که شیب منحنی باربرداری ابتدا برابر مقدار اولیه مدول الاستیک بوده و در ادامه به تدریج کاهش می یابد. در صورت بارگذاری مجدد دوباره شیب منحنی از مقدار اولیه مدول الاستیک شروع شده و با ادامه بارگذاری کاهش می یابد. بنابراین حین باربرداری- بارگذاری مجدد مقداری انرژی تلف می شود که با تمرکز بر روی بخش بارگذاری- باربرداری شکل ۲ و توجه به سطح زیر منحنی تنش-کرنش کاملاً قابل مشاهده است. آنها برای مدل سازی این رفتار غیرخطی یک معادله ساختاری پلاستیسیته دو سطحی ارائه نمودند که این دو سطح دارای انتقال و رشد در فضای تنش می باشند.

به طور کلی از معایب مدل های چند سطحی پلاستیسیته می توان به حجم محاسبات بالاتر، سرعت همگرایی کمتر، احتمال بیشتر عدم همگرایی در مسائل پیچیده و پیاده سازی مشکل تر برای روش های مختلف حل مانند المان محدود اشاره کرد. در این مقاله، برای توصیف این رفتار غیرخطی یک مدل هایپوالاستیک ساده پیشنهاد می شود که ضمن نیاز به حجم محاسبات کم، پیاده سازی آن برای المان محدود و مدل های تحلیلی، ساده باشد. لازم به ذکر است در هایپوالاستیسیته نرخ تنش از ضرب تانسور الاستیسیته در نرخ کرنش به دست می آید. تفاوت اصلی آن با الاستیسیته خطی در این است که در هایپوالاستیسیته فرض می شود ثوابت مادی الاستیک مانند مدول یانگ و ضریب پواسون، به صورت تابعی از نامتغیرهای تانسور کرنش الاستیک هستند.



شکل ۲ منحنی تنش-کرنش فولاد دوفازی ۹۸۰ [۱۴]

$$C_{ijkl} = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{(1+v)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \frac{E}{E_0} C_{0ijkl} \quad (2)$$

که در این رابطه v ضریب پواسون، C تانسور الاستیسیته لحظه‌ای، E مدول الاستیک لحظه‌ای، E_0 مدول الاستیک ماده اولیه با کرنش پلاستیک صفر، δ_{ij} دلتای کرونکر و C_0 تانسور الاستیسیته اولیه (با جایگزینی E_0 با E در معادله (۲)) می‌باشند. این مدل به سادگی می‌تواند در کنار معادلات ساختاری پلاستیسته یک معادله ساختاری الاستوپلاستیک را تشکیل دهد. به عنوان مثال، این مدل هایپوالاستیک با تابع تسلیم فون میسز و قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک در قالب یک زیرروال مدل ماده^۱ برای نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی شد که جزئیات آن در بخش بعد آمده است.

۳- پیاده‌سازی عددی مدل

در این بخش، مرحله به مرحله روند پیاده‌سازی عددی مدل فوق در یک معادله ساختاری پلاستیسته ارائه می‌شود. در این مرحله فرض بر این است که مقدار نمو کرنش کل و تمامی متغیرها در ابتدای نمو معلوم است و هدف یافتن تنش در انتهای نمو است.

بطور کلی حین تغییر شکل، تانسور الاستیسیته برای تعیین رابطه بین تنش و کرنش لازم است. برای محاسبه این تانسور مطابق رابطه (۲) نیاز به محاسبه مدول الاستیک لحظه‌ای است. از آن جا که معادلات به صورت نموی حل می‌شوند، بنابراین برای محاسبه تانسور الاستیک نیاز به محاسبه E متوسط برای آن نمو می‌باشد. برای محاسبه E متوسط باید از رابطه (۱) از کرنش ابتدای نمو تا کرنش انتهای نمو انتگرال گرفته شده و تقسیم بر نمو کرنش شود. با توجه به این که انتگرال تحلیلی رابطه (۱) بر اساس توابع اولیه ریاضی امکان‌پذیر نمی‌باشد، لذا می‌توان از الگوریتم‌های عددی برای محاسبه این انتگرال استفاده کرد. در این کار از روش نقطه میانی برای محاسبه این انتگرال استفاده شد.

با توجه به اینکه در مدل‌های پلاستیسته برای توصیف کارسختی معمولاً از قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک استفاده

در این مقاله، برای ارائه یک مدل ساده‌تر که قابلیت توصیف رفتار پیچیده در باربرداری را داشته باشد، یک مدل هایپوالاستیک پیشنهاد می‌شود. در این مدل، مدول الاستیک به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$E = E_0 - E_a [1 - \exp(-\xi \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_y - \bar{\epsilon}})] \quad (1)$$

که در این رابطه E_0 مدول الاستیک ماده اولیه بدون کرنش پلاستیک، E_a میزان کاهش مدول الاستیک در کرنش پلاستیک بی‌نهایت، $\bar{\epsilon}$ کرنش کل معادل از لحظه شروع تغییر جهت بارگذاری، ϵ_y مقدار کرنش معادل برای شروع تغییر شکل پلاستیک می‌باشد که با توجه به اندازه سطح تسلیم به سادگی به دست می‌آید. همچنین ξ ثابت ماده نشان دهنده نرخ کاهش مدول الاستیک از مقدار اولیه به مقدار نهایی آن می‌باشد که با برازش به منحنی تنش-کرنش حین باربرداری و یا بارگذاری مجدد در محدوده تغییر شکل الاستیک به دست می‌آید. طبق این تعریف، مدول الاستیک در لحظه شروع تغییر جهت بارگذاری برابر E_0 بوده و در شروع تغییر شکل پلاستیک به مقدار $E_0 - E_a$ میل می‌کند و پس از شروع تغییر شکل پلاستیک ثابت می‌ماند. رابطه فوق یک رابطه یک بعدی است که با تغییر مدول الاستیک شامل خصوصیات زیر می‌باشد:

الف- منحنی تنش-کرنش را در منطقه الاستیک غیرخطی کرده و مدول الاستیک را از مقدار اولیه تا مقدار مشخصی کاهش می‌دهد.

ب- انرژی را در یک سیکل بسته الاستیک تلف می‌کند (طبق مشاهدات تجربی).

ج- کرنش در منطقه الاستیک را برگشت‌پذیر در نظر می‌گیرد.

د- مدول الاستیک را حین تغییر شکل پلاستیک ثابت در نظر می‌گیرد.

تمامی موارد فوق منجر به توصیف مشاهدات تجربی در مدل می‌شود، ضمن اینکه مدل بسیار ساده بوده و پیاده‌سازی آن در المان محدود و مدل‌های تحلیلی دیگر پیچیده نمی‌باشد. همچنین ثابت ماندن مدول الاستیک در حین تغییر شکل پلاستیک، عمل پیاده‌سازی عددی مدل را دچار تغییر نکرده و روی نرخ همگرایی در منطقه پلاستیک تأثیرگذار نیست. لازم به ذکر است در این مقاله فرض می‌شود که ضریب پواسون ثابت باقی می‌ماند. در این حالت تانسور الاستیسیته مطابق با رابطه (۲) به دست می‌آید [۱۴].

1. UMAT

رابطه (۶) به دست آورد.

$$\varepsilon^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (6)$$

که در آن ε^P تانسور نرخ کرنش پلاستیک و $\dot{\lambda}$ ضریب پلاستیک است که با توجه به اصل کار پلاستیک معادل و رابطه ۵ مقدار آن برابر رابطه (۷) خواهد بود.

$$\dot{\lambda} = \dot{p} \quad (7)$$

که در آن $\dot{p}$ نرخ کرنش پلاستیک معادل است. با جایگزینی روابط (۵) و (۷) در رابطه (۶)، نرخ کرنش پلاستیک از رابطه (۸) به دست می آید:

$$\varepsilon^P = \frac{3\dot{p}}{2\sigma_e} s \quad (8)$$

با انتگرال گیری ضمنی از رابطه (۸) نمو کرنش پلاستیک به دست می آید:

$$\Delta \varepsilon^P = \frac{3\Delta p}{2(\sigma_e)_{t+\Delta t}} s_{t+\Delta t} \quad (9)$$

که در این رابطه و روابط بعدی اندیس $t + \Delta t$ به معنای مقدار متغیر در انتهای نمو می باشد. حال می توان با استفاده از نگاشت برگشتی مقدار تنش را به دست آورد. برای یک نمو کرنش به اندازه $\Delta \varepsilon$ مقدار تنش از رابطه (۱۰) به دست می آید:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \sigma_t + C : [\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^P] = \sigma_t + \sigma^{Tr} - C : \Delta \varepsilon^P \quad (10)$$

که در این رابطه σ_t تنش در لحظه شروع نمو و σ^{Tr} تنش حدسی نام دارد. با توجه به اینکه تنش میانگین برای تنش حدسی و تنش در انتهای نمو برابر است (تغییر شکل پلاستیک روی تغییر حجم و تنش میانگین اثر ندارد)، می توان تنش کاهنده را از رابطه (۱۱) به دست آورد:

$$s_{t+\Delta t} = \sigma_t + s^{Tr} - C : \Delta \varepsilon^P \quad (11)$$

با جایگزینی رابطه ۹ در رابطه ۱۱ رابطه زیر به دست می آید:

$$s_{t+\Delta t} = \sigma_t + s^{Tr} - C : \frac{3\Delta p}{2(\sigma_e)_{t+\Delta t}} s_{t+\Delta t} \quad (12)$$

حال با استفاده از رابطه فوق می توان تنش کاهنده در انتهای نمو را به دست آورد:

$$s_{t+\Delta t} = \left[I + \frac{3\Delta p}{2(\sigma_e)_{t+\Delta t}} C \right]^{-1} : [\sigma_t + s^{Tr}] = \Xi : [\sigma_t + s^{Tr}] \quad (13)$$

که در این رابطه I تانسور همانی مرتبه چهار و Ξ مدول مماسی اصلاح شده نام دارد. با جایگذاری رابطه فوق در رابطه ۵ یک معادله بر حسب Δp به دست می آید که با روش نیوتن

می شود، سطح تسلیم حین تغییر شکل پلاستیک بزرگ می شود. بنابراین در صورتی که باربرداری یا بارگذاری مجدد پس از تغییر شکل پلاستیک صورت گیرد، نیاز به محاسبه مقدار کرنش تسلیم (ε_y) می باشد. برای محاسبه کرنش تسلیم باید معادله زیر حل شود:

$$\bar{E} \varepsilon_y - \sigma_y = 0 \quad (3)$$

که در آن σ_y تنش تسلیم و $\bar{E}$ مدول الاستیک متوسط از مقدار صفر تا کرنش تسلیم ε_y می باشد. این معادله را می توان به صورت عددی توسط روش نیوتن رافسون حل کرد و مقدار کرنش تسلیم را اندازه فعلی سطح تسلیم (σ_y) به دست آورد. برای مشخص کردن معیار باربرداری می توان از رابطه (۴) استفاده کرد:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0 \quad (4)$$

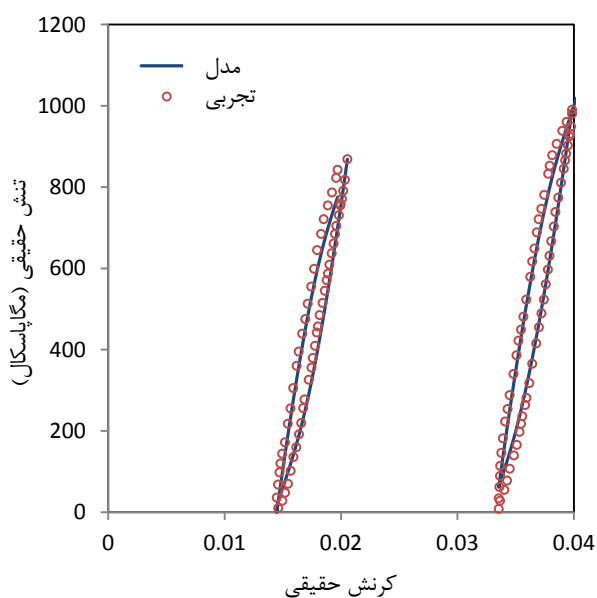
که در آن f نشان دهنده تابع تسلیم، σ تانسور تنش و عملگر ریاضی: ضرب نقطه ای دو تانسور است. با توجه به اینکه در رابطه (۱) کرنش کل معادل از لحظه شروع تغییر جهت بارگذاری محاسبه می شود، بنابراین با استفاده از معیار فوق می توان تغییر جهت بارگذاری را تشخیص داد و کرنش معادل $\bar{\varepsilon}$ را در صورت تغییر جهت بارگذاری در رابطه ۱ به روزرسانی نمود.

حال با محاسبه مدول الاستیک متوسط در نمو زمانی فعلی، از رابطه ۲ تانسور الاستیسیته محاسبه می شود. با ضرب نمو کرنش در تانسور الاستیسیته مقدار نمو تنش به دست می آید. با جمع نمو تنش با تنش قبلی مقدار تنش فعلی به دست می آید. در صورتی که حالت تنش فعلی در منطقه الاستیک باشد، تنش محاسبه شده جواب مسأله می باشد و تنش بروز رسانی می شود. اما در صورتی که تنش معادل محاسبه شده از تنش تسلیم بیشتر باشد، می توان با استفاده از نگاشت برگشتی تنش آزاد شده در اثر تغییر شکل پلاستیک را محاسبه کرد و در نتیجه مقدار تنش فعلی را به دست آورد. ادامه این روند پیاده سازی کاملاً مشابه یک فرایند نگاشت برگشتی معمولی است که در اینجا برای تکمیل بحث به طور خلاصه آورده می شود.

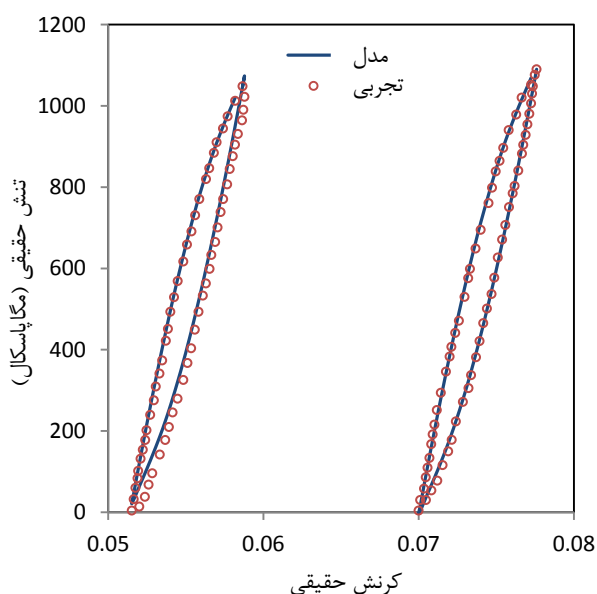
تابع تسلیم فون میسز به صورت رابطه (۵) تعریف می شود.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} s : s - \sigma_y = \sigma_e - \sigma_y = 0 \quad (5)$$

که در آن s بخش کاهنده تانسور تنش و σ_e تنش معادل است. با استفاده از قانون سیلان می توان نرخ کرنش پلاستیک را از



شکل ۳ مقایسه بین منحنی تنش-کرنش تجربی و پیش‌بینی شده توسط مدل برای فولاد دوفازی ۹۸۰



شکل ۴ مقایسه بین منحنی تنش-کرنش تجربی و پیش‌بینی شده توسط مدل برای فولاد دوفازی ۹۸۰

همان طور که شکل نشان می‌دهد منحنی تنش-کرنش محاسبه شده توسط مدل به صورت کاملاً غیرخطی بوده و با یک شیب زیاد شروع شده و به تدریج کاهش یافته تا بتواند رفتار تجربی را برای چرخه‌های مختلف تولید کند. انطباق تقریباً خوبی بین نتایج مدل و نتایج تجربی در چرخه‌های مختلف در شکل‌های ۳ و ۴ دیده می‌شود.

رافسون حل شده و در نتیجه تنشی به دست می‌آید که تابع تسلیم را در انتهای نمو ارضا می‌کند. در پایان لازم به ذکر است جهت در نظر گرفتن کارسختی فقط لازم است تنش تسلیم بر حسب کرنش پلاستیک معادل تعریف شود. جهت این کار نرخ افزایش سطح تسلیم مطابق رابطه (۱۴) تعریف شده است:

$$\dot{r} = Q(b - r)\dot{p} \quad (14)$$

که در این رابطه r و $\dot{r}$ به ترتیب میزان افزایش تنش تسلیم و نرخ آن می‌باشد. به عبارت دیگر مقدار تنش تسلیم فعلی از جمع تنش تسلیم اولیه σ_{y0} با r به دست می‌آید. همچنین Q و b دو ثابت ماده هستند.

۴- نتایج

در مرحله اول برای پیدا کردن ثوابت ماده برای معادله ۱، منحنی تنش-کرنش در قسمت بارگذاری- باربرداری (فقط در محدوده الاستیک) برای فولاد دوفازی ۹۸۰ که در شکل ۲ نشان داده شده، در نظر گرفته شد. سپس در هر نمو کرنش تجربی، ابتدا مدول الاستیک متوسط محاسبه شده و پس از آن مقدار تنش و نمو آن در انتهای نمو محاسبه شد. این تنش محاسبه شده با مقدار تجربی آن در انتهای نمو مقایسه شده و تابع خطای زیر تعریف شد:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^m [(\sigma_i^{\text{exp}})^2 - (\sigma_i^{\text{pre}})^2]}{\sum_{i=1}^m [(\sigma_i^{\text{exp}})^2]} \quad (15)$$

که در این رابطه δ مقدار خطا، σ_i^{exp} تنش تجربی در i -امین نقطه اندازه‌گیری شده، σ_i^{pre} مقدار تنش محاسبه شده در

i -امین نقطه است. سپس با استفاده از روش حداقل مربعات ثوابت E_0 ، E_a و ξ طوری به دست آمد که مقدار خطای δ کمینه شود. ضرایب به دست آمده در جدول ۱ داده شده است. همچنین مقایسه منحنی تنش-کرنش بین مقدار تجربی و پیش‌بینی شده در قسمت بارگذاری- باربرداری در منطقه الاستیک در شکل‌های ۳ و ۴ در کرنش‌های مختلف آورده شده است.

جدول ۱ ثوابت ماده برای فولاد دوفازی ۹۸۰

E_0 (GPa)	E_a (GPa)	ξ	ν	σ_{y0} (MPa)	Q (MPa)	b
۲۰۸	۱۲۰	۰/۷۴۳۳	۰/۳	۵۵۱	۵۴۹	۵۸

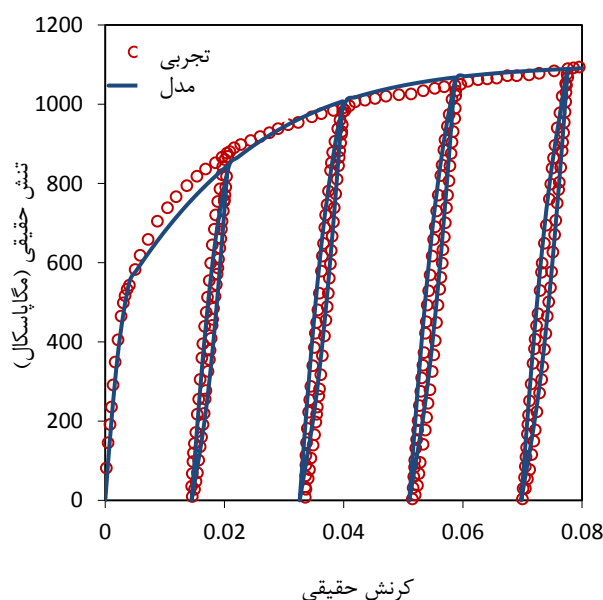
این پدیده یکی از موانع اصلی استفاده از ورق های پراستحکام مانند فولاد دوفازی ۹۸۰ در صنعت است، زیرا ساخت قطعات را با شکل مورد نظر بسیار مشکل می کند. یکی از مهمترین ابزارهایی که می تواند با هزینه کم برای پیش بینی مقدار بازگشت فنی و سپس رفع آن کمک نماید، شبیه سازی است. جهت انجام شبیه سازی بازگشت فنی استفاده از این مدل می تواند رفتار ماده هنگام باربرداری را نزدیک تر به واقعیت مدل کرده و در نتیجه دقت شبیه سازی را افزایش دهد. البته لازم به ذکر است که جهت پیش بینی بازگشت فنی ضروری است علاوه بر مدل سازی رفتار ماده هنگام باربرداری، رفتار ماده هنگام بارگذاری چرخه ای در منطقه پلاستیک نیز به درستی مدل شود زیرا معمولاً در مرحله شکل دهی نیز ورق هنگام سیلان روی شعاع قالب و پانچ تحت خم و واخم (بارگذاری چرخه ای) قرار می گیرد. برای این کار استفاده از مدل های سخت شوندگی پیچیده تر از قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک مورد نیاز است تا پدیده های چرخه ای دیگر نیز هنگام تغییر شکل پلاستیک مدل شوند.

در پایان لازم به ذکر است که مدل سان و واگنر نیز توانایی توصیف این رفتار غیرخطی باربرداری را برای فولاد دوفازی ۹۸۰ داشته و همان طور که در مرجع [۱۴] نشان داده شده به خوبی در این چهار چرخه بارگذاری-باربرداری، رفتار فولاد دوفازی ۹۸۰ را مدل کرده است. ولی همان طور که قبلاً هم اشاره شد، این مدل بسیار پیچیده تر از مدل پیشنهادی در این مقاله بوده و حجم محاسبات بسیار بیشتری دارد. در واقع اصلی ترین مزیت مدل پیشنهادی این است که در عین سادگی می تواند رفتار غیرخطی باربرداری-بارگذاری مجدد ماده را توصیف نماید.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل هایپوالاستیک برای توصیف رفتار غیرخطی ماده در منطقه الاستیک طی بارگذاری-باربرداری مجدد پیشنهاد شد. در این مدل با تغییر شکل الاستیک، مدول الاستیک تغییر می کند تا بتواند رفتار ماده را در مدل ها در نظر بگیرد. به عنوان یک مثال، مدل پیشنهادی با یک مدل ساده پلاستیسیته شامل سطح تسلیم فون-میسز و قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک در نظر گرفته شد و در قالب یک زیر روال

با به دست آمدن ضرایب مربوط به بخش الاستیک در معادله ۱، منحنی در بخش پلاستیک نیز در نظر گرفته شده و دوباره با استفاده از روش حداقل مربعات ثوابت ماده برای بخش پلاستیک نیز به دست آمد که در جدول ۱ داده شده است. شکل ۵ منحنی تنش-کرنش تجربی را با منحنی به دست آمده از نرم افزار آباکوس که با استفاده از مدل ماده محاسبه شده را مقایسه می کند. این شکل نشان می دهد این مدل با وجود سادگی می تواند رفتار غیرخطی ماده هنگام باربرداری-بارگذاری مجدد به خوبی توصیف نماید. پر واضح است که در مواردی که مدل کردن رفتار ماده هنگام باربرداری مهم است، استفاده از آن می تواند باعث بهبود نتایج در شبیه سازی شود. یکی از مهم ترین این موارد که در صنعت اهمیت زیادی دارد، مسأله بازگشت فنی است. در فرایندهای شکل دهی ورق های فلزی پس از شکل دادن قطعه در قالب، قطعه از قالب بیرون آورده می شود و در نتیجه با از بین رفتن نیروهای خارجی (قالب)، باربرداری صورت گرفته و تنش های داخلی آزاد می شود. با توجه به اینکه در ورق ضخامت ناچیز است، این باربرداری ممکن است باعث تغییر شکل زیادی شده و قطعه را از شکل خود خارج کند. به این تغییر شکل هنگام خروج قطعه از قالب بازگشت فنی گفته می شود.



شکل ۵ مقایسه بین منحنی تنش-کرنش تجربی و پیش بینی شده توسط مدل ماده برای فولاد دوفازی ۹۸۰

- [6] Levy B.S., Van Tyne C.J., Moon Y.H., Mikalsen C., "The Effective Unloading Modulus for Automotive Sheet Steels", *SAE Technical Paper Series 2006-01-0146*, 2006.
- [7] Yang M., Akiyama Y., Sasaki T., "Evaluation of Change in Material Properties due to Plastic Deformation", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 151, No. 3, 2004, pp. 232-236.
- [8] Morestin F., Boivin M., "On the Necessity of Taking into Account the Variation in the Young Modulus with Plastic Strain in Elastic-Plastic Software", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 162, No. 1, 1996, pp. 107-116.
- [9] Fei D.Y., Hodgson P., "Experimental and Numerical Studies of Springback in Air V-Bending Process for Cold Rolled TRIP Steels", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 236, No. 18, 2006, pp. 1847-1851.
- [10] Ghaei A., Taherizadeh A., Green D.E., "The Effect of Hardening Model on Springback Prediction for a Channel Draw Process", *In Proc. of Numisheet 2008*, Interlaken, Switzerland, 2008, pp. 485-488.
- [11] Zang S.L., Liang J., Guo C., "A Constitutive Model for Spring-back Prediction in which the Change of Young's Modulus with Plastic Deformation Is Considered", *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 47, No. 11, 2007, pp. 1791-1797.
- [12] Kubli W., Krasovskyy A., Sester M., "Advanced Modeling of Reverse Loading Effects for Sheet Metal Forming Processes", *In Proc. of Numisheet 2008*, Interlaken, Switzerland, pp. 479-484.
- [13] Ghaei A., "Numerical Simulation of Springback Using an Extended Return Mapping Algorithm Considering Strain Dependency of Elastic Modulus", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 65, No. 1, 2012, pp. 38-47.
- [14] Sun L., Wagoner R.H., "Complex Unloading Behavior: Nature of the Deformation and Its Consistent Constitutive Representation", *International Journal of Plasticity*, Vol. 27, No. 7, 2011, pp. 1126-1144.

برای نرم افزار تجاری آباکوس پیاده سازی شد. ثوابت مدل پیشنهادی برای فولاد دوفازی ۹۸۰ با استفاده از روش حداقل مربعات شناسایی شد. با انجام شبیه سازی بارگذاری- باربرداری تک محوری طی چهار مرحله در نرم افزار آباکوس منحنی تنش- کرنش پیش بینی شد و با نتایج تجربی مقایسه شد. نتایج مقایسه نشان داد که مدل قادر است تا رفتار ماده را با تقریب خوبی توصیف نماید.

۶- مراجع

- [1] Kuwabara T., Morita Y., Miyashita Y., Takahashi S., "Elastic-Plastic Behaviour of Sheet Metal Subjected to in-Plane Reverse Loading", *In Proc. of Plasticity'95-Dynamic Plasticity and Structural Behaviour*, Gordon and Breach, London, 1995, pp. 841-844.
- [2] Boger R.K., Wagoner R.H., Barlat F., Lee M.G., Chung K., "Continuous, Large Strain, Tension/Compression Testing of Sheet Material", *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, No. 12, 2005, pp. 2319-2343.
- [3] Yoshida F., Uemori T., Fujiwara K., "Elastic-Plastic Behaviour of Steel Sheets Under in-Plane Cyclic Tension-Compression at Large Strain", *International Journal of Plasticity*, Vol. 18, No. 5-6, 2002, pp. 633-659.
- [4] Luo L., Ghosh A., "Elastic and Inelastic Recovery after Plastic Deformation of DQSK Steel Sheet", *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, Vol. 125, 2003, pp. 237-246.
- [5] Benito J.A., Jorba J., Manero J.M., Roca A., "Change of Young's Modulus of Cold-Deformed Pure Iron in a Tensile Test", *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*, Vol. 36, 2005, pp. 3317-3324.