



# آنالیز مودال یک تیر تحت اثر جرم متحرک با استفاده از روش‌های مودال برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان در حوزه زمان

هادی پورشه‌سواری<sup>۱</sup>، اسماعیل قربانی<sup>۲</sup>، مهدی کشمیری<sup>۳\*</sup>

۱- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک‌اشتر، تهران

۲- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

۳- دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی ۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶، mehdik@cc.iut.ac.ir

**چکیده-** تعمیم و گسترش مفهوم آنالیز مودال برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک و استفاده از آن برای استخراج فرکانس‌های طبیعی یک تیر تحت اثر جرم متحرک مورد نظر است. در همین راستا ابتدا مفهوم کلی آنالیز مودال برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان در حوزه زمان بیان و چگونگی استخراج مشخصه‌های دینامیکی، شبه پارامترهای مودال، این سیستم‌ها با استفاده از محاسبه مقادیر ویژه ماتریس انتقال حالت سیستم ارائه می‌شود. پس از معرفی شبه پارامترهای مودال، روند تعیین ماتریس انتقال حالت یک سیستم خطی متغیر با زمان بیان و در ادامه شبه پارامترهای مودال تشریح می‌شود. برای دنبال کردن هدف اصلی مقاله، پس از مدل‌سازی مسأله در نرم‌افزار متلب و ثبت داده‌های ورودی و خروجی، شبه فرکانس‌های طبیعی یک تیر با جرم متحرک، به عنوان سیستمی متغیر با زمان، با استفاده از روش تشریح شده محاسبه و در انتها نیز نشان داده می‌شود که شبه پارامترهای مودال یک سیستم خطی متغیر با زمان پریودیک، با همان دوره تناوب تکرار می‌شوند.

**کلیدواژگان:** آنالیز مودال، سیستم‌های خطی متغیر با زمان، شبه پارامترهای مودال و ماتریس انتقال حالت.

## Modal analysis of a beam mass system using time varying modal analysis methods

H. Pourshahsavari<sup>1</sup>, E. Ghorbani<sup>2</sup>, M. Keshmiri<sup>3\*</sup>

1- MSc, Mech. Eng., Malek Ashtar Univ. of Tech., Tehran, Iran

2- MSc, Mech. Eng., Isfahan Univ. of Tech., Isfahan, Iran

3- Assoc. Prof., Isfahan Univ. of Tech., Isfahan, Iran

\* P.O.B. 84156-83111, Isfahan, Iran. mehdik@cc.iut.ac.ir

**Abstract-** This paper discusses an adaptation of modal analysis concepts to time-varying periodic systems. It will be shown that the pseudo-modal parameters preserve certain properties of the conventional modal parameters defined for LTI systems. For this reason, after definition of pseudo modal parameters for time varying systems, a new modal analysis method will be introduced in time domain and it will be shown that these parameters can explain the nature of system. for periodic time varying systems, state transition matrices are formed by an ensemble set of responses which are obtained through multiple experiments on the system with the sometime varying behavior. In next step the pseudo natural frequencies of a beam with moving mass using introduced method will be extracted. Finally, it will be proved that for a linear time periodic system, the pseudo natural frequency treats periodic too.

**Keywords:** Modal Analysis, Linear Time Varying System, Pseudo Modal Parameters and State Transition Matrix.

پارامترهای مودال یک سیستم دینامیکی شامل فرکانس طبیعی و ضریب میرایی مودال و شکل مود، غالباً بیانگر رفتار دینامیکی

۱- مقدمه

یک سیستم خطی نامتغیر با زمان می‌باشند و از این پارامترها برای شناسایی یک سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان استفاده می‌شود. تعمیم این خواص برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان امروزه به مسأله مهمی تبدیل شده است، زیرا برای توصیف دقیق‌تر تعدادی از سیستم‌های دینامیکی از مدل‌های متغیر با زمان استفاده می‌شود. بر اساس تعریف آنالیز مودال، روش‌های مودال و پارامترهای مودال برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان تعریف شده است، بنابراین استفاده از مدل‌های متغیر با زمان در مقابل آنالیز مودال سیستم‌های نامتغیر با زمان قرار می‌گیرد. لذا ضروری است روش‌های مودال برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان تعمیم یابند. تلاش‌های زیادی در این راستا انجام شده است که از جمله کار زاده [۱] را می‌توان نام برد. زاده با تعمیم تبدیل لاپلاس به پاسخ ضربه متغیر با زمان، تابع تبدیلی متغیر با زمان تعریف کرد. تابع تبدیل زاده برای تغییرات زمان بی‌نهایت تعریف شده است و برای تغییرات زمان در یک محدوده کوچک قابل استفاده نیست. از قطب‌های منفرد تابع تبدیل زاده برای مطالعه پایداری سیستم‌های متغیر با زمان می‌توان استفاده کرد [۲]. با وجود این تابع تبدیل، برای پیدا کردن قطب‌های متغیر با زمان، یا به عبارت دیگر برای مقادیر ویژه متغیر با زمان تعریف خاصی ارائه نشده بود [۳]. لی [۴]، در سال ۱۹۹۷، روشی برای شناسایی و استخراج پارامترهای مودال سیستم‌های متغیر با زمان ارائه نمود که در آن روش با استفاده از مجموعه‌ای از داده‌های پاسخ آزاد سیستم و بر اساس روش تجزیه زیرفضا، پارامترهای مودال متغیر با زمان استخراج می‌شوند که این پارامترها اصطلاحاً شبه پارامترهای مودال نامیده می‌شوند و از این پارامترها می‌توان برای توصیف رفتار سیستم‌های خطی متغیر با زمان استفاده کرد. لی در سال ۱۹۹۹ [۵]، با تعمیم روش پیشنهادی برای پاسخ اجباری سیستم‌های خطی متغیر با زمان، با استفاده از ورودی و خروجی، ماتریس انتقال حالت گسسته سیستم و مقادیر ویژه آن را محاسبه کرد و با استفاده از این مقادیر ویژه شبه پارامترهای مودال را به دست آورد. او همچنین در سال ۲۰۰۶ با پیاده سازی روش پیشنهادی بر روی سیستم‌های خطی متغیر با زمان متنوع، همگرایی آن را اثبات کرد [۶].

در حالت کلی برای شناسایی سیستم‌های خطی متغیر با زمان دو دیدگاه کلی وجود دارد. دیدگاه اول، که در آن از یک

آزمایش برای شناسایی سیستم استفاده می‌شود. برای نمونه از روش‌های تطبیقی<sup>۱</sup> می‌توان نام برد و دیدگاه دوم که از چندین آزمایش با شرایط اولیه متفاوت برای شناسایی سیستم استفاده می‌شود و در هر آزمایش خروجی و ورودی سیستم ذخیره و از آن برای شناسایی سیستم استفاده می‌شود. در این مقاله از دیدگاه دوم استفاده شده و با تشکیل ماتریسی از مجموع داده‌های ورودی و خروجی پارامترهای مودال سیستم متغیر با زمان مدنظر محاسبه می‌شوند.

در حالت کلی روش‌های آنالیز مودال برای سیستم‌های  $LTI^2$  در دو دسته کلی روش‌های حوزه زمان و روش‌های حوزه فرکانس دسته‌بندی می‌شوند. برای سیستم‌های  $LTP^3$  نیز این تقسیم‌بندی قابل اعمال است. در سال‌های اخیر کارهای جامع و مفید اندکی در ارتباط با این موضوع انجام پذیرفته است. این مقاله برای گسترش و تعمیم روش‌های آنالیز مودال برای سیستم‌های  $LTP$  در حوزه زمان، تهیه شده است. به همین دلیل در این مقاله سعی شده است به منظور آنالیز مودال یک تیر تحت اثر جرم متحرک - که سیستمی از نوع  $LTP$  می‌باشد - روشی جامع در ارتباط با آنالیز مودال سیستم‌های مدنظر در حوزه زمان معرفی شود.

روش معرفی شده، روشی جامع و قدرتمند بوده و برای انواع گوناگون سیستم‌های  $LTP$  جواب دقیقی ارائه می‌دهد. در همین راستا در بخش بعدی ابتدا طریقه محاسبه ماتریس انتقال حالت برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان با استفاده از روش‌های تحلیلی بیان و مقادیر ویژه آن محاسبه می‌شود. در بخش سوم، با استفاده از ورودی و خروجی یک سیستم مکانیکی، طریقه استخراج ماتریس انتقال حالت گسسته با استفاده از ماتریس هنکل و تجزیه  $SVD$  بیان می‌شود. در بخش چهارم نیز، هدف اصلی مقاله دنبال می‌شود و پارامترهای مودال یک تیر با جرم متحرک مدل می‌شود با استفاده از روش معرفی شده در بخش سوم محاسبه می‌گردند. نشان داده می‌شود که با حرکت ماشین به صورت منظم بر روی پل و تغییر پارامترهای سیستم، پارامترهای مودال آن به صورت پریودیک تغییر می‌کنند. یکی از معایب این روش هزینه محاسباتی بالای آن است که متخصصان این زمینه، برای حل

1. Adaptive Method  
2. Linear Time Invariant  
3. Linear Time Periodic

حالت و ضریب ثابت  $C$  نیز ماتریس تأثیر خروجی نامیده می‌شوند.  $z(t)$  بردار یا پاسخ خروجی سیستم نامیده می‌شود. در حالت کلی ماتریس تأثیر خروجی، ماتریسی وابسته به زمان بوده ولی در اینجا، این ماتریس ثابت فرض می‌شود و این بدین معنی است که سیستم اندازه‌گیری با زمان تغییر نمی‌کند.

با توجه به مشاهده پذیر بودن سیستم، اگر خروجی سیستم با بازه زمانی  $\tau$  داده‌برداری و همچنین ورودی نیز با روش گسسته‌سازی مرتبه صفر<sup>۵</sup> در بازه مورد بررسی گسسته شود، فرم گسسته معادله (۲) به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$y(k+1) = G(k)y(k) + H(k)u(k), \quad z(k) = Cy(k) \quad (4)$$

که در آن ماتریس  $G$  و  $H$  ماتریس‌هایی متغیر با زمان و روش صریحی برای محاسبه آنها وجود ندارد. ماتریس  $G$ ، ماتریس انتقال حالت گسسته سیستم نامیده می‌شود. پاسخ معادله (۴) در رابطه (۵) بیان شده است.

$$z(k) = CG(k, k_0)y(k_0) + C \sum_{j=k_0}^{k-1} G(k, j+1)H(j)u(j), \quad k \geq k_0 \geq 0 \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $G(k, k_0)$  ماتریس انتقال حالت سیستم از لحظه  $k_0$  تا لحظه  $k$  است و توسط رابطه (۶) تعریف می‌شود.

$$G(k, k_0) = \begin{cases} G(k-1) \dots G(k_0) & k > k_0 \\ I & k = k_0 \\ \text{تعریف نشده} & k < k_0 \end{cases} \quad (6)$$

یادآوری می‌شود که  $G(k+1, k) = G(k)$ .

## ۲-۱- پارامترهای مودال یک سیستم نامتغیر با زمان

برای یک سیستم نامتغیر با زمان، ماتریس‌های  $A$  و  $B$  تعریف شده در معادله (۲)، ثابت می‌باشند. بنابراین ماتریس انتقال حالت ثابت بوده و طبق رابطه (۷) محاسبه می‌شود.

$$G(k) = G = \exp(A\tau). \quad (7)$$

در این صورت پارامترهای مودال سیستم از مقادیر ویژه ماتریس انتقال حالت محاسبه می‌شوند.

$$G(k) = V\Lambda V^{-1} \quad (8)$$

در رابطه (۸)،  $V$  ماتریس بردار ویژه و  $\Lambda$  ماتریس مقادیر ویژه می‌باشد یعنی:

این مشکل از روش‌های حوزه فرکانس استفاده می‌کنند. البته انتقال داده‌ها از حوزه زمان به فرکانس باعث ایجاد خطاهای پردازش سیگنال نیز خواهد شد.

## ۲- دینامیک سیستم‌های خطی متغیر با زمان

معادله دینامیکی یک سیستم خطی متغیر با زمان به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود.

$$M(t)\ddot{x}(t) + C(t)\dot{x}(t) + K(t)x(t) = B(t)u(t) \quad (1)$$

در رابطه فوق  $M(t)$ ،  $C(t)$  و  $K(t)$ ، به ترتیب ماتریس‌های مربعی  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ، جرم، میرایی و سختی سیستم و وابسته به زمان می‌باشند.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار جابجایی سیستم،  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ماتریس شکل ورودی<sup>۱</sup> و  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار نیروی ورودی بوده و تمام مؤلفه‌های این ماتریس‌ها و بردارها حقیقی هستند. برای مسأله فرض‌هایی در نظر گرفته شده است که عبارتند از:

۱- تمام مؤلفه‌های ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی محدود بوده و دارای تعدادی محدود ناپیوستگی مرتبه اول در محدوده مورد بررسی می‌باشند.

۲- سیستم به صورت مجانبی<sup>۲</sup> پایدار و ماتریس‌های سیستم در بازه زمانی مورد بررسی غیر منفرد<sup>۳</sup> و متقارن هستند.

۳- درجه آزادی سیستم ثابت است.

۴- سیستم مشاهده‌پذیر<sup>۴</sup> است. یعنی ورودی و خروجی سیستم قابل اندازه‌گیری هستند.

مدل فضای حالت معادله (۱) به صورت رابطه (۲) قابل بازنویسی است:

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \quad z(t) = Cy(t) \quad (2)$$

ماتریس‌های سیستمی معادله توسط رابطه (۳) تعریف می‌شوند.

$$A(t) = \begin{bmatrix} -M^{-1}(t)C(t) & -M^{-1}(t)K(t) \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} M^{-1}(t)b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

در معادله (۳)  $A(t)$  ماتریس سیستمی،  $y(t)$  بردار متغیر

1. Input shape matrix
2. Asymptotically
3. Non-Singular
4. Observable

که  $T(k) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  و  $T(k+1) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  ماتریس‌هایی غیر منفرد هستند. ماتریس‌های  $\bar{G}(k)$ ،  $\bar{H}(k)$  و  $\bar{C}(k)$  نیز بیان دیگری از سیستم می‌باشند. برای سیستم‌های متغیر با زمان پایداری و محدود بودن سیستم هنگام استفاده از قانون تشابه برقرار می‌باشد ولی برخلاف سیستم نامتغیر با زمان مقادیر ویژه ماتریس  $\bar{G}(k)$  و ماتریس  $G(k)$  به دلیل نابرابر بودن دو ماتریس  $T(k)$  و  $T(k+1)$  برابر نیست. بنابراین برای استفاده از قانون تشابه باید ماتریسی مانند  $\tilde{G}(k)$  را محاسبه کرد که در رابطه (۱۴) صدق کند.

$$\tilde{G}(k) = T(k)G(k)T^{-1}(k) \quad (14)$$

بر اساس قانون تشابه، برای ماتریس غیر منفرد  $T(k)$ ، پارامترهای مودال دو ماتریس  $G(k)$  و  $\tilde{G}(k)$  برابر می‌باشند. در حالت کلی استفاده از شبه پارامترهای مودال بحث در ارتباط با پارامترهای مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان را، با پیروی از پارامترهای مودال سیستم‌های نامتغیر با زمان، ممکن می‌سازد. برای نمونه اگر فرکانس تحریک سیستم با  $\omega_{di}(k)$ ، شبه فرکانس طبیعی میرایی سیستم متغیر با زمان که از مقادیر ویژه ماتریس  $\tilde{G}(k)$  حاصل می‌شود، برابر شود تشدید در سیستم رخ می‌دهد و یا به عنوان مثال دیگر، برای پایداری مجانبی سیستم مقادیر ویژه ماتریس  $\tilde{G}(k)$  بایستی داخل دایره یک‌ه باشد ( $\delta_i(k) \geq 0$ )، در غیر این صورت سیستم ناپایدار خواهد شد.

### ۳- الگوریتم شناسایی شبه پارامترهای مودال

به کمک داده‌های ورودی و خروجی یک سیستم خطی متغیر با زمان که از چندین آزمایش جداگانه جمع‌آوری می‌شوند، ماتریس هنکل سیستم برای ورودی و خروجی تشکیل و با استفاده از الگوریتم پیشنهادی پارامترهای شبه مودال استخراج می‌شوند. البته از پاسخ ارتعاشات آزاد این سیستم نیز می‌توان برای محاسبه پارامترهای شبه مودال سیستم خطی متغیر با زمان استفاده کرد [۴].

برای تشکیل ماتریس هنکل تعداد  $N$  آزمایش بر روی سیستم انجام می‌شود. رفتار پارامترهای متغیر با زمان سیستم در هر آزمایش یکسان و فقط تحریک سیستم در هر آزمایش متفاوت است. داده‌های ورودی و خروجی ثبت شده در آزمایش

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}) \quad (9)$$

$$\lambda_i(k) = \lambda_{i+n}^*(k) = \exp(-\delta_i(k)\tau + j\omega_{di}(k)\tau) \text{ و}$$

در این رابطه  $\delta_i$  نسبت میرایی و  $\omega_{di}$  فرکانس طبیعی میرایی سیستم می‌باشند. در این حالت ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی حقیقی، متقارن و مثبت معین می‌باشند. برای نسبت میرایی کمتر از یک،  $2n$  مقدار ویژه برای سیستم به صورت مزدوج مختلط وجود دارد.

با استفاده از قانون تبدیل تشابه و به کمک ماتریس غیرمنفرد  $T(k+1) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ، رابطه (۱۰) برقرار است:

$$\bar{G} = TGT^{-1} \quad (10)$$

بر اساس قانون تشابه، مقادیر ویژه ماتریس  $\bar{G}$  با مقادیر ویژه ماتریس  $G$  برابر است.

### ۲-۲- پارامترهای شبه مودال سیستم‌های خطی متغیر با زمان

برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان، ماتریس انتقال حالت در هر لحظه  $k$  غیر منفرد می‌باشد [۷] و می‌توان آن را به صورت رابطه (۱۱) بیان کرد.

$$G(k) = V(k)\Lambda(k)V^{-1}(k) \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)،  $V(k)$  و  $\Lambda(k)$  به ترتیب ماتریس‌های بردار و مقدار ویژه می‌باشند. از آنجا که مؤلفه‌های ماتریس انتقال حالت همگی حقیقی هستند مقادیر ویژه آن به صورت مزدوج مختلط به دست می‌آیند. اگر  $\lambda_i$  مقدار ویژه به صورت مختلط باشد آنگاه عبارت (۱۲) قابل حصول است.

$$\lambda_i(k) = \lambda_{i+n}^*(k) = \exp(-\delta_i(k)\tau + j\omega_{di}(k)\tau) \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)،  $\delta_i(k)$  و  $\omega_{di}(k)$  به ترتیب  $\lambda_i$  امین شبه ضریب میرایی و فرکانس طبیعی میرایی سیستم نامیده می‌شوند. به دلیل تغییرات زمانی سیستم ممکن است تعدادی از مقادیر ویژه ماتریس انتقال حالت حقیقی شوند که در این حالت شبه فرکانس طبیعی میرایی متناظر با آن مقدار ویژه صفر و شبه ضریب میرایی متناسب با آن برابر است با:  $-\delta_i(k) = \ln[\lambda_i(k)] / \tau$

برای سیستم‌های متغیر با زمان، قانون تشابه به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود:

$$\bar{G}(k) = T(k+1)G(k)T^{-1}(k),$$

$$\bar{H}(k) = T(k)H(k), \quad \bar{C}(k) = CT^{-1}(k) \quad (13)$$

در صورتی که ماتریس  $U(k)$  دارای مرتبه کامل<sup>۱</sup> باشد ماتریس فوق معکوس پذیر و با پس ضرب کردن ماتریس  $\hat{U}(k)$  در رابطه (۱۶) عبارت (۱۹) حاصل می شود:

$$Z(k) \hat{U}(k) = \Gamma(k) Y(k) \hat{U}(k) \quad (19)$$

بر اساس رابطه فوق، محدوده مشاهده پذیری ماتریس  $\Gamma(k)$  را می توان از عبارت  $Z(k) \hat{U}(k)$  به صورت (۲۱) محاسبه کرد.

$$\bar{\Gamma}(k) = \text{Range}(Z(k) \hat{U}(k)) = \text{Range}(\Gamma(k)) \quad (20)$$

$$\bar{\Gamma}(k) = \Gamma(k) T^{-1}(k)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{C}(k) \\ \bar{C}(k+1) \bar{G}(k+1, k) \\ \vdots \\ \bar{C}(k+M-1) \bar{G}(k+M-1, k) \end{bmatrix} \quad (21)$$

برای سیستم های متغیر با زمان خاصیت تغییرناپذیری با انتقال برای ماتریس ها برقرار نمی باشد به همین دلیل رابطه (۲۲) نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(k+1) &= \text{Range}(Z(k+1) \hat{U}(k+1)) \\ &= \text{Range}(\Gamma(k+1)), \end{aligned} \quad (22)$$

حالا با تشکیل  $\bar{\Gamma}_1(k+1)$  و  $\bar{\Gamma}_2(k)$  که به ترتیب از  $M-1$  سطر اول ماتریس  $\bar{\Gamma}(k+1)$  و  $M-1$  سطر آخر ماتریس  $\bar{\Gamma}(k)$  تشکیل شده است ماتریس  $\bar{G}(k+1, k)$  به دست می آید.

$$\bar{G}(k) = [\bar{\Gamma}_1(k+1)]^+ \bar{\Gamma}_2(k), \quad (23)$$

که  $^+ (*)$  بیانگر معکوس مور-پنروس<sup>۲</sup> ماتریس  $(*)$  می باشد.

به این ترتیب ماتریس  $\bar{G}(k)$  به دست آمد ولی به دلیل مشخص نبودن  $T(k)$  و  $T(k+1)$  نمی توان ماتریس  $G(k)$  را محاسبه کرد. برای محاسبه ماتریس  $\tilde{G}(k)$ ، از تجزیه SVD ماتریس هنکل ورودی و خروجی استفاده می شود. با تجزیه SVD روابط (۲۴) و (۲۵) قابل حصول است.

$$Z(k) \hat{U}(k) = \Phi(k) \Sigma(k) \Psi^T(k) \quad (24)$$

$$Z(k+1) \hat{U}(k+1) = \Phi(k+1) \Sigma(k+1) \Psi^T(k+1) \quad (25)$$

بر اساس خواص تجزیه SVD،  $2n$  ستون اول ماتریس

زام توسط  $u_j(k)$  و  $z_j(k)$  که  $j \in [1, N]$ ، نشان داده می شوند. با استفاده از این  $N$  مجموعه از داده های ورودی و خروجی از لحظه  $k$  تا  $k+M-1$ ، ماتریس هنکل  $Z(k) \in \mathbb{R}^{n_r M \times N}$  به فرم زیر تشکیل می شود:

$$Z(k) = \begin{bmatrix} z_1(k) & z_2(k) & \dots & z_N(k) \\ z_1(k+1) & z_2(k+1) & \dots & z_N(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1(k+M-1) & z_2(k+M-1) & \dots & z_N(k+M-1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

مطابق با رابطه (۱۵) یک ماتریس هنکل ورودی  $U(k) \in \mathbb{R}^{n_r M \times N}$ ، همانند ماتریس هنکل خروجی از داده های  $u_j(k)$  نیز تشکیل می شود. در صورت ناچیز بودن نویز سیستم اندازه گیری رابطه (۱۶) بین ورودی و خروجی برقرار است.

$$Z(k) = \Gamma(k) Y(k) + \Theta(k) U(k), \quad (16)$$

در معادله (۱۶) ماتریس متغیرهای حالت،  $\Gamma(k)$ ، ماتریس مشاهده پذیری سیستم و  $\Theta(k)$  ماتریس پاسخ ضربه سیستم است. ماتریس مشاهده پذیری مطابق رابطه (۱۷) بیان می شود.

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} C(k) \\ C(k+1)G(k+1, k) \\ \vdots \\ C(k+M-1)G(k+M-1, k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

برای محاسبه ماتریس  $\tilde{G}(k)$ ، ماتریس متشابه با ماتریس انتقال حالت سیستم، و به تبع آن پارامترهای شبه مودال سیستم، از محدوده مشاهده پذیری ماتریس  $\Gamma(k)$  استفاده می شود. در حالت کلی رتبه مشاهده پذیری دو ماتریس متشابه یکسان می باشد. برای استخراج فضای مشاهده پذیری ماتریس  $\Gamma(k)$  باید قسمت دوم سمت راست معادله (۱۶) حذف شود. برای این منظور ماتریس  $\hat{U}(k)$  که عمود بر  $U(k)$  می باشد و  $U(k) \hat{U}(k) = 0$  تعریف می شود.

$$\hat{U}(k) = I - U^T(k) [U(k) U^T(k)]^{-1} U(k) \quad (18)$$

1. Full Rank

2. Moore-Penrose

به منظور آنالیز حرکت جسم متحرک و لحاظ نمودن اثرات اینرسی جسم متحرک، با استفاده از اصل هامیلتون معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات تیر از رابطه (۲۹) قابل محاسبه است.

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (29)$$

در معادله فوق با در نظر گرفتن اثرات شتاب کریولیس و نیروهای جانب مرکز سمت راست معادله به صورت رابطه (۳۰) محاسبه می‌شود.

$$f(x, t) = M(g - v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}) \delta(x - vt). \quad (30)$$

در ادامه برای گسسته‌سازی مسأله و حل مودال آن، از روش مودهای فرضی استفاده می‌شود. اگر مجموعه توابع  $\phi_k(x)$  از دسته توابع پذیرا<sup>۱</sup> مربوط به تیر الاستیک مورد بحث انتخاب شوند، آنگاه تابع  $z$  را می‌توان به کمک رابطه (۳۱) نمایش داد.

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) A_k(t). \quad (31)$$

در این حالت، مبتنی بر روش مودهای فرضی، نسبت به تعیین معادله حاکم بر مختصات مودال سیستم اقدام می‌شود. معادله حاکم بر مختصات مودال در فرم ماتریسی به صورت رابطه (۳۲) قابل بیان است.

$$T(t)\ddot{A} + Y(t)\dot{A} + \Lambda(t)A = f(t) \quad (32)$$

$$T_{ij} = m \int_0^l \phi_i \phi_j dx + M \phi_i(vt) \phi_j(vt), \quad (33)$$

$$Y_{ij} = 2Mv \phi_i(vt) \phi_j'(vt), \quad (34)$$

$$\Lambda_{ij} = Mv^2 \phi_i(vt) \phi_j''(vt) + EI \int_0^l \phi_i'' \phi_j'' dx, \quad (35)$$

$$f_i = Mg \phi_i(vt). \quad (36)$$

چنانچه مجموعه توابع پذیرا از دسته توابع ویژه نرمال با تعریف رابطه (۳۷) انتخاب گردند، با توجه به اینکه این توابع در مسأله مقدار ویژه صدق می‌کنند، ضرایب معادله حاکم بر مختصات مودال به طبق روابط (۳۸) تا (۴۱) محاسبه می‌شوند.

$$\int_0^l \phi_i \phi_j dx = \delta_{ij}, \quad (37)$$

$$T_{ij} = \delta_{ij} + \frac{M}{m} \phi_i(vt) \phi_j(vt), \quad (38)$$

$\Phi(k)$  بردارهای پایه ماتریس مشاهده‌پذیر تخمین زده شده را بیان می‌کنند.

$$\bar{\Gamma}(k) = \Phi_s(k) = [\Phi_1(k), \Phi_2(k), \dots, \Phi_{2n}(k)] \quad (26)$$

$$\bar{\Gamma}(k+1) = \Phi_s(k+1) = [\Phi_1(k+1), \Phi_2(k+1), \dots, \Phi_{2n}(k+1)] \quad (27)$$

برای محاسبه ماتریس  $\tilde{G}(k)$  از رابطه (۲۸) استفاده می‌شود:

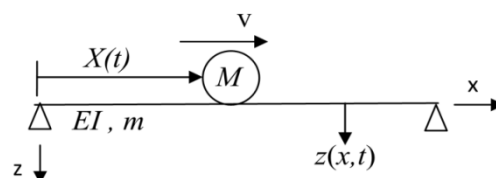
$$\tilde{G}(k) = F^+(k) F(k+1) \{ [\bar{\Gamma}_1(k+1)]^+ \Gamma_2(k) \} \quad (28)$$

در معادله بالا  $F(k)$  سطر اول ماتریس  $\Phi_s(k)$  و  $F(k+1)$  از سطر اول ماتریس  $\Phi_s(k+1)$  تشکیل شده است [۵].

## ۴- آنالیز مودال یک تیر تحت اثر حرکت جرم متحرک

در قسمت قبلی روش شناسایی پارامتر مودال یک سیستم خطی متغیر با زمان بیان شد. در ادامه برای پیاده‌سازی روش پیشنهادی، پارامترهای مودال یک تیر با جرم متحرک در حوزه زمان که مدلی دینامیکی از بال یک هواپیما می‌باشد، محاسبه می‌شوند. در همین راستا ابتدا معادلات ریاضی حاکم بر یک تیر تحت اثر جرم متحرک استخراج و پس از آن با شبیه‌سازی مسأله در نرم‌افزار متلب، با اندازه‌گیری خروجی و ورودی سیستم، شبه پارامترهای مودال سیستم محاسبه می‌شوند.

در شکل ۱ یک تیر که تحت اثر یک جرم متحرک با سرعت ثابت  $v$  قرار دارد، نشان داده شده است. تیر یکنواخت فرض شده است، سختی تیر  $EI$  و جرم واحد طول آن  $m$  می‌باشد. همچنین جسم متحرک یک جرم نقطه‌ای با جرم  $M$  فرض شده است. فرض می‌شود که جسم متحرک و تیر با هم تماس داشته و از ارتعاشات عرضی جسم نسبت به ارتعاشات تیر صرف‌نظر شده و همچنین فرض می‌گردد که تیر دارای میرایی نیست.



شکل ۱ شماتیکی از یک تیر با تحت اثر یک جرم متحرک

آزمایشات و داده‌های دریافتی هر آزمایش می‌باشد. البته این نکته قابل ذکر است که برای حل، در این قسمت نسبت سیگنال به نویز ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است که بیانگر توان سیگنال به توان نویز است.

در شکل ۲ شبه فرکانس طبیعی سیستم محاسبه شده است. مقدار فرکانس در لحظه صفر برابر با فرکانس تیر تنها بدون در نظر گرفتن اثر جرم می‌باشد. در این حالت فرکانس اول تیر تنها برابر با ۵/۴ رادیان بر ثانیه می‌باشد. البته ذکر این نکته ضروری است که با تغییر جرم متحرک بر روی تیر، نقطه شروع نمودار فوق تغییر نکرده و تنها دامنه نوسانات تغییر می‌کند. بنابراین از این خاصیت می‌توان برای محاسبه فرکانس طبیعی تیر تنها استفاده کرد.

همان طور که در قسمت قبلی ثابت شد، شبه پارامترهای مودال یک سیستم متغیر با زمان پریودیک، متناوب بوده و با همین دوره تناوب تکرار می‌شوند. همان طور که در شکل ۲ مشخص است، شبه فرکانس طبیعی سیستم با دوره تناوب ۵ ثانیه تکرار می‌شوند، که این برابر با دوره تناوب سیستم می‌باشد (نسبت طول تیر با سرعت جرم متحرک). در ادامه برای تعیین کیفیت شبه فرکانس طبیعی محاسبه شده، در شکل زیر مقدار انحراف از جواب صحیح محاسبه شده است. البته ذکر این نکته ضروری است که در سمت راست به دلیل نزدیک شدن طول داده‌های هر آزمایش به تعداد آزمایش‌ها، اختلاف جواب تخمین زده شده از مقدار واقعی بیشتر است.

برای رسم شکل ۳ از فرمول (۴۴) استفاده است که در آن ER پاسخ تخمین زده شده و TR پاسخ صحیح است.

$$deviation = \frac{(ER - TR)^2}{TR^2} \quad (44)$$

در شکل ۳ مقدار انحراف جواب به دست آمده از جواب واقعی محاسبه شده است و همان طور که در شکل مشخص است، با نزدیک شدن تعداد داده‌های دریافتی از هر آزمایش به تعداد آزمایش‌ها، کیفیت جواب کاهش می‌یابد. در ادامه با تغییر تعداد آزمایش‌ها و ثابت نگه‌داشتن طول داده‌های دریافتی هر آزمایش، نتایج مقایسه می‌شوند (شکل ۴).

با توجه به شکل ۵، کیفیت جواب‌های به دست آمده در این قسمت با افزایش تعداد آزمایش‌ها و ثابت نگه‌داشتن داده‌های دریافتی از هر آزمایش، افزایش می‌یابد. در حالت کلی در این

$$Y_{ij} = \frac{2vM}{m} \phi_i(vt) \phi_j'(vt), \quad (39)$$

$$\Lambda_{ij} = \omega_i^2 \delta_{ij} + \frac{Mv^2}{m} \phi_i(vt) \phi_j''(vt), \quad (40)$$

$$f_i = \frac{Mg}{m} \phi_i(vt). \quad (41)$$

از توابع شکل زیر برای مدل‌سازی مسأله استفاده می‌شود:

$$\varphi_n(x) = c \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n=1,2,\dots, \quad (42)$$

با جایگذاری تابع شکل فوق در معادله ۳۷ ثابت این معادله  $c = \sqrt{2/l}$  به دست می‌آید. بنابراین شکل مود انتخابی مسأله را در حالت کلی می‌توان به صورت رابطه (۴۳) بیان نمود.

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad n=1,2,\dots \quad (43)$$

مسأله را برای تیر تحت اثر یک جرم شبیه‌سازی کرده و نتایج نشان داده می‌شوند. برای پیاده‌سازی تنها دو مود از جابه‌جایی تیر را در نظر گرفته و شبه فرکانس‌های طبیعی سیستم با استفاده از روش پیشنهادی در بالا استخراج می‌شوند.

پس از شبیه‌سازی مسأله در نرم‌افزار، برای رسیدن به جواب‌های واقعی و قابل استناد برای تست آزمایشگاهی، نویز به ورودی و خروجی سیستم اضافه می‌شود و فرکانس طبیعی سیستم با در نظر گرفتن این موارد محاسبه می‌شود. همچنین برای تعیین دقت نتایج و اثر فرکانس داده‌برداری بر روی نتایج، داده‌برداری با دو نرخ فرکانسی ۱۰ Hz و ۱۰۰ Hz انجام شده است که در هر حالت نتیجه بیان می‌شود.

برای شبیه‌سازی مسأله مقادیر عددی زیر طبق جدول ۱ در نظر گرفته شده است:

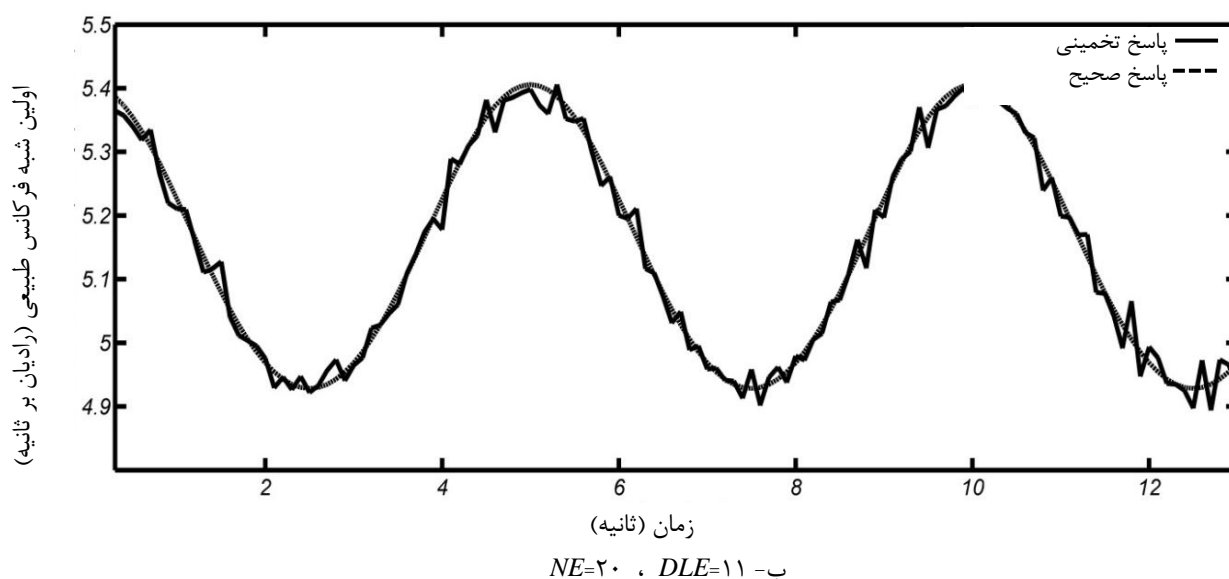
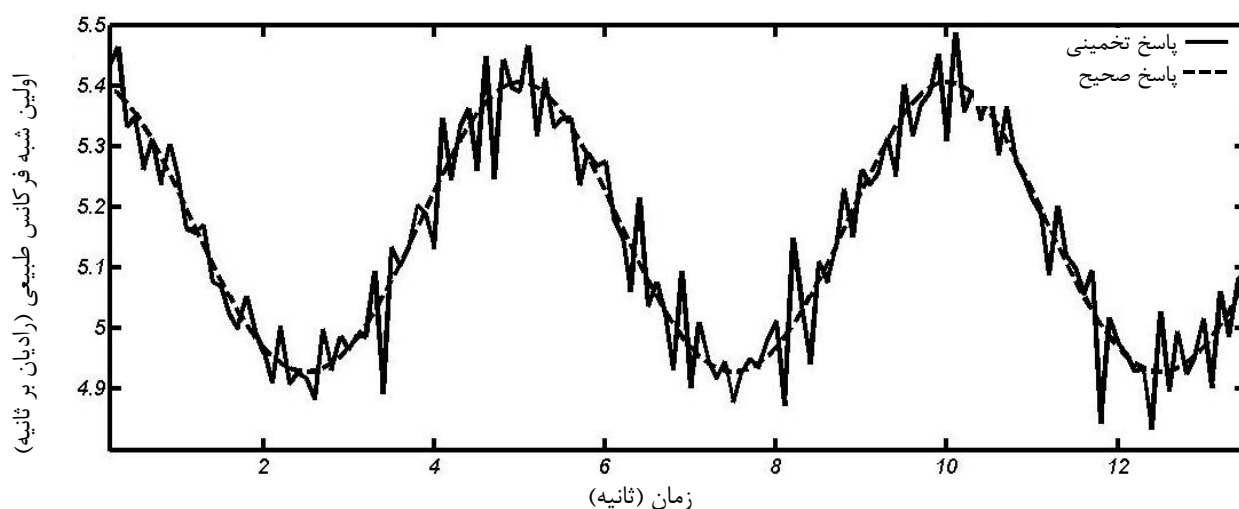
جدول ۱ مقادیر ثابت شبیه‌سازی مسأله تیر با جرم متحرک

$M$ (kg/m)	$L$ (m)	$M$ (kg)	$EI$ (N×m <sup>2</sup> )	$V$ (m/s)
۲۰۰	۱۰۰	۲۰۰۰	۶۰۰۰×۱۰ <sup>۶</sup>	۲۰

برای شروع ابتدا نتایج داده‌برداری با فرکانس ۱۰ Hz نشان داده شده است. در این قسمت نتایج به دست آمده با تغییر طول داده‌های دریافتی از هر آزمایش مقایسه می‌شوند. در قدم بعدی با ثابت نگه‌داشتن تعداد داده‌های هر آزمایش، تعداد آزمایش‌ها متغیر در نظر گرفته شده و نتایج بیان می‌گردند. هدف از این قسمت مقایسه کیفیت جواب نسبت به تعداد

استخراج شده‌اند. در ادامه برای تعیین تأثیر فرکانس داده‌برداری بر دقت نتایج حاصله نتایج برای فرکانس داده‌برداری  $100\text{ Hz}$  نیز ارائه شده‌اند. روند انجام شده در بالا برای این قسمت نیز تکرار شده است. ابتدا با ثابت نگه‌داشتن تعداد آزمایش‌ها، داده‌های دریافتی از هر آزمایش را تغییر داده و جواب‌ها مقایسه می‌شوند (شکل‌های ۶ و ۷). در ادامه با ثابت نگه‌داشتن طول داده‌های هر آزمایش، تعداد آزمایش‌ها را افزایش داده و جواب‌ها مقایسه می‌شوند (شکل‌های ۸ و ۹).

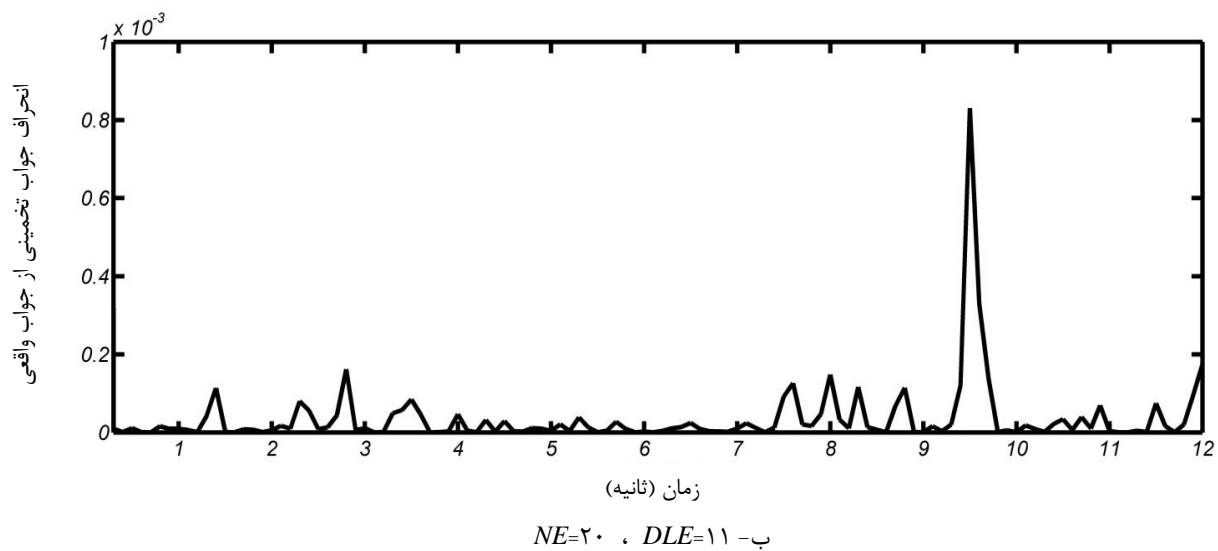
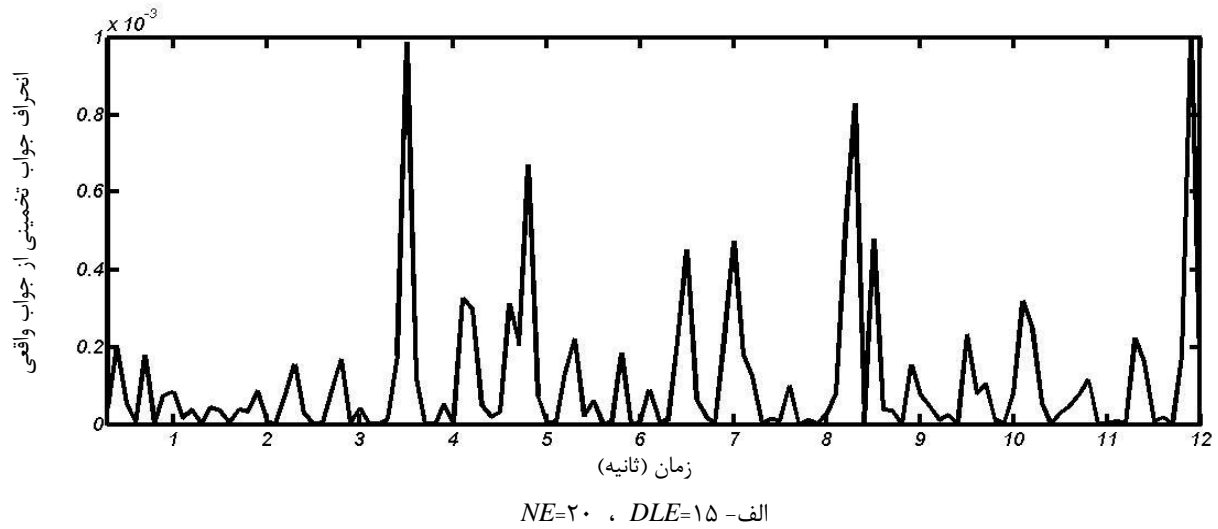
روش با افزایش تعداد آزمایش‌ها کیفیت جواب افزایش می‌یابد. رابطه مشخصی را نمی‌توان بین  $M$  و  $N$  بوجود آورد و مقدار بهینه آنها به نوع مسأله و مقدار نویز ورودی و خروجی سیستم وابسته است. تنها باید توجه کرد که برای معکوس‌پذیر بودن ماتریس ورودی باید تعداد آزمایش‌ها از مقدار داده‌های دریافتی از هر آزمایش بیشتر باشد. در ادامه نیز مقدار انحراف جواب‌های تخمین زده شده از مقدار واقعی در شکل نشان داده می‌شود. جواب‌ها و نتایج فوق بر اساس فرکانس داده‌بردای  $10\text{ Hz}$



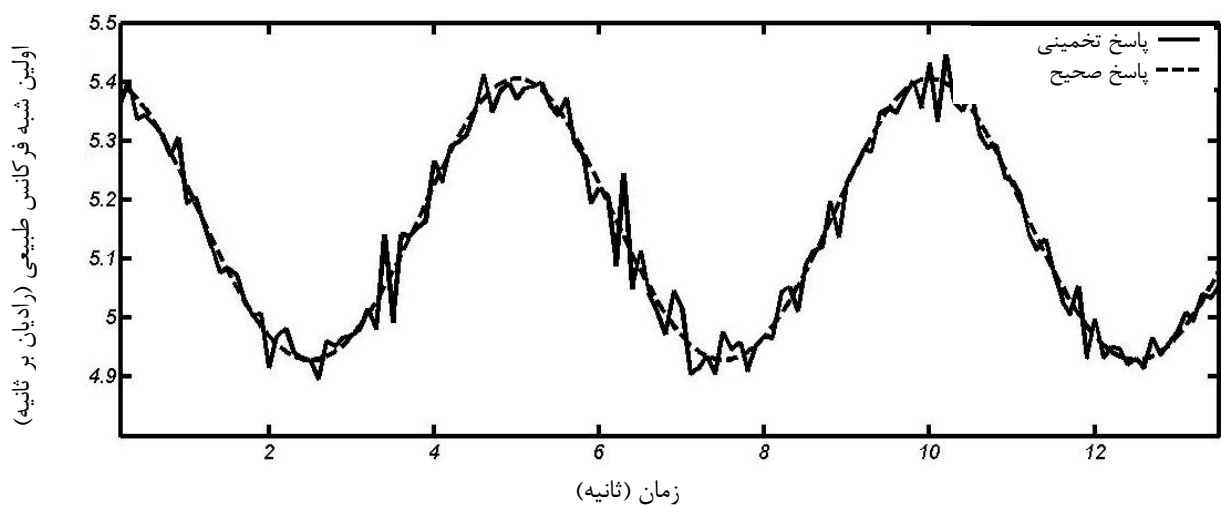
1. Data Length in Every Experiment
2. Number of Experiments

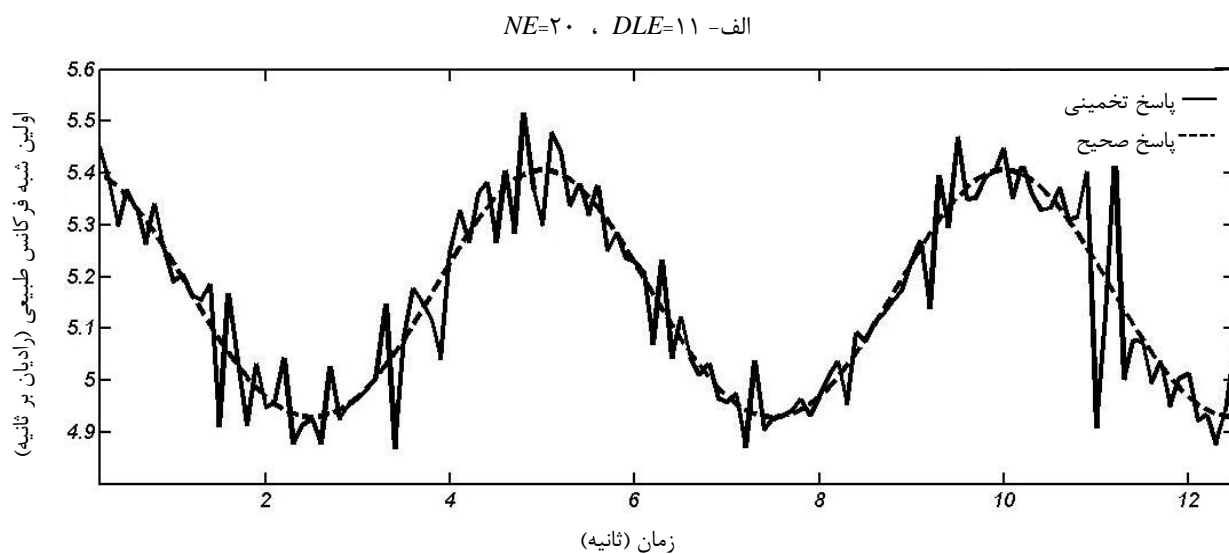


شکل ۲ فرکانس طبیعی اول سیستم به ازای داده‌هایی با طول متفاوت



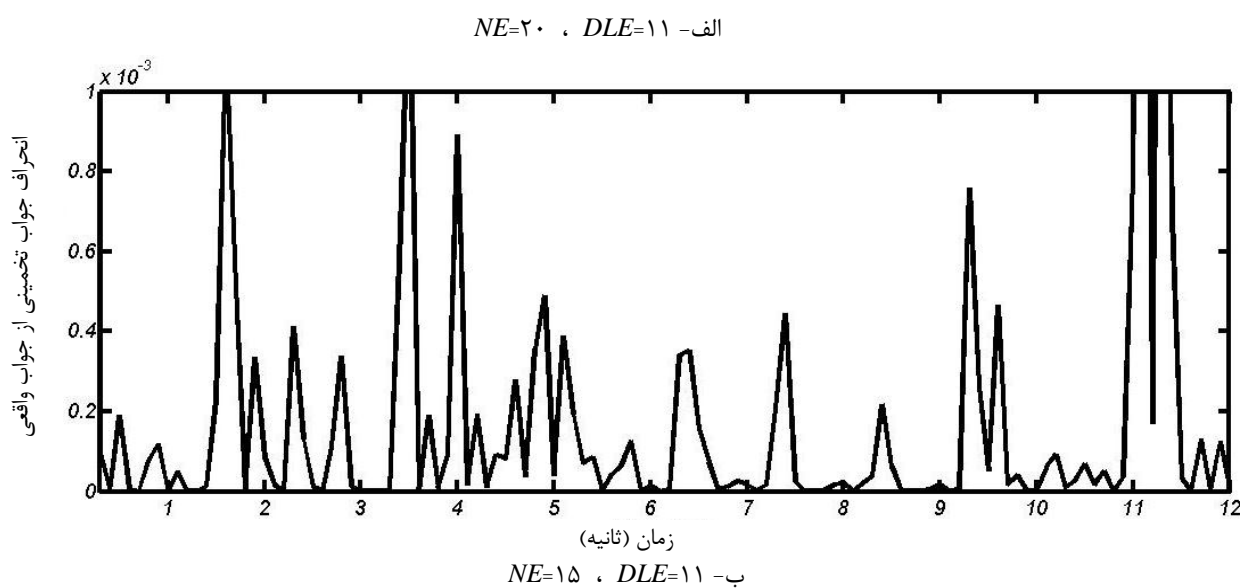
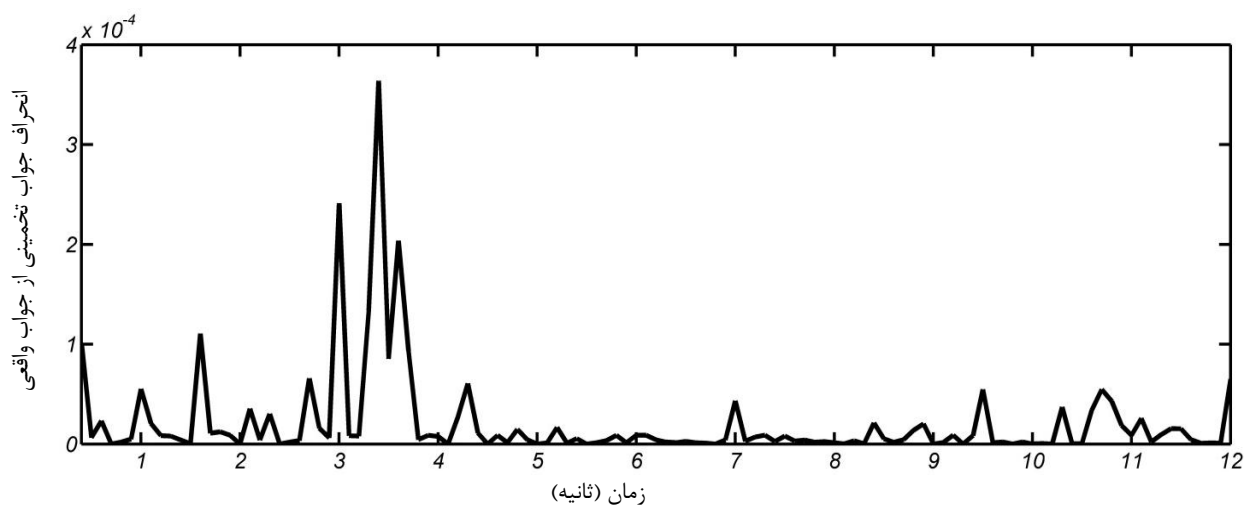
شکل ۳ مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با داده‌هایی با طول متفاوت



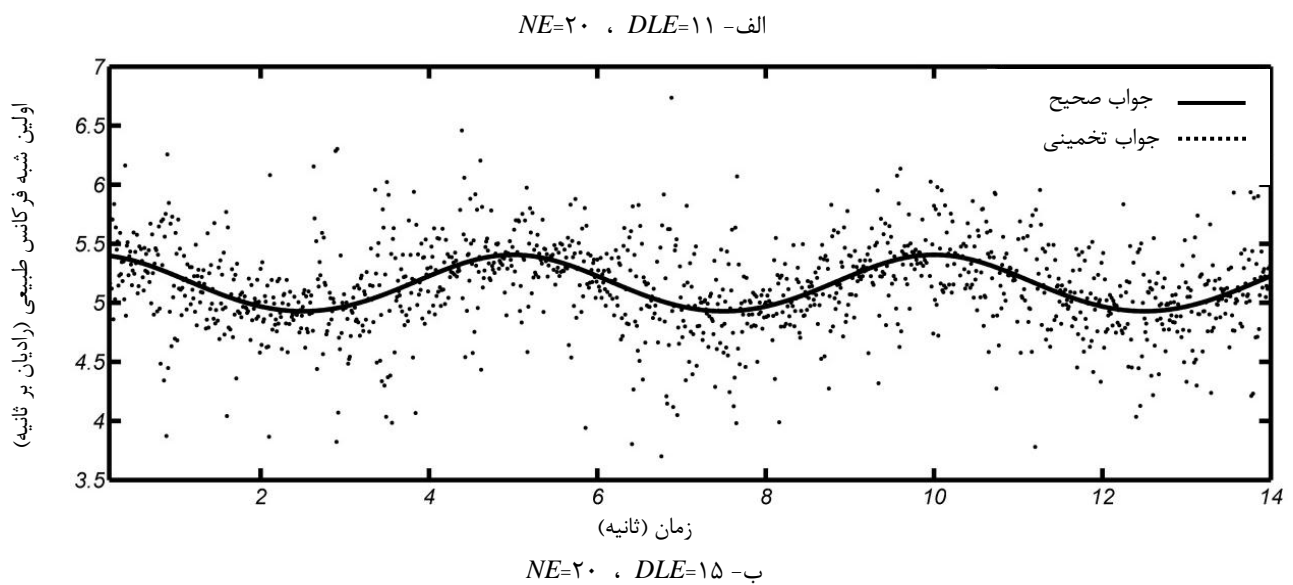
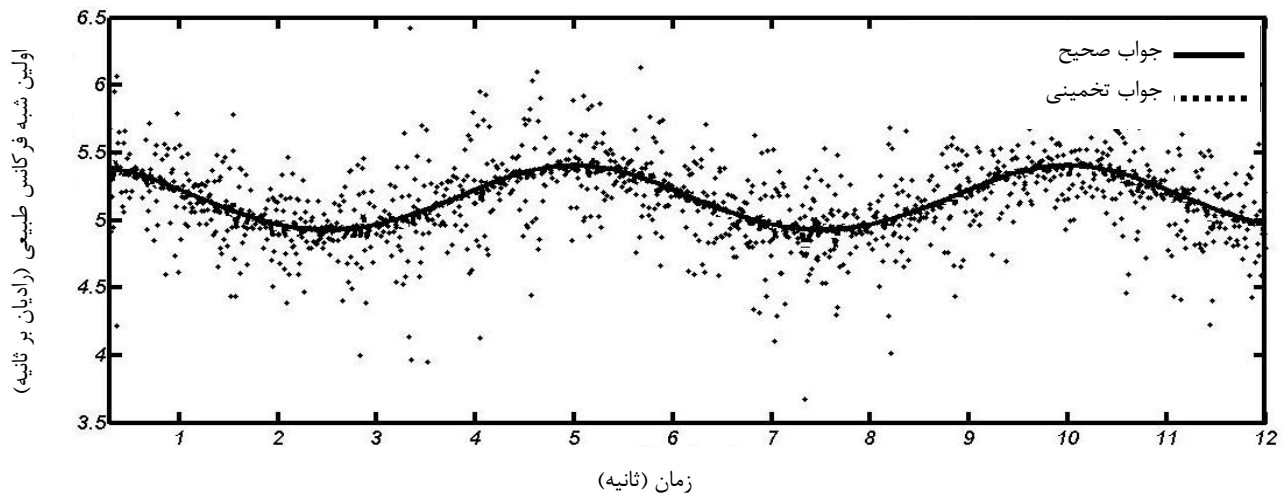


ب -  $DLE=11$  ،  $NE=15$

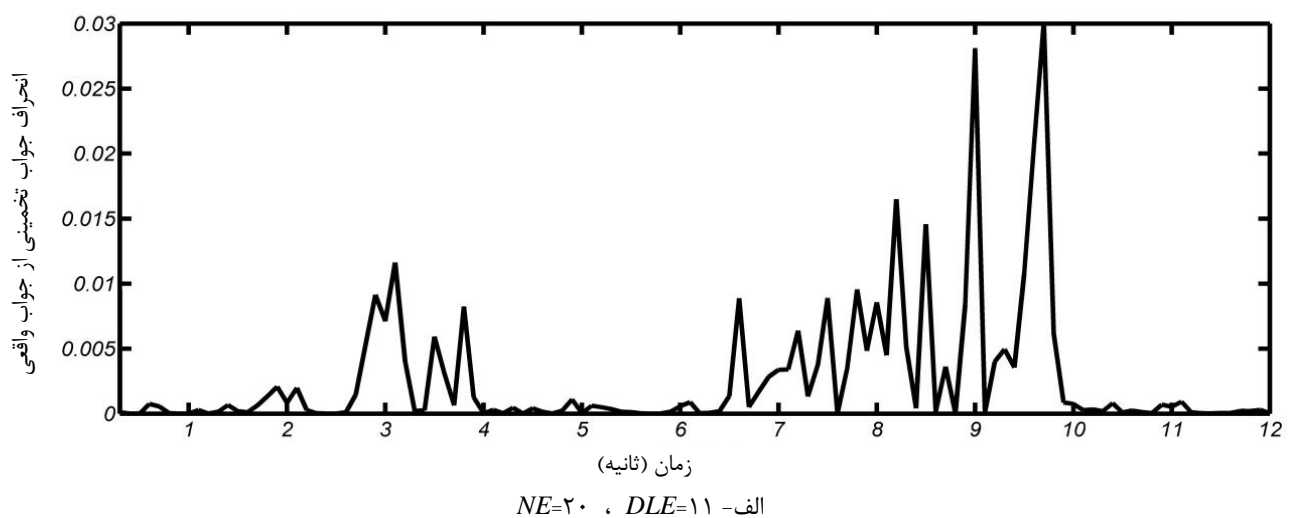
شکل ۴ فرکانس طبیعی اول تیر با جرم متحرک با تغییر تعداد آزمایش‌ها

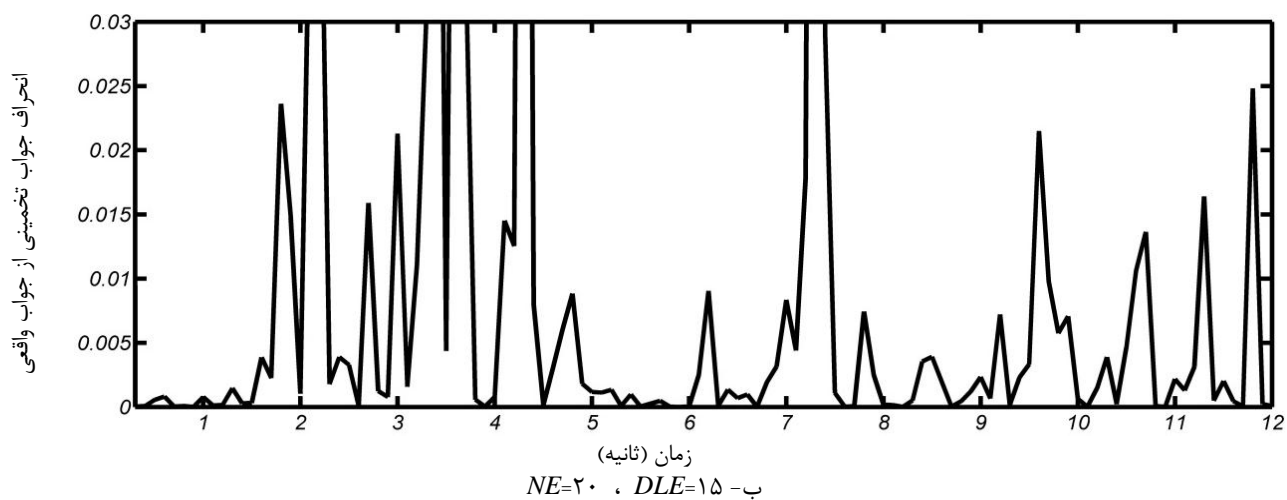


شکل ۵ مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با تغییر تعداد آزمایش‌ها

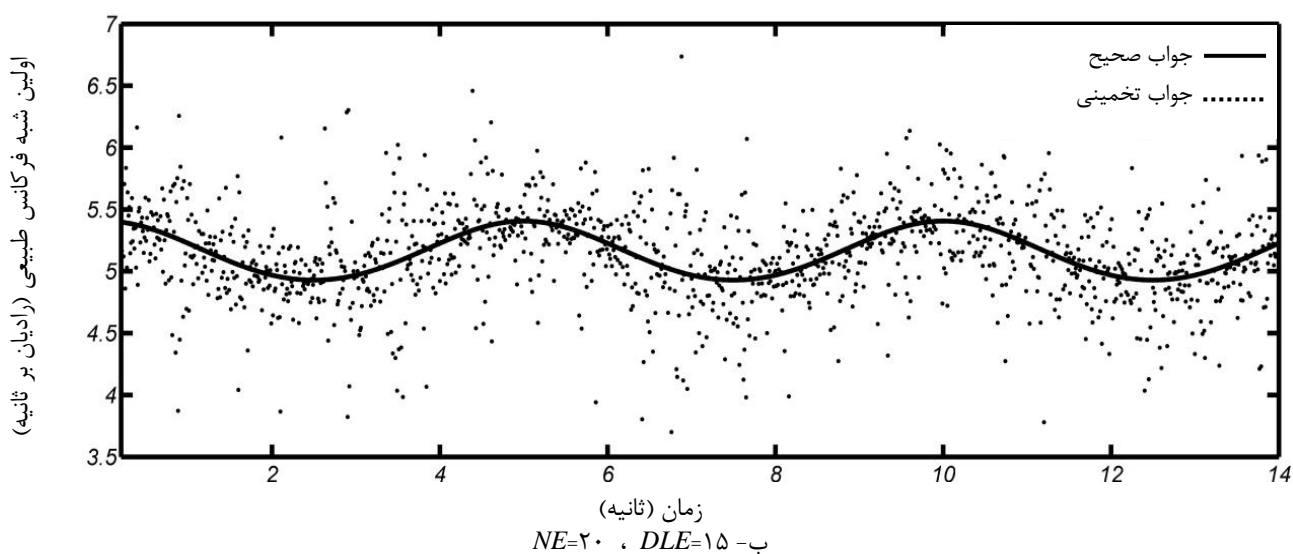
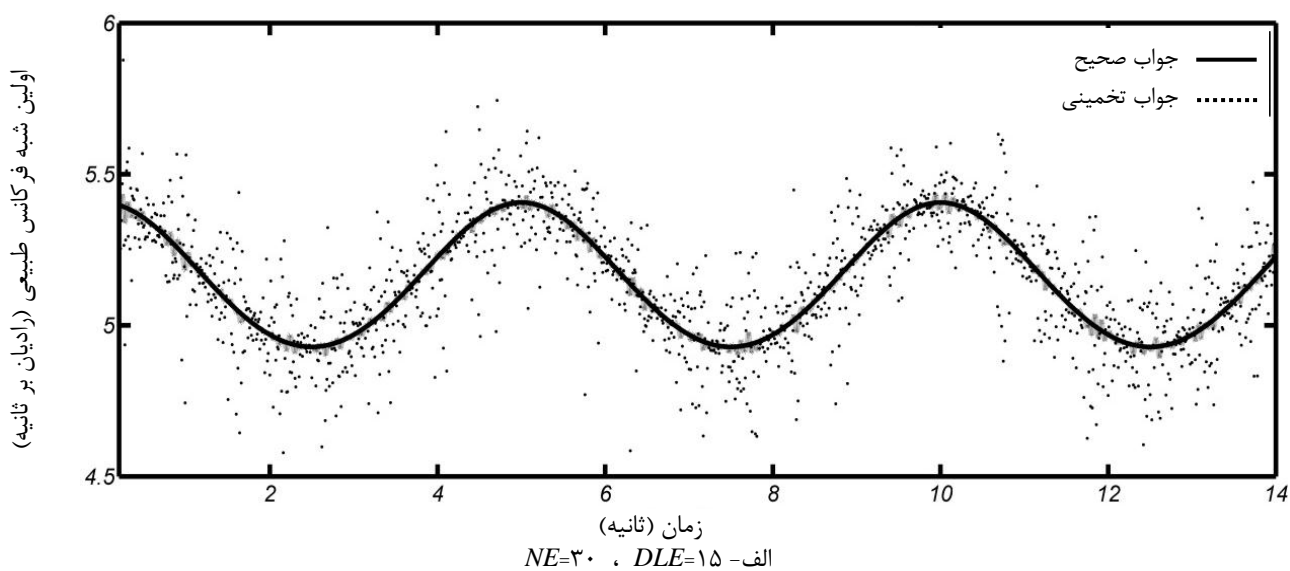


شکل ۶ فرکانس طبیعی اول تیر با جرم متحرک با تغییر تعداد داده‌های هر آزمایش برای فرکانس داده‌برداری ۱۰۰ Hz

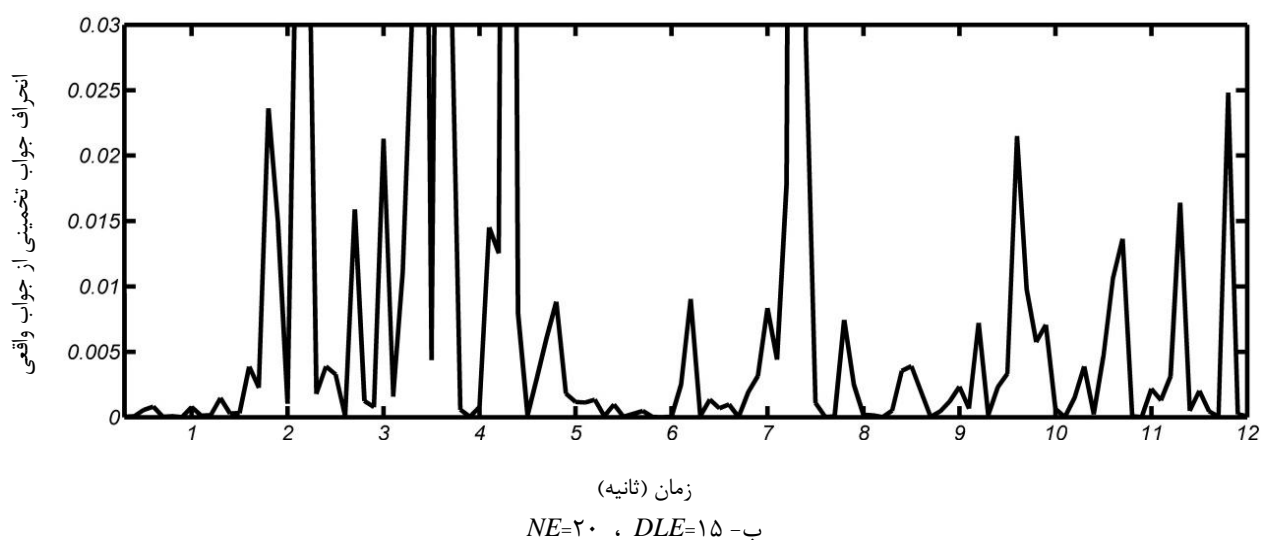
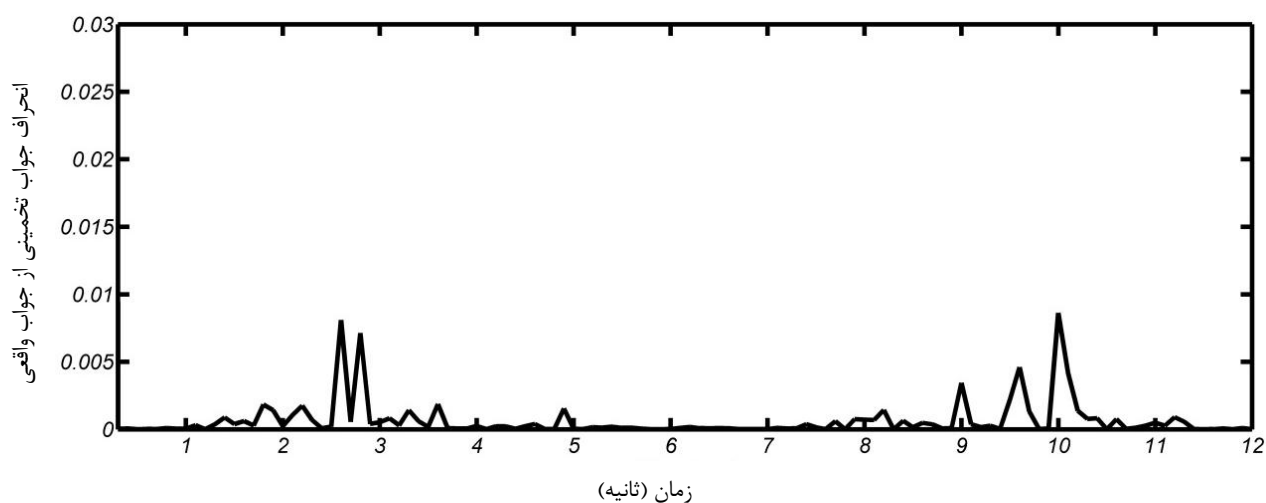




شکل ۷ مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با تغییر تعداد داده‌های هر آزمایش، برای فرکانس داده‌برداری ۱۰۰Hz



شکل ۸ فرکانس طبیعی اول تیر با جرم متحرک با تغییر تعداد آزمایش‌ها برای فرکانس داده‌برداری ۱۰۰Hz



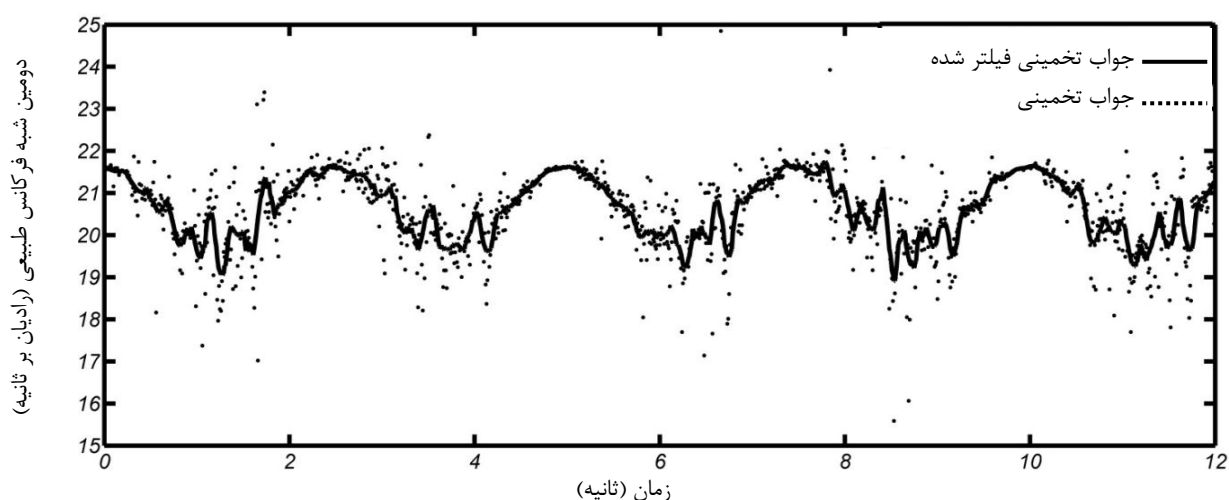
شکل ۹ مقدار انحراف جواب تخمین زده شده از جواب واقعی با تغییر تعداد آزمایش‌ها

نویز و انحراف‌های موجود در فرآیند تخمین، از یک فیلتر هموارساز<sup>۱</sup> ساویزکی-گولای<sup>۲</sup> استفاده شده است که این فیلتر از دسته فیلترهای FIR<sup>۳</sup> بوده و برای حذف پیک‌های ناخواسته و ملایم کردن سیگنال‌های با رنج فرکانسی بالا استفاده می‌شود. در حالت کلی این فیلتر، در مقایسه با دیگر فیلترهای FIR، برای حذف نویز و پیک‌های ناخواسته یک سیگنال و عبور دادن یک پوش از داده‌های نویزی با استفاده از روش کمترین مربعات خطا، عملکردی بهینه دارد.

همان طور که مشاهده شد، برای داده‌برداری با فرکانس ۱۰۰ هرتز خطاها افزایش می‌یابد (شکل‌های ۶ و ۸). با توجه به این دو شکل، تنها در صورتی کاهش زمان داده‌برداری توجیه‌پذیر است که پوشش رنج فرکانسی بزرگ‌تری مدنظر است. در ادامه در شکل ۱۰ فرکانس دوم تیر نیز نشان داده شده است که به دلیل حجم بالای محاسبات و صرف وقت زیاد، از مقایسه پارامترهای حل برای فرکانس دوم خودداری شده است. همان طور که در شکل مشخص است، فرکانس هر ۲/۵ ثانیه تکرار می‌شود و این به دلیل نقطه گره وسط تیر در مود دوم است.

همان طور که در شکل ۱۰ مشخص است به منظور حذف

1. Smoothing Filter
2. Savitzky-Golay
3. Finite Impulse Response



شکل ۱۰ فرکانس دوم تیر تحت تأثیر جرم متحرک برای فرکانس داده برداری ۱۰۰ Hz

پارامترهای مودال کارایی لازم را نداشته و جواب‌های با کیفیتی ارائه نمی‌دهند. با توجه به این موضوع، گسترش روش‌های آنالیز مودال برای سیستم‌های خطی متغیر با زمان پریودیک از مهمترین اهداف این مقاله است. به دلیل فیزیک متفاوت سیستم‌های LTP با سیستم‌های LTI، برخی از مفاهیم معمول مودال برای این سیستم‌ها صدق نمی‌کند. برای نمونه می‌توان به تعامد مودها و تعداد فرکانس‌های طبیعی در هر مود اشاره کرد. در همین راستا و برای نیل به اهداف مدنظر، به منظور دستیابی به روشی جامع برای آنالیز مودال سیستم‌های LTP در حوزه زمان و همچنین تبیین تفاوت‌های مفاهیم این سیستم‌ها با سیستم‌های LTI، پس از معرفی ماتریس انتقال حالت برای سیستم‌های متغیر با زمان، نشان داده شد که مقادیر ویژه ماتریس انتقال حالت بیانگر پارامترهای مودال سیستم‌های دینامیکی می‌باشند. از آنجایی که برای سیستم‌های متغیر با زمان فرم مناسبی از ماتریس انتقال حالت در دسترس نیست، در این مقاله با استفاده از روش زیرفضا و قانون تشابه ماتریس‌ها، ماتریس انتقال حالت متشابه با ماتریس انتقال حالت اصلی سیستم محاسبه و با تجزیه این ماتریس شبه‌پارامترهای مودال سیستم به دست آمدند. همچنین نشان داده شد که از این پارامترهای مودال می‌توان برای توصیف رفتار دینامیکی سیستم‌های متغیر با زمان استفاده کرد. در قسمت انتهایی مقاله نیز روش معرفی شده در متن، برای یک تیر با جرم متحرک که سیستمی خطی و متغیر با زمان پریودیک می‌باشد، پیاده‌سازی و شبه فرکانس طبیعی اول و

در شکل‌های فوق شبه فرکانس‌های طبیعی میرایی اول و دوم سیستم محاسبه و با جواب اصلی سیستم مقایسه شده است. با توجه به اینکه سیستم پریودیک و دوره تناوب آن با نسبت طول به سرعت جرم متحرک برابر است، بنابراین پارامترهای مودال سیستم بایستی با این دوره تناوب تکرار شوند. همان طور که مشخص است در شکل ۸، دوره تناوب اصلی تغییرات سیستم پنج ثانیه می‌باشد. همچنین برای به دست آوردن فرکانس طبیعی قسمت نامتغیر با زمان سیستم از یک فیلتر غیرخطی دیفیوژن<sup>۱</sup> استفاده شده است. این فیلتر با حذف همه پیک‌های سیگنال روند کلی سیگنال را حفظ کرده و فرکانس پایه سیستم را نشان می‌دهد. برای هر سیستم دینامیکی متغیر با زمان علاوه بر فرکانس اصلی (پایه)، فرکانس‌های دیگری نیز وجود دارند که از آنها به عنوان فرکانس‌های جانبی<sup>۲</sup> سیستم یاد می‌شود [۸]. البته فرکانس‌های طبیعی میرایی سیستم متغیر با زمان شامل همه فرکانس‌های اصلی و جانبی سیستم می‌باشند که در صورت برابری فرکانس تحریک سیستم با هر یک از این فرکانس‌ها تشدید اتفاق می‌افتد [۹، ۱۰].

## ۵- نتیجه‌گیری

برای سیستم‌های متغیر با زمان متناوب، به دلیل تغییر خواص فیزیکی سیستم، روش‌های سنتی آنالیز مودال برای استخراج

1. Non-linear Diffusion filter
2. Side Band Frequency

- [5] Liu.K., "Extension of Modal Analysis to linear Time Varying Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, 1999, pp. 149-167.
- [6] Liu.K.andDeng. L, "Identification of Pseudo-Natural Frequencies of an Axially Moving Cantilever Beam using a Subspace Method", *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 20, 2006, pp. 95-113.
- [7] Shokoohi. S. and Silverman. L, "Identification and Model Reduction of Time Varying Discrete Time Varying Systems", *Automatica*, Vol. 23, 1987, pp. 509-521.
- [8] Allen. M., Chauhan. S. and Hansen. M. H., "Advanced Operational Modal analysis for Linear Time Periodic System Identification", *IMAC XXIX*, 2011.
- [9] Allen. M., Sracic. M.,Chauhan. S. and Hansen. M. H, "Output-only Modal analysis for Linear Time Periodic Systems with Application to Wind Turbine Simulation Data", *IMAC XXVIII, Jacksonville, FL*, 2010.
- [10] M. Allen, "Frequency-Domain Identification of Linear Time-Periodic Systems Using LTI Techniques", *Journals of Floquet*, 2008, pp. 1-11.

دوم سیستم استخراج شد. با توجه به نتایج نشان داده شده در متن، به دلیل متغیر با زمان بودن سیستم، علاوه بر فرکانس اصلی سیستم فرکانس‌های جانبی دیگری نیز وجود دارد که در صورت برابری فرکانس تحریک سیستم با هر یک از این فرکانس‌ها در سیستم تشدید رخ می‌دهد.

## ۶- مراجع

- [1] Zadeh, L. A., "Time-Varying Networks", *Institute of Radio Engineers*, Vol. 49, 1961, pp. 1488-1503.
- [2] D'Anjelo, H., "Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis", *Boston*, 1970.
- [3] Basseville.M, "Detection and Diagnosis of Changes in the Eigen-Structure of Non-Stationary Multivariable Systems", *Automatica*, Vol. 23, No.4, 1987, pp. 479-489.
- [4] Liu.K., "Identification of Linear Time Varying Systems", *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 206, 1997, pp. 487-505.