



# ارزیابی فرض عدم وابستگی دمایی خواص ترموفیزیکی نانوسیال آب-اکسید آلومینیوم در انتقال حرارت جابجایی آزاد درون حفره

مسعود خراتی کوپایی<sup>۱</sup>، امیر امیدوار<sup>۱\*</sup>، ایمان جلو داری<sup>۲</sup>

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

\* صندوق پستی ۷۱۵۵۵-۳۱۳، omidvar@sutech.ac.ir

**چکیده-** در این تحقیق، صحت فرض خواص ترموفیزیکی مستقل از دما برای نانو سیال آب-اکسید آلومینیوم در انتقال حرارت جابجایی آزاد درون حفره بررسی شده است. محاسبات به روش عددی و بر اساس حجم محدود و الگوریتم سیمپل انجام شده است. نتیجه‌های حاصل با برخی رابطه‌های موجود برای حفره مقایسه شده است. به منظور ارزیابی عملکرد حرارتی حفره، مقدار متوسط عدد ناسلت روی دیواره گرم در دو حالت، یکی خواص ترموفیزیکی مستقل از دما و در دمای میانگین حفره و دیگری خواص متغیر با دما، بررسی شده است. کسر حجمی ذرات جامد بین ۰ تا ۰/۰۶ و محدوده عدد رایلی بین  $10^5$  و  $5 \times 10^6$  بوده و نرخ انتقال گرما در دو حالت ذکر شده در اختلاف دماهای ۱ تا ۵۰ درجه سانتیگراد بررسی شده است. بر اساس نتیجه‌های در تمام کسر حجمی‌های در نظر گرفته شده و در اختلاف دمای کمتر از ۵ درجه سانتیگراد، میزان اختلاف در عدد ناسلت در حالتی که خواص مستقل از دما در نظر گرفته شده‌اند در مقایسه با حالتی که خواص تابعی از دما هستند، کمتر از ۱۰ درصد است. با افزایش اختلاف دما، اختلاف بین عدد ناسلت در دو حالت افزایش یافته و با افزایش کسر حجمی، این اختلاف بیشتر می‌شود. نتیجه‌ها همچنین نشان می‌دهد که درصد خطای محاسباتی ناشی از ثابت فرض کردن خواص ترموفیزیکی و محاسبه آنها در دمای میانگین حفره تنها به اختلاف دمای دیواره‌های سرد و گرم وابسته است؛ بدون توجه به این که دیوار سرد و گرم در چه دماهایی قرار دارند. دستاوردهای این تحقیق می‌تواند برای بهبود دقت نتیجه‌های مسأله‌های شبیه‌سازی عددی جریان نانوسیال در کاربردهای مختلف مورد استفاده قرار گیرد.

**کلیدواژگان:** انتقال حرارت، جابه جایی آزاد، نانو سیال، خواص وابسته به دما.

## Evaluation of temperature-independent thermophysical properties assumption of water based alumina nanofluid in natural convection within the enclosures

M. Kharati Koopaee<sup>1</sup>, A. Omidvar<sup>1\*</sup>, I. Jelodari<sup>2</sup>

1- Assist. Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran

2- MSc. Student, Mech. Eng., Shiraz Univ. of Tech., Shiraz, Iran

\* P.O.B. 71555-313 Shiraz, Iran. omidvar@sutech.ac.ir

**Abstract-** In this research, validity of temperature-independent thermophysical properties assumption of water-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nanofluid in natural convection problems within the enclosures is investigated. The numerical results are obtained utilizing an in-house finite volume code based on the SIMPLE algorithm. In order to do the validation the numerical results and those of existing correlations are compared. In order to evaluate the thermal performance of the enclosure, the average Nusselt number on the hot side wall in both temperature-independent and dependent cases is compared. In this study, the nano-size solid volume fraction ranges from  $\phi=0$  to  $\phi=0.06$  and Rayleigh number varies from  $10^5$  to  $5 \times 10^6$  and rate of heat transfer is assessed in both cases in the temperature differences of 1 to 50° C. Results show that, in the all considered solid volume fractions, the difference in the Nusselt number in the case of temperature-independent properties is less than 10 percent in comparison with the case in which the properties are temperature-dependent when temperature difference is less than 5 °C. As the temperature increases, the difference between Nusselt number in both cases increases and the effect of increase in solid volume fraction is to increase this difference. Results also show that the difference between these two cases is dependent solely on temperature differences between the hot and cold walls regardless of the temperature they have. Results of this research are useful for improving the nanofluid numerical simulation.

**Keywords:** Heat Transfer, Free Convection, Nanofluid, Temperature-Dependent Properties.

## ۱- مقدمه

با توجه به نیاز روز افزون به خنک‌کاری سیستم‌هایی که تلفات حرارتی بالایی دارند، دانشمندان و محققین به سمت دستیابی به سیال‌هایی با خواص انتقال حرارتی بالاتر ترغیب شده‌اند. یکی از ایده‌های مطرح شده، اضافه کردن ذراتی با خواص انتقال حرارتی بالاتر به سیال پایه است. جنس این ذرات بنا به نوع کاربرد آنها می‌تواند فلز، نافلز و یا اکسید فلزی باشد. این ذرات با داشتن ضریب هدایت حرارتی بالاتر نسبت به سیال پایه، قابلیت بهبود هدایت حرارتی کل را دارا هستند.

در ابتدا این ذرات با ابعاد میلی و میکرو مورد استفاده قرار گرفت. ذراتی با این ابعاد نه تنها خاصیت انتقال حرارتی را بهبود نمی‌بخشیدند بلکه باعث ایجاد رسوب و خوردگی در لوله‌ها و اتصالات نیز می‌شدند. تا اینکه برای اولین بار چویی [۱] توانست به ساخت ذراتی با اندازه نانو که نسبت به ذرات ساخته شده قبلی دارای خواص انتقال حرارتی بالاتر و پایداری بیشتری بود، دست یابد. با این کشف، آزمایشات زیادی جهت محاسبه خواص هدایت حرارتی سیال ایجاد شده نسبت به سیال پایه صورت گرفت. به عنوان مثال، وانگ و همکاران [۲] افزایش ۱۲ درصدی ضریب هدایت حرارتی را برای غلظت ۳٪ اکسید آلومینیم در آب مشاهده کردند. پس از آنایستمنو، همکارانش [۴،۳] توانستند طی آزمایشی بهبود ۶۰ درصدی ضریب هدایت حرارتی سیال ایجاد شده نسبت به سیال پایه برای غلظت ۵٪ ذرات اکسید مس در آب و افزایش ۴۰ درصدی ضریب هدایت حرارتی برای غلظت ۳/۰٪ مس در اتیلن گلیکول را بدست آورند. همچنین لیو و همکاران [۵] افزایش ۱۲/۴ درصدی ضریب هدایت حرارتی را برای غلظت ۱٪ نوعی سرامیک در آب مشاهده کردند.

در ابتدا جهت محاسبه ضریب هدایت حرارتی، از نمونه‌های کلاسیک که قبل از ساخت ذرات با اندازه نانو برای ترکیب سیال و جامد ارائه شده بودند، استفاده می‌شد. این نمونه‌ها برپایه ضریب شکل، غلظت ذرات و مقدار سیال استوار بودند. ماکسول [۶] اولین فردی بود که رابطه‌ای جهت محاسبه خواص هدایت حرارتی مخلوط جامد - مایع پیشنهاد داد. وی در نمونه پیشنهادی خود ذرات جامد را به صورت کروی فرض کرد. همیلتن و کروزر [۷] رابطه‌ای مبنی بر ضریب شکل و میزان کروی بودن ذرات ارائه کردند. آنها دریافتند که میزان هدایت حرارتی رابطه‌ای عکس با میزان کروی بودن دارد.

واسپ [۸] با در نظر گرفتن نمونه همیلتن و کروزر، رابطه ساده‌تری را جهت محاسبه ضریب هدایت حرارتی ارائه داد. او فرض کرد که عمده ذرات پخش شده در سیال به صورت کروی هستند. وی نشان داد که با محاسبه میزان تراکم حجمی ذرات جامد در مایع می‌توان ضریب هدایت حرارت کل را تخمین زد.

نمونه‌های اشاره شده در بالا صرفاً برای حالتی بوده است که ذرات در حالت سکون باشند و در نمونه‌های ذکر شده تأثیر برخورد اتفاقی ذرات در سیال در نظر گرفته نشده است. بعد از کشف نانوسیال رابطه‌های زیادی بر مبنای حرکت براونی، دما، قطر ذرات و غیره شکل گرفت که به طور عمده از تصحیح نمونه‌های کلاسیک بوده است. امیری و وفایی [۹]، ژوان و همکاران [۱۰] و کو و کلینستورر [۱۱] از جمله کسانی بودند که در ارائه رابطه‌های خود اثر حرکت ذرات را لحاظ کردند. آنها با در نظر گرفتن حرکت براونی، چگالی و ظرفیت حرارتی نانو ذرات به ترتیب به تصحیح رابطه ارائه شده توسط همیلتن-کروزر، واسپ و ماکسول پرداختند. از عوامل مؤثر دیگر در محاسبه ضریب هدایت حرارتی، می‌توان به سرعت ذرات و برخورد میان ذرات با سیال پایه اشاره کرد که کومار و همکاران [۱۲] در رابطه پیشنهادی خود این پدیده را در نظر گرفتند. یو و چویی [۱۳] با این فرض که یک لایه بسیار نازک سیال حول نانو ذرات وجود دارد و این لایه فیزیکی خواصی بین جامد و مایع را داراست، رابطه‌ای جهت محاسبه ضریب هدایت حرارتی ارائه دادند. جانگ و چویی [۱۴] نیز با در نظر گرفتن تأثیر عدد رینولدز و پرانتل رابطه‌ای جهت محاسبه این ضریب ارائه کردند.

یکی دیگر از خواص مربوط به نانو سیال، لزجت است. با توجه به ماهیت سوسپانسیونی نانو سیال، محاسبه این ضریب از اهمیت خاصی برخوردار است. از اولین اشخاصی که رابطه‌ای برای محاسبه لزجت مایعی حاوی ذرات جامد در ابعاد میلیمتری و میکرومتری ارائه کرد، انیشتین بود. رابطه ارائه شده توسط وی مبتنی بر نادیده گرفتن تأثیر برهم کنش‌های ذره-ذره و تنها شامل ترم غلظت است. بعد از آن واند [۱۵]، مونی [۱۶] و کریگر و همکاران [۱۷] رابطه‌های کامل‌تری را جهت محاسبه ضریب لزجت ارائه کردند. بعد از کشف نانو سیال، برخی محققان از طریق آزمایشات مختلفی مقدار این ضریب را برای نانو سیال‌ها مشخص کردند. در این

آزمایش‌ها تأثیر غلظت نانو ذرات [۱۹، ۱۸] و در برخی دیگر علاوه بر اثر غلظت، تأثیر دما را نیز لحاظ کردند [۲۱، ۲۰].

گرچه نمونه‌های مزبور می‌توانستند تا حدی مقدار ضریب هدایت حرارتی و لزجت نانوسیال را پیش‌بینی کنند اما هر کدام، بسته به شرایط، دارای نقاط ضعف و یا قوت بودند. در نهایت کورسیونه [۲۲] توانست از طریق برازش منحنی روی چندین کار آزمایشگاهی مختلف، رابطه‌ای را جهت محاسبه این دو ضریب ارائه کند که از آن می‌توان به عنوان یکی از بهترین رابطه‌های ارائه شده نام برد [۲۳].

تاکنون مقالات زیادی درباره انتقال حرارت درون حفره شامل نانو سیال به چاپ رسیده است. سانترا و همکاران [۲۴] انتقال حرارت درون محفظه‌ای مربع شکل حاوی آب و نانو ذرات مس را به صورت عددی بررسی کردند. آنها در حل عددی خود نانو سیال را غیرنیوتنی در نظر گرفتند. آنها دریافتند که افزایش غلظت نانو ذرات در هر عدد رایلی، کاهش مقدار انتقال حرارت را به همراه دارد، به طوری که عدد ناسلت برای غلظت ۵٪ نانو ذرات و عدد رایلی  $10^4$ ،  $32/8$ ٪ و در عدد رایلی  $10^7$ ،  $38/3$ ٪ کاهش می‌یابد. اوزتاپ و ابونادال [۲۵] در یک حل عددی محفظه‌ای دو بعدی را بررسی کردند که دیواره‌های بالا و پایین آن عایق و دیواره سمت راست در دمای سرد و قسمت وسط دیواره سمت چپ توسط منبع تولید کننده حرارت، به عنوان سطح گرم در نظر گرفته شده بود. آنها دریافتند که افزایش در طول منبع تولید حرارت و عدد رایلی هنگامی که دیگر متغیرهای جریان مقداری ثابت هستند، افزایش در میزان انتقال حرارت را به همراه دارد. امین الساداتی و قاسمی [۲۶] جابه‌جایی آزاد درون محفظه‌ای که یک منبع حرارتی شار ثابت در سطح پایین و بقیه سطح‌ها در دمای سرد بودند را مورد مطالعه قرار دادند. آنها نشان دادند افزایش عدد رایلی افزایش در مقدار انتقال حرارت جابه‌جایی را به همراه دارد که نتیجه آن کاهش دمای منبع است و افزایش غلظت نانو ذرات باعث کاهش دما در سطح منبع حرارتی شده (به ویژه هنگامی که عدد رایلی مقدار کمی داشته باشد) و در این حالت، مکانیزم غالب انتقال حرارت از نوع هدایت است. محمودی و همکاران [۲۷] انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد درون هندسه‌ای مربعی جهت خنک‌کاری یک منبع حرارتی شار ثابت که به طور افقی به دیواره سمت چپ چسبیده بود را مطالعه کردند. محفظه مربعی حاوی آب و نانو ذرات مس بوده

است و دیواره سمت راست در دمای سرد و دیگر دیواره‌ها عایق فرض شده‌اند. آنها نشان دادند که در یک عدد رایلی ثابت و با وجود یک منبع حرارتی با هندسه‌ای مشخص، عدد ناسلت به طور خطی با افزایش غلظت نانو ذرات افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش غلظت نانو ذرات، دمای سطح منبع حرارتی و دمای متوسط سیال کاهش می‌یابد.

در تمامی تحقیقات اشاره شده در بالا، خواص سیال ثابت و در دمای میانگین حفره محاسبه شده است. اما در برخی از مطالعات که تعداد آنها محدود است، خواص نانو سیال تابعی از دما در نظر گرفته شده است [۲۸-۳۰]. در این مطالعات نیز تأثیر متغیرهای مختلف بر انتقال حرارت جابجایی آزاد درون حفره مورد بررسی قرار گرفته است.

در تحقیقات ذکر شده در بالا و به خصوص در مواردی که جهت محاسبه انتقال گرما درون حفره نیاز به شبیه‌سازی عددی است (مثلاً مسأله‌های هیدرودینامیک مغناطیسی که سیال عامل نانو سیال است) یکی از مهم‌ترین پرسش‌هایی که در مسأله انتقال حرارت درون حفره حاوی نانو سیال مطرح است این است که در چه اختلاف دماهایی می‌توان خواص سیال را دمای میانگین حفره در معادله حاکم بکار برد. جهت روشن شدن این مطلب، این مقاله انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد درون حفره در دو حالت (خواص ثابت در دمای میانگین حفره و یا متغیر) و در غیاب عوامل خارجی همچون میدان مغناطیسی را بررسی و میزان اختلاف ایجاد شده در میزان انتقال حرارت در این دو حالت در اختلاف دماهای متفاوت را محاسبه کرده است.

در این تحقیق همچنین تأثیر دمای متوسط در هر اختلاف دما بر انتقال حرارت مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین ترتیب مشخص می‌شود در چه اختلاف دماهایی، فرض ثابت بودن خواص سیال در دمای میانگین سطح‌ها قابل قبول است. گرچه این بررسی شامل انتقال حرارت آزاد درون حفره فاقد عوامل خارجی است، اما نتیجه‌های بدست آمده در خصوص روند افزایش و یا کاهش درصد خطا بین دو حالت در نظر گرفته شده به مسأله‌های دیگر که در آنها نیاز به حل عددی است قابل تعمیم است.

## ۲- فرمول‌بندی مسأله

شکل ۱ تصویر مربوط به حفره مربعی شکل حاوی نانو سیال را

$$\mu_{bf} = (430082.55 - 5016.6125T + 22.089007T^2 - 0.043418263T^3 + 3.2103245 \times 10^{-5}T^4) \times 10^{-7} \quad (4)$$

$$\text{Pr}_{bf} = 3536.454 - 41.25313T + 0.18148139T^2 - 0.00035621085T^3 + 2.6292272 \times 10^{-7}T^4 \quad (5)$$

از آنجا که تغییرات خواص ترموفیزیکی نانو ذرات اکسید آلومینیم در محدوده دمایی در نظر گرفته شده ناچیز است، فرض شده است که خواص این نانو ذرات مستقل از تغییرات دمایی است.

در جدول ۱ خواص نانو ذرات اکسید آلومینیوم نشان داده شده است. در این مطالعه، نانو ذرات کروی در نظر گرفته شده‌اند و قطر نانو ذرات ۳۶ نانومتر است.

معادلات مورد استفاده جهت حل عددی معادلات پیوستگی، مومنتم و انرژی هستند (معادلات ۶-۹) که به شرح زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\rho_{nf} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{nf} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$\rho_{nf} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{nf} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\rho\beta)_{nf} g(T - T_c) \quad (8)$$

$$(\rho c_p)_{nf} \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{nf} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_{nf} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (9)$$

برای محاسبه دانسیته و حاصل ضرب دانسیته در ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی، روش‌های کلاسیک استفاده شده است که معادلات (۱۰-۱۲) را شامل می‌شود.

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_{bf} + \phi\rho_s \quad (10)$$

$$(\rho c_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho c_p)_{bf} + \phi(\rho c_p)_s \quad (11)$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta)_{bf} + \phi(\rho\beta)_s \quad (12)$$

جدول ۱ خواص نانو ذرات اکسید آلومینیوم در دمای ۲۹۵ کلوین

| $\rho$<br>(kg/m <sup>3</sup> ) | $C_p$<br>(J/kg.K) | $k$<br>(W/mK) | $\beta \times 10^{-5}$<br>(1/K) |
|--------------------------------|-------------------|---------------|---------------------------------|
| ۳۹۷۰                           | ۷۶۵               | ۴۰            | ۰/۸۵                            |

در این معادلات  $\phi$  غلظت بوده و  $\rho_{nf}$ ،  $C_{pnf}$  و  $\beta_{nf}$  به ترتیب

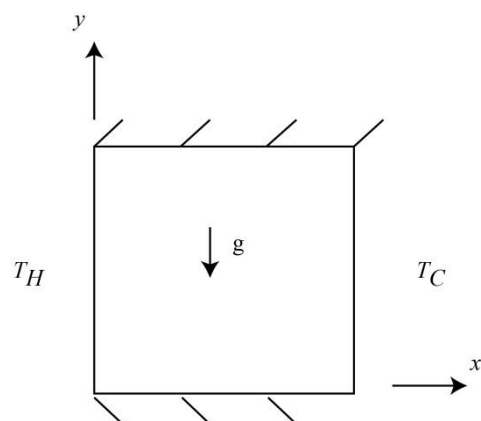
نشان می‌دهد. سیال تشکیل دهنده نانوسیال، آب و نانو ذرات موجود در آن اکسید آلومینیم هستند. دو ضلع عمودی این حفره دمایی ثابتی دارند. دمایی ضلع سمت چپ  $T_H$  (سطح گرم) و سمت راست  $T_C$  (سطح سرد) است. دو دیواره بالا و پایین عایق حرارتی در نظر گرفته شده‌اند. در این تحقیق، طول اضلاع حفره  $L = 0.2m$  در نظر گرفته شده است و فرض شده است که نانو ذرات اکسید آلومینیم و آب در تعادل گرمایی هستند. همچنین از گرادیان دما و سرعت بین ذرات و سیال پایه صرف نظر شده است. سیال، نیوتنی، تک فاز و غیر قابل تراکم فرض شده است و جریان پایا، دو بعدی و آرام در نظر گرفته شده است. در مطالعه حاضر از اثرات تابش نیز صرف نظر شده است.

در حالتی که خواص ترموفیزیکی نانو سیال تابعی از دما در نظر گرفته شوند، خواص سیال پایه (آب) به صورت تابعی از دما از طریق معادلات (۵-۱) محاسبه می‌شوند. این معادلات از طریق برازش منحنی روی خواص ترموفیزیکی سیال پایه در بازه دمایی ۲۸۰K تا ۳۷۵K با بهترین تطابق ( $R^2 = 0.99$ ) حاصل شده است.

$$\rho_{bf} = (9.56362 - 0.10525404T + 0.00048391612T^2 - 9.8924124 \times 10^{-7}T^3 + 7.620948 \times 10^{-10}T^4) \times 10^{-6} \quad (1)$$

$$k_{bf} = (-8088.9444 + 105.04406T - 0.49073685T^2 + 0.00110433812T^3 - 8.4147888 \times 10^{-7}T^4) \times 10^{-4} \quad (2)$$

$$\beta_{bf} = (-15263.376 + 72.185276T + 0.1345528T^2 - 0.001106512T^3 + 1.4382875 \times 10^{-6}T^4) \times 10^{-7} \quad (3)$$



شکل ۱ نمایی از شکل هندسی مسأله همراه با شرایط مرزی آن

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( k_{nf} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \Bigg]$$

که در آن  $Pr, Ra, \theta, P, U, V, Y, X$  و به صورت زیر است:

$$U = \frac{uL}{a_{bf_0}}, V = \frac{vL}{a_{bf_0}}, P = \frac{pL}{\rho_{nf} a_{bf_0}^2}$$

$$\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}, X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}$$

$$Ra = \frac{g \beta_{bf_0} (T_H - T_C) L^3}{v_{bf_0} a_{bf_0}}, Pr = \frac{v_{bf_0}}{a_{bf_0}}$$

لازم به ذکر است که با توجه به محدوده اختلاف دمایی در نظر گرفته شده، محدوده عدد رابلی بین  $10^5$  تا  $10^6$  محاسبه می‌شود.

شرایط مرزی حاکم بر مسأله با توجه به معادلات بی‌بعد شده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = V = 0, \theta = 1 \quad \text{(۲۰) دیواره سمت چپ}$$

$$U = V = 0, \theta = 0 \quad \text{(۲۱) دیواره سمت راست}$$

$$U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{(۲۲) دیواره‌های بالا و پایین}$$

عدد ناسلت موضعی روی دیواره گرم از رابطه (۲۳) محاسبه شده است.

$$Nu(Y) = -\frac{k_{nf}}{k_f} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} \quad \text{(۲۳)}$$

عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم از طریق معادله (۲۴) محاسبه می‌شود.

$$Nu_m = \int_0^1 Nu(Y) dY \quad \text{(۲۴)}$$

رابطه (۲۵) جهت برآورد خطا بین حالتی که خواص ترموفیزیکی نانو سیال ثابت (در دمای میانگین حفره) است با حالتی که خواص تابعی از دما هستند، استفاده می‌شود.

$$Error = \left| \frac{Nu_{mT.D} - Nu_{mT.I.D}}{Nu_{mT.D}} \right| \quad \text{(۲۵)}$$

### ۳- روش عددی و اعتبار سنجی

معادلات بی‌بعد با در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوط به آن با استفاده از روش حجم محدود و با استفاده از الگوریتم سیمپل با توجه به برنامه کامپیوتری تهیه شده به زبان فرترن به صورت عددی حل شده است. عبارت جابجایی از روش تقریب بالا دست، گسسته‌سازی شده است.

چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه و ضریب انبساط حرارتی نانو سیال هستند.

برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی و ضریب لزجت از نمونه‌های ارائه شده توسط کورسیونه [۲۲] استفاده شده است. بر طبق این نمونه، ضریب هدایت حرارتی نانو سیال به ضریب هدایت حرارتی سیال پایه عبارت است از:

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = 1 + 4.4 Re_p^{0.4} Pr^{0.66} \left( \frac{T}{T_{fr}} \right)^{10} \left( \frac{k_s}{k_{bf}} \right)^{0.03} \varphi^{0.66} \quad \text{(۱۳)}$$

که در آن  $T$  دمای نانوسیال و  $T_{fr}$  دمای نقطه انجماد سیال پایه است. در این رابطه،  $Re_p$  عدد رینولدز ذرات نانو است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Re_p = \frac{2 \rho_{bf} k_b T}{\pi \mu_{bf}^2 d_p} \quad \text{(۱۴)}$$

به طوری که  $k_b$  ضریب ثابت بولتزمن است و مقدار آن برابر است با:

$$k_b = 1.38 \times 10^{-23} (J/K)$$

طبق نمونه ارائه شده توسط کورسیونه، ضریب لزجت نانو سیال به ضریب لزجت سیال پایه از رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}} = \frac{1}{1 - 34.87 \left( \frac{d_p}{d_{bf}} \right)^{-0.3} \varphi^{1.03}} \quad \text{(۱۵)}$$

که در آن  $d_p$  قطر نانو ذرات و  $d_f$  قطر معادل یک مولکول سیال پایه می‌باشد و عبارت است از [۲۲]:

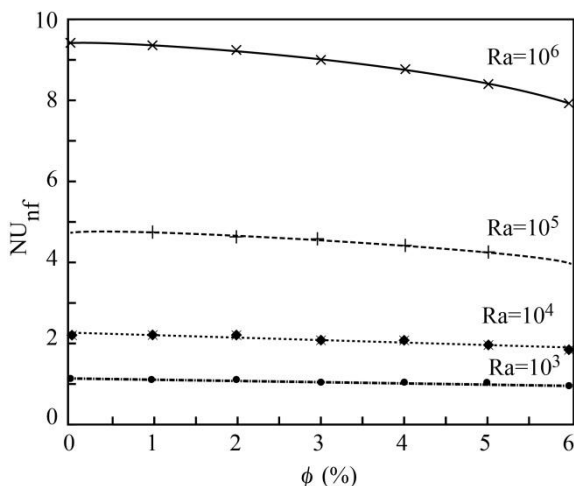
$$d_f = 0.1 \left( \frac{6M}{N \pi \rho_{bf_0}} \right)^{1/3} \quad \text{(۱۶)}$$

که  $M$  وزن مولکولی سیال پایه و  $N$  عدد آووگادرو است. معادلات انرژی و مومنتم در دمای مرجع (۲۹۵K) به صورت زیر بی بعد شده‌اند:

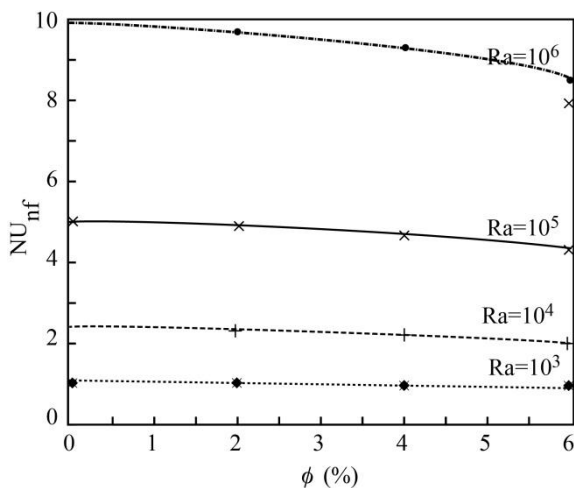
$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{a_{bf_0} \rho_{nf}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{nf} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{nf} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \quad \text{(۱۷)}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{a_{bf_0} \rho_{nf}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{nf} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \mu_{nf} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{(\rho \beta)_{nf}}{\rho_{nf} \beta_{bf_0}} Ra Pr \theta \quad \text{(۱۸)}$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{a_{nf}}{a_{bf_0} k_{nf}} \frac{1}{k_{nf}} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( k_{nf} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \right] \quad \text{(۱۹)}$$



شکل ۳ مقایسه نتیجه‌های حاصل از حل عددی با مرجع [۳۱] (محاسبه خواص در دمای میانگین)



شکل ۴ مقایسه نتیجه‌های حاصل از حل عددی با مرجع [۳۱] (خواص تابعی از دما در نظر گرفته شده)

#### ۴- نتایج

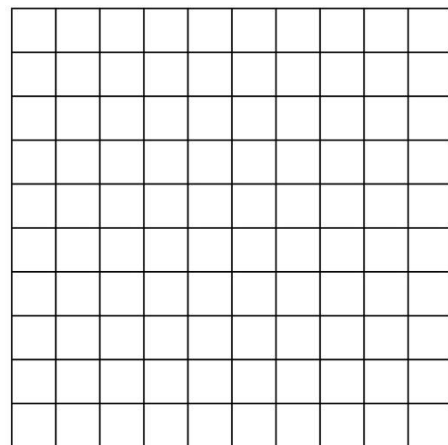
در شکل‌های ۵ تا ۸، میزان درصد خطا بین عدد ناسلت در دو حالت (اول حالتی که خواص ترموفیزیکی نانو سیال مستقل از دما و در دمای میانگین حفره محاسبه شوند و دوم حالتی که خواص تابعی از دما در نظر گرفته شوند)، نشان داده شده است. میزان درصد خطا در کسر حجم‌های ۰ تا ۶ درصد و اختلاف دمای ۱ تا ۵۰ درجه سانتیگراد رسم شده است. از آنجایی که این اختلاف دماها می‌تواند در هر متوسط دمایی اتفاق بیفتد، برای بررسی تأثیر متوسط دمای سطح‌ها بر میزان خطا، محاسبه‌ها در دماهای متوسط ۳۰۸، ۳۱۳، ۳۱۸، و ۳۲۳ درجه کلون انجام شد.

شبکه‌های محاسباتی در نظر گرفته شده، دکارتی یکنواخت هستند. شکل ۲ نمایی از توپولوژی شبکه مورد استفاده با تعداد سلول‌های محاسباتی ۱۰×۱۰ را به تصویر کشیده است.

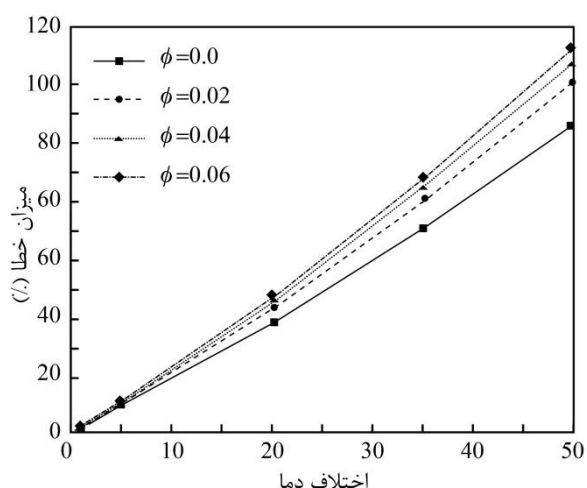
جهت بررسی عدم وابستگی حل به شبکه، مقدار عدد ناسلت متوسط محاسبه شده در هر شبکه بررسی می‌شود. بدین منظور سه شبکه ۱۰۰×۱۰۰، ۱۵۰×۱۵۰ و ۲۰۰×۲۰۰ انتخاب شده است که درصد خطای عدد ناسلت بین دو شبکه انتخاب شده ۱۵۰×۱۵۰ و ۲۰۰×۲۰۰ کمتر از یک درصد است. به همین دلیل شبکه ۱۵۰×۱۵۰ جهت حل معادلات انتخاب می‌شود.

شرط هم‌گرایی، مجموع باقی‌مانده تمامی نقاط شبکه مربوط به معادله پیوستگی کمتر از  $10^{-6}$  لحاظ شده است. جهت اعتبار سنجی کد استفاده شده، با توجه به فرض تک فاز بودن نانو سیال، عدد ناسلت محاسبه شده متوسط برای انتقال گرما درون یک حفره مربع شکل در اعداد رایلی و کسر حجمی‌های متفاوتی در دو حالت، هنگامی که ویژگی‌ها تابعی از دما است و حالتی که ویژگی‌ها در دمای میانگین حفره محاسبه شده است، با رابطه قید شده در مرجع [۳۱] مقایسه شده است.

به منظور حذف کردن خطای موجود در رابطه مورد استفاده، مقدار عدد ناسلت در کسر حجمی صفر که از طریق برنامه‌های کامپیوتری و رابطه محاسبه می‌شوند، یکسان‌سازی شده‌اند. همان‌طور که در شکل‌های ۳ و ۴ دیده می‌شود نتیجه‌های تطابق خوبی با یکدیگر دارند.



شکل ۲ توپولوژی شبکه استفاده شده با ۱۰×۱۰ سلول محاسباتی

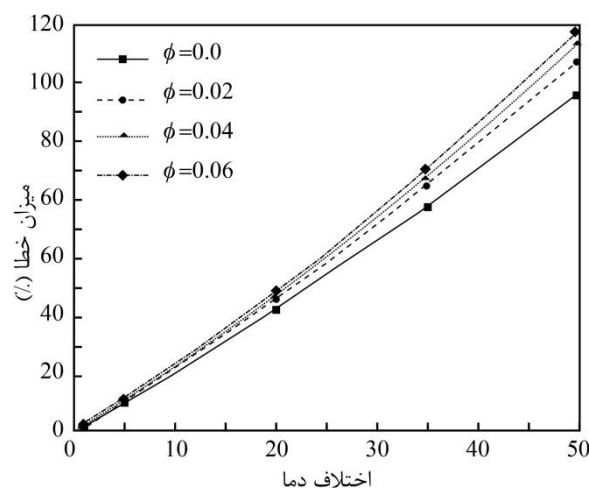


شکل ۸ درصد خطا بین دو حالت بر حسب اختلاف دما برای غلظت‌های متفاوت در دمای متوسط سطح‌ها ۳۲۳ K

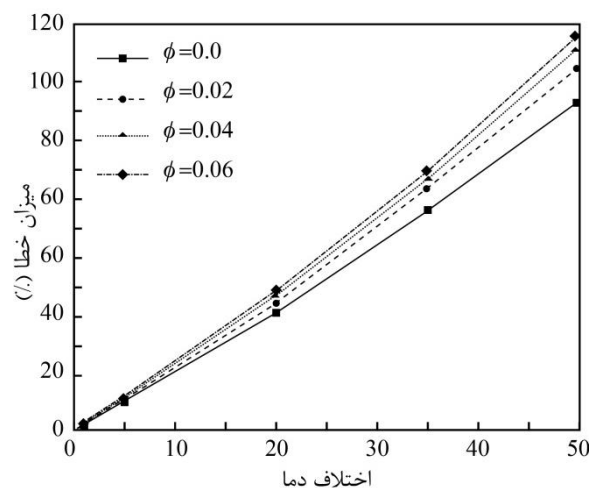
در هر دمای متوسطی، با افزایش دما میزان خطا در عدد ناسلت در حالتی که خواص در دمای میانگین حفره حساب شوند، با حالتی که خواص تابعی از دما در نظر گرفته شوند، افزایش می‌یابد. در اختلاف دمای زیر ۵ درجه سانتیگراد، حداکثر میزان خطا در عدد ناسلت در دو حالت زیر ۱۰ درصد است. به عبارت دیگر در مسأله جابجایی آزاد درون حفره در اختلاف دماهای زیر ۵ درجه سانتیگراد، می‌توان با تقریب نسبتاً مناسبی خواص ترموفیزیکی نانو سیال را مستقل از دما و در دمای میانگین حفره در نظر گرفت. در این شکل‌ها همچنین دیده می‌شود که در اختلاف دمای ثابت، با افزایش درصد کسر حجمی، میزان خطا بین این دو حالت افزایش می‌یابد به طوری که همیشه در تمام اختلاف دماهای مورد نظر، کم‌ترین خطا مربوط به حالتی است که درصد کسر حجمی صفر و بیشترین میزان خطا مربوط به درصد کسر حجمی ۶ است.

در شکل‌های ۵ الی ۸ همچنین مشاهده می‌شود که میزان خطا تنها به اختلاف دما ارتباط دارد و مستقل از این است که این اختلاف دماها، در چه دمای متوسطی رخ دهند.

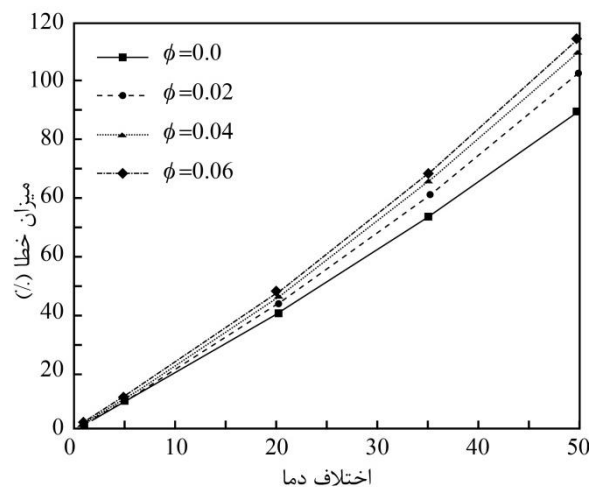
به منظور روشن شدن این مطلب، در شکل ۹ میزان خطا در عدد ناسلت بین این دو حالت در دماهای مختلف سطح‌ها رسم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، در هر درصد کسر حجمی از ذرات، مقدار درصد خطا در عدد ناسلت در این دو حالت تقریباً مستقل از دمای متوسط سطح‌ها سرد و گرم است.



شکل ۵ درصد خطا بین دو حالت، بر حسب اختلاف دماها برای غلظت‌های متفاوت در دمای متوسط سطح‌ها ۳۰۸ K

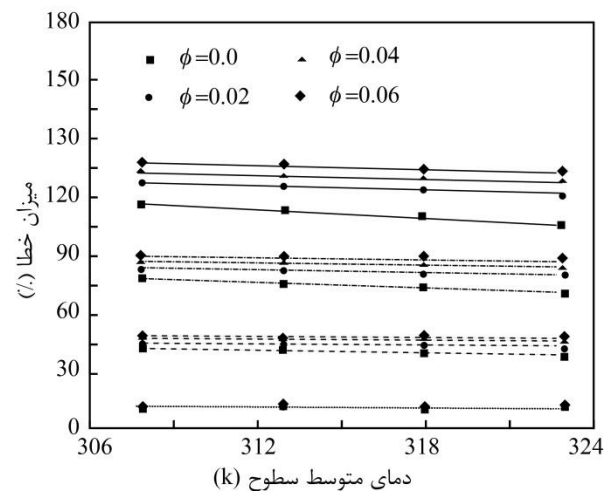


شکل ۶ درصد خطا بین دو حالت بر حسب اختلاف دما برای غلظت‌های متفاوت در دمای متوسط سطح‌ها ۳۱۳ K



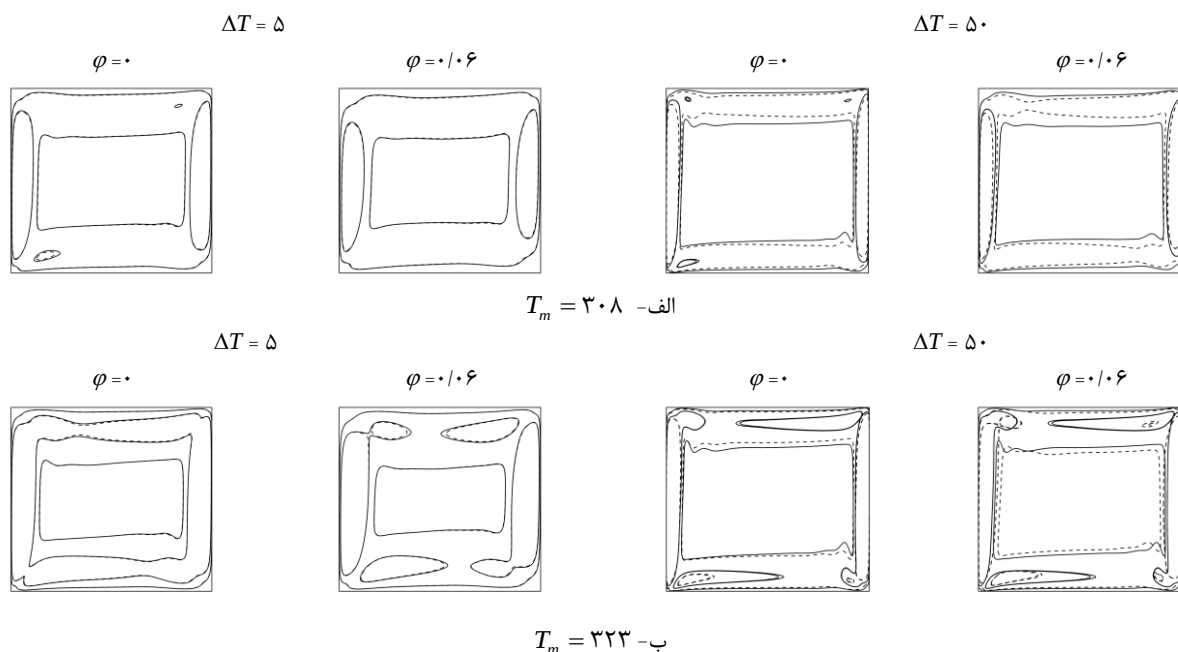
شکل ۷ درصد خطا بین دو حالت بر حسب اختلاف دما برای غلظت‌های متفاوت در دمای متوسط سطح‌ها ۳۱۸ K

۱۰ و ۱۱ رسم شده است. شکل ۱۰ نشان می‌دهد، زمانی که اختلاف دما ۵ درجه است میزان تفاوت در خطوط سرعت ثابت بین دو حالت یاد شده ناچیز است و مقدار غلظت نانو ذرات و دمای میانگین سطحها بر میدان سرعت تأثیر چندانی ندارد. با افزایش اختلاف دما به مقدار ۵۰ درجه، اختلاف بین دو حالت یاد شده بر میدان سرعت بسیار چشمگیر است به طوری که این اختلاف با افزایش غلظت نانو ذرات و افزایش دمای متوسط سطحها تشدید می‌شود. با بررسی شکل ۱۱ که میدان دما را نشان می‌دهد، مشخص می‌شود در اختلاف دمای ۵ درجه بین سطحها مقدار اختلاف در دو حالت در نزدیک دیواره ناچیز است. اما در نواحی دور از دیواره اختلاف بین دو حالت بیشتر دیده می‌شود. در اختلاف دمای ۵۰ درجه، خطای بین دو حالت در تمامی نواحی، اثرات چشمگیری بر میدان دما دارد و تأثیر مقدار غلظت نانو ذرات و دمای متوسط سطحها بر میدان دما کاملاً مشهود است. با توجه به فلسفه تک فاز بودن نانو سیال، انتظار می‌رود مقدار متوسط عدد ناسلت محاسبه شده روی دیوار گرم و سرد که از طریق برنامه کامپیوتری (در حالتی که خواص تابعی از دما هستند) محاسبه می‌شوند با مقدار محاسبه شده از طریق رابطه ارائه شده در مرجع [۳۱] تطابق مناسبی داشته باشد.

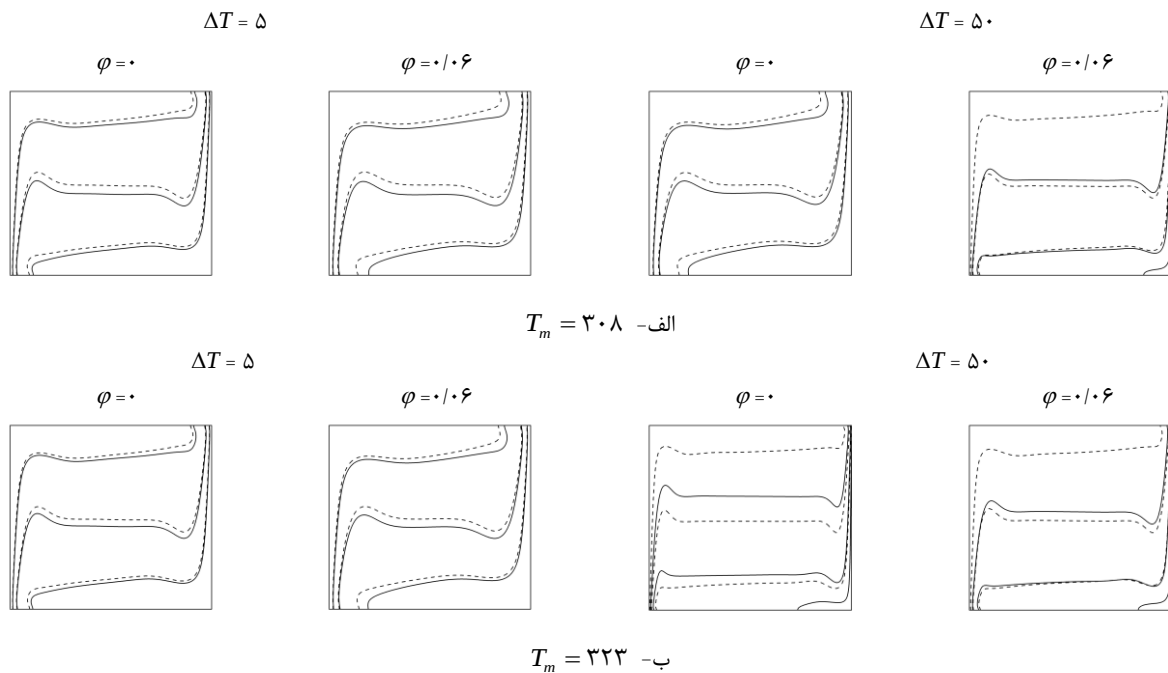


شکل ۹ درصد خطا بین دو روش بر حسب دمای متوسط سطحها در غلظت‌های متفاوت و اختلاف دمای مختلف

به عبارتی می‌توان نتیجه گرفت در اختلاف دمای زیر ۵ درجه سانتیگراد، خطای محاسبه در میزان انتقال گرما با در نظر گرفتن خواص مستقل از دما با حالتی که خواص تابعی از دما در نظر گرفته شوند، بدون توجه به اینکه سطحها سرد و گرم در چه دمایی هستند، زیر ۱۰ درصد است. جهت بررسی تأثیر خواص ترموفیزیکی میانگین و یا تابعی از دما بر شکل جریان و توزیع دما درون حفره، کانتور مقدار سرعت و دما در شکل‌های



شکل ۱۰ کانتور مقدار سرعت در دماهای متوسط، غلظت و اختلاف دماهای متفاوت. خواص تابع دما (خط پر)، خواص در دمای میانگین سطحها (خط چین)



شکل ۱۱ کانتور دما در دماهای متوسط، غلظت و اختلاف دماهای متفاوت. خواص تابع دما (خط پر)، خواص در دمای میانگین سطحها (خط چین)

جدول ۲ مقدار عدد ناسلت متوسط محاسبه شده از طریق برنامه کامپیوتری و رابطه ارائه شده در مرجع [۳۱]

| اختلاف دما<br>(سانتی گراد) | مقدار عدد ناسلت<br>متوسط محاسبه شده از<br>طریق برنامه کامپیوتری | مقدار عدد ناسلت<br>محاسبه شده<br>از طریق رابطه ارائه شده در<br>مرجع [۳۱] |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| ۵۰                         | ۱۶/۹۹                                                           | ۱۵/۴۸                                                                    |
| ۳۵                         | ۱۴/۲۳                                                           | ۱۳/۹۶                                                                    |
| ۲۰                         | ۱۰/۸۶                                                           | ۱۱/۸۷                                                                    |

نتیجه‌های حاصل از حل عددی در شرایط مورد نظر به شرح زیر بود:

- در اختلاف دماهای کم بین سطح‌های گرم و سرد، مقدار خطا در انتقال گرما بین حالتی که خواص نانوسیال ثابت و در دمای میانگین حفره است با حالتی که خواص تابعی از دما است کم بوده و غلظت نانو ذرات تأثیر ناچیزی در مقدار خطا بین دو حالت دارند و فرض خواص در دمای میانگین در اختلاف دمای زیر ۵ درجه سانتی‌گراد، با خطایی کمتر از ۱۰٪ همراه است.

- با افزایش اختلاف دما، میزان خطا بین دو حالت ذکر شده افزایش می‌یابد و این مقدار به بیش از ۹۰٪ نیز می‌رسد. همچنین میزان غلظت نانو ذرات تأثیر چشمگیری در میزان خطا بین دو

به این منظور برای غلظت ۰/۰۶ و در اختلاف دماهای متفاوت مقادیر متوسط عدد ناسلت که از طریق برنامه کامپیوتری محاسبه می‌شوند با مقدار محاسبه شده از طریق رابطه ارائه شده در مرجع مورد نظر در جدول ۲ نشان داده شده است. همان طور که انتظار می‌رود تطابق مناسبی برقرار است.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، به منظور روشن شدن روند افزایش و یا کاهش خطا در محاسبه انتقال گرما در دو حالت یکی خواص ثابت و در دمای میانگین حفره و دیگری متغیر با دما در مسأله‌هایی که در آنها نیاز به تحلیل عددی است (همانند مسأله‌های هیدرودینامیک مغناطیسی شامل نانو سیال)، تأثیر خواص نانو ذرات بر مقدار عدد ناسلت روی دیوار گرم درون حفره‌ای مربعی شکل حاوی آب- نانو ذرات اکسید آلومینیم در غیاب عوامل خارجی و تحت گرادین دماهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفت. در این مطالعه، همچنین اثر پارامترهای مختلف همانند غلظت نانو ذرات و میزان دمای متوسط سطح‌ها سرد و گرم روی میدان سرعت و دما و عدد ناسلت بررسی شد.

|                                                           |           |                              |
|-----------------------------------------------------------|-----------|------------------------------|
| حالت دارد، به طوری که در غلظت ۶٪ و اختلاف دمای ۵۰ درجه،   | $v, u$    | مؤلفه‌های سرعت در جهت $x, y$ |
| میزان اختلاف به بیش از ۱۱۰٪ افزایش می‌یابد.               | $U, V$    | مؤلفه‌های سرعت بدون بعد      |
| - به طور کلی متوسط دمای سطح‌ها تأثیری ناچیز بر            | $x, y$    | مختصات دکارتی                |
| مقدار خطا بین دو حالت یاد شده دارد. به عبارتی دیگر، میزان | $X, Y$    | مختصات بدون بعد              |
| خطا بین دو حالت، فقط به اختلاف دمای بین سطح‌ها سرد و      | $p$       | فشار سیال                    |
| گرم ارتباط دارند بدون توجه به اینکه سطح‌ها در چه دماهایی  | $P$       | فشار بدون بعد                |
| قرار دارند.                                               | $\beta$   | ضریب انبساط حرارتی           |
| - در اختلاف دماهای کم میزان خطا بین دو حالت یاد           | $\varphi$ | غلظت نانو ذرات               |
| شده بر میدان سرعت و دما ناچیز و تقریباً مستقل از غلظت     | $\mu$     | لزجت دینامیکی                |
| نانو ذرات است. با افزایش اختلاف دما، خطا بین دو حالت      | $\rho$    | چگالی                        |
| تأثیری کاملاً مشهود بر میدان سرعت و دما دارد و اثر مقدار  | $nf$      | نانو سیال                    |
| غلظت نیز چشمگیر است.                                      | $\nu$     | لزجت دینامیکی                |
| اگرچه نتیجه‌های این تحقیق در غیاب عوامل خارجی             | $\alpha$  | ضریب نفوذ حرارتی             |
| است، اما روند افزایش و یا کاهش درصد خطا با پارامترهای     | $bf$      | سیال پایه                    |
| مختلف در دو حالت، به موارد دیگر که در آنها نیاز به حل     | $fr$      | دمای انجماد                  |
| عددی است قابل تعمیم است.                                  | $s$       | نانو ذرات جامد               |
|                                                           | $bf_0$    | سیال پایه در دمای ۲۹۵ K      |
|                                                           | $T.D$     | وابسته به دما                |
|                                                           | $T.I.D$   | غیر وابسته به دما            |

## ۶- فهرست علائم

|          |                               |
|----------|-------------------------------|
| $c_p$    | ظرفیت حرارتی ویژه             |
| $d_f$    | قطر معادل یک مولکول سیال پایه |
| $d_p$    | قطر نانو ذرات                 |
| $g$      | گرانش                         |
| $L$      | طول مرجع حفره                 |
| $h$      | ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی   |
| $k$      | ضریب انتقال حرارت هدایت       |
| $k_b$    | ثابت بولتزمن                  |
| $M$      | وزن مولکولی سیال پایه         |
| $N$      | عدد آووگادرو                  |
| $Nu$     | عدد ناسلت                     |
| $Nu_m$   | عدد ناسلت متوسط               |
| $Ra$     | عدد رایلی                     |
| $Pr$     | عدد پرانتل                    |
| $T_H$    | دمای دیوار گرم                |
| $T_C$    | دمای دیوار سرد                |
| $T$      | دما                           |
| $\theta$ | دمای بدون بعد                 |

## ۷- مراجع

- [1] Choi S. U. S., "Enhancing Thermal Conductivity of Fluids with Nanoparticles in Developments and Applications of Non-Newtonian Flows", ASME, FED-Vol. 231/ MD-Vol. 66, 1995, pp. 99-103.
- [2] Wang X., Xu X., Choi S. U. S., "Thermal Conductivity of Nanoparticle-Fluid Mixture", *Journal of Thermo Physics and Heat Transfer*, Vol. 13, No. 4, 1999, pp. 474-480.
- [3] Eastman J. A., Choi U. S., Li S., Thompson L. J., Lee S., "Enhanced Thermal Conductivity through the Development of Nano Fluids", *Materials Research Society Symposium- Proceedings*, Vol. 457, 1997, pp. 3-11.
- [4] Eastman J. A., Choi S. U. S., Li S., Yu W., Thompson L. J., "Anomalously Increased Effective Thermal Conductivity of Ethylene Glycol-Based Nano-Fluids Containing Copper Nanoparticles", *Applied Physics Letter*, Vol. 78, No. 6, 2001, pp. 718-720.
- [5] Liu M. S., Ching-Cheng Lin M., Hung I. T., Wang C. C., "Enhancement of Thermal Conductivity with Carbon Nanotube for Nano Fluids", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, No. 9, 2005, pp. 1202-1210.

- Transfer*, Vol. 39, 2003, pp. 775-784.
- [21] Nguyen C. T., "Deranges Viscosity Data for  $Al_2O_3$ -Water Nano Fluid Hysteresis: is Heat Transfer Enhancement Using Nano Fluid Reliable?", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 47, 2008, pp. 103-111.
- [22] Corcione M., "Empirical Correlating Equations for Predicting the Effective Thermal Conductivity and Dynamic Viscosity of Nano Fluids", *Energy Conversion and Management*, Vol. 52, 2011, pp. 789-793.
- [23] Abouali O., Ahmadi G., "Compute Simulations of Natural Convection of Single Phase Nano Fluids in Simple Enclosure: a Critical Review", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 36, 2012, pp. 1-13.
- [24] Santra A.K., Sen S., Chakraborty N., "Study of Heat Transfer Augmentation in a Differentially Heated Square Cavity Using Copper-Water Nano Fluid", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 47, 2008, pp. 1113-1122.
- [25] Oztop H. F., Abu-Nada E., "Numerical Study of Natural Convection in Partially Heated Rectangular Enclosures Filled with Nano Fluids", *International Journal of Heat and Fluid flow*, Vol. 29, 2008, pp. 1326-1336.
- [26] Aminossadati S. M., Ghsemi B., "Natural Convection Cooling of a Localized Heat Source at the Bottom of Nano Fluid-Filled Enclosure", *European Journal of Mechanics B/Fluid*, Vol. 28, 2009, pp. 630-640.
- [27] Mahmoudi A. H., Shahi M., Honarbaksh Raouf A., Ghasemian A., "Numerical Study of Natural Convection Cooling of Horizontal Heat Source Mounted in a Square Cavity Filled with Nano Fluid", *International Communication in Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, 2010, pp. 1135-1141.
- [28] Mazrouei Sebdani S., Mahmoodi M., Hashemi S. M., "Effect of nano Fluid Variable Properties on Mixed Convection in a Square Cavity", *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, pp. 1-15.
- [29] Abu-Nada E., "Rayleigh-Benard Convection in Nano Fluid: Effect of Temperature Depend Properties", *International Journal of Thermal Science*, Vol. 50, 2011, pp. 1720-1730.
- [30] Haddad Z., Abu-Nada E., Oztop H.F., Mataoui A., "Natural Convection in Nano Fluids: Are the Thermophoresis and Brownian Motion Effects Significant in Nano Fluid Heat Transfer Enhancement?", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 57, 2012, pp. 152-162.
- [31] Incropera F. P., Dewitt D. P., Bergman T. L., Lavine A. S., *Fundamental Heat and Mass Transfer*, Six Ed., New Jersey, John Wily & Sons, 2007, pp. 561-564.
- [6] Maxwell J. C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Second Ed., Oxford, Clarendon Press, 1881, pp. 379-381.
- [7] Hamilton R. L., Crosser O. K., "Thermal Conductivity of Heterogeneous Two Components Systems", *I&EC Fundam*, Vol. 1, 1962, pp. 182-191.
- [8] Wasp E. J., Kenny J. P., Gandhi R. L., *Solid-Liquid Slurry Pipeline Transportation*, Bulk Material Handling, Germany, Trans Tech Publications, 1999.
- [9] Amiri A., Vafai K., "Analysis of Dispersion Effects and Non-Thermal Equilibrium, Non Darcian, Variable Porosity Incompressible Flow through Porous Media", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 37, 1994, pp. 939-954.
- [10] Xuan Y., Li Q., Hu W., "Aggregation Structure and Thermal Conductivity of Nano Fluids", *AIChE Journal*, Vol. 49, No. 4, 2003, pp. 1038-1043.
- [11] Koo J., Kleinstreuer C., "A New Thermal Conductivity Models for Nano Fluids", *Journal of Nano Particle Research*, Vol. 6, No. 6, 2004, pp. 577-588.
- [12] Kumar D. H., Patel H. E., Kumar V. R. R., Sundararajan T., Pradeep T., Das S.K., "Model for Heat Conduction in Nano Fluids", *Physic Review Letters*, Vol. 93, No. 14, 2004, pp. 144-301.
- [13] Yu W., Choi S. U. S., "The Role of Interfacial Layers in the Enhanced Thermal Conductivity of Nano Fluids: a Renovated Hamilton-Crosser Model", *Journal of Nano Particle Research*, Vol. 6, No. 4, 2004, pp. 355-361.
- [14] Jang S. P., Choi S. U. S., "Role of Brownian Motion in the Enhanced Thermal Conductivity of Nano Fluids", *Applied Physics Letters*, Vol. 84, 2004, pp. 4316-4318.
- [15] Vand V., "Viscosity of Solutions and Suspensions", *I. Theory. J. Phys. Chem*, Vol. 52, No. 2, 1948, pp. 277-299.
- [16] Mooney M., "The Viscosity of a Concentrated Suspension of Spherical Particles", *J. Colloid Sci*, Vol. 6, No. 2, 1951, pp. 162-170.
- [17] Krieger I. M., Dougherty T. J., "A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres", *Journal of Rheology*, Vol. 3, No. 1, 1959, pp. 137-152.
- [18] Brinkman H. C., "The Viscosity of Concentrated Suspensions and Solutions", *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 20, No. 4, 1952, pp. 571-581.
- [19] Williams W. C., "Experimental and Theoretical Investigation of Transport Phenomena in Nanoparticle Colloids (Nano Fluids)", Ph.D thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2006.
- [20] Putra N., Roetzel W., Das S. K., "Natural Convection of Nano Fluids", *Heat and Mass*