http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
آبان ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۸ ص‌ص ۱٤-۲۷

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۱/۲۶
تاریخ پذیرش ۹۲/۲/۹
ارائه در سایت ۹۲/٤/۳۰

تحلیل جریان گذرای غیرهم‌دمای گاز درون خطوط لوله با استفاده از روش عددی خطی‌شده تجزیه شار

مرتضی بهبهانی‌نژاد[۱*]، عزیز عظیمی[۲]، محسن شعبانی[۳]

۱- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دفتر پژوهش گاز، دانشگاه شهید چمران، اهواز
۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری،دانشگاه شهید چمران، اهواز
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز
* اهواز، کد پستی ۸۳۱۵۱-۶۱۳۵۷، bnmorteza@scu.ac.ir

چکیده- روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ، برای شبیه‌سازی عددی جریان گذرای غیرهم‌دمای گاز مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به غیرخطی بودن معادلات، در ابتدا خطی‌سازی حول هر گام زمانی انجام شده است که این امر ضمن کاهش تلاش محاسباتی جریان مورد نظر را نیز با سهولت بیشتری تحلیل می‌کند. برای اعتبارسنجی و ارزیابی دقت روش حل عددی، ابتدا جریان فانو و جریان درون یک لوله شوک بررسی شده و سپس جریان گذرا درون یک خط لوله گاز که فشار در ورودی آن به صورت تابعی از زمان تغییر می‌کند، شبیه‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی عددی حاضر نشان می‌دهد که روش عددی تفاضل محدود خطی‌شده مورد استفاده در این مطالعه، تغییرات ناگهانی در شرایط جریان را به‌خوبی روش حل غیرخطی نمایان می‌سازد. همچنین روش عددی حاضر قادر است جریآنهای گذرای گاز را با دقت مناسب در مقایسه روش‌حل غیرخطی با تلاش محاسباتی کمتر تحلیل نماید.

کلیدواژگان: جریان غیرهم‌دما، جریان گذرا، خطوط لوله گاز، روش‌های خطی‌شده، گاز حقیقی.)

Non-isothermal transient flow analysis in gas pipelines using a linearized flux splitting numerical scheme

M. Behbahani-Nejad[1*], A. Azimi[2], M. Shabani[3]

1- Assoc. Prof, Mech. Eng. Dept., Gas Research Office, Shahid Chamran Univ., Ahvaz, Iran
2- Assist. Prof., Mech. Eng. Dept., Drilling Research Center, Shahid Chamran Univ., Ahvaz, Iran
3- MSc Student, Mech. Eng. Dept., Shahid Chamran Univ., Ahvaz, Iran
* P.O.B. 61357-83151, Ahvaz, Iran. bnmorteza@scu.ac.ir

Abstract-Numerical simulation of non-isothermal transient gas flow is performed using implicit Steger-Warming finite difference method. Because of nonlinearity of the governing equations, they are linearized at each time step. The linearization either reduces computational effort or analyzes the flowfield more conveniently. In order to validate and evaluate the accuracy of current numerical method, Fanno and shock tube flows are investigated first. Then, transient flow in a gas pipeline that its inlet pressure changes with time is simulated. The results of present study show that Steger-Warming finite difference scheme can well captured the sudden changes in the flowfield. Moreover, the present method is able to analyze transient gas flows as nearly accurate as the nonlinear one with less computational effort.

Keywords: Non-Isothermal Flow, Transient Flow, Gas Pipeline, Linearized Schemes, Real Gas.

۱- مقدمه

گاز طبیعی یکی از منابع مهم انرژی است که استفاده از آن به سرعت در حال گسترش می‌باشد. با افزایش استفاده از منابع گاز طبیعی، سیستم‌های مورد نیاز در این زمینه روز به روز پیچیده‌تر می‌شوند، از این‌رو طراحی بهینه انتقال گاز شهری و بین‌شهری و نیز صرفه‌جویی در هزینه‌های گازرسانی نیازمند داشتن اطلاعاتی دقیق در مورد افت فشار، نرخ جریان و توزیع دما در خطوط لوله گاز می‌باشد. علاوه بر این، اطلاع از چگونگی رفتار جریان گاز درون خطوط لوله در کنترل بهینه توزیع اهمیت فراوانی دارد. بنابراین بررسی جریان گاز به‌منظور رسیدن به طراحی بهینه ضروری است.

در بررسی و مطالعه جریان گاز در خطوط لوله به دلیل تغییرات ناگهانی اعمال شده در شرایط جریان از جمله تغییرات در عرضه و تقاضا (دبی جریان)، تغییرات در فشار و اثرات محیطی، تحلیل جریان گاز به صورت گذرا و غیر هم‌دما درون این خطوط ضرورت دارد.

جریان گذرای گاز را با توجه به سرعت جریان می‌توان به دو دسته جریان گذرای آرام و جریان گذرای سریع تقسیم کرد. در جریآنهای گذرای آرام به دلیل وجود زمان کافی برای انتقال حرارت گاز با محیط پیرامون، می‌توان جریان را به صورت هم‌دما فرض و تحلیل نمود. اما درصورتی‌که جریان گذرای گاز با سرعت بالا صورت گیرد، گاز به تعادل دمایی با محیط پیرامون نمی‌رسد و به همین دلیل نمی‌توان جریان را به صورت هم‌دما شبیه‌سازی کرد. از این‌رو برای تحلیل جریآنهایی که در آنها تغییرات ناگهانی همانند باز و بسته شدن شیر، تغییرات در فشار ورودی به صورت تابعی از زمان و تغییرات در تقاضای مصرف رخ می‌دهد، جریان باید به صورت غیرهم‌دما درنظر گرفته شود. جریآنهای گذرای سریع را نیز می‌توان با توجه به شرایط موجود به صورت آدیاباتیک و یا همراه انتقال حرارت با محیط پیرامون فرض کرد.

مدل‌سازی جریان گذرای گاز به‌همراه انتقال‌حرارت پایا و مدل گاز ایده‌ال از طریق روش مشخصه‌ها توسط عیسی و اسپالدینگ [۱] صورت گرفت. وینتربرن و پیرسون [۲]، مدل گاز ایده‌ال حل شده به روش مشخصه‌ها را با مدل شبه ایده‌ال (آنتالپی و انرژی درونی به صورت یک تابع چندجمله‌ای از دما و معادله حالت برای گاز ایده‌ال) با روش دوگامی لکس-وندروف حل و مقایسه نمودند. آنان نشان دادند که با در نظر گرفتن ظرفیت گرمایی ویژه به صورت تابعی از دما، منحنی ظرفیت گرمایی ویژه و منحنی دما بسیار مشابه هستند. اسیاداس و چاکواسکی [۳]، مدل‌های جریان گاز هم‌دما و غیرهم‌دما را مورد بررسی قرار دادند. مدل غیر هم‌دما، شامل شکل ساده شده معادله انرژی با ضریب تراکم‌پذیری ثابت و مدل انتقال حرارت پایا بود. آنان نشان دادند که یک تفاوت قابل ملاحظه در منحنی فشار بین حالت هم‌دما و غیر هم‌دما وجود دارد. شبیه‌سازی عددی جریان سریع سیال درون خطوط لوله گاز به صورت باز و بسته شدن ناگهانی شیر در پایین‌دست توسط گرایونستین [۴] انجام گرفت. وی حل مدل جریان آدیاباتیک در ضریب تراکم‌پذیری ثابت را ارایه داد و برای حل معادلات از یک روش غیرصریح پیش‌بینی‌کننده-تصحیح‌کننده استفاده کرد. مسأله مشابه توسط گاتو و هنریکیوس [۵] حل شد. آنان جریان آدیاباتیک گاز را با استفاده از مدل گاز ایده‌ال و استفاده از روش رانگ‌کوتا و گالرکین ناپیوسته شبیه‌سازی نمودند. تنتیس [۶]، جریان غیرهم‌دمای گاز با انتقال‌حرارت پایا و ضریب تراکم‌پذیری ثابت در معادله انرژی را با استفاده از روش خط‌ها[1]، تحلیل کرد. عباس‌پور و چاپمن [۷] با استفاده ازروش تفاضل محدود غیرصریح به حل معادلات پیوستگی و مومنتم و انرژی پرداختند و از فرضیات وجود جمله اینرسی در معادله مومنتوم، ضریب تراکم‌پذیری به صورت تابعی از فشار و دما، انتقال حرارت پایا با محیط پیرامون و همچنین فاکتور اصطکاک به صورت تابعی از عدد رینولدز و زبری لوله استفاده کردند. آنان نشان دادند که اثرات رفتار گاز در حالت غیرهم‌دما به‌شدت در دقت محاسبات جریان، به خصوص جریان گذرای سریع مؤثر است. همچنین نشان دادند که جمله اینرسی نقش مهمی در تحلیل جریان گاز ایفا می‌کند و نمی‌توان از آن در محاسبات صرفنظر کرد. چاکواسکی [۸]، اثرات مدل‌های انتقال‌حرارت پایا و ناپایا را در خطوط انتقال گاز بررسی نمود. فرضیات چاکواسکی در تحقیق خود همانند عباس‌پور وچاپمن شامل متغیر بودن ضرایب اصطکاک و تراکم‌پذیری و وجود ترم اینرسی بود. او مشاهده کرد که مدل انتقال‌حرارت ناپایا، دامنه نوسانات دمایی کوچکی در گاز تولید می‌کند و تغییرات کم دمایی گاز به واسطه دمای زمین می‌باشد که از انباشت گرما در آن حاصل می‌شود.

1. Method of Lines

در تحقیقات پیشین برای تحلیل جریان گذرای غیر هم‌دمای گاز، معادلات حاکم به‌صورت غیرخطی حل شده‌اند. حل غیرخطی معادلات باعث پیچیدگی در روابط و افزایش زمان محاسبات می‌شود. از این رو در تحقیق حاضر از مکانیزم خطی‌سازی معادلات برای کاهش پیچیدگی حل عددی و زمان محاسبات با حفظ دقت روش‌های غیرخطی، استفاده شده است. نتایجی که از این تحقیق حاصل شده است بیانگر این موضوع است که این روش ضمن کاهش زمان محاسبات قادر است به‌خوبی حل غیرخطی، تغییرات ناگهانی در جریان گذرا را نمایان سازد. در تحقیق حاضر عبارت اینرسی در معادلات حاکم برای مدل‌سازی جریان غیرهم‌دمای گاز درون خطوط لوله لحاظ شده است. تحلیل جریان گاز با فرضیات زیر صورت گرفته است:

۱- فاکتور اصطکاک تابعی از زبری لوله و عدد رینولدر معلوم فرض شده است.

۲- ضریب تراکم‌پذیری تابعی از فشار و دمای گاز است.

۳- انتقال حرارت با محیط پیرامون صورت نمی‌گیرد.

در این تحقیق به شبیه‌سازی عددی جریان گذرای غیرهم‌دمای گاز درون خطوط لوله انتقال با استفاده از روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ (بر مبنای تجزیه بردار شار) به فرم دلتا پرداخته شده است. در ابتدا برای صحت روش حل عددی ارایه شده به مقایسه نتایج با حل فانو و جریان درون شوک تیوب پرداخته می‌شود و در نهایت مسأله ارایه شده توسط عباس‌پور [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده با نتایج این مرجع دارای اختلافاتی می‌باشدکه ناشی از تفاوت در ضریب اصطکاک به‌کار گرفته شده توسط عباس‌پور [۹] است. شبیه‌سازی حاضر نشان می‌دهد که روش عددی تفاضل محدود مورد استفاده در این تحقیق به‌خوبی روش‌حل غیرخطی عباس‌پور [۹]، تغییرات ناگهانی در شرایط جریان را نشان می‌دهد. همچنین به دلیل خطی‌سازی معادلات، از نقطه نظر زمانی، محاسبات با هزینه کمتر و با همان میزان دقت در مقایسه با حل غیرخطی صورت گرفته است.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر رفتار غیردائم جریان درون خطوط لوله معادلات اویلرتک فاز و یک بعدی هستندکه می‌توان آنها را با استفاده از اصول بقای جرم و انرژی و قانون دوم نیوتن و با به‌کارگیری یک معادله حالت مناسب به‌دست آورد. معادلات فوق برای یک لوله افقی با سطح مقطع متغیر با در نظر گرفتن انتقال حرارت با محیط پیرامون به‌صورت رابطه (۱) ارایه می‌شود [۶].

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{E(Q)}}{\partial x}-\mathrm{H(Q)}=0 \tag{۱}$$

که در آن پارامترهای Q، $\mathrm{E(Q)}$ و $\mathrm{H(Q)}$ به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{Q}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ e_0\end{pmatrix}\quad ,\mathrm{E(Q)}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ (e_0+p)u\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H(Q)}=\begin{pmatrix}\rho u\beta\\ \rho(u^2\beta+G)\\ (e_0+p)u\beta-\rho(q+uG)\end{pmatrix} \tag{۲}$$

ترم ناهمگن $\mathrm{H(Q)}$ در رابطه (۲) شامل عبارات زیر می‌باشد:

$$\beta=\frac{1}{A_\mathrm{c}}\frac{dA_\mathrm{c}}{dx}\quad ,\quad G=\frac{f}{2d}u|u|$$

$$q=\frac{\dot{Q}}{\rho A dx}\quad ,\quad A_\mathrm{c}=\frac{\pi}{4}d^2 \tag{۳}$$

معادله (۱) و (۲) بر اساس متغیرهای بقایی بیان شده است. معادله حالت گاز به صورت $p=Z\rho RT$ لحاظ می‌شود. برای محاسبه ضریب تراکم‌پذیری گاز همانند عباس‌پور [۹] از رابطه ارایه شده توسط درانکوک و همکاران [۱۰] استفاده شده است. این ضریب توسط رابطه (۴) محاسبه می‌شود.

$$Z=1+\left(W_1+\frac{W_2}{T_\mathrm{r}}+\frac{W_3}{{T_\mathrm{r}}^3}\right)\rho_\mathrm{r}+\left(W_4+\frac{W_5}{T_\mathrm{r}}\right){\rho_\mathrm{r}}^2+\left(\frac{W_6}{{T_\mathrm{r}}^3}\right){\rho_\mathrm{r}}^3 \tag{۴}$$

در جدول ۱ مقادیر W_i استفاده شده برای محاسبه ضریب تراکم‌پذیری آورده شده است.

جدول ۱ مقادیر ضرایب بکار رفته در ضریب تراکم‌پذیری [۱۰]

W_6	W_5	W_4	W_3	W_2	W_1
۰/۶۸۹۵	-۰/۶۱۲۳	۰/۵۳۵۳	-۰/۵۷۸۳	-۱/۰۴۶۷	۰/۳۱۵۰۶

در رابطه (۲) و (۳)، ρ جرم مخصوص (دانسیته)، u متوسط سرعت جریان در مقطع عمود بر محور لوله، p فشار، d و A_c به ترتیب قطر و سطح مقطع لوله، e_0 انرژی کل سیال بر واحد حجم و $\dot{Q}$ نرخ انتقال حرارت با محیط پیرامون است. همچنین

در رابطه (۴)، ρ_r چگالی کاسته[1]، T_r دمای کاسته[2] می‌باشد و e_0 طبق رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$e_0 = \frac{p}{Z(\gamma-1)} + \frac{1}{2}\rho u^2 \quad (۵)$$

برای محاسبه فاکتور اصطکاک f، روابط هالند و چن با توجه به محدوده سرعت گاز به‌کار گرفته می‌شود [۱۱].

رابطه فاکتور اصطکاک چن و هالند به ترتیب در روابط (۶) و (۷) آورده شده‌اند.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0\log\left[0.2398\frac{\epsilon}{d} - \frac{5.0452}{\mathrm{Re}}\times \log\left(0.3539\left(\frac{\epsilon}{d}\right)^{1.1098} + \frac{5.0452}{\mathrm{Re}^{0.8981}}\right)\right] \quad (۶)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log\left[\left(\frac{\epsilon}{d}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{\mathrm{Re}}\right] \quad (۷)$$

۳- روش حل عددی معادلات حاکم

روش‌های پادبادسو[3] به سه دسته روش‌های تجزیه بردار شار[4]، روش‌های تجزیه تفاضل شار[5]، روش‌های تغییرات کلی نزولی[6] و روش نوسانات شار[7] تقسیم می‌شوند. روش عددی به‌کار رفته در این مقاله روش ضمنی استیگر- وارمینگ[8] است که بر مبنای تجزیه بردار شار است و برای اولین با توسط استیگر و وارمینگ [۱۲] ارایه شد. این روش می‌تواند به طور صحیح موج‌های شوک را نشان دهد و معیارهایی را برای متمایز قراردادن اطلاعاتی که توسط شوک‌ها جابه‌جا می‌شوند، بیان کند [۱۳]. لیو و استفان [۱۴] نشان دادند که این روش دارای پخش عددی است، از این رو آن را باروش تجزیه تفاضل شار ترکیب کردند و روشی به نام AUSM[9] ارایه نمودند. بهبهانی‌نژاد و شکاری [۱۵] در تحلیل جریان گذرای هم‌دمای گاز طبیعی با فرض گاز ایده‌ال از روش ضمنی تجزیه بردار شار استیگر وارمینگ استفاده نمودند و نتایج خوبی بدست آوردند. از این رو برای حل عددی معادله (۱) از این روش استفاده شده است.بر این مبنا برای معادله (۱)، الگوریتم تفاضل محدود ضمنی رابطه (۸) درنظر گرفته شده است و برای مشتق زمانی از تقریب تفاضل محدود مرتبه اول استفاده می‌شود.

$$\frac{\mathrm{Q}^{n+1}-\mathrm{Q}^{n}}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\right)^{n+1} - \mathrm{H}^{n+1} = 0 \quad (۸)$$

چون از فرمول‌بندی ضمنی استفاده شده است، جمله‌های دوم و سوم در گام زمانی $n+1$ بیان شده‌اند. تغییر خواص جریان در هر گام زمانی به‌صورت رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

$$\Delta \mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{n+1} - \mathrm{Q}^{n} \quad (۹)$$

با توجه به غیرخطی بودن معادله (۸) در ابتدا عبارات E^{n+1} و H^{n+1} از طریق نوشتن بسط سری تیلور حول گام زمانی n، خطی‌سازی می‌شوند. با استفاده از معادله (۸) و جایگزین کردن روابط خطی‌سازی، رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\Delta \mathrm{Q}}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{E}^{n} + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{Q}}\Delta \mathrm{Q}\right) - \left(\mathrm{H}^{n} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Q}}\Delta \mathrm{Q}\right) = 0 \quad (۱۰)$$

همچنین برای خلاصه‌نویسی از تعاریف زیراستفاده می‌شود:

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{Q}} = \mathrm{A} \qquad , \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Q}} = \mathrm{B} \quad (۱۱)$$

که در دستگاه معادلات هذلولوی، ماتریس ژاکوبین A طبق رابطه (۱۲) دارای سه مقادیر ویژه حقیقی می‌باشد.

$$\lambda_1 = u$$
$$\lambda_2 = u + \frac{a}{\gamma}\sqrt{\gamma[(\gamma-1)Z+1]}$$
$$\lambda_3 = u + \frac{a}{\gamma}\sqrt{\gamma[(\gamma-1)Z+1]} \quad (۱۲)$$

بردار شار E با توجه به رابطه (۱۱) مساوی AQ است که دارای خاصیت همگنی می‌باشد. بنابراین می‌توان آن را به زیربردارهایی تجزیه کرد، به‌گونه‌ای که هر زیربردار متناظر با مقدار ویژه مثبت و یا منفی ماتریس ژاکوبین شار باشد. در نتیجه ماتریس ژاکوبین شار A به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^{+} + \mathrm{A}^{-}$$
$$\mathrm{A}^{+} = \mathrm{X}\mathrm{D}^{+}\mathrm{X}^{-1} \qquad , \mathrm{A}^{-} = \mathrm{X}\mathrm{D}^{-}\mathrm{X}^{-1} \quad (۱۳)$$

که در آن X ماتریس بردارهای ویژه راست ماتریس A، D^{+} ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه مثبت و D^{-} ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه منفی می‌باشد. حال بردار E را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\mathrm{E}^{+} = \mathrm{A}^{-}\mathrm{Q} \quad , \mathrm{E}^{+} = \mathrm{A}^{-}\mathrm{Q} \quad (۱۴)$$

1. Reduced Density
2. Reduced Temperature
3. Upwind
4. Flux Vector Splitting Schemes (FVS)
5. Flux Difference Splitting Schemes (FDS)
6. Total Variation Diminishing (TVD)
7. Fluctuation-Splitting Schemes
8. Steger-Warming Method
9. Advection Upstream Splitting Method

رابطه (۱۰)، با استفاده از رابطه (۱۱) و (۱۳) و پس از فاکتورگیری $\Delta \mathrm{Q}$ از آن مطابق رابطه (۱۵) نوشته می‌شود.

$$\left[\mathrm{I}+\Delta t\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{A}^{+}+\mathrm{A}^{-})-\mathrm{B}\right\}\right]\Delta\mathrm{Q}= -\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{E}^{+}+\mathrm{E}^{-})-\mathrm{H}\right) \qquad (۱۵)$$

که در آن I ماتریس واحد است و برای سادگی بالانویس n حذف شده است.

با نوشتن تقریب تفاضل پس‌رو مرتبه اول برای جمله‌های مثبت و تقریب تفاضل پیش‌رو مرتبه اول برای جمله‌های منفی، معادله تفاضل محدود (۱۶)حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathrm{A}_{j-1}^{+}\right)\Delta\mathrm{Q}_{j-1}\\&\quad+\left[\mathrm{I}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathrm{A}_{j}^{+}-\mathrm{A}_{j}^{-}\right)-\Delta t\mathrm{B}_{j}\right]\\&\quad+\Delta\mathrm{Q}_{j}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathrm{A}_{j+1}^{+}\right)\Delta\mathrm{Q}_{j+1}\\&\quad=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathrm{E}_{j}^{+}-\mathrm{E}_{j-1}^{+}+\mathrm{E}_{j+1}^{-}-\mathrm{E}_{j}^{-}\right)\\&\quad+\Delta t\mathrm{H}_{j}\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در رابطه (۱۶) A^{+} و A^{-}، ماتریس‌های ژاکوبین شار تجزیه شده می‌باشند. ماتریس‌های $\mathrm{A}^{\pm}$ و $\mathrm{E}^{\pm}$ را می‌توان در ضمیمه و مرجع [۱۶] مشاهده کرد. معادله تفاضل محدود (۱۶) که برحسب $\Delta\mathrm{Q}$ مرتب شده است، فرمول‌بندی دلتا نامیده می‌شود. با استفاده از رابطه (۱۶) برای هر کدام از نقاط شبکه و اعمال شرایط مرزی، یک دستگاه سه قطری بلوکی حاصل می‌شود. با حل این دستگاه برای هر گام زمانی، متغیرهای جریان در آن گام محاسبه می‌شوند. برای حل معادلات فوق به شش شرط مرزی نیاز است. با توجه به مقادیر مشخصه در مرزها، بایستی سه شرط مرزی تحلیلی بر روی مرزها معلوم باشند و سه شرط مرزی دیگر از طریق برون‌یابی از درون میدان جریان محاسباتی تعیین شوند. سپس با محاسبه $\Delta\mathrm{Q}$ در هر گام زمانی می‌توان متغیرهای مجهول آن گام را با استفاده از معادله (۱۷) محاسبه کرد.

$$\mathrm{Q}^{n+1}=\mathrm{Q}^{n}+\Delta\mathrm{Q} \qquad (۱۷)$$

برای حل معادلات مربوطه، به گام زمانی مناسب برای همگرایی حل عددی نیاز است. این گام زمانی بر اساس عدد CFL (کورانت-فردریش-لوی) و با توجه به رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود.

$$\Delta t=\frac{\mathrm{CFL}\,\Delta x}{\lambda_{\max}} \qquad (۱۸)$$

که در آن پارامتر $\lambda_{\max}$، بیشینه مقدار ویژه بردار ژاکوبین شارهای غیرلزج است.

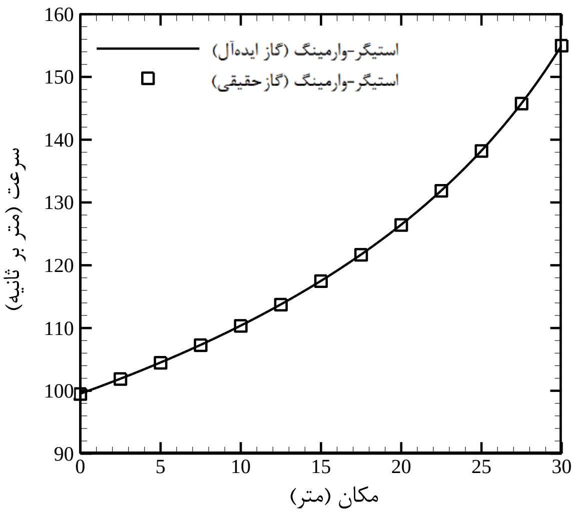
۴- نتایج عددی

در این قسمت برای نشان دادن قابلیت روش عددی تجزیه بردار شار استیگر-وارمینگ در تحلیل مسائل غیردائم جریان گاز و تایید برنامه کامپیوتری تدوین شده، ابتدا نتایج عددی حاصل از حل عددی دو مسأله تقریباً ساده با نتایج تحلیلی و عددی موجود مقایسه می‌شوند. سپس یک مسأله غیردائم جریان گاز که در عباس‌پور [۹] به صورت غیرخطی حل شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج حاصل از حل عددی روش استیگر-وارمینگ، با نتایج عددی این مرجع مقایسه می‌شوند.

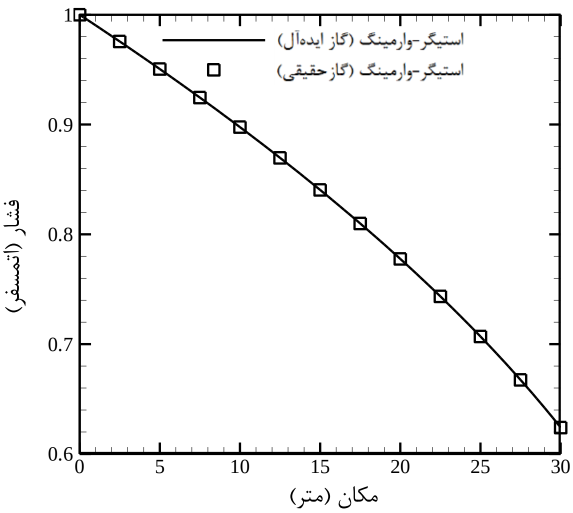
۴-۱- بررسی صحت نتایج عددی جریان تراکم‌پذیر همراه با اصطکاک در خط لوله گاز (جریان فانو)

برای بررسی جریان پایا درون خطوط لوله با در نظر گرفتن اصطکاک و بدون انتقال حرارت با محیط پیرامون، صحت کد با حل تحلیلی جریان فانو بررسی می‌شود. مسأله به این شکل است که هوا در خط لوله‌ای با طول ۳۰ متر و قطر داخلی ۱۵ سانتی‌متر جریان می‌یابد. شرایط هوا در ورودی، فشار ۱ اتمسفر، ماخ ۰/۳ و دمای ۲۷۳ درجه کلوین است در حالی که فشار خروجی ۰/۶۲۴ اتمسفر است. در این شرایط فاکتور اصطکاک درون لوله ثابت و مقدار آن ۰/۰۲ است. نسبت گرمای ویژه $\gamma=۱/۴$ و $R=۲۸۷\ \mathrm{J.(kg.K)^{-1}}$ در نظر گرفته می‌شود. در ادامه نتایج حاصل از حل مسأله فوق با روش تفاضل محدود ضمنی استیگر-وارمینگ ارایه می‌شود.

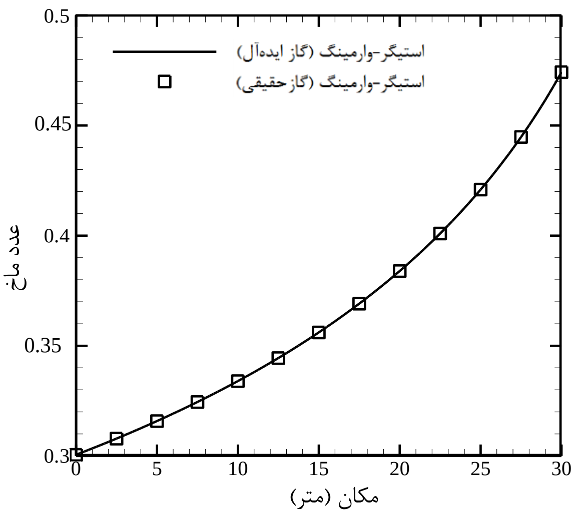
نمودارهای سرعت، فشار، ماخ، دما و ضریب تراکم‌پذیری به ترتیب در شکل ۱ تا شکل ۵ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۱ تا ۴ مشاهده می‌شود که نتایج به‌دست آمده از تحلیل‌های انجام شده با فرض گاز ایده‌ال و گاز واقعی بر همدیگر منطبق هستند. این وضعیت قابل انتظار است زیرا تغییرات ضریب تراکم‌پذیری نسبت به گاز ایده‌ال، مطابق با آنچه در شکل ۵ ارایه شده است بسیار ناچیز می‌باشد و اختلاف آن در رقم چهارم اعشار است.



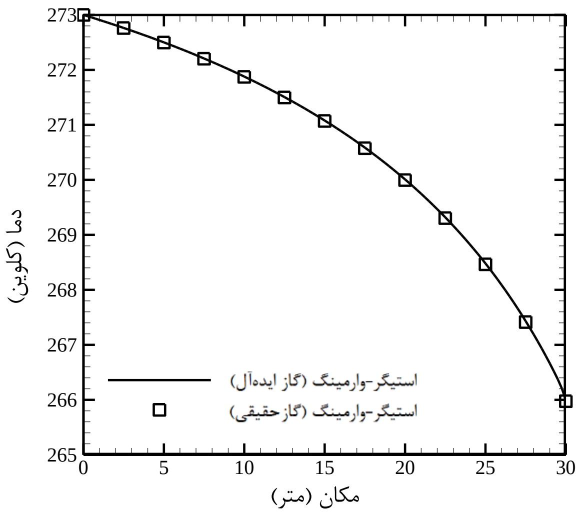
شکل ۱ تغییرات سرعت در طول لوله



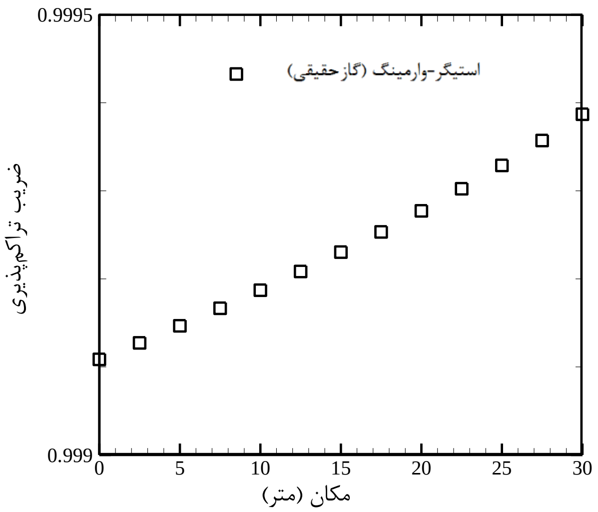
شکل ۲ تغییرات فشار در طول لوله



شکل ۳ تغییرات ماخ در طول لوله



شکل ۴ تغییرات دما در طول لوله



شکل ۵ تغییرات ضریب تراکم‌پذیری در طول لوله

همان‌گونه که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، نتایج با خطای ناچیزی در تطابق خوبی با حل تحلیلی قرار دارد.

۴-۲- بررسی صحت نتایج حل عددی ناپایای جریان (جریان درون لوله شوک)

برای صحت سنجی پاسخ گذرای روش عددی ارایه شده، جریان درون لوله شوک مورد بررسی قرار گرفته است. لوله‌ای به طول ۱۰ متر موجود است که با قرار دادن یک غشا در وسط، لوله به دو قسمت مساوی تقسیم شده است. هوا با شرایط اولیه موجود در جدول ۳ درون دو قسمت لوله قرار دارد.

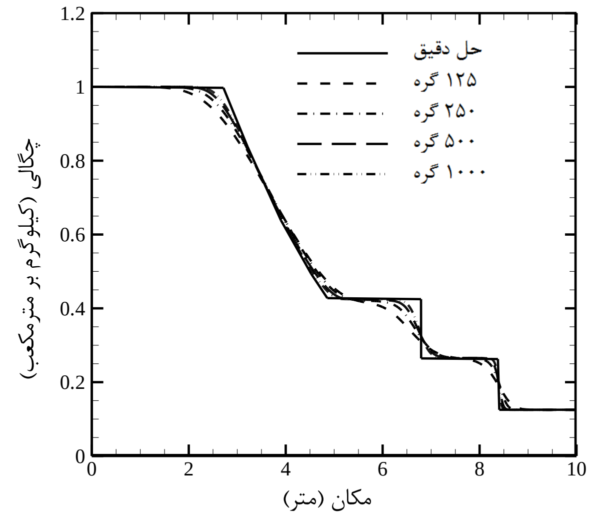
جدول ۲ خطای نسبی و مقادیر متغیرهای جریان در خروجی لوله

روش حل	U_{OUT} $(\mathrm{m.s^{-1}})$	T_{OUT} (K)	M_{OUT} (بی‌بعد)
حل تحلیلی [۱۷]	۱۵۵/۲	۲۶۵/۸	۰/۴۷۵
استیگر- وارمینگ	۱۵۵/۰۳	۲۶۵/۹۹	۰/۴۷۴
مقدار خطا (٪)	۰/۱	۰/۰۷	۰/۲

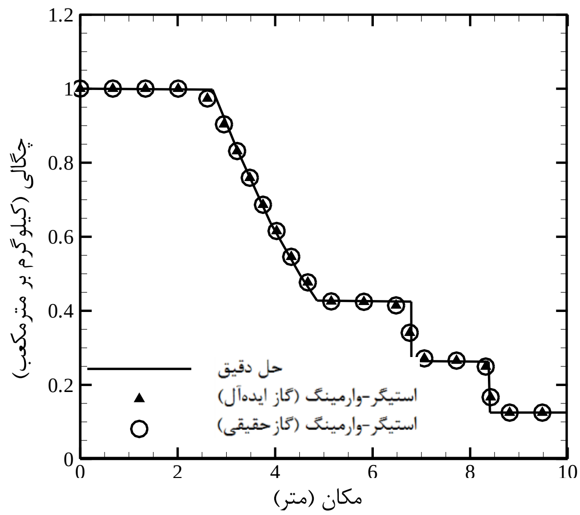
جدول ۳ مقادیر شرایط اولیه در لوله شوک

متغیرهای جریان	فشار (Pa)	چگالی $(\mathrm{kg.m^{-3}})$
سمت راست	۱۰۰۰۰	۱/۰۰
سمت چپ	۱۰۰۰۰۰	۰/۱۲۵

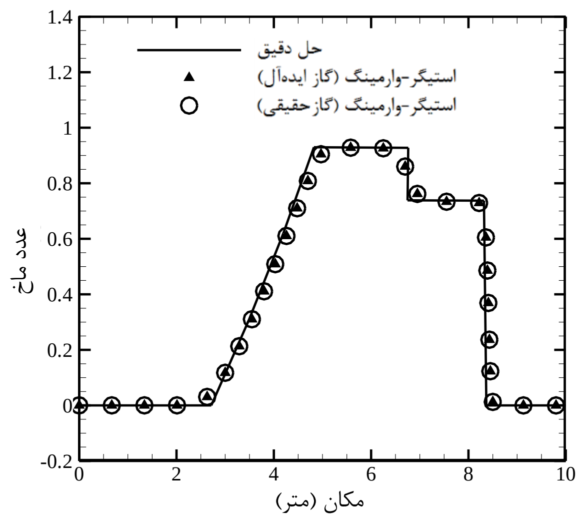
در لحظه $t=0^{+}$، این غشا پاره می‌شود و به دلیل اختلاف شرایط در دو قسمت لوله، جریان درون لوله برقرار می‌شود. پس از گذشت ۶/۱ میلی‌ثانیه، شرایط جدیدی برای خواص سیال از جمله چگالی، عدد ماخ، فشار و سرعت حاصل می‌شود. در این مسأله $R=۲۸۷\ \mathrm{j.(kg.K)^{-1}}$ و نسبت گرمای ویژه هوا $\gamma=۱/۴$ در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که فاکتور اصطکاک در لوله صفر است یا به عبارت دیگر فاقد جمله اصطکاکی است. برای بررسی استقلال شبکه حل، تغییرات چگالی برای تعداد گره‌های مختلف در شکل ۶ ترسیم شد که نشان داد به ازای ۲۵۰ گره، حل عددی مستقل از شبکه انتخابی خواهد بود. نتایج حاصل از حل شامل تغییرات چگالی، عدد ماخ، سرعت، فشار و تغییرات ضریب تراکم‌پذیری در شکل ۷ تا شکل ۱۱ ارایه شده‌اند.



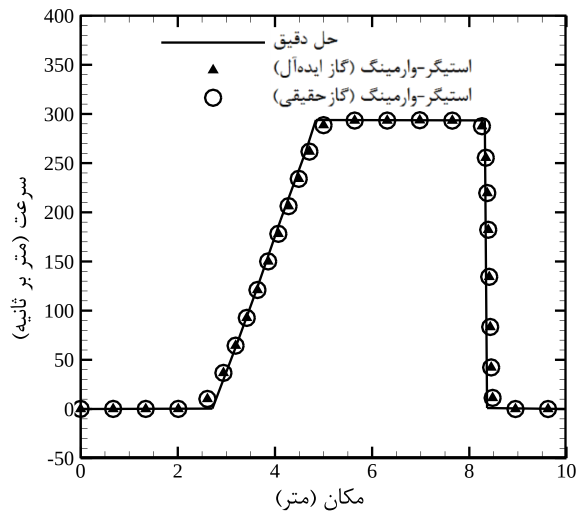
شکل ۶ بررسی استقلال شبکه برای چگالی در زمان $t=۶/۱\mathrm{ms}$



شکل ۷ تغییرات چگالی در لوله شوک در زمان $t=۶/۱\mathrm{ms}$

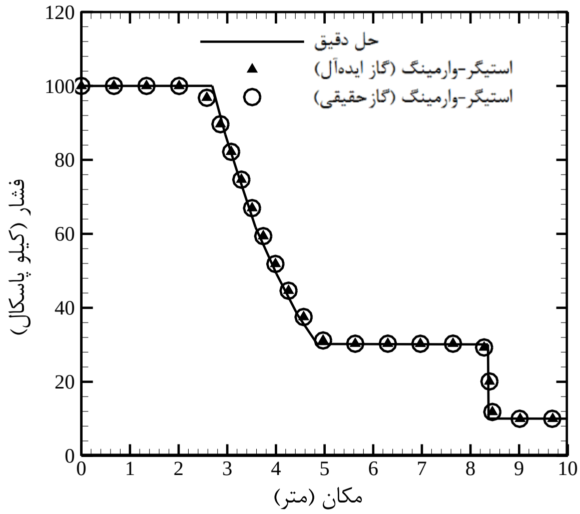


شکل ۸ تغییرات ماخ در لوله شوک در زمان $t=۶/۱\mathrm{ms}$

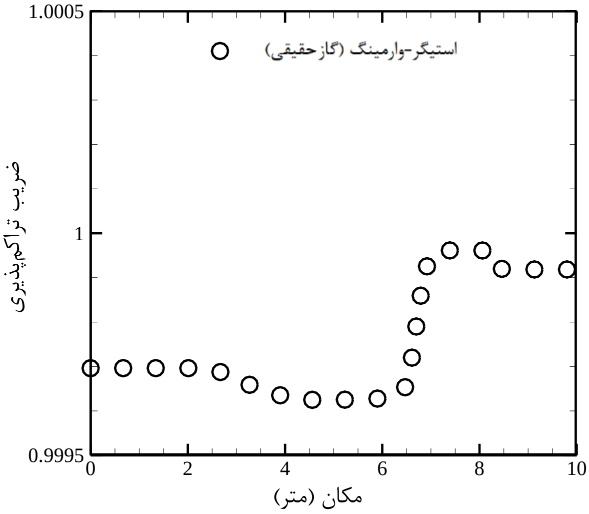


شکل ۹ تغییرات سرعت در لوله شوک در زمان $t=۶/۱\mathrm{ms}$

با توجه به شکل‌های ۷ تا ۱۰ مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده با فرض گاز ایده‌ال و گاز واقعی بر روی یکدیگر قرار دارند. این نتایج قابل پیش‌بینی هستند زیرا همانند مسأله قبل ضریب تراکم‌پذیری گاز حقیقی در این فشار و دما، مطابق با آنچه در شکل ۱۰ ارایه شده است به گاز ایده‌ال بسیار نزدیک می‌باشد و اختلاف آن با عدد یک در رقم چهارم اعشار است. همچنین با توجه به شکل‌های ۷ تا ۱۰ مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده از روش‌ضمنی استیگر-وارمینگ نتایج بسیار قابل قبولی در مقایسه با حل دقیق ریمان [۱۸] ارایه می‌دهد.



شکل ۱۰ تغییرات فشار در لوله شوک در زمان t =۶/۱ms



شکل ۱۱ تغییرات ضریب تراکم‌پذیری در لوله شوک در زمان t =۶/۱ms برای گاز حقیقی

علاوه بر این به دلیل اینکه ماهیت حل مرتبه اول می‌باشد، روش عددی دارای خاصیت یکنوایی بوده و حول ناپیوستگی‌ها، حل استیگر-وارمینگ به صورت هموار تغییر می‌کند.

۴-۳- بررسی جریان درون یک خط لوله با فشار متغیر در ورودی نسبت به زمان

این مسأله توسط عباس‌پور [۹] بررسی شده است. یک لوله صاف به طول ۵۰ کیلومتر و قطر داخلی ۵۰۰ میلی‌متر، مطابق شکل ۱۲، برای مطالعه انتخاب شده است. در این سیستم یک رگلاتور در ورودی خط لوله (گره یک) فشار را در ورودی تنظیم می‌کند. شرایط مرزی و اولیه برای مسأله مورد نظر به صورت زیر است:

۱- فشار در ورودی به صورت تابعی از زمان مطابق با شکل ۱۳ تغییر می‌کند.

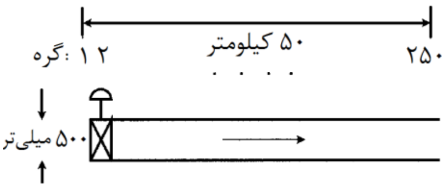
۲- فشار انتهای خط لوله در مقدار ۴ مگاپاسکال ثابت نگه داشته می‌شود.

۳- دمای سیال ورودی ۶۰ سانتی‌گراد و ثابت می‌باشد.

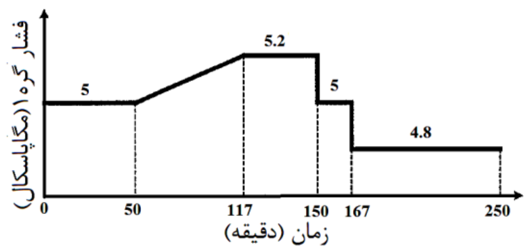
۴- در امتداد خط لوله جریان غیرهم‌دما و آدیاباتیک است.

۵- شرایط اولیه متناظر با یک جریان پایای غیرهم‌دما با فشار ورودی ۵ مگاپاسکال، دمای ورودی ۲۵ سانتی‌گراد و فشار خروجی ۴ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است.

همچنین برای گاز درون لوله وزن ملکولی ۱۸، دمای بحرانی ۲۰۰ کلوین، فشار بحرانی ۴/۵۷ مگاپاسکال و نسبت گرمای ویژه ۱/۲۵ فرض شده است.



شکل ۱۲ مشخصات هندسی خط لوله [۹]



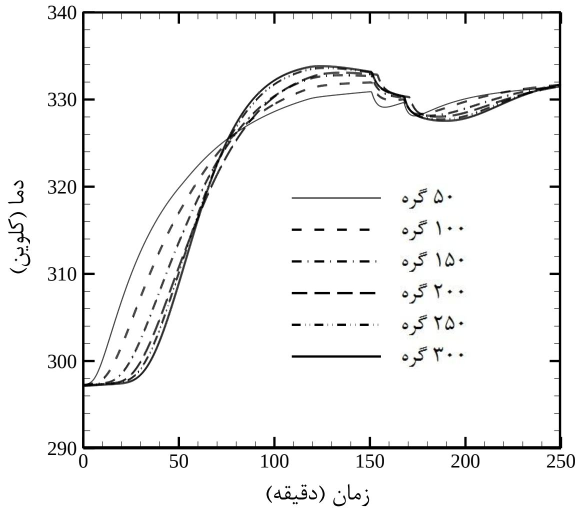
شکل ۱۳ تغییرات فشار اعمال شده در ورودی با گذشت‌زمان [۹]

به منظور گسسته‌سازی مکانی، به دلیل حساسیت دما، تغییرات زمانی دما در مکانی به فاصله ۳۰ کیلومتری از رگلاتور به ازای تعداد گره‌های مختلف بررسی شد و با توجه به شکل ۱۴ این نتیجه حاصل شد که برای تحلیل این جریان لازم است خط لوله به ۲۵۰ گره تقسیم شود. پس از تحلیل مسأله با روش عددی حاضر نتایج به دست آمده مورد بحث قرار گرفته است.

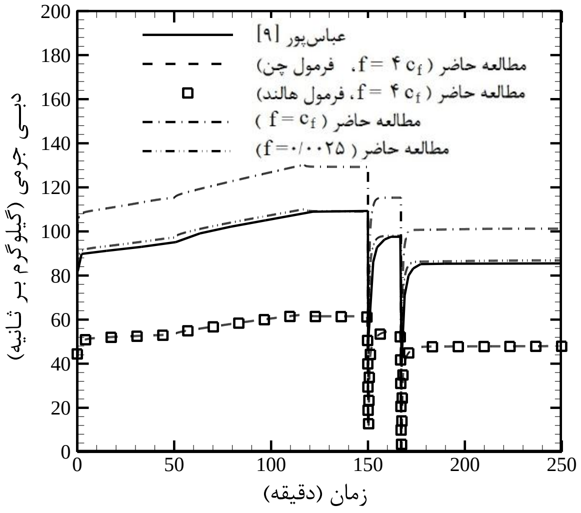
نتایج تغییرات زمانی دبی جرمی عبوری از گره‌های ورودی و خروجی خط لوله به ترتیب در شکل ۱۵- الف و ب نمایش داده شده‌اند. برای محاسبه فاکتور اصطکاک از دو فرمول صریح چن و هالند [۱۱] استفاده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با اینکه نتایج تحلیل حاضر روند تغییرات کاملاً یکسانی با عباس‌پور [۹] دارند، ولی تفاوت عمده‌ای مابین آنها مشاهده می‌شود.

مهمترین عاملی که منجر به این اختلاف می‌شود فاکتور اصطکاک است. به نظر می‌رسد فاکتور اصطکاک در نظر گرفته شده توسط عباس‌پور مقداری در حدود $f=$ ۰/۰۰۲۵ بوده است چرا که در این حالت نتایج بدست‌آمده با نتایج ایشان به نحو نسبتاً مناسبی منطبق می‌شود.

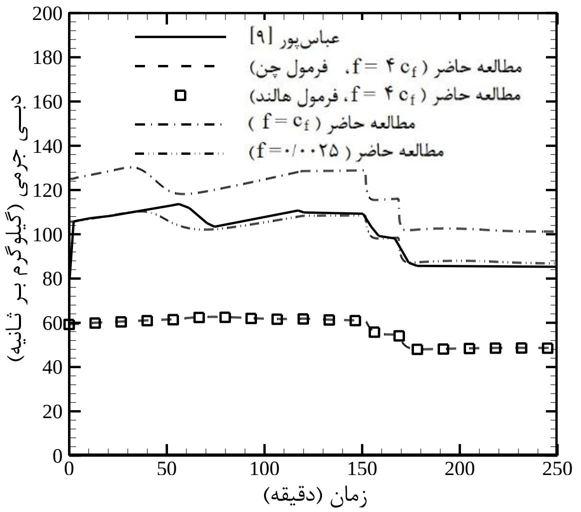
شکل ۱۶ تغییرات زمانی دما را در گره خروجی در مقایسه با عباس‌پور [۹] ارایه می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در اینجا نیز تفاوت‌های قبلی در ارتباط با دما نیز وجود دارد. با این حال این تفاوت‌ها تا حدودی اجتناب‌ناپذیر است.



شکل ۱۴ بررسی استقلال شبکه محاسباتی در گره‌ای به فاصله ۳۰ کیلومتری از رگلاتور



(الف)

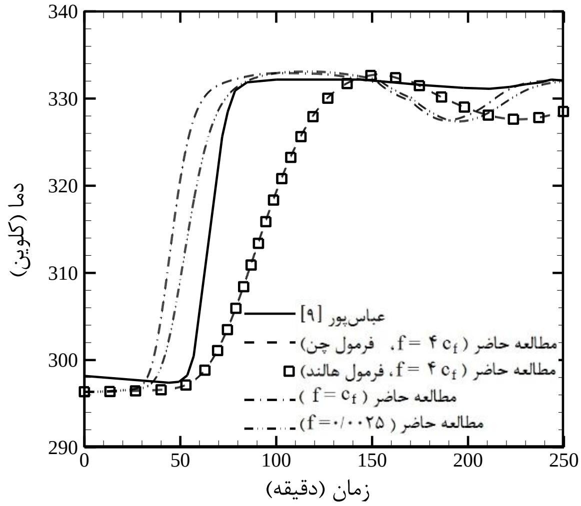


(ب)

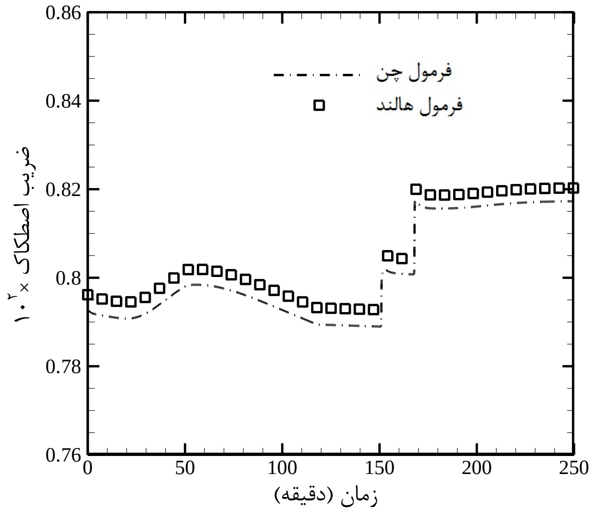
شکل ۱۵ دبی جرمی در الف- گره ورودی و ب- گره خروجی

به‌ویژه در مورد دما که بسیار به روش عددی حساس است و به‌دلیل مرتبه اول بودن روش استیگر-وارمینگ و میرایی ذاتی موجود در آن تغییرات آن مقداری هموارتر به دست می‌آید. علت متفاوت بودن زمان افزایش ناگهانی دما در گره خروجی در شکل ۱۶، به‌دلیل فاکتورهای اصطکاک مختلف است که باعث تغییرات سرعت گاز شده و زمان رسیدن گاز به گره انتهایی را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

همان‌گونه که در شکل ۱۷ نمایان است، فاکتور اصطکاک در وسط خط لوله توسط دو رابطه به دست آمده توسط چن و هالند مقدار نزدیکی به یکدیگر دارند.



شکل ۱۶ **تغییرات دما جرمی در گره خروجی خط لوله با گذشت زمان**



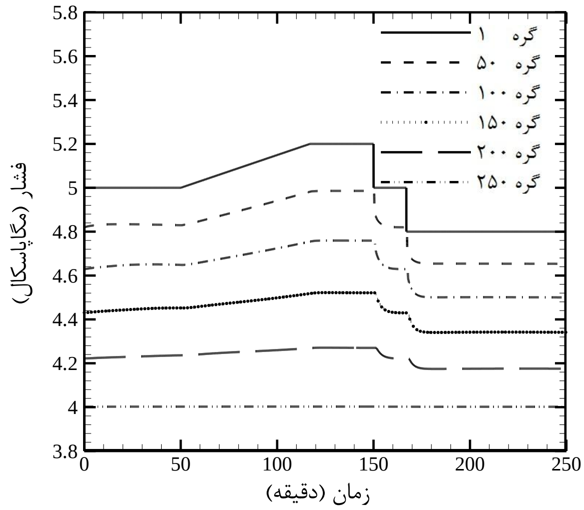
شکل ۱۷ تغییرات فاکتور اصطکاک نسبت به زمان در وسط خط لوله

از طرفی نتایج این تحلیل عددی عدد رینولدز جریان را از مرتبه $۱۰^۶$ تا $۱۰^۷$ نشان می‌دهد که به این ترتیب مرتبه فاکتورهای اصطکاک بدست‌آمده از فرمول‌های چن و هالند کاملاً با نمودار مودی هم‌خوانی دارند. شایان ذکر است که تغییرات فاکتور اصطکاک نسبت به زمان، به دلیل تغییرات زمانی دبی جرمی عبوری می‌باشد.

به هرحال تطابق بسیار مناسب نتایج حاضر با جواب دقیق جریان فانو، صحت جمله اصطکاکی در حل عددی حاضر و هم‌خوانی با حل دقیق ریمان صحت رفتار گذرای روش حاضر را تأیید می‌کند. همچنین اگر چه از دمای و فشار بحرانی گاز به‌کار گرفته شده توسط عباس‌پور [۹] اطلاع کافی در اختیار نیست، اما استفاده از شرایط گاز طبیعی با جرم ملکولی ۱۸، اختلاف زیادی با دیگر ترکیبات گاز طبیعی ایجاد نمی‌کند و فاکتور اصطکاک باعث اختلاف عمده بین نتایج عددی حاضر و این مرجع شده است. با این حال روند تغییرات زمانی بدست آمده کاملاً با نتایج این مرجع تطابق دارد.

با توجه به موارد بالا، تغییرات فشار، دما، دبی جرمی، چگالی، سرعت وضریب تراکم‌پذیری در مقاطع مختلف خط لوله نسبت به زمان بدست آمده و به ترتیب درشکل ۱۸ تا شکل ۲۳ نشان داده شده‌اند.

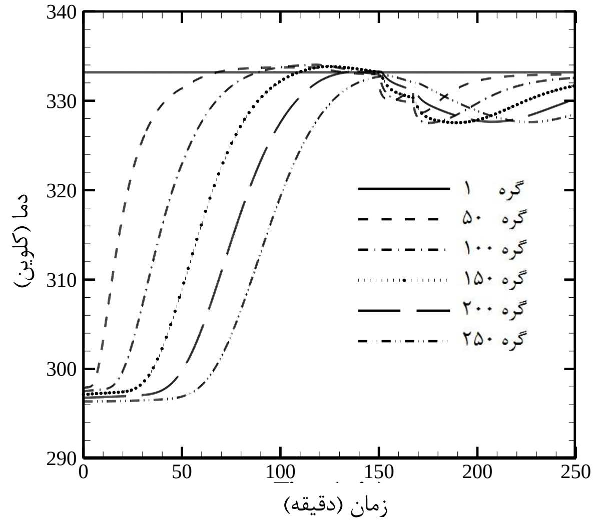
در ابتدا جریان گاز درون خط لوله در شرایط پایا با فشار ۵ مگاپاسکال و دمـای ۲۵ درجه سانتی‌گراد در ورودی و فشار ۴ مگاپاسکال در خروجی قرار دارد. با اعمال شرایط مرزی، در لحظه $t = ۰^+$ در ورودی دما ناگهان به ۶۰ درجه سانتی‌گراد افزایش یافته در حالی‌که کماکان فشار در ورودی و خروجی تا ۵۰ دقیقه اول ثابت باقی می‌ماند. با دقت در شکل ۱۸ می‌توان مشاهده کرد که در ۵۰ دقیقه اول فشار در امتداد خط لوله، تغییرات بسیار جزئی نسبت به حالت اولیه خود (حالت پایای خود) دارد که نشان می‌دهد تغییرات فشار بیشتر وابسته به شرایط مرزی فشار بوده و تغییرات دمای گاز چندان تاثیری بر آن نخواهد داشت.



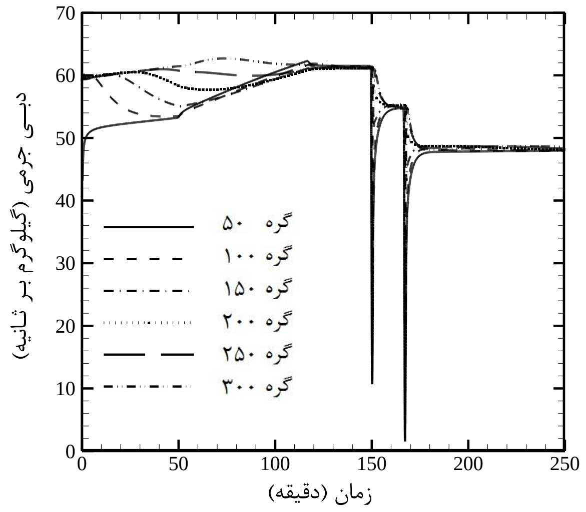
شکل ۱۸ تغییرات فشار نسبت به زمان در گره‌های مختلف

با گذشت زمان به دلیل تغییرات فشار ورودی لوله، فشار در گره‌های دیگر تحت تأثیر قرار می‌گیرد که انتظار می‌رود اثرات اصطکاکی در طول خط لوله و همچنین شرط فشار ثابت در مرز خروجی، تغییرات فشار را با دور شدن از ورودی لوله و نزدیک شدن به خروجی آن به تدریج هموار و هموارتر سازد. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی عددی حاضر با توجه به شکل ۱۸ به‌خوبی این رفتار فیزیکی را نشان می‌دهد.

شکل ۱۹ تغییرات دما در مقاطع مختلف خط لوله را نشان می‌دهد. تغییرات دمای گاز درون لوله نسبت به زمان تحت تاثیر عواملی چون کاهش فشار به واسطه افت‌های اصطکاکی، تغییرات فشار به واسطه شرایط مرزی متغیر با زمان در ورودی و همچنین افزایش دمای گاز در ورودی از ۲۵ به ۶۰ درجه سانتی‌گراد می‌باشد. با شروع شبیه‌سازی جریان، به دلیل افزایش دما در ورودی، پس از گذشت زمان دما در این گره‌ها به تدریج شروع به افزایش می‌کند. تا قبل از زمان ۵۰ دقیقه، به دلیل عدم تغییرات زیاد در فشار گاز درون خط لوله، دمای گره‌های مختلف در خط لوله فقط به واسطه رسیدن سیال با دمای بالاتر افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در گره انتهایی پس از گذشت تقریباً ۷۰ دقیقه سیال ورودی که دارای دمای بالایی می‌باشد به این گره می‌رسد و دما در این گره شروع به افزایش می‌کند. همچنین تغییرات ناگهانی دما در زمآنهای میانی به دلیل تغییرات فشار اعمالی در ورودی است. در شکل ۲۰ تغییرات زمانی دبی جرمی در موقعیت‌های مختلف ارایه شده است.



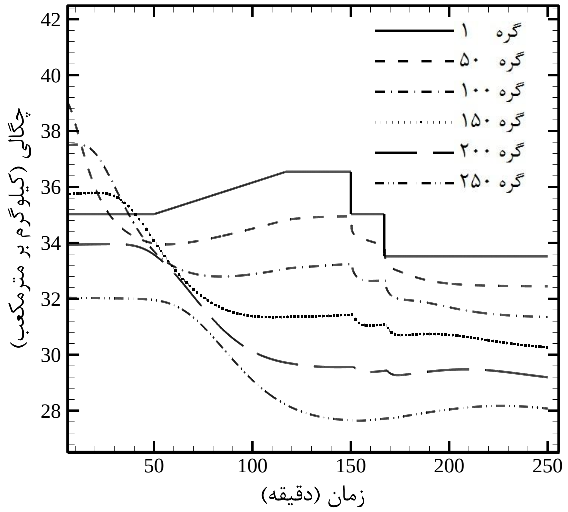
شکل ۱۹ تغییرات دما نسبت به زمان در گره‌های مختلف



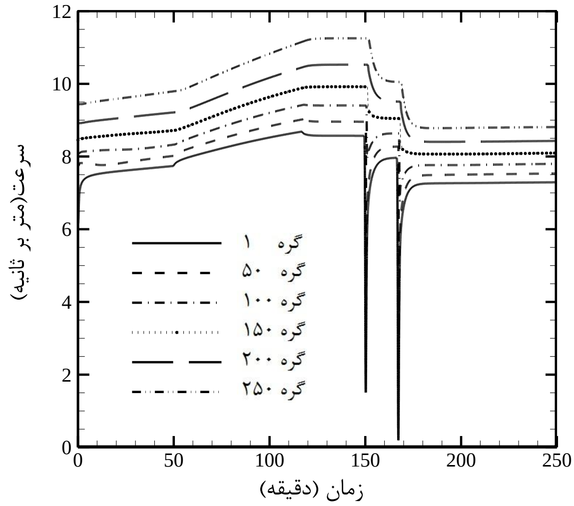
شکل ۲۰ تغییرات دبی جرمی نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله

با توجه به اینکه شرایط اولیه برای دبی از حل جریان پایا اعمال شده است؛ لذا در لحظه صفر، دبی جرمی کلیه نقاط (به استثنای گره ورودی) برابر با دبی جرمی اولیه حدود ۶۰ کیلوگرم بر ثانیه می‌باشد. دبی گره ورودی نیز با توجه به افزایش آنی دما از۲۵ به ۶۰ درجه سانتی‌گراد به طور ناگهانی کاهش می‌یابد. با گذشت زمان به دلیل افزایش دمای گره‌های بعدی دبی جرمی به تدریج در این گره‌ها نیز رو به کاهش می‌گذارد. پس از گذشت ۵۰ دقیقه به واسطه شرایط مرزی، فشار در ورودی سیر افزایش به خود می‌گیرد که به دنبال آن دبی جرمی در گره ورودی و با مقداری تأخیر متناسب با رسیدن امواج تراکمی به گره‌های بعد، این افزایش دبی در سایر گره‌ها نیز مشاهده می‌شود. به همین ترتیب تغییرات فشار ناگهانی در ورودی در زمان‌های ۱۵۰ و ۱۶۷ دقیقه تغییرات دبی را در پی داشت. شایان ذکر است که نزدیک به صفرشدن دبی در دو نقطه شکل فوق به‌دلیل خطاهای عددی و محاسباتی است و جنبه فیزیکی ندارد.

شکل ۲۱ و شکل ۲۲، به ترتیب تغییرات چگالی و سرعت گره‌های مختلف را با گذشت زمان نشان می‌دهند. همان‌گونه که در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود تغییرات چگالی کاملاً با تغییرات دما و فشار نقاط هم‌خوانی دارد.

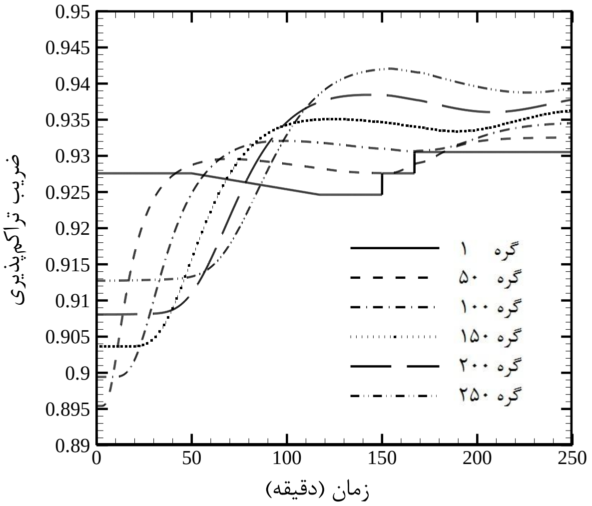


شکل ۲۱ تغییرات چگالی نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله



شکل ۲۲ تغییرات سرعت نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله

با این حال میدان سرعت درون لوله بیشتر تحت تأثیر تغییرات فشار می‌باشد و همان‌گونه که در شکل ۲۰ نشان داده شده است، سرعت گاز درون لوله متناسب با فشار ورودی لوله در حال تغییر است. تغییرات ضریب تراکم پذیری در شکل ۲۳ ارایه شده است. مقدار این ضریب، تأثیر قابل توجهی بر نتایج تحلیل غیر هم‌دمای جریان گاز دارد. به همین سبب با توجه به نتایج ارایه شده در شکل ۲۱، فرض گاز ایده‌ال می‌تواند منجر به ایجاد خطای نسبتا زیادی برای تحلیل جریان گاز تحت شرایط یاد شده شود.



شکل ۲۳ تغییرات ضریب تراکم‌پذیری نسبت به زمان در گره‌های مختلف خط لوله

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر جریان گذرای غیرهم‌دمای گاز حقیقی توسط حل عددی معادلات اویلر گذرا به فرم بقایی[1] به همراه اثرات اصطکاک درون لوله مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. برای حل عددی این معادلات از روش تفاضل محدود ضمنی استیگر- وارمینگ (بر مبنای تجزیه بردار شار) به فرم دلتا، استفاده شده است. تطابق بسیار مناسب نتایج عددی حاضر با جواب دقیق جریان فانو، صحت جمله اصطکاکی در حل عددی حاضر و هم‌خوانی با حل دقیق ریمان در ارتباط با یک لوله شوک صحت رفتار گذرای روش حاضر را تأیید می‌کند. پس از اعتبارسنجی روش عددی حاضر با حل دقیق فانو و حل دقیق ریمان روش عددی حاضر به مسأله ارایه شده توسط عباس‌پور [۹] اعمال شد. نتایج به دست آمده از حل عددی حاضر، با وجود تطابق در رفتار، اختلافاتی با نتایج این مرجع دارد که ناشی تفاوت در فاکتور اصطکاک به‌کار رفته توسط عباس‌پور [۹] می‌باشد. به هر حال از آنجا که نتایج به دست آمده از تحلیل عددی حاضر در مورد این مسأله کاملاً با فیزیک جریان هم‌خوانی دارد می‌توان امیدوار بود که در صورت یکسان بودن شرایط در نظر گرفته شده با مرجع یک این اختلافات نیز کاهش یابد. در نهایت با توجه به نتایج بدست آمده در تحلیل عددی حاضر می‌توان نتیجه گرفت که روش عددی حاضر به دلیل استفاده از روش‌های خطی‌سازی، ضمن داشتن دقت مناسب از هزینه محاسباتی کمتری نسبت به روش‌های غیرخطی متداول برخوردار است.

1. Conservative

۶- تشکر و قدردانی

نگارندگان از شرکت گاز استان خوزستان، مرکز تحقیقات حفاری و دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل فراهم نمودن امکانات علمی و پژوهشی جهت به ثمر رسیدن این تحقیق تشکر و قدردانی می‌نمایند.

۷- پیوست

در این پیوست ماتریس ژاکوبین شار و ماتریس چشمه برای روش استیگر-وارمینگ بر مبنای تجزیه بردار شار ارایه شده‌اند. این ماتریس‌ها با استفاده از نرم‌افزار میپل[1] محاسبه شده‌اند.

ماتریس A که برابر $(\partial E/\partial \mathrm{x})$ است، که ماتریس ژاکوبین شار نامیده می‌شود. آرایه‌های این ماتریس طبق رابطه (الف-۱) با A_{ij} نمایش داده می‌شوند.

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix} \tag{الف-۱}$$

آرایه‌های A_{ij} در رابطه (الف-۲) داده شده‌اند.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 0\\
A_{12} &= 1\\
A_{13} &= 0\\
A_{21} &= -u^2+\frac{1}{2}u^2Z(\gamma-1)\\
A_{22} &= -u^2-\frac{1}{2}u^2Z(\gamma-1)\\
A_{23} &= Z(\gamma-1)\\
A_{31} &= \frac{1}{2}u^3Z(\gamma-1)\\
&\quad -\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{a^2}{Z\gamma(\gamma-1)}+\frac{a^2}{\gamma}\right)u\\
A_{32} &= -u^2Z(\gamma-1)+\frac{1}{2}u^2\\
&\quad +\frac{a^2}{Z\gamma(\gamma-1)}+\frac{a^2}{\gamma}\\
A_{33} &= (1+Z(\gamma-1))u
\end{aligned} \tag{الف-۲}$$

اگر ماتریس ژاکوبین شار A بر مبنای مقادیر ویژه مثبت و منفی این ماتریس به دوماتریس A^+ و A^- تفکیک شود، ماتریس‌های حاصل طبق رابطه (الف-۳) و (الف-۴) بیان می‌شوند.

$$\mathrm{A}^+=\begin{bmatrix}A_{11}^+ & A_{12}^+ & A_{13}^+\\ A_{21}^+ & A_{22}^+ & A_{23}^+\\ A_{31}^+ & A_{32}^+ & A_{33}^+\end{bmatrix} \tag{الف-۳}$$

$$\mathrm{A}^-=\begin{bmatrix}A_{11}^- & A_{12}^- & A_{13}^-\\ A_{21}^- & A_{22}^- & A_{23}^-\\ A_{31}^- & A_{32}^- & A_{33}^-\end{bmatrix} \tag{الف-۴}$$

در رابطه (الف-۳) و (الف-۴)، A_{ij}^+ و A_{ij}^- آرایه‌های ماتریس‌های A^+ و A^- هستند که A_{ij}^+ در رابطه (الف-۵) ارایه شده است.

$$\begin{aligned}
A_{11}^+ &= -\frac{1}{4}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^3\\
&\quad +\frac{1}{4}\frac{(Z\gamma-Z-2)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u^2+\frac{1}{2}\,u\\
A_{12}^+ &= +\frac{1}{2}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^2\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{(Z\gamma-Z-1)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u+\frac{1}{2}\\
A_{13}^+ &= -\frac{1}{2}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u\\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{Z\gamma(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}\\
A_{21}^+ &= -\frac{1}{4}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^4\\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{(Z\gamma-Z-1)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u^3\\
&\quad +\frac{1}{4}u^2(\gamma-1)Z\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}{\sqrt{\gamma}}u\\
A_{22}^+ &= \frac{1}{2}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^3\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{(2Z\gamma-2Z-1)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u^2\\
&\quad -\frac{1}{2}\,u(Z\gamma-Z-2)\\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}{\sqrt{\gamma}}\\
A_{23}^+ &= -\frac{1}{2}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^2\\
&\quad +\frac{(\gamma-1)Z\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u\\
&\quad +\frac{1}{2}(\gamma-1)Z\\
A_{31}^+ &= -\frac{1}{8}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^5\\
&\quad +\frac{1}{8}\frac{(3Z\gamma-3Z-2)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u^4
\end{aligned}$$

[1] Maple

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4}u^3(\gamma-1)Z\\
&-\frac{1}{4}\frac{(Z\gamma-Z+2)}{Z(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}\\
&\times\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a\,u^2\\
&-\frac{1}{2}\frac{(Z\gamma-Z+1)a}{Z(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{32}^{+}\quad=&\frac{1}{4}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^4\\
&-\frac{1}{4}\frac{(3Z\gamma-3Z-1)\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u^3\\
&-\left(\frac{1}{2}\,Z\gamma-\frac{1}{2}\,Z-\frac{1}{4}\right)u^2\\
&+\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}{Z(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}u\\
&+\frac{1}{2}\frac{(Z\gamma-Z+1)a^2}{Z(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{33}^{+}\quad=&-\frac{1}{4}\frac{Z\gamma(\gamma-1)}{(1-Z+Z\gamma)a^2}u^3\\
&+\frac{3}{4}\frac{(\gamma-1)Z\sqrt{\gamma}}{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}u^2\\
&-\frac{1}{2}(1-Z+Z\gamma)u\\
&+\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{1-Z+Z\gamma}\right)a}{\sqrt{\gamma}}
\end{aligned}
\tag{الف-۵}
$$

همچنین در رابطه (الف-۶) آرایه‌های A_{ij}^{-} آورده شده‌اند.

$$\mathrm{A}^{-}=\mathrm{A}-\mathrm{A}^{+} \tag{الف-۶}$$

با توجه به رابطه $A=(\partial E/\partial \mathrm{x})$، می‌توان E^{+} را به صورت $\mathrm{A}^{+}\mathrm{Q}$ نوشت و E^{+} را از ضرب این ماتریس‌ها محاسبه کرد. به همین ترتیب می‌توان E^{-} را از $\mathrm{A}^{-}\mathrm{Q}$ به دست آورد.

۸- مراجع

[1] Issa R. I, Spalding, D. B., “Unsteady One-Dimensional Compressible Frictional Flow with Heat Transfer”, *J. Mech. Eng. Sci*, Vol. 14, No. 6, 1972, pp. 365-369.

[2] Winterbone, D.E., Pearson, R.J., “A Solution of the Wave Equations Using Real Gases” *Int. J. Mech. Sci*, Vol. 34, No. 12, 1992, pp. 917-932.

[3] Osiadacz, A.J., Chaczykowski, M., “Comparison of Isothermal and Non-isothermal Pipeline Gas Flow Models”, *Chem. Eng. J.* Vol. 81, 2001, pp. 41-51.

[4] Greyvenstein, G.P, “An Implicit Method For the Analysis of Transient Flows in Pipe Networks” *Int. J. Numer. Meth. Eng*. Vol. 53, 2002, pp. 1127-1143.

[5] Gato, L.M.C., Henriques, J.C.C., “Dynamic Behavior of High-Pressure Natural-Gas Flow in Pipelines”, *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 26, 2005, pp. 817-825.

[6] Tenties, E., Margaris, D., Papanikas, D., “Transient Gas Flow Simulation Using Adaptive Method of Lines”, *C.R. Mecanique,* Vol. 331, 2003, pp. 481-487.

[7] Abbaspour, M., Chapman, K.S., “Non-isothermal Transient Flow in Natural Gas Pipeline” *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol. *75*, No. 3, 2008, pp. 0310181–0310188.

[8] Chaczykowski. M., “Transient Flow in Natural Gas Pipeline-The Effect of Pipeline Thermal Mode” *Applied Mathematical Modeling* ,Vol. 34, 2010, pp. 1051-1067.

[9] Abbaspour. M, “*Simulation and Optimization of Non-isothermal, One-dimensional Single/Two Phase Flow in Natural Gas Pipeline*”, Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree Doctor of Philosophy, Department of Mechanical and Nuclear Engineer, College of Engineering, Kansas State University, 2005.

[10] Dranchuck, P. M., Purvis, R. A., Robinson, D. B., “Computer Calculations of Natural Gas Compressibility Factors using the Standing and Katz Correlation”, Institute of Petroleum Technical Series, IP 74-008, 1974, pp. 1-13.

[11] Ghanbari A., Farshad F., Fred and Rieke H. H., “Newly Developed Friction Factor Correlation for Pipe Flow and Flow Assurance”, *Journal of Chemical Engineering and Materials Science*, Vol. 2, No. 6, 2011, pp. 83-86.

[12] J. L. Steger and R. F. Warming. “Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas dynamic Equations with Applications to Finite Difference Methods”, *J. Comput. Phys*., Vol. 40 ,1981, pp. 263-293.

[13] Hoffman A. K., Chiang, S. T., Computational Fluid Dynamics for Engineers,Voluume *2*. Wichita, Kansas, August 2000.

[14] Liou, M. S., Steffen, C. J., “A New Flux Splitting Scheme”, *Journal of Computational Physics*, vol. 107, 1993, pp. 23-29.

[15] Behbahani-Nejad, M., Shekari, Y., “The accuracy and Efficiency of a Reduced-Order Model for Transient Flow Analysis in Gas Pipelines”, *J. Pet. Sci. Technol*., 2010, Vol. 73, pp. 13-19.

[16] M. Shaebani, *modeling of Rank reduced to one-dimensional unsteady flow in pipelines natural gas*, Thesis of M.Sc, Shahid Chamran University of Ahvaz, 2012. (In Persian)

[17] Anderson, J. D., *Modern Compressible Flow*, USA, McGraw-Hill, 1990, 649.

[18] Hirsch, Ch., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 2, John Wiley & sons, August 1992, 690.