http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

آبان ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۸ ص‌ص ۲۸-۴۱

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۱/۲۴
تاریخ پذیرش ۹۲/۲/۹
ارائه در سایت ۹۲/۴/۳۰

مدل شرط مرزی برای شبیه‌سازی مرزهای منحنی در روش لتیس بولتزمن

امید رضا محمدی‌پور[۱]، حمید نیازمند[۲*]، سید علی میربزرگی[۳]

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند
* مشهد صندوق پستی ۱۱۱۱-۹۱۷۷۵، niazmand@um.ac.ir

چکیده- از آنجا که الگوریتم لتیس بولتزمن در یک شبکه دکارتی تعریف می‌شود، مدل‌سازی مرزهای منحنی، محدود به یک سری خطوط شکسته است که جدا از کاهش دقت شبیه‌سازی می‌تواند نتایج غیر فیزیکی نیز به دنبال داشته باشد. رایج‌ترین ایده برای بهبود دقت شبیه‌سازی، برون‌یابی اطلاعات لازم در گره‌های مرزی است. در اغلب تحقیقات گذشته، متناسب با فاصله گره تا مرز منحنی از دو رابطه برای انجام برون‌یابی استفاده شده است که می‌تواند تغییرات شدید توابع توزیع ذرات را به هنگام تعویض رابطه به دنبال داشته باشد. در این مقاله طرحی جدید برای اعمال شرط مرزی پیشنهاد شده است که برون‌یابی صورت گرفته در آن فقط نیازمند به یک رابطه است و محدود به جریان سیال نبوده بلکه در تمام مسائل فیزیکی قابل اعمال می‌باشد. به طور خاص برای شبیه‌سازی جریان سیال نیز شرط مرزی جدیدی معرفی شده است که در عین استقلال از شکل هندسی مرز، از برقراری شرط عدم لغزش در گره‌های مرزی اطمینان حاصل می‌نماید. طرح شرط مرزی جدید به کمک تعدادی از مسایل کلاسیک اعتبارسنجی شده است. نتایج نشان دهنده دقت و پایداری قابل قبول مدل شرط مرزی حاضر در شبیه‌سازی و حفظ تمامیت فیزیکی مرزهای منحنی می‌باشد.

کلیدواژگان: لتیس بولتزمن، شرط مرزی منحنی، شرط مرز عدم لغزش.

A new curved boundary treatment for the lattice Boltzmann method

O. R. Mohammadipoor[1], H. Niazmand[2*], S. A. Mirbozorgi[3]

1- PhD. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.
2- Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.
3- Assist. Prof., Mech. Eng., Birjand Univ., Birjand, Iran.
* P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran. niazmand@um.ac.ir

Abstract- Since the lattice Boltzmann method (LBM) originally carries out the simulations on the regular Cartesian lattices; curved boundaries are often approximated as a series of stair steps. The most commonly employed technique for resolving curved boundary problems is extrapolation of macroscopic properties at boundary nodes. Previous investigations have indicated that using more than one equation for extrapolation in boundary condition potentially causes abrupt changes in particle distributions. Therefore, a new curved boundary treatment is introduced to improve computational accuracy of the conventional stair-shaped approximation used in lattice Boltzmann simulations by using a unified equation for extrapolation of macroscopic variables. This boundary condition is not limited to fluid flow and can be extended to other physical fields. The proposed treatment is tested against several well established problems. Numerical results show that the present treatment is of second-order accuracy, and has well-behaved stability characteristics.

Keywords: Lattice Boltzmann, Curved Boundary Condition, No-slip Boundary Condition.

۱- مقدمه

دهه گذشته شاهد شکل‌گیری روشی قدرتمند در زمینه تحلیل جریان‌ها به نام روش لتیس بولتزمن[1] است. این روش که به دنبال روش لتیس گاز[2] و برای رفع نقایص آن بوجود آمد، به سرعت جایگاه خود را در تحلیل جریان‌های پیچیده تثبیت کرد. در روش لتیس بولتزمن به واسطه نگاه میکروسکوپی به مفهوم مدل سیال، توابع توزیع ذرات به عنوان مبنای تحلیل جریان سیال قلمداد می‌شود. بکارگیری توابع توزیع که معرف احتمال حضور ذرات سیال در یک مکان هستند به لتیس بولتزمن اجازه می‌دهد تا به جای حل معادله غیرخطی ناویر- استوکس، به حل معادله ساده شده و شبه خطی انتقال بولتزمن بپردازد. امری که موجب ساده‌سازی قابل توجه در فرمولاسیون شده و قابلیت پردازش موازی را به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌بخشد. در کنار این مزایا روش لتیس بولتزمن دارای معایبی نیز هست که از آنها می‌توان به شبکه دکارتی مورد استفاده در این روش و تعداد بیشتر مجهولات در مقایسه با معادله ناویر- استوکس اشاره کرد. مواردی که موجب شده تا بحث شرط مرزی به یکی از مهمترین و مورد توجه ترین جنبه‌های روش لتیس بولتزمن تبدیل شود. شرایط مرزی متفاوتی برای روش لتیس بولتزمن در مرز جامد- سیال معرفی شده است که رایج ترین آنها روش پرش معکوس[3] است [۲،۱] که در عین سادگی از دقت مرتبه اول برخوردار است [۲].

برای بهبود دقت شرط مرزی ایده‌های متفاوتی مطرح شده است که از آن جمله می‌توان به انتقال مرز از روی گره به حد واسط دو گره [۲]، پرش معکوس روی بخش غیر تعادلی [۳]، تعادل ترمودینامیکی توابع توزیع حول مقادیر فرضی سرعت و چگالی [۴] و برون‌یابی توابع توزیع [۵] اشاره کرد. از آنجا که روش لتیس بولتزمن در ابتدا بر مبنای یک شبکه دکارتی طرح ریزی شده است، مدل‌سازی مرزهای منحنی محدود به یک سری خطوط شکسته خواهد شد که تمامیت فیزیکی مرز و جریان پیرامون آن را به چالش می‌کشد. اگرچه تلاش‌هایی برای حل معادله بولتزمن در دستگاه مختصات منحنی الخط صورت گرفته است [۶-۹]، ولی سادگی الگوریتم لتیس بولتزمن در شبکه دکارتی، توجه محققان را بیشتر به سمت پیاده‌سازی مرزهای منحنی در شبکه دکارتی سوق داده است. شاید بتوان فلیپوا و هانل [۱۰] را اولین محققانی دانست که توانستند با کمک مفهوم پرش معکوس و ایده برون‌یابی توابع توزیع معرفی شده در [۵]، مرزهای منحنی را در شبکه دکارتی مدل‌سازی کنند. این مدل مشکل ناپایداری داشت که بعدها توسط می و همکارانش [۱۲،۱۱] تا حد زیادی برطرف گردید. بوزیدی و همکارانش [۱۳] شرط مرزی ساده تری را بر مبنای مدل پرش معکوس به منظور مدل‌سازی مرزهای منحنی معرفی نمودند که تنها محدود به مرزهای ثابت بود. لالهمند و لو [۱۴] شرط مرزی بوزیدی را بهبود بخشیده و به مرزهای متحرک گسترش دادند. گو و همکارانش [۱۵] توابع توزیع را به دو بخش تعادلی و غیرتعادلی تقسیم نمودند و ایده برون‌یابی را برای تعیین بخش غیرتعادلی توابع توزیع در مرز منحنی بکار بردند.

در شبیه‌سازی مرز منحنی، شبکه گرهی الزاماً منطبق بر مرز نخواهد بود. در چنین شرایطی فاصله نقاط گرهی تا مرز، نقش تعیین کننده‌ای در نوع معادلات شرط مرزی خصوصاً در بخش برون‌یابی و یا درون‌یابی توابع توزیع خواهد داشت به طوری که در بیشتر کارهای صورت گرفته [۱۰-۱۵]، دو معادله متفاوت برای تعیین توابع توزیع متناسب با فاصله مرز منحنی تا نقاط گرهی در نظر گرفته شده است. این امر می‌تواند تغییرات شدید توابع توزیع را به هنگام تعویض معادله به همراه داشته باشد [۱۷،۱۶]. اخیرا یو و همکارانش [۱۸] توانستند با اتکا به روش پرش معکوس مدل‌سازی شرط مرزی منحنی را تنها با یک معادله ممکن سازند تا از تغییرات ناخواسته توابع توزیع جلوگیری به عمل آید با این حال از آنجا که روش پرش معکوس مبنای این مدل بود همانند سایر مدل‌های مبتنی بر پرش معکوس [۱۰-۱۴]، وجود لغزش به خصوص در زمانی که فاصله مرز تا گره به گام شبکه نزدیک می‌شود اجتناب‌ناپذیر می‌باشد [۱۶]. کائو و یانگ [۱۷] دو مدل مستقل از برون‌یابی و درون‌یابی و بر مبنای روش ریزسازی شبکه[4] معرفی نمودند. مبنای معادلات این مدل نیز روش پرش معکوس می‌باشد که همانند مدل شرط مرزی یو و همکارانش لغزش‌های ناخواسته از معایب آن به حساب می‌آید.

مزیت‌های قابل توجه روش لتیس بولتزمن در مقایسه با حل کننده‌های رایج معادله ناویر- استوکس، عده‌ای از محققان

1. Lattice Boltzmann
2. Lattice Gas Automata
3. Bounce Back
4. Grid Refinement

را برآن داشت تا از آن به عنوان حل کننده سایر معادلات دیفرانسیلی غیر خطی حاکم بر پدیده‌های فیزیکی نیز بهره گیرند [۱۹-۲۱]. پدیده‌هایی که می‌توانند در هندسه‌هایی عمومی شامل مرزهای منحنی رخ دهند، حال آن که اغلب کارهای صورت گرفته [۱۰-۱۸] در زمینه شبیه‌سازی مرز منحنی به طور خاص برای جریان سیال و مفاهیم مرتبط با آن طراحی شده است.

در این مقاله مدل‌سازی مرز منحنی در دو بخش ماکروسکوپی و میکروسکوپی صورت می‌پذیرد. بخش ماکروسکوپی مبتنی بر برون‌یابی خواص ماکروسکوپی است که قابل پیاده‌سازی برای هر پدیده فیزیکی است. برون‌یابی صورت گرفته در این بخش به گونه‌ای طراحی شده است که مستقل از فاصله مرز تا نقاط گرهی بوده و تنها مبتنی بر یک رابطه است تا از تغییرات شدید توابع به واسطه تعویض معادله مصون بماند. در بخش میکروسکوپی مدل شرط مرزی لازم است تا خاصیت ماکروسکوپی حاصل از بخش اول به نقاط مرزی اختصاص داده شود. بدیهی است این بخش با توجه به پدیده فیزیکی مورد بررسی و معادله حاکم بر آن متفاوت خواهد بود. به طور خاص در این مقاله جریان سیال و معادله ناویر- استوکس مورد توجه قرار گرفته است و متناسب با آن شرط مرزی جدیدی ارائه شده است که وظیفه آن اختصاص یک سرعت مشخص به نقاط مرزی است. این مدل جدید قابل استفاده در تمام هندسه‌های دو بعدی بوده و طراحی آن به گونه‌ای صورت گرفته است تا از عدم ایجاد لغزش ناخواسته اطمینان حاصل نماید.

۲- روش لتیس بولتزمن

روش لتیس بولتزمن به دنبال روش لتیس گاز و در جهت رفع معایب آن معرفی شده است [۲۲]، با این حال می‌توان معادلات لتیس بولتزمن را به صورت یک شکل تفاضل محدود از معادله انتقال بولتزمن استخراج کرد [۲۳]. موضوع مورد بحث در معادله لتیس بولتزمن تابع توزیع ذرات می‌باشد. تابعی که معرف احتمال حضور ذرات با سرعت مشخص ξ در مکان r و در زمان t می‌باشد. بر اساس معادله لتیس بولتزمن معادله حاکم بر تابع توزیع f عبارت است از:

$$\frac{\partial f(\mathrm{r},\xi,t)}{\partial t}+\xi\cdot\nabla f(\mathrm{r},\xi,t)=\Omega \qquad (۱)$$

در این معادله Ω اپراتور برخورد است. برای حل این معادله لازم است تا توزیع سرعت میکروسکوپی ξ به یک مجموعه بردار شامل q سرعت متفاوت $\{c_0,c_1,...,c_{q-1}\}$ منفصل شود. تبادل توابع توزیع در شبکه بولتزمن از مسیر سرعت‌های میکروسکوپی صورت می‌پذیرد. از این رو متناسب با انفصال سرعت میکروسکوپی، تابع توزیع f را نیز می‌توان به q تابع توزیع تفکیک کرد.

$$\frac{\partial f_i(\mathrm{r},t)}{\partial t}+\mathrm{c}_i\cdot\nabla f_i(\mathrm{r},t)=\Omega_i \quad i=0,1,...,q-1 \qquad (۲)$$

در این مقاله از شبکه دو بعدی و نه سرعتی D2Q9 استفاده شده است که در آن انفصال سرعت میکروسکوپی به صورت رابطه (۳) خواهد بود [۲۴].

$$\begin{cases}\mathrm{c}_i=(0,0) & i=0\\ \mathrm{c}_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)c, \quad \theta_i=(i-1)\pi/2, 1\le i\le 4\\ \mathrm{c}_i=\sqrt{2}(\cos\theta_i,\sin\theta_i)c,\\ \theta_i=(i-1)\pi/2+\pi/4, & i>4\end{cases} \qquad (۳)$$

در این روابط $c=\delta x/\delta t$ اندازه سرعت میکروسکوپی ذرات، δx فاصله شبکه و δt گام زمانی حل می‌باشد. پس از انفصال معادله لتیس بولتزمن در شبکه سرعت c_i، لازم است تا معادله بولتزمن بر مبنای گام زمانی و فاصله شبکه نیز منفصل شود.

$$f_i(\mathrm{r}+\mathrm{c}_i\delta t,t+\delta t)-f_i(\mathrm{r},t)=\Omega_i \qquad (۴)$$

برای اپراتور برخورد از مدل BGK در این مقاله استفاده شده است [۲۵].

$$\Omega_i=\frac{1}{\tau}\left(f_i^{\mathrm{eq}}(\mathrm{r},t)-f_i(\mathrm{r},t)\right) \qquad (۵)$$

در این رابطه τ ثابت تخفیف زمانی و f_i^{eq} تابع توزیع تعادلی می‌باشد که از بسط برش خورده توزیع ماکسول- بولتزمن قابل محاسبه است [۲۳].

$$f_i^{\mathrm{eq}}=w_i\rho\left[1+\frac{c_i\cdot U}{c_s^2}+\frac{(c_i\cdot U)^2}{2c_s^4}-\frac{U^2}{2c_s^2}\right] \qquad (۶\text{- الف})$$

$$\begin{cases}w_i=4/9 & i=0\\ w_i=1/9 & i=1-4\\ w_i=1/36 & i=5-8\end{cases} \qquad (۶\text{- ب})$$

در روابط (۶)، $U=u\mathrm{i}+v\mathrm{j}$ بردار سرعت ماکروسکوپی، ρ چگالی سیال و $c_s=c/\sqrt{3}$ سرعت صوت مدل می‌باشد. حل عددی معادله لتیس بولتزمن در دو مرحله برخورد و انتشار صورت می‌پذیرد. در مرحله برخورد، توابع توزیع در هر نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند و سپس در مرحله انتشار، این توابع با

نقاط مجاور خود در شبکه بولتزمن و در راستای شبکه‌ی سرعت c_i مبادله می‌شوند. تکرار توالی این دو مرحله، حل معادله لتیس بولتزمن را در زمان به پیش می‌برد. کمیت‌های ماکروسکوپی جریان از قبیل چگالی و سرعت را می‌توان از روابط زیر، بر حسب توابع توزیع محاسبه کرد [۲۳]

$$\rho = \sum_i f_i \tag{۷}$$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\rho}\sum_i f_i \mathrm{c}_i \tag{۸}$$

در شبیه‌سازی جریان سیال تراکم ناپذیر در رینولدزهای پایین، فشار از معادله حالت گاز ایده‌ال، $p = \rho c_s^2$ قابل محاسبه خواهد بود. با کمک بسط چاپمن – انسکاگ[1] می‌توان نشان داد که ویسکوزیته سینماتیکی سیال تابعی است از ثابت تخفیف زمانی و به صورت رابطه (۹) تعریف می شود [۲۲].

$$\upsilon = (\tau - 0.5)c_s^2 \delta t \tag{۹}$$

۳- پیاده‌سازی مرزی منحنی در شبکه مربعی لتیس بولتزمن

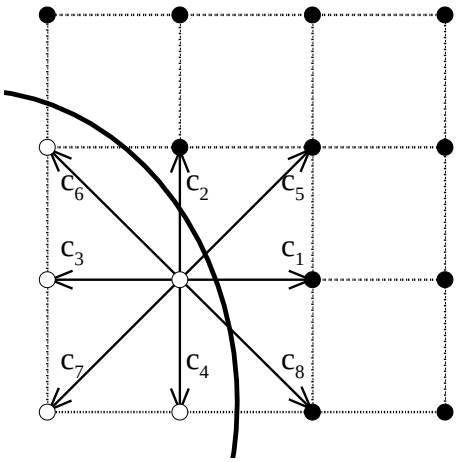
الگوریتم دو مرحله‌ای برخورد- انتشار که برای حل معادله (۴) در روش لتیس بولتزمن معرفی شده است، نیازمند یک شبکه دکارتی با فاصله گرهی یکسان می‌باشد. لذا شبیه‌سازی جریان سیال محدود به هندسه های ساده با گوشه‌های تیز خواهد بود. در مواجه با هندسه‌های پیچیده‌تر که در برگیرنده مرزهای منحنی می‌باشند، بکارگیری چنین شبکه‌ای به علت عدم تطابق کامل مرزهای منحنی با گره‌های شبکه، نتیجه‌ای جز تقریب مرز منحنی با خطوط شکسته در پی نخواهد داشت. تقریبی که به وضوح نمی‌تواند تمامیت فیزیکی مرز مورد نظر را در شبیه‌سازی لتیس بولتزمن پیاده سازد. این تقریب ناقص، به ویژه در جریان‌هایی با عدد رینولدز بالا می‌تواند موجب پیدایش گردابه‌هایی غیر واقعی در مرز جریان شود و به دنبال آن تحلیل جریان در کل حوزه حل را تحت تاثیر خطای ناشی از آن قرار دهد. در چنین شرایطی تحلیل یک مرز منحنی نیازمند یک طرح جدید می‌باشد. طرحی که با وجود استفاده از خطوط شکسته به عنوان هندسه جریان، بتواند اثر فیزیکی مرز منحنی را در تحلیل جریان شبیه‌سازی کند. معرفی چنین طرحی موضوع این بخش از مقاله می‌باشد.

1. Chapman–Enskog

در شرایط کلی زمانی که یک مرز منحنی با یک شبکه بولتزمن تطبیق داده می‌شود، گره‌ها به دو ناحیه تقسیم خواهند شد: گره‌هایی که خارج از مرز منحنی قرار می گیرند و محل حضور سیال می‌باشند و دیگری گره‌هایی که محل حضور جسم جامد بوده و در خارج حوزه جریان قرار می‌گیرند.

در شکل ۱ گروه اول را به صورت دوایر توپر و گروه دوم به صورت دوایر توخالی نشان داده شده است. از این پس برای نشان دادن پارامترهای مربوط به مرز منحنی از زیرنویس w استفاده خواهد شد.

واضح است که از میان تمام گره‌های موجود در بخش جامد تنها گره‌های مجاور مرز منحنی در تحلیل جریان مؤثر می‌باشند. این گره‌ها در این مقاله به عنوان گره‌های مرزی نامیده می‌شوند و پارامترهای مربوط به آنها با زیرنویس b مشخص خواهد شد. توابع توزیع در گره‌های مرزی می‌بایست به گونه‌ای تعیین شوند که نتیجه آن شبیه‌سازی شرایط مورد نظر روی مرزی منحنی باشد. برای این منظور لازم است تا خاصیت ماکروسکوپی مورد بررسی در گره مرزی (M_b)، با توجه به مقدار مورد نیاز آن خاصیت روی مرز منحنی (M_w) و مقدار آن خاصیت در نزدیکترین گره به دیوار (M_f) برون‌یابی شود. این برون‌یابی نیازمند دو نقطه مرجع، یکی در حوزه حل و دیگری واقع روی مرز منحنی خواهد بود. تعیین این دو نقطه مهم‌ترین گام در شبیه‌سازی مرز منحنی می‌باشد.



شکل ۱ موقعیت مرز منحنی نسبت به نقاط گرهی

از آنجا که تمام تلاش‌های صورت گرفته برای شبیه‌سازی مرز منحنی حتی در زمان برون‌یابی، پای‌بند نقاط گرهی شبکه

بوده‌اند، تعیین نقاط مرجع تنها محدود به شبکه سرعت میکروسکوپی c_i بوده است. به این صورت که نقاط تلاقی مرز منحنی با شبکه سرعت میکروسکوپی به عنوان معیار انتخاب نقاط مرجع برای گره مرزی P_b تلقی می‌شود. در چنین شرایطی می‌توان بردار سرعتی که نقطه تلاقی موجود در آن کمترین فاصله را با گره مرزی دارد و یا بردار سرعتی که دارای کمترین زاویه با بردار نرمال مرز باشد را به عنوان راستای برون‌یابی انتخاب کرد. از آنجا که توزیع سرعت میکروسکوپی محدوده ۳۶۰ درجه را تنها با ۸ بردار سرعت پوشش میدهد، عدم تطبیق جهت برون‌یابی با جهت نرمال امری کاملاً محتمل و رایج خواهد بود. در چنین شرایطی برون‌یابی مقادیر خصوصا زمانی که شرط مرزی از نوع دوم (نیومن[1]) باشد، با خطا همراه خواهد بود. طرح جدیدی که در این مقاله معرفی شده است با کنار گذاشتن شبکه گرهی در انتخاب نقاط مرجع، تطبیق همیشگی جهت برون‌یابی با جهت نرمال را میسر می‌سازد. به این صورت که در هر نقطه مرزی خطی عمود بر مرز (در جهت بردار نرمال مرز) متصور می‌شود؛ نقطه تلاقی این خط با مرز منحنی اولین نقطه مرجع (P_w) را مشخص می‌سازد. نقطه مرجع دوم (P_f) روی خط عمود و با فاصله مشخص d_f از اولین مرجع انتخاب می‌شود. در شکل ۲ این نقاط نشان داده شده‌اند. مقدار خاصیت مورد بررسی، در اولین نقطه مرجع (M_w) واقع روی مرز از معلومات مسأله است (شرط مرزی).

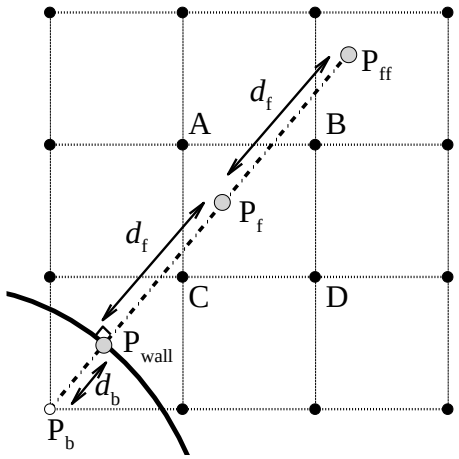
برای تعیین مقدار خاصیت در دومین نقطه مرجع (M_f) نیز می‌توان از درون‌یابی خطی بر مبنای چهار نقطه A، B، C و D که در برگیرنده نقطه‌ی مرجع می باشند، استفاده کرد.

$$\begin{aligned} M_f &= M_C(x_B - x_f)(y_B - y_f)\big/\delta x^2 \\ &+ M_D(x_f - x_A)(y_A - y_f)\big/\delta x^2 \\ &+ M_A(x_D - x_f)(y_f - y_D)\big/\delta x^2 \\ &+ M_B(x_f - x_C)(y_f - y_C)\big/\delta x^2 \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با مشخص شدن مقادیر M_w و M_f در نقاط مرجع، مقدار خاصیت ماکروسکوپی در نقطه مرزی نیز به کمک برون‌یابی خطی قابل محاسبه است:

$$M_b = \left(1 + \frac{d_b}{d_f}\right) M_w - \frac{d_b}{d_f} M_f \qquad (۱۱)$$

1. Neumann



شکل ۲ نقاط مرجع روی بردار نرمال بر مرز، گذرا از نقطه مرزی

در این رابطه d_b همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، فاصله گره مرزی تا مرز منحنی است که از این پس را فاصله مرزی نامیده می‌شود و d_f فاصله بین دو نقطه‌ی مرجع در حوزه سیال خواهد بود. این فاصله باید به گونه‌ای انتخاب شود که چهار نقطه‌ی محیطی A، B، C و D برای دومین نقطه مرجع وجود داشته باشد. با توجه به مربعی بودن شبکه لتیس بولتزمن، مقدار d_b همواره کوچک‌تر از $\sqrt{2}\delta x$ است، لذا با انتخاب d_f بزرگتر از بیشینه d_b و برابر با $d_f = 2\delta x$ این شرط همواره برقرار خواهد بود. در صورت نیاز می‌توان با انتخاب سومین نقطه مرجع P_{ff} در فاصله $4\delta x$ با اولین مرجع، برون‌یابی را از رابطه درجه دوم زیر اعمال کرد.

$$\begin{aligned} M_b &= \left(1 + \frac{d_b}{d_f}\right)\left(1 + \frac{d_b}{2d_f}\right) M_w \\ &- \frac{d_b}{d_f}\left(2 + \frac{d_b}{d_f}\right) M_f + \frac{d_b}{2d_f}\left(1 + \frac{d_b}{d_f}\right) M_{ff} \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

همان طور که پیش از این اشاره شد در اغلب کارهای صورت گرفته در زمینه شبیه‌سازی مرز منحنی [۱۰-۱۵]، برون‌یابی‌ها مستلزم استفاده از دو معادله جداگانه متناسب با فاصله گره مرزی از مرز منحنی بوده است. امری که به هنگام تعویض رابطه برون‌یابی می‌تواند تغییرات شدید توابع توزیع را به دنبال داشته باشد [۱۷،۱۶] و حتی در بعضی موارد معیار تعویض رابطه برون‌یابی نیز می‌تواند در دقت نتایج تأثیرگذار باشد [۲۶]. حال آن که در مدل ارائه شده در این مقاله، تنها یک رابطه (معادله ۱۱ یا ۱۲) برای برون‌یابی خاصیت ماکروسکوپی در گره مرزی کفایت می‌کند. از این پس با اعمال

مقدار محاسبه شده M_b روی گره‌های مرزی می‌توان اثرات مرز منحنی را شبیه‌سازی کرد. به عبارت دیگر شبیه‌سازی مرز منحنی تنها منوط به اعمال مقادیر محاسبه شده از معادله (۱۱) و یا (۱۲) روی گره‌های مرزی خواهد بود. این طرح کاملا عمومی بوده و برای هر یک از مدل‌های لتیس بولتزمن قابل اجرا خواهد بود. در صورت بکارگیری مدل لتیس بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان سیال، خاصیت ماکروسکوپی M می‌تواند سرعت، فشار و حتی دمای سیال باشد.

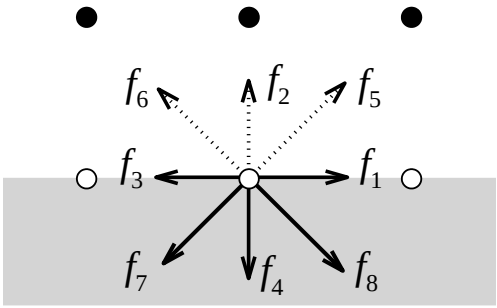
۴- شرط مرزی عدم لغزش

بر اساس طرح معرفی شده در بخش قبل، شبیه‌سازی مرز منحنی مستلزم اعمال مقادیر ماکروسکوپی محاسبه شده از رابطه (۱۱) یا (۱۲) در گره های مرزی خواهد بود. در روش لتیس بولتزمن برخلاف روش‌های رایج در CFD اعمال شرایط مرزی با انتصاب یک مقدار ماکروسکوپی به گره مرزی صورت نمی‌پذیرد بلکه در عوض می‌بایست یک سری مشخص از توابع توزیع در گره‌های مرزی به گونه‌ای انتخاب شود که اثر آن معادل با مقدار ماکروسکوپی مورد نظر در مرز باشد. در این بخش موضوع مورد بحث به طور خاص جریان سیال می‌باشد و خاصیت ماکروسکوپی‌ای که می‌بایست به گره‌های مرزی اختصاص داده شود سرعت سیال خواهد بود. هدف از این بخش معرفی مدل شرط مرزی جدیدی است که به واسطه آن سرعت سیال در گره‌های مرزی بدون هیچ لغزش ناخواسته‌ای برابر با سرعت مورد نیاز U_b (سرعت به دست آمده از برون‌یابی) باشد. در گره‌های مرزی پس از مرحله انتشار توابع توزیعی از خارج حوزه حل به گره مرزی وارد می‌شوند که نامعلوم هستند. وظیفه مدل شرط مرزی، تعیین این توابع نامعلوم متناسب با مقدار سرعت مورد نظر در گره مرزی است. به عنوان مثال در شکل ۳، این توابع نامعلوم برای یک گره مرزی واقع بر دیوار تخت به صورت خط چین نشان داده شده‌اند.

تحلیل چاپمن- انسکاگ که حلقه اتصال معادله لتیس بولتزمن با معادله ناویر-استوکس می‌باشد، بر مبنای بسط توانی تابع توزیع استوار است.

$$f = \sum_{n=0} \varepsilon^n f^{(n)} = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + O(\varepsilon^2) \qquad (۱۳)$$

در این بسط ε عدد نادسن بوده و $f^{(0)}$ شکل تعادلی تابع توزیع می‌باشد.



شکل ۳ توابع توزیع پس از مرحله انتشار در گره مرزی واقع بر یک دیوار تخت

در این مقاله برای اختصار هرچه بیشتر، توابع توزیع به دو بخش تعادلی f^{eq} و غیر تعادلی $f^{neq} = f - f^{eq}$ تقسیم می‌شوند. اعمال شرط مرزی نیازمند تعیین هر دو بخش از توابع توزیع مجهول در گره‌های مرزی خواهد بود. بخش تعادلی با توجه به مقادیر ماکروسکوپی چگالی ρ و سرعت U از رابطه (۶) قابل محاسبه خواهد بود. بخش غیر تعادلی وابسته به گرادیان‌های سرعت بوده و از تقریب زیر قابل محاسبه می‌باشد [۲۷].

$$f_i^{neq} \approx -\frac{w_i \tau}{c_s^2} Q_i : \rho \nabla U \qquad (۱۴)$$

در این رابطه تانسور Q به صورت $Q_i = c_i c_i - c_s^2 I$ تعریف می‌شود. طبق معادله (۱۴)، بخش غیرتعادلی تابع توزیع f_i با بخش غیرتعادلی تابع توزیع مقابل آن $f_{opp(i)}$ برابر خواهد بود. از آنجایی که تنها بخشی از توابع توزیع در گره‌های مرزی نامعلوم می‌باشند، می‌توان با کمک توابع توزیع معلوم، بخش غیرتعادلی توابع نامعلوم را محاسبه نمود. به طور مثال در شکل ۳ توابع نامعلوم f_2 ، f_5 و f_6 را می‌توان از مجموع بخش تعادلی توابع و بخش غیرتعادلی توابع مقابل آنها به صورت رابطه (۱۵) محاسبه کرد. در این صورت، شرط عدم لغزش به طور کامل در جهت عمود بر مرز برقرار خواهد بود ولی از آنجایی که توابع توزیع f_1 و f_3 نقشی در محاسبات شرط مرزی ندارند، نمی‌توان از برقراری شرط عدم لغزش در جهت مماس بر مرز اطمینان داشت.

$$\begin{cases} f_2 = f_2^{eq} + \left(f_4 - f_4^{eq}\right) \\ f_5 = f_5^{eq} + \left(f_7 - f_7^{eq}\right) \\ f_6 = f_6^{eq} + \left(f_8 - f_8^{eq}\right) \end{cases} \qquad (۱۵)$$

برای رفع این مشکل یک توزیع از تابع فرضی h_i به توابع

توزیع در مرز اضافه می‌شود به گونه‌ای که شرایط زیر همواره برقرار باشد:

$$\mathrm{U_b} = \frac{1}{\rho}\sum_i \left(f_i^{\mathrm{eq}} + f_i^{\mathrm{neq}} + h_i\right)\mathrm{c}_i \qquad (۱۶)$$

$$\sum_{i=1}^{8} h_i = 0 \qquad (۱۷)$$

وظیفه تابع توزیع جدید h_i که از این پس تابع اصلاحی نامیده می‌شود، اطمینان از برقراری شرط عدم لغزش در تمام جهات می‌باشد (معادله ۱۶). اما این توابع نباید تأثیری بر چگالی سیال در گره مرزی داشته باشند یا به عبارت دیگر باید دارای چگالی خالص صفر باشند (معادله ۱۷). اگر توابع اصلاحی، h_i، در جهات مقابل هم، به صورت متقارن تعریف شوند:

$$\begin{cases} h_1 = -h_3 = b \\ h_2 = -h_4 = a \\ h_5 = -h_7 = c \\ h_6 = -h_8 = d \end{cases} \qquad (۱۸)$$

معادله (۱۷) همواره برقرار خواهد بود. در این روابط چهار مجهول a، b، c و d وجود دارد و طبیعتاً برای محاسبه آنها نیاز به چهار معادله خواهد بود. برای تعیین این چهار پارامتر، دو رابطه برای مؤلفه‌های سرعت (معادله ۱۶) موجود است:

$$\begin{cases} b + c - d = 0 \\ a + c + d = 0 \end{cases} \qquad (۱۹)$$

از سوی دیگر در هندسه‌هایی که توابع توزیع در جهات مقابل یکدیگر (f_i و $f_{\mathrm{opp}(i)}$) معلوم باشند می‌توان تابع اصلاحی مربوطه را از رابطه (۲۰) محاسبه نمود.

$$2h_i = \left(f_i - f_{\mathrm{opp}(i)}\right) - \left(f_i^{\mathrm{eq}} - f_{\mathrm{opp}(i)}^{\mathrm{eq}}\right) \qquad (۲۰)$$

در نهایت اگر تعداد معادلات بدست آمده از مجموع روابط (۱۹) و (۲۰) به چهار عدد نرسید، لازم است تا به تعداد مورد نیاز توابع اصلاحی برابر با صفر انتخاب شوند. صفر قراردادن توابع اصلاحی در هر راستا در حقیقت به معنای اعمال شرط پرش معکوس روی مقادیر غیرتعادلی در همان راستا خواهد بود. این عمل در هر راستایی که صورت پذیرد به استناد معادله (۱۴) تقریبی معتبر است. از آنجایی که معادلات (۱۹) همواره در تعیین توابع اصلاحی بکار گرفته می‌شوند، مستقل از اینکه در چه راستایی تابع اصلاحی صفر انتخاب شود، شرط مرزی عدم لغزش همواره برقرار بوده و سرعت در گره مرزی برابر با مقدار مورد نظر $\mathrm{U_b}$ می‌باشد. در گرههای مرزی واقع در گوشه‌ها و حوالی آن جایی که تنها دو تابع توزیع مجهول وجود دارد، معادله (۲۰) در دو راستا قابل اعمال می‌باشد. بنابراین برای بستن دستگاه معادلات نیازی به صفر قرار دادن هیچکدام از توابع اصلاحی نخواهد بود. در گره‌های مرزی واقع بر دیوارهای مستقیم (افقی/عمودی) و کنج‌ها، جایی که تعداد توابع توزیع مجهول به عدد سه می‌رسد، معادله (۲۰) تنها می‌تواند در یک راستا اعمال گردد. از این رو برای بستن دستگاه معادلات، لازم است تا یکی از توابع اصلاحی به طور مثال تابع اصلاحی در جهت عمود بر مرز برابر با صفر انتخاب شود. به عنوان مثال دستگاه معادلات لازم برای تعیین توابع اصلاحی در هندسه نشان داده شده در شکل ۳، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} b + c - d = 0 \\ a + c + d = 0 \\ 2b = f_1 - f_3 - 2\rho u/3 \\ a = 0 \end{cases} \qquad (۲۱)$$

برای سایر هندسه‌های دوبعدی اعم از گوشه‌ها و کنج‌ها نیز می‌توان مقادیر a، b، c و d را به صورت مشابه استخراج نمود. پس از محاسبه توابع اصلاحی و اعمال آن، توابع توزیع مجهول مربوط به دیوار تخت (شکل۳) به صورت روابط (۲۲) خواهد بود.

$$f_i = f_i^{\mathrm{eq}} + f_{\mathrm{opp}(i)}^{\mathrm{neq}} + h_i \rightarrow$$

$$\begin{cases} f_2 = f_2^{\mathrm{eq}} + \left(f_4 - f_4^{\mathrm{eq}} - h_4\right) + h_2 \\ f_5 = f_5^{\mathrm{eq}} + \left(f_7 - f_7^{\mathrm{eq}} - h_7\right) + h_5 \\ f_6 = f_6^{\mathrm{eq}} + \left(f_8 - f_8^{\mathrm{eq}} - h_8\right) + h_6 \end{cases} \qquad (۲۲)$$

معادلات شرط مرزی فوق در نهایت به صورت روابط (۲۳) ساده می‌شود:

$$\begin{cases} f_2 = f_2^{\mathrm{eq}} + \left(f_4 - f_4^{\mathrm{eq}}\right) \\ f_5 = f_5^{\mathrm{eq}} + \left(f_7 - f_7^{\mathrm{eq}}\right) - \left(f_1 - f_3 - 2\rho u/3\right) \\ f_6 = f_6^{\mathrm{eq}} + \left(f_8 - f_8^{\mathrm{eq}}\right) + \left(f_1 - f_3 - 2\rho u/3\right) \end{cases} \qquad (۲۳)$$

تا اینجا، در تمام معادلات چگالی ρ به عنوان یک پارامتر معلوم در نظر گرفته شده است؛ مقداری که قبل از اعمال شرایط مرزی باید مشخص شود. زو و هی از توابع معلوم و مقادیر ماکروسکوپی سرعت برای محاسبه چگالی در گره مرزی استفاده نمودند [۳]، اما این روش تنها در دیوارهای تخت قابل استفاده است. از سوی دیگر می‌توان چگالی را با برون‌یابی از نزدیکترین نقطه مجاور گره مرزی محاسبه کرد، اما باید توجه

داشت که در صورت انجام چنین کاری، شرط اضافی $\partial\rho/\partial n=\partial p/\partial n=0$ در جهت برون‌یابی اعمال خواهد شد. شرطی که بکارگیری آن در صورتی که نیروی حجمی وارد بر سیال در راستای برون‌یابی دارای مولفه باشد، معتبر نخواهد بود. در این مقاله برای محاسبه چگالی، بدون اعمال قید $\partial\rho/\partial n=0$ و حفظ عمومیت مدل برای تمام هندسه‌های دوبعدی، تقریب (۲۴) استخراج شده است.

$$\rho=\frac{\sum_j f_j+\sum_k f_{\mathrm{opp}(k)}}{1+\sum_k\left(g_{\mathrm{opp}(k)}-g_k\right)} \qquad (۲۴)$$

در رابطه (۲۴) اندیس j معرف توابع توزیع معلوم، اندیس k معرف توابع توزیع مجهول و g تابع توزیع تعادلی با چگالی واحد $g_i=f_i^{\mathrm{eq}}\left(\rho=1,\mathrm{U}\right)$ می‌باشد. نتایج عددی نشان دادند تقریب فوق که بر مبنای اعمال پرش معکوس روی بخش غیرتعادلی توابع توزیع نامعلوم استوار است، نتایج کاملاً قابل قبولی را در شبیه‌سازی جریان سیال به دنبال خواهد داشت. در نهایت مدل شرط مرزی جدید را می‌توان به صورت الگوریتم زیر خلاصه کرد:

۱- محاسبه چگالی در گره مرزی به کمک رابطه (۲۴) یا هر تقریب دیگر.

۲- برابر قراردادن بخش غیرتعادلی توابع نامعلوم با بخش غیرتعادلی توابع معلوم و مقابل آنها.

۳- محاسبه توابع نامعلوم به صورت مجموع بخش غیرتعادلی محاسبه شده در گام دوم و بخش تعادلی بدست آمده از معادله (۶).

۴- محاسبه توابع توزیع اصلاحی مربوط به توابع توزیع نامعلوم و اضافه کردن آن به مقدار بدست آمده از گام سوم.

$$f_i=f_{\mathrm{opp}(i)}+\left(f_i^{\mathrm{eq}}-f_{\mathrm{opp}(i)}^{\mathrm{eq}}\right)+\left(h_i-h_{\mathrm{opp}(i)}\right)$$

۵- اعتبارسنجی

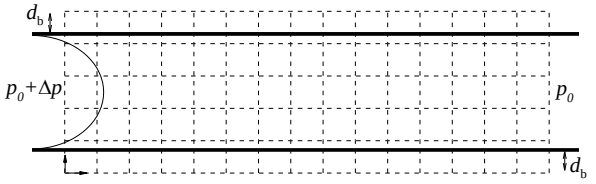
در این بخش صحت مدل شرط مرزی با شبیه‌سازی چند مورد از مسائلی که دارای حل تحلیلی یا عددی می‌باشند، ارزیابی می‌شود. در تمام مسائل ذکر شده در این بخش از برون‌یابی خطی (معادله ۱۱) برای محاسبه خاصیت ماکروسکوپی در گره‌های مرزی استفاده شده است و مدل شرط مرزی به صورت الگوریتم چهار مرحله‌ای ذکر شده در بخش قبل روی گره‌های مرزی اعمال شده است. برای اعتبارسنجی مدل شرط مرزی جدید در جایی که حل تحلیلی موجود می‌باشد، شاخص خطا به صورت زیر و بر مبنای اختلاف نتایج عددی، R_{Num}، با مقادیر تحلیلی، R_{Analytic}، در N نقطه تعریف می‌شود.

$$Er=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_N\left(\frac{R_{\mathrm{Analytic}}-R_{\mathrm{Num}}}{R_{\mathrm{Analytic}}}\right)^2} \qquad (۲۵)$$

۵-۱- جریان سیال در کانال تخت

اولین مسأله به منظور اعتبارسنجی مدل جدید مربوط به شبیه‌سازی جریان سیال در یک کانال تخت است. با وجود اینکه در این هندسه اثری از مرز منحنی دیده نمی‌شود ولی می‌تواند معیار مناسبی برای سنجش پایداری مدل جدید در فواصل مرزی متفاوت باشد. برای این منظور همان طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، دیواره‌های کانال به فاصله d_{b} از اولین و آخرین ردیف از شبکه گرهی مستقر شده‌اند. در تطبیق کامل دیواره‌ها بر شبکه گرهی ($d_{\mathrm{b}}=0$) سرعت دیواره مستقیماً بر نقاط گرهی اعمال خواهد شد و معیار مناسبی برای سنجش اعتبار مدل شرط مرزی عدم لغزش خواهد بود. با افزایش فاصله مرزی ($d_{\mathrm{b}}>0$) تعیین مقدار سرعت در گره مرزی نیازمند بکارگیری مدل شرط مرزی عدم لغزش در کنار برون‌یابی سرعت از رابطه (۱۱) خواهد بود. لذا نتایج شبیه‌سازی جریان به ازای مقادیر متفاوت فاصله مرزی، می‌تواند معیار ارزیابی همزمان شرط عدم لغزش و مدل شرط مرزی منحنی باشد.

با توجه به هندسه کانال و جهت قرارگیری دیواره‌ها نسبت به شبکه گرهی، مقدار فاصله مرزی در این هندسه همواره کوچک‌تر از گام شبکه خواهد بود ($0\le d_{\mathrm{b}}<\delta x$). اما از آنجا که در حالت کلی فاصله مرزی می‌تواند تا مقدار بیشینه $\sqrt{2}\delta x$ افزایش یابد، گستره $0\le d_{\mathrm{b}}\le 1.5\delta x$ برای این شبیه‌سازی لحاظ شده است. برای ایجاد جریان از گرادیان فشار به صورت اعمال دو فشار متفاوت در دو سر کانال استفاده شده است.



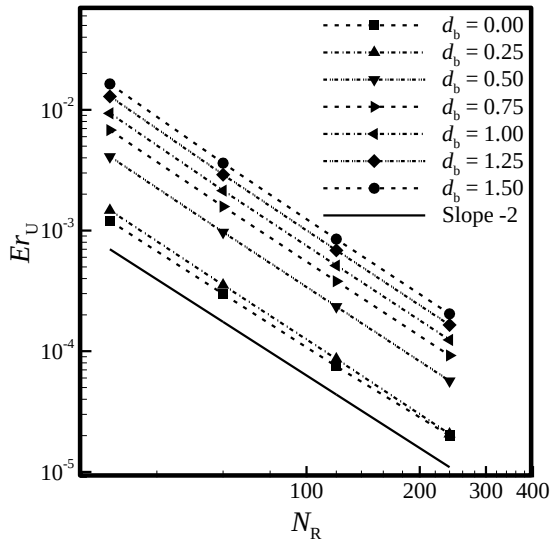
شکل ۴ هندسه و شرایط مرزی جریان بین دو صفحه تخت

طول مجرا سه برابر عرض آن انتخاب شده و اعمال فشار در ورودی و خروجی به کمک مدل شرط مرزی فشار [۳] صورت گرفته است. در نهایت هر دو دیوار کانال با شرط مرزی منحنی و شرط عدم لغزش معرفی شده در این مقاله، مدل‌سازی شده است. ثابت تخفیف زمانی در این مسأله برابر با $\tau=1.0$ و مقدار گرادیان فشار به گونه‌ای انتخاب شده است تا عدد رینولدز جریان همواره ثابت و برابر با Re=5 باشد. در چنین شرایطی حل تحلیلی جریان به پروفیل سرعت سهموی زیر ختم خواهد شد [۲۸].

$$\frac{U}{U_{\max}}=4\left(1-\frac{y}{h}\right)\frac{y}{h} \qquad (۲۶)$$

در این رابطه h عرض کانال و $U_{\max}=-\nabla p h^2/8\mu$، حداکثر سرعت در عرض کانال است. شکل ۵ نشان دهنده تغییرات شاخص خطای سرعت بر مبنای فواصل مرزی و اندازه‌های متفاوت شبکه گرهی می‌باشد.

همان طور که در شکل ۵ نشان داده شده است به ازای تمام فواصل مرزی، مقدار شاخص خطا با شیب تقریبی ۲- نسبت به تعداد گره موجود در عرض کانال کاهش می‌یابد که به مفهوم دقت مرتبه دوم شبیه‌سازی صورت گرفته می‌باشد.



شکل ۵ تغییرات شاخص خطای سرعت نسبت به تعداد گره موجود در عرض کانال

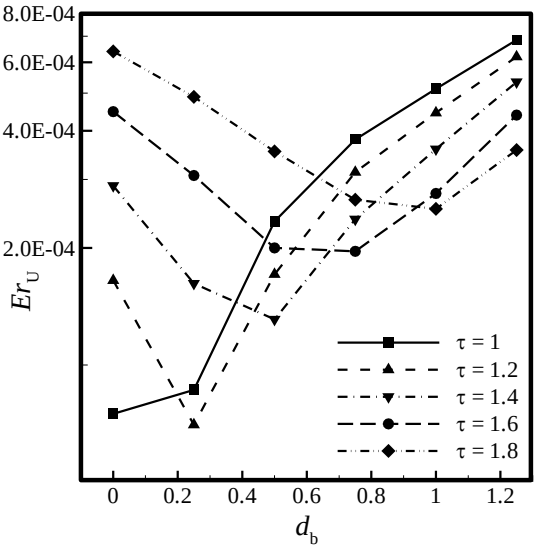
از آنجا که یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در دقت شبیه‌سازی، مرتبه دقت شرایط مرزی است، حفظ دقت مرتبه دوم شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی صورت گرفته، مؤید دقت مرتبه دوم مدل شرط مرزی جدید در تعیین توزیع سرعت خواهد بود. کاهش یکنواخت خطا در تمام فواصل مرزی گواه بر عدم وجود یک مقدار بحرانی برای فاصله مرزی در مدل شرط مرزی جدید است. از سوی دیگر نتایج حاصل در شکل ۵، نشان دهنده افزایش شاخص خطا به ازای افزایش فاصله مرزی در یک شبکه گرهی ثابت می‌باشد. چنین شرایطی یعنی وجود کمترین میزان خطا در کمترین فاصله مرزی ($d_b=0$) یک روال کلی و عمومی نیست. در یک شبکه گرهی مشخص، فاصله مرزی بهینه که در آن شاخص خطا به کمترین مقدار خود می‌رسد تابعی از نوع جریان و ثابت تخفیف زمانی می‌باشد.

در شبیه‌سازی جریان در کانال تخت، پروفیل سرعت سهموی است در حالی که در معادله (۱۱) از تقریب خطی برای برون‌یابی سرعت در گره مرزی استفاده شده است. طبیعی است هنگامی که یک پروفیل سهموی به صورت خطی تقریب زده شود، مقدار خطا به ازای فواصل مرزی متفاوت وابسته به پارامترهای پروفیل سهموی خواهد بود. بنابراین نوع جریان تأثیر زیادی در موقعیت کمترین شاخص خطا خواهد داشت. از سوی دیگر با ثابت نگاه داشتن تمام پارامترها مانند نوع جریان، ثابت تخفیف زمانی نیز می‌تواند در تعیین فاصله مرزی بهینه نقش داشته باشد. برای نشان دادن این موضوع در شکل ۶، با ثابت نگاه داشتن عدد رینولدز و تعداد گره موجود در عرض کانال N_R=120، تغییرات شاخص خطا به ازای فواصل مرزی متفاوت در مقادیر متفاوت ثابت های تخفیف زمانی رسم شده است.

نتایج نشان می‌دهند که افزایش ثابت تخفیف زمانی با ثابت نگاه داشتن سایر پارامترها موجب انتقال کمینه خطا به فواصل مرزی بالاتر می‌شود به گونه‌ای که در $\tau=1$ فاصله مرزی بهینه برابر با $d_b=0$ و در $\tau=1.8$ فاصله مرزی بهینه برابر با $d_b=1$ می‌باشد.

۵-۲- عبور جریان یکنواخت روی یک استوانه

در این بخش جریان دوبعدی عبوری از روی یک استوانه در اعداد رینولدز 10, 20 و 40 مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. عدد رینولدز در این جریان بر مبنای سرعت جریان آزاد (U_0) و قطر استوانه (D) به صورت $\mathrm{Re}=U_0 D/\upsilon$ تعریف می‌شود.

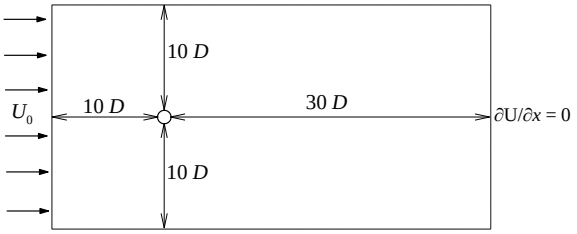


شکل ۶ تغییرات شاخص خطا درفواصل مرزی متفاوت در شبکه گرهی با تعداد ۱۲۰ گره در عرض کانال، به ازای ثابت‌های تخفیف زمانی متفاوت

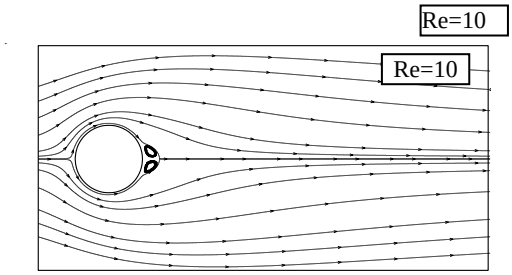
هندسه مورد بررسی در این بخش در شکل ۷ نشان داده شده است. برای به حداقل رساندن اثرات ناشی از وجود استوانه بر شرایط جریان در مرزها، محل استقرار استوانه به فاصله $10D$ از مرزهای بالا و پایین و به ترتیب با فاصله $10D$ و $30D$ از ورودی و خروجی جریان انتخاب شده و استوانه به کمک یک شبکه 30×30 گرهی مدل شده است. در چنین شرایطی، محیط استوانه شامل 112 گره مرزی خواهد بود. سرعت جریان در ورودی برابر با مقدار ثابت $u = U_0$ بوده و از تغییرات سرعت در انتهای مسیر جریان صرف نظر شده است $(\partial U/\partial x = 0)$. برای اعمال شرط مرزی در انتهای مسیر، ابتدا به کمک بسط تیلور شرط مرزی نوع دوم گرادیان سرعت به شرط مرزی نوع اول (دریچله[1]) تبدیل شده است و در نهایت اعمال آن همانند شرط مرزی ورودی، به کمک مدل شرط مرزی عدم لغزش معرفی شده در این مقاله، صورت گرفته است. ثابت تخفیف زمانی برابر با $\tau = 0.8$، سرعت شبکه برابر با $c = \delta x/\delta t = 7.5$ و سرعت ورودی U_0 به گونه‌ای انتخاب شده تا عدد رینولدز جریان به ترتیب برابر با 10، 20 و 40 باشد. مرزهای بالا و پایین دارای شرط مرزی پریودیک هستند و برای برقراری شرط عدم لغزش روی استوانه از مدل شرط مرزی حاضر استفاده شده است.

1. Dirichlet

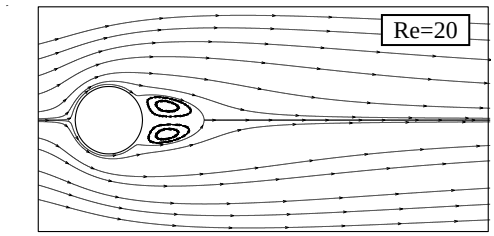
جریان عبوری از روی استوانه باعث پیدایش دو گردابه در پشت استوانه می‌شود. خطوط جریان در شکل ۸ موقعیت و بزرگی گردابه‌ها را نشان می‌دهد. از مشخصات این جریان می‌توان به طول گردابه[2] (L) و زاویه جدایش[3] (θ_S) اشاره کرد. اندازه‌گیری این دو کمیت به همراه نتایج تحقیقات گذشته [۳۵-۲۹،۹] در جدول ۱ ذکر شده است.



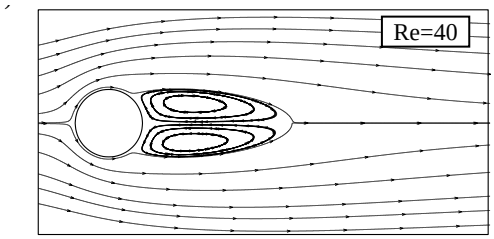
شکل ۷ هندسه و شرایط مرزی جریان سیال عبوری از رو یک استوانه به قطر D



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۸ خطوط جریان و گردابه‌های شکل گرفته در پشت استوانه به ازای اعداد رینولدز ۱۰، ۲۰ و ۴۰

2. Wake Length
3. Separation Angle

جدول ۱ مقایسه طول گردابه و زاویه جدایش بدست آمده در اعداد رینولدز ۱۰، ۲۰ و ۴۰ با تحقیقات گذشته

	Re=10		Re=20		Re=40	
	θ_s	$2L/D$	θ_s	$2L/D$	θ_s	$2L/D$
مرجع [۳۱]	-	-	-	۱/۸۲	-	۴/۵۸
مرجع [۹]	۲۸/۱۳	۰/۴۸۶	۴۳/۵۹	۱/۸۲۴	۵۳/۴۴	۴/۱۶۸
مرجع [۳۴]	-	-	-	۱/۸۶	-	۴/۶۲
مرجع [۳۰]	۲۹/۷	۰/۵	۴۴/۱	۱/۸	۵۴/۸	۴/۲
مرجع [۳۳]	-	-	-	۱/۸۰	-	۴/۴۰
مرجع [۲۹]	۲۷/۹۶	۰/۴۳۴	۴۳/۳۷	۱/۷۸۶	۵۳/۳۴	۴/۳۵۷
مرجع [۳۵]	-	-	-	۱/۸۴	-	۴/۴۰
مرجع [۳۲]	۳۰	۰/۵۰۴	۴۴/۱	۱/۸۶	۵۳/۵	۴/۴
تحقیق حاضر	۲۸/۱	۰/۵۰۹	۴۲/۹	۱/۸۳۴	۵۳/۱	۴/۴۵۴

هم‌خوانی قابل قبول اعداد به دست آمده در این شبیه‌سازی با کارهای گذشته، گویای دقت و صحت مدل شرط مرزی حاضر در مدل‌سازی مرزهای منحنی است.

نیروی وارده از طرف جریان بر استوانه، F_{flow}، شامل دو بخش می‌شود. بخش اول نیروی اصطکاکی ناشی از لزجت سیال و بخش دوم نیروی ناشی از توزیع فشار پیرامون استوانه می‌باشد. از آنجا که مطابق شکل ۲، برون‌یابی سرعت در مدل شرط مرزی در راستای عمود بر مرز صورت گرفته است، تنش برشی، τ، را می‌توان برحسب سرعت مماسی جریان در دومین نقطه مرجع و فاصله آن تا مرز (d_{f}) به صورت رابطه (۲۷) محاسبه کرد:

$$\tau = \mu \frac{U_{(\theta)\text{f}}}{d_{\text{f}}} \qquad (۲۷)$$

نیروی وارده از طرف جریان بر استوانه، با انتگرال‌گیری از تنش برشی بدست آمده از معادله فوق و فشار روی استوانه محاسبه می‌شود.

جدول ۲، ضریب درگ $C_{\text{D}} = F_{\text{flow}} / 0.5\rho U_0^2$ به دست آمده از نتایج را به همراه نتایج تحقیقات گذشته نشان می‌دهد. هم‌خوانی قابل قبول نتایج، مؤید صحت مدل شرط مرزی و شبیه‌سازی صورت گرفته در این بخش است.

۵-۳- حل معادله لاپلاس در فضای بین دو دیسک

همان طور که پیش از این اشاره شد، معادلات لتیس بولتزمن برگرفته از معادله انتقال بولتزمن می‌باشد. تقریب BGK برای عمل برخورد موجب حذف عبارات غیر خطی در معادله لتیس بولتزمن می‌شود که یکی از مهم‌ترین مزایای روش لتیس بولتزمن نیز است.

جدول ۲ مقایسه ضریب درگ بدست آمده در اعداد رینولدز ۱۰، ۲۰ و ۴۰ با تحقیقات گذشته

	ضریب درگ C_{D}		
	Re=10	Re=20	Re=40
مرجع [۹]	۳/۰۴۹	۲/۰۴۸	۱/۴۷۵
مرجع [۳۲]	۳/۰۷	۲/۱۸	۱/۷۱۳
مرجع [۳۱]	_	۲/۰۰۰	۱/۴۹۸
مرجع [۳۰]	۳/۱۷۷	۲/۲۵۳	۱/۶۷۵
مرجع [۲۹]	۲/۸۲۸	۲/۰۵۳	۱/۵۵۰
تحقیق حاضر	۲/۹۰۵	۲/۰۹۷	۱/۶۱۷

مزیتی که جایگاه لتیس بولتزمن را از حل کننده معادله ناویر-استوکس به یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیلی ارتقا می‌دهد. یکی از معادلات دیفرانسیلی که می‌تواند به کمک روش لتیس بولتزمن حل شود، معادله لاپلاس است که در مختصات استوانه‌ای به شکل رابطه (۲۸) بیان می‌شود.

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (۲۸)$$

در فضای بین دو دیسک هم مرکز با شعاع‌های R_{i} و R_{o} و در حالی که پارامتر ϕ دارای مقدار ϕ_{i} در دیسک داخلی و ϕ_{o} در دیسک خارجی می‌باشد، معادله لاپلاس دارای حل تحلیلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\phi = \frac{\phi_{\text{o}} - \phi_{\text{i}}}{\log(R_{\text{o}}/R_{\text{i}})}\log\frac{r}{R_{\text{o}}} + \phi_{\text{o}} \qquad (۲۹)$$

برای حل معادله (۲۸) شکل جدیدی از تابع توزیع به نام g_i معرفی می‌شود که معرف توزیع مقدار ϕ در جهت i می‌باشد $\left(\sum_{i=0}^{8} g_i = \phi\right)$. معادله حاکم بر این تابع توزیع، معادله عمومی لتیس بولتزمن و مبتنی بر تقریب BGK خواهد بود [۳۶].

$$g_i(\text{r} + \text{c}_i\delta t, t + \delta t) - g_i(\text{r}, t) = \frac{1}{\tau_\varphi}\left(g_i^{\text{eq}}(\text{r}, t) - g_i(\text{r}, t)\right) \qquad (۳۰)$$

به کمک بسط چاپمن انسکاگ می‌توان نشان داد اگر شکل تعادلی تابع توزیع g و ثابت تخفیف زمانی متناسب با آن به صورت زیر تعریف شوند، حل معادله (۳۰) معادل با حل معادله لاپلاس خواهد بود [۳۶].

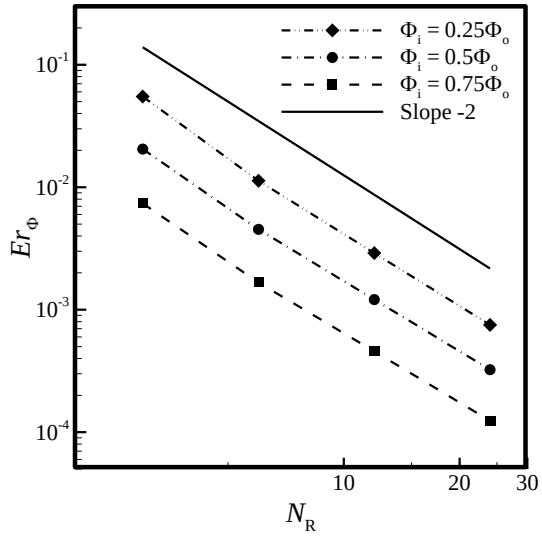
$$g_i^{eq} = \begin{cases} \phi w_i^{'} (\frac{1}{k}) & i > 0 \\ \phi - \sum_{i \neq 0} g_i^{eq} & i = 0 \end{cases} \quad (۳۱)$$

$$\tau_\varphi = k \frac{\delta t}{\delta x^2} + \frac{1}{2} \quad (۳۲)$$

در روابط فوق k یک ثابت عددی دلخواه است که متناسب با محدودیت‌های ثابت تخفیف زمانی انتخاب می‌شود و $w_i^{'}$ ضرایب وزنی مرتبط با شبکه سرعت می‌باشد که در شبکه دو بعدی و نه سرعته D2Q9 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_i^{'} = \begin{cases} 1/3 & i = 1-4 \\ 1/12 & i = 5-8 \end{cases} \quad (۳۳)$$

هندسه مورد بررسی در این بخش دو دیسک هم مرکز به شعاع‌های $R_i = 5\text{mm}$ و $R_o = 25\text{mm}$ می‌باشد که در آن از یک شبکه گرهی به ابعاد $2N_R \times 2N_R$ برای مدل‌سازی دیسک کوچک‌تر استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی به صورت تغییرات شاخص خطای ϕ ، Er_φ، به ازای اندازه‌های متفاوت شبکه گرهی ($N_R = 3, 6, 12, 24$) در شکل ۹ رسم شده است. کاهش شاخص خطا با شیب (۲-)، مؤید دیگری از دقت مرتبه دوم شرط مرزی حاضر در اعمال شرط مرزی منحنی می‌باشد.



شکل ۹ تغییرات شاخص خطا نسبت به ابعاد شبکه

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک شرط مرزی جدید برای شبیه‌سازی مرزهای منحنی در روش لتیس بولتزمن ارائه شده است. مدل شرط مرزی جدید مبتنی بر برون‌یابی خواص ماکروسکوپی به کمک تنها یک معادله می‌باشد تا از تغییرات شدید توابع توزیع که ناشی از تعدد معادلات برون‌یابی است اجتناب کند. از آنجا که مبنای برون‌یابی در مدل شرط مرزی خواص ماکروسکوپی می‌باشد، کاربرد آن تنها محدود به جریان سیال نبوده و در تمام مسائل فیزیکی قابل اعمال خواهد بود. در بحث شبیه‌سازی جریان سیال، مدل شرط مرزی جدیدی ارائه شده است که برقراری شرط عدم لغزش را در تمام هندسه‌های دو بعدی میسر می‌سازد. نتایج اعتبار سنجی صورت گرفته مؤید دقت مرتبه دوم شرط مرزی حاضر در شبیه‌سازی مرزهای منحنی می‌باشد.

۷- مراجع

[1] Ziegler D. P., “Boundary Conditions for Lattice Boltzmann Simulations”, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 71, No. 5-6, 1993, pp. 1171-1177.
[2] He X., Zou Q., Luo L.-S., and Dembo M., “Analytic Solutions of Simple Flows and Analysis of Nonslip Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model”, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 87, No. 1-2, 1997, pp. 115-136.
[3] Zou Q., and He X., “On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model”, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 6, 1997, pp. 1591.
[4] Inamuro T., Yoshino M., and Ogino F., “A Non-Slip Boundary Condition for Lattice Boltzmann Simulations”, *Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 12, 1995, pp. 2928.
[5] Chen S., Martínez D., and Mei R., “On Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Methods”, *Physics of Fluids*, Vol. 8, No. 9, 1996, pp. 2527.
[6] He X., and Doolen G., “Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow around a Circular Cylinder”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 134, No. 2, 1997, pp. 306-315.
[7] He X., and Doolen G., “Lattice Boltzmann Method on a Curvilinear Coordinate System: Vortex Shedding Behind a Circular Cylinder”, *Physical Review E*, Vol. 56, No. 1, 1997, pp. 434-440.

[8] Mei R., and Shyy W., "On the Finite Difference-Based Lattice Boltzmann Method in Curvilinear Coordinates", *Journal of Computational Physics*, Vol. 143, No. 2, 1998, pp. 426-448.

[9] Guo Z., and Zhao T., "Explicit Finite-Difference Lattice Boltzmann Method For Curvilinear Coordinates", *Physical Review E*, Vol. 67, No. 6, 2003, pp. 066709.

[10] Filippova O., and Hänel D., "Boundary-Fitting and Local Grid Refinement for Lattice-BGK Models", *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 09, No. 08, 1998, pp. 1271-1279.

[11] Mei R., Luo L.-S., and Shyy W., "An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, No. 2, 1999, pp. 307-330.

[12] Mei R., Shyy W., Yu D., and Luo L.-S., "Lattice Boltzmann Method for 3-D Flows with Curved Boundary", *Journal of Computational Physics*, Vol. 161, No. 2, 2000, pp. 680-699.

[13] Bouzidi M. h., Firdaouss M., and Lallemand P., "Momentum Transfer of a Boltzmann-Lattice Fluid with Boundaries", *Physics of Fluids*, Vol. 13, No. 11, 2001, pp. 3452.

[14] Lallemand P., and Luo L.-S., "Lattice Boltzmann Method for Moving Boundaries", *Journal of Computational Physics*, Vol. 184, No. 2, 2003, pp. 406-421.

[15] Guo Z., Zheng C., and Shi B., "An Extrapolation Method For Boundary Conditions in Lattice Boltzmann Method", *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 6, 2002, pp. 2007.

[16] Yu D., Mei R., Luo L.-S., and Shyy W., "Viscous Flow Computations with the Method of Lattice Boltzmann Equation", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, No. 5, 2003, pp. 329-367.

[17] Kao P. H., and Yang R. J., "An Investigation Into Curved and Moving Boundary Treatments in the lattice Boltzmann Method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 11, 2008, pp. 5671-5690.

[18] Yu D., Mei R., and Shyy W., "A Unified Boundary Treatment in Lattice Boltzmann Method", *AIAA 41st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, No. 2003, pp. 2003-0953.

[19] Tang G. H., Ye P. X., and Tao W. Q., "Pressure-Driven and Electroosmotic Non-Newtonian Flows Through Microporous Media via Lattice Boltzmann Method", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 165, No. 21-22, 2010, pp. 1536-1542.

[20] Wang M., Wang J., Chen S., and Pan N., "Electrokinetic Pumping Effects of Charged Porous Media in Microchannels using the Lattice Poisson-Boltzmann Method", *Journal of colloid and interface science*, Vol. 304, No. 1, 2006, pp. 246-253.

[21] Tang G. H., Li Z., Wang J. K., He Y. L., and Tao W. Q., "Electroosmotic Flow and Mixing in Microchannels with the Lattice Boltzmann Method", *Journal of Applied Physics*, Vol. 100, No. 9, 2006, pp. 094908.

[22] Chen S., and Doolen G. D., "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30, No. 1, 1998, pp. 329-364.

[23] He X., and Luo L.-S., "Theory of the Lattice Boltzmann Method: From the Boltzmann Equation to the Lattice Boltzmann Equation", *Physical Review E*, Vol. 56, No. 6, 1997, pp. 6811-6817.

[24] Guo Z., Shi B., and Wang N., "Lattice BGK Model for Incompressible Navier–Stokes Equation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 165, No. 1, 2000, pp. 288-306.

[25] Bhatnagar P., Gross E., and Krook M., "A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems", *Physical Review*, Vol. 94, No. 3, 1954, pp. 511-525.

[26] Kang X., Liao Q., Zhu X., and Yang Y., "Non-Equilibrium Extrapolation Method in the Lattice Boltzmann Simulations of Flows with Curved Boundaries (Non-Equilibrium Extrapolation of LBM)", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 30, No. 13, 2010, pp. 1790-1796.

[27] Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., and Michler A., "Straight Velocity Boundaries in the Lattice Boltzmann Method", *Physical Review E*, Vol. 77, No. 5, 2008, pp. 056703.

[28] Currie I. G., *Fundamental mechanics of fluids*, Marcel Dekker, New York, 2002.

[29] Nieuwstadt F., and Keller H. B., "Viscous Flow Past Circular Cylinders", *Computers & Fluids*, Vol. 1, No. 1, 1973, pp. 59-71.

[30] Tuann S.-y., and Olson M. D., "Numerical Studies of the Flow Around a Circular Cylinder by a Finite Element Method", *Computers & Fluids*, Vol. 6, No. 4, 1978, pp. 219-240.

[31] Fornberg B., "A Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 98, No. 04, 1980, pp. 819-855.

[32] Ding H., Shu C., Yeo K. S., and Xu D., "Simulation of Incompressible Viscous Flows Past a Circular Cylinder by Hybrid FD Scheme and Meshless Least Square-Based Finite Difference Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 9-11, 2004, pp. 727-744.

[33] Shu C., Liu N., and Chew Y. T., "A novel Immersed Boundary Velocity Correction–Lattice Boltzmann Method and its Application to Simulate Flow Past a Circular Cylinder", *Journal of Computational Physics*, Vol. 226, No. 2, 2007, pp. 1607-1622.

[34] Wu J., and Shu C., "Implicit Velocity Correction-Based Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method and its Applications", *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, No. 6, 2009, pp. 1963-1979.

[35] Zhou H., Mo G., Wu F., Zhao J., Rui M., and Cen K., "GPU Implementation of Lattice Boltzmann Method for Flows with Curved Boundaries", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 225-228, No. 2012, pp. 65-73.

[36] Servan-Camas B., and Tsai F. T. C., "Lattice Boltzmann Method with Two Relaxation Times for Advection–Diffusion Equation: Third Order Analysis and Stability Analysis", *Advances in Water Resources*, Vol. 31, No. 8, 2008, pp. 1113-1126.