http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
آبان ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۸ ص ص ۹۳-۱۰۷

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۰/۱
تاریخ پذیرش ۹۲/۲/۱
ارائه در سایت ۹۲/٤/۳۰

# مقایسه انتقال حرارت در یک محفظه بسته دارای لایه متخلخل عمودی و افقی به روش شبکه بولتزمن

**محسن نظری[۱*]، محمدحسن کیهانی[۲]، آلاله انارکی حاجی باقری[۳]**

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱، mnazari@shahroodut.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه دارای لایه متخلخل میانی با استفاده از روش شبکه بولتزمن، بررسی می‌شود. روش شبکه بولتزمن به کار رفته براساس معادلات تعمیم یافته ناویر-استوکس با در نظر گرفتن تمام نیروهای وارد بر سیال و نیز نیروی درگ حاصل از ماتریس جامد می‌باشد. نتایج این تحقیق، شامل بررسی اثرات پارامترهای بی بعد حاکم بر مسأله از جمله عدد رایلی، عدد دارسی، ضریب تخلخل ماده متخلخل و نیز بررسی اثر موقعیت لایه متخلخل میانی در دو حالت عمودی و افقی بر جریان سیال و میزان انتقال حرارت در محفظه می‌باشد. اثرات تغییر عدد بی‌بعد دارسی و رایلی نیز به طور کامل مورد مطالعه قرار گرفته و عدد بدون بعد رایلی اصلاح شده در حالت وجود لایه متخلخل محلی معرفی می‌شود. با تغییر این عدد بی‌بعد، رژیم غالب انتقال حرارت در لایه متخلخل می‌تواند به صورت مکانیزم هدایتی تا جابجایی تغییر کند. همچنین با توجه به تغییرات عدد ناسلت متوسط مشاهده شد که میزان انتقال حرارت در محفظه در حالتی که لایه متخلخل میانی بصورت عمودی در محفظه قرار می‌گیرد، بالاتر است.

**کلیدواژگان:** انتقال حرارت جابجایی آزاد، محفظه بسته، روش شبکه بولتزمن، لایه متخلخل میانی عمودی و افقی.

# Comparison of heat transfer in a cavity between vertical and horizontal porous layers using LBM

**M. Nazari[1*], M.H. Kayhani[2], A. Anaraki Haji Bagheri[3]**

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
2- Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
3- MSc. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran. mnazari@shahroodut.ac.ir

**Abstract-** In this paper, natural convection heat transfer inside an enclosure which is partially filled with porous layer is reported using lattice Boltzmann method. Generalized equations in modeling flow in porous media have been employed which are coupled with the lattice Boltzmann formulation of the momentum and energy equations. The present study investigates the effect of position of porous layer on heat transfer rate for different dimensionless parameters, such as Rayleigh number, Darcy number and porosity of the porous layer. In addition, a modified Rayleigh number is presented as an effective parameter which affects the degree of penetration of the fluid into the porous layers. The obtained results showed that the heat transfer rate in the case of vertical layer is more than that of horizontal porous layers.

**Keywords:** Natural Convection Heat Transfer, Cavity, Lattice Boltzmann Method, Vertical/Horizontal Porous Layer.

## ۱- مقدمه

بررسی انتقال حرارت و جریان سیال در مواد متخلخل به دلیل کاربردهای فراوان صنعتی مانند طراحی مبدل‌های حرارتی، عایق‌های حرارتی، صنایع ریخته‌گری و مدل‌سازی سیستم‌های بیولوژیکی و غیره همواره مورد توجه بوده است [۱]. در طیف گسترده‌ای از کاربردهای ذکر شده، سیستم فیزیکی به صورت محفظه‌ای دو بعدی که از ماده متخلخل پر شده‌است، مدل می‌شود به طوری که دیواره‌های عمودی محفظه در دمای ثابت و دیواره های بالا و پایین آدیاباتیک می‌باشند [۲]. در حالت کلی، در بسیاری از مواقع مانند کنترل فرایند ریخته‌گری برای ساخت قطعات با خواص مورد نظر و نیز تکنولوژی ساخت عایق‌های حرارتی برای صرفه‌جویی در انرژی و کاستن از هزینه‌ها، سیستم فیزیکی شامل ناحیه‌ای از ماده متخلخل در کنار لایه‌ای از سیال می‌باشد [۳،۲]. به دلیل کاربرد گسترده این موضوع در بسیاری از زمینه‌های مهندسی، مدل‌های مختلفی جهت مدل‌سازی جریان و انتقال حرارت در محیط متخلخل گزارش شده به طوری که این مدل‌ها به مرور زمان کامل تر شده‌اند. از این مدل‌ها می‌توان به مدل دارسی[۱] در سال ۱۸۵۶ اشاره کرد. سپس این مدل در سال‌های ۱۹۰۱ و ۱۹۴۷ توسط فورچیمر[۲] و برینکمن[۳] کامل تر شده و مدل‌های دارسی- برینکمن و دارسی- فورچیمر در مطالعات عددی استفاده شدند. سرانجام مدل ناویر- استوکس تعمیم یافته[۴] به عنوان مدلی کامل که اثرات تمام نیروهای وارد بر سیال در حضور ماده متخلخل را در معادله مومنتوم وارد کرد معرفی شد [۴].

محققان زیادی، جریان سیال و انتقال حرارت در داخل یک محفظه حاوی ماده متخلخل را با استفاده از روش‌های گوناگون عددی و تجربی مطالعه کرده‌اند. در ابتدا بسیاری از مطالعات عددی به بررسی جریان سیال و انتقال حرارت در محفظه‌ای پر شده از محیط متخلخل همگن بر اساس مدل دارسی و دو مدل تعمیم یافته آن (دارسی- برینکمن و دارسی- فورچیمر) پرداختند. سپس نیتیارژ و همکاران [۵] به بررسی پارامترهای مؤثر بر این مسأله بر اساس مدل تعمیم یافته ناویر- استوکس و مقایسه آن با نتایج عددی بدست آمده از مدل‌های دیگر پرداختند. آنها در این مطالعه نشان دادند که با بالا رفتن عدد دارسی و به تبع آن افزایش سرعت سیال در ماده متخلخل نتایج به دست آمده از مدل تعمیم یافته ناویر- استوکس انطباق بهتری با نتایج آزمایشگاهی موجود دارند و مدل‌های ساده گذشته باعث ایجاد خطا در محاسبات مخصوصاً در مقدار عدد ناسلت متوسط می‌شود.

همان طور که ذکر شد، در طیف گسترده‌ای از کاربردهای مهندسی می‌بایست به مدل‌سازی جریان سیال و انتقال حرارت در یک محفظه که به طور هم‌زمان دارای لایه متخلخل و لایه سیال است، پرداخته شود. مطالعات عددی و آزمایشگاهی زیادی در این زمینه صورت گرفته است که در بیشتر آنها از مدل تعمیم یافته ناویر-استوکس برای مدل‌سازی سیال و لایه متخلخل استفاده نشده است [۴]. به عبارتی نویسندگان زیادی اثر لایه متخلخل در انتقال حرارت و جریان سیال را در موقعیت‌ها و شرایط مختلف بخصوص با استفاده از مدل برینکمن بررسی کرده‌اند [۶-۹]. بکرمن و همکاران [۱۰] در یک مطالعه عددی و آزمایشگاهی موقعیت‌های مختلف لایه متخلخل را در داخل محفظه در حالت‌های عمودی و افقی (به غیر از لایه متخلخل افقی در وسط محفظه) بررسی کردند. در مطالعه مذکور نتایج بدست آمده از حل عددی با نتایج آزمایشگاهی مشاهده شده مقایسه شده است. قابل ذکر است که در این مطالعه بیشتر جنبه فیزیکی و آزمایشگاهی مسأله مطرح بوده است. از محدودیت‌های این مطالعه، می‌توان به گزارش نتایج بدست آمده در اعداد دارسی کوچک (اعداد رایلی اصلاح شده[۵] کوچک) اشاره کرد و به همین دلیل در این مطالعه رژیم غالب مشاهده شده در لایه متخلخل به صورت هدایت حرارتی می‌باشد. همچنین در این مطالعه خطوط جریان و پروفیل هم‌دما برای بررسی اثر اعداد رایلی، دارسی و نسبت ضرایب رسانندگی مختلف ذکر شده است و برای بررسی انتقال حرارت در محفظه عدد ناسلت به عنوان پارامتری مهم در بررسی انتقال حرارت ذکر نشده است. قابل ذکر است در این تحقیق در معادله مومنتم لایه متخلخل ترم جابجایی در نظر گرفته نشده است (به دلیل این که رژیم غالب به دلیل دارسی کوچک به صورت هدایت است.)

1. Darcy Model
2. Forchheimer
3. Brinkmann
4. Generalized Navier-Stokes Model
5. Modified Rayleigh Number

در این مطالعات از روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی از جمله حجم محدود، المان محدود و تفاضل محدود استفاده شده‌است. در این روش‌ها نیاز به گسسته‌سازی معادلات حاکم و در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب در فصل مشترک سیال تمیز و لایه متخلخل جهت کوپله شدن صحیح معادلات (در هردو ناحیه) می‌باشد. همچنین با توجه به هندسه مسأله می‌بایست شرایط مرزی مناسب نیز در نظر گرفته شوند که گاهی این شرایط مرزی به دلیل شکل هندسی پیچیده مسأله می‌توانند پیچیده باشند. اخیرا روش شبکه بولتزمن به عنوان ابزاری قدرتمند در شبیه سازی جریان سیال و انتقال حرارت توسعه یافته است [۱۲،۱۱].

برخلاف روش‌های متداول دینامیک سیالات محاسباتی که براساس دیدگاه ماکروسکوپی می‌باشند، روش شبکه بولتزمن بر مبنای مدل‌های میکروسکوپی و معادله جنبشی (دیدگاه مزوسکوپی[1]) استوار است که در آن رفتار جمعی ذرات تشکیل دهنده محیط سیال برای شبیه سازی رفتار سیستم (به عنوان یک محیط پیوسته) مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین این روش به صورت موفقیت‌آمیزی برای مدل‌سازی جریان و انتقال حرارت در محیط متخلخل به کار گرفته شد [۱۳-۱۵]. به طور کلی در روش شبکه بولتزمن دو رویکرد کلی برای مدل‌سازی جریان سیال در محیط متخلخل به کار می‌رود که عبارتند از مقیاس حفره[2] و مقیاس متوسط حجمی[3]. در مقیاس حفره که مقیاس کوچکتری می‌باشد محیط متخلخل به صورت بلوک‌های جامدی در داخل سیال مدل‌سازی شده و شرط مرزی عدم لغزش[4] بر روی مرز بلوک‌های جامد اعمال می‌شود. اما این روش با کاستی‌هایی روبرو می باشد، از جمله ناتوانی این روش در ساختن هندسه ماده متخلخل، حجم محاسبات بالا در این روش و واگرایی آن در مقادیر بالای سرعت متوسط حجمی سیال [۱۳] می‌باشد. از برتری‌های این روش نسبت به سایر روش‌های متداول دینامیک سیالات محاسباتی می توان به تولید شبکه آسان و کم هزینه، سرعت همگرایی مناسب در مقایسه با سایر روش‌های محاسباتی، پایداری مناسب این روش و به کارگیری آسان این روش در مواجه با معادلات پیچیده

1. Mesoscopic
2. Pore scale
3. Representative Elementary Volume
4. No-Slip

[۱۵] اشاره کرد. ویژگی جالب توجه روش شبکه بولتزمن نسبت به سایر روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی، توانایی این روش در مدل‌سازی صحیح جریان سیال در مرز بین سیال و لایه متخلخل است [۱۴،۱۳].

در ابتدا ژوا و ژائو [۱۳] به مدل‌سازی جریان سیال در ماده متخلخل به روش شبکه بولتزمن بر اساس معادلات ناویر-استوکس تعمیم یافته در مقیاس متوسط حجمی پرداخته و معادلات تعمیم یافته بولتزمن[5] را ارائه کردند. آنها در قسمتی از از این مطالعه به مدل‌سازی جریان سیال در داخل یک کانال که دیواره بالایی کانال با سرعت ثابت حرکت کرده و نیمی از آن توسط یک لایه متخلخل اشغال شده بود (فرم خاصی از جریان کوئت) پرداختند. در این مطالعه و مقایسه حل بدست آمده از این مدل با حل تحلیلی موجود برای این مسأله، نشان داده شد که این مدل بدون وارد کردن شرط مرزی پیوستگی تنش در سطح تماس سیال و لایه متخلخل، قادر است که این شرط مرزی را به صورت خود به خودی ارضا کرده و ناپیوستگی گرادیان سرعت در این مرز را کنترل کند. در واقع با استفاده از این مدل‌سازی شرط مرزی پیوستگی سرعت و تنش برشی در سطح تماس سیال و لایه متخلخل اعمال می‌شود. بنابراین برای مدل‌سازی جریان در یک ناحیه شامل سیال تمیز و یک لایه متخلخل تنها کافی است که با استفاده از معادلات تعمیم یافته ناویر- استوکس [۱۳] ناحیه سیال به عنوان یک لایه متخلخل دارای نفوذپذیری بسیار بالا و ضریب تخلخل نزدیک به یک، مدل‌سازی شود [۱۳، ۱۶،۱۴].

سرانجام ژوا و ژائو [۱۴] با استفاده از معادله انرژی در مقیاس متوسط حجمی، معادلات تعمیم یافته شبکه بولتزمن را برای مدل‌سازی انتقال حرارت در محیط متخلخل ارائه کردند. آنها با معتبرسازی نتایج در حالتی که لایه متخلخل عموی در وسط محفظه قرار داشت، نشان دادند که این روش می‌تواند شرط مرزی پیوستگی دما و شار حرارتی در مرز بین سیال تمیز و لایه متخلخل را ارضا کند.

با بررسی مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان اظهار کرد که در بیشتر مطالعات قبلی از روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی براساس مدل‌های ساده شده مانند دارسی و دو مدل تعمیم یافته آن استفاده شده است. همچنین در این

5. Generalized Lattice Boltzmann ϙQuations (GLBE)

مطالعات اثر موقعیت لایه متخلخل بر انتقال حرارت در اعداد بی‌بعد مختلف خصوصا مقدار عدد ناسلت بررسی نشده است. در این مقاله به بررسی اثر موقعیت لایه متخلخل میانی در دو حالت عمودی و افقی پرداخته شده است. برای بررسی این موضوع با استفاده از معادلات تعمیم یافته بولتزمن [۱۴]، عدد ناسلت متوسط در اعداد مختلف بی بعد حاکم بر مسأله از جمله عدد رایلی، عدد دارسی و ضریب تخلخل ماده متخلخل محاسبه شده تا میزان تاثیر لایه متخلخل بر انتقال حرارت بررسی شود.

## ۲- معادلات حاکم

در مطالعه حاضر، جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه مربعی به ابعاد $L \times L$ که دیواره‌های بالایی و پایینی عایق بوده و دیواره‌های چپ و راست به ترتیب در دمای یکنواخت گرم $T_{\mathrm{h}}$ و سرد $T_{\mathrm{c}}$ قرار دارند، به طوری که دارای یک لایه متخلخل میانی می‌باشد، بررسی می‌شود. همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده‌است، لایه متخلخل دارای ضخامت ثابت بوده ($S/L$=۱/۳) و در دو موقعیت مختلف عمودی و افقی قرار می‌گیرد.

با فرض اینکه سیال غیر قابل تراکم بوده و تعادل حرارتی بین فاز سیال و جامد برقرار است، معادله پیوستگی، معادله تعمیم یافته ناویر-استوکس ( مدل دارسی تعمیم یافته برینکمن-فورچیمر) و معادله انرژی به ترتیب در مقیاس متوسط حجمی مطابق رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \qquad \text{(۱- الف)}$$

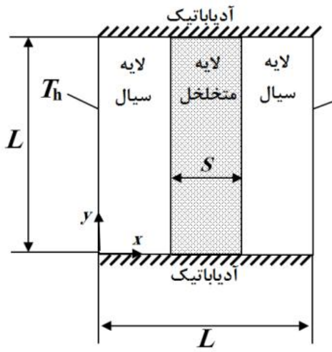
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})(\frac{\vec{u}}{\varepsilon}) = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{f}}} \vec{\nabla}(\varepsilon p) + \upsilon_{\mathrm{e}} \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \qquad \text{(۱- ب)}$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (\alpha_{\mathrm{m}} \vec{\nabla} T) \qquad \text{(۱- ج)}$$

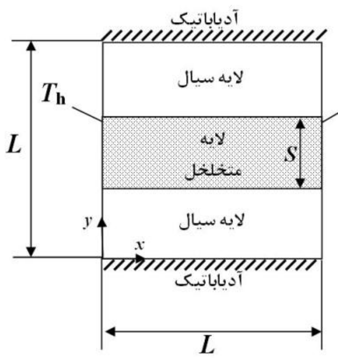
در رابطه (۱)، $\vec{u} = (\bar{u}, \bar{v})$، $p$ و $T$ به ترتیب بردار سرعت، فشار و دمای سیال متوسط حجمی می‌باشد. همچنین $\upsilon_e$ ویسکوزیته مؤثر، $\varepsilon$ ضریب تخلخل ماده متخلخل و $\alpha_{\mathrm{m}}$ ضریب پخش گرمایی مؤثر در ماده متخلخل می‌باشد که از رابطه (۲) پیروی می‌کند [۴].

$$\alpha_{\mathrm{m}} = \frac{(1-\varepsilon) k_{\mathrm{s}} + \varepsilon k_{\mathrm{f}}}{(\rho c_{\mathrm{p}})_{\mathrm{f}}} \qquad (۲)$$

در رابطه (۲)، $k_{\mathrm{s}}$ و $k_{\mathrm{f}}$ به ترتیب ضریب رسانندگی فاز جامد و سیال می‌باشد.



(الف)



(ب)

**شکل ۱** شماتیکی از مدل فیزیکی و سیستم مختصات مربوطه

همچنین ضریب $\sigma$ نسبت ظرفیت گرمایی جامد و سیال می‌باشد که از رابطه (۳) به دست می‌آید [۱۴].

$$\sigma = \varepsilon + \frac{(1-\varepsilon)\rho_{\mathrm{s}} C_{\mathrm{ps}}}{\rho_{\mathrm{f}} C_{\mathrm{pf}}} \qquad (۳)$$

به طوری که $\rho_{\mathrm{f}}$ و $\rho_{\mathrm{s}}$ به ترتیب چگالی سیال و جامد، $C_{\mathrm{pf}}$ و $C_{\mathrm{ps}}$ به ترتیب ظرفیت گرمایی در فشار ثابت سیال و جامد می‌باشند. در رابطه (۱- ب) بردار نیروی $\vec{F}$ ناشی از وجود ماده متخلخل و دیگر نیروهای خارجی است که از رابطه (۴) محاسبه می‌شود.

$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon \upsilon}{K} \vec{u} - \frac{\varepsilon F_{\varepsilon}}{\sqrt{K}} |\vec{u}| \vec{u} + \varepsilon \vec{G} \qquad (۴)$$

در رابطه (۴)، تابع هندسی[۱] ($F_{\varepsilon}$) و نفوذ پذیری[۲] ($K$) ماده متخلخل بر اساس تحقیقات آزمایشگاهی ارگن [۱۷] تابعی از ضریب تخلخل ($\varepsilon$) است. با استفاده از این نتایج، وفایی [۱۸] رابطه (۵) را ارائه کرده‌است.

1. Geometric Function
2. Permeability

$$F_\varepsilon = \frac{1.75}{\sqrt{150\varepsilon^3}}, K = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (۵)$$

در رابطه (۴)، $\upsilon$ ویسکوزیته سیال است و $\vec{G}$ از رابطه (۶) محاسبه می‌شود

$$\vec{G} = -\vec{g}\beta(T - T_0) + \vec{a} \quad (۶)$$

در رابطه (۶)، $\vec{g}$ شتاب ثقلی، $\beta$ ضریب انبساط حجمی است. همچنین جمله اول در رابطه (۶) مربوط به نیروی شناوری و جمله دوم شتاب حاصل از دیگر نیروهای خارجی می‌باشد.

معادله (۱) توسط اعداد بی‌بعد مانند عدد دارسی $Da=K/L^2$، عدد پرانتل[۱] $Pr=\nu/\alpha$، عدد رایلی[۲] $Ra=g\beta(T_h-T_c)L^3/\nu\alpha$، نسبت ویسکوزیته $J_{ev}=\nu_e/\nu$ و نسبت ضریب پخش حرارتی $J_{e\alpha}=\alpha_m/\alpha$ بی‌بعد می‌شود که $\upsilon$ و $\alpha$ به ترتیب ویسکوزیته و ضریب پخش حرارتی سیال می‌باشند. در این مطالعه، نسبت ویسکوزیته و نسبت ضریب پخش حرارتی برابر با یک در نظر گرفته شده است. همچنین دیگر پارامترهای بی بعد مطابق با رابطه (۷) تعریف می‌شوند.

$$x^* = \frac{x}{L} \qquad y^* = \frac{y}{L} \qquad t^* = \frac{t}{\alpha/L^2}$$
$$u^* = \frac{\bar{u}}{\alpha/L} \qquad v^* = \frac{\bar{v}}{\alpha/L} \qquad P^* = \frac{P}{\rho_f \alpha^2/L^2}$$
$$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad (۷)$$

در رابطه (۷)، $x^*$ و $y^*$ به ترتیب مقادیر بی بعد طول در راستای $x$ و $y$، $t^*$ زمان بی بعد، $u^*$ و $v^*$ به ترتیب مؤلفه‌های سرعت بی بعد در راستای محور $x$ و $y$، $P^*$ فشار بی بعد و $\theta$ دمای بی بعد می‌باشد. با توجه به پارامترهای بی بعد تعریف شده در رابطه (۷)، معادله (۱) مطابق با رابطه (۸) بی بعد می‌شود [۵].

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^* = 0 \quad (\text{۸-الف})$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t} + (\vec{u}^*\cdot\vec{\nabla}^*)(\frac{\vec{u}^*}{\varepsilon}) = -\frac{1}{\rho_f}\vec{\nabla}^*(\varepsilon p^*) + \Pr\vec{\nabla}^{*2}\vec{u}^* + \vec{F}^* \quad (\text{۸- ب})$$

$$\sigma\frac{\partial\theta}{\partial t^*} + \vec{u}^*\cdot\vec{\nabla}^*\theta = \vec{\nabla}^{*2}\theta \quad (\text{۸- ج})$$

1. Prandtl Number
2. Rayleigh Number

در رابطه (۸- ب)، $\vec{F}^*$ از رابطه (۹) پیروی می‌کند.

$$\vec{F}^* = -\frac{\varepsilon\Pr}{Da}\vec{u}^* - \frac{\varepsilon F_\varepsilon}{\sqrt{Da}}|\vec{u}^*|\vec{u}^* + (\varepsilon Ra\cdot\Pr\cdot T)\cdot\vec{n}_y \quad (۹)$$

در رابطه (۹)، $\vec{n}_y$ بردار یکه در راستای محور $y$ ها است.

در مطالعه جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه که شامل ماده متخلخل می‌باشد دو عدد بی بعد مهم شامل عدد رایلی اصلاح شده[۳] $Ra_m$ و عدد ناسلت متوسط $\overline{Nu}$، وجود دارد. عدد رایلی اصلاح شده (عدد دارسی-رایلی) به مطابق رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$Ra_m = Ra\cdot Da \quad (۱۰)$$

در یک محفظه مطابق شکل ۱، که دیواره‌های عمودی در دمای ثابت و دیواره های افقی آن آدیاباتیک هستند، حرارت منتقل شده از هر مقطع عمودی دلخواه بین دو دیواره آدیاباتیک، با یکدیگر برابر می‌باشند. بنابراین برای بالا بردن دقت عددی، با متوسط‌گیری عدد ناسلت موضعی بر روی هر یک از این مقاطع می‌توان عدد ناسلت متوسط در محفظه را از رابطه (۱۱) محاسبه کرد [۱۹،۱۵]. در رابطه (۱۱) مقدار $Q(x,y)$ از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود.

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L(T_h - T_c)}\int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{L} Q(x,y)\,dx\,dy \quad (۱۱)$$

$$Q(x,y) = \frac{\bar{u}T(x,y)}{\chi(x,y)} - \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \quad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) پارامتر $\chi$ ضریب پخش گرمایی ماده را در ناحیه مربوطه نشان می‌دهد بدین معنا که در ناحیه سیال تمیز مقدار آن برابر با $\alpha$ و در لایه متخلخل برابر با $\alpha_m$ می‌باشد.

## ۳- مدل‌سازی محاسباتی

در این تحقیق، روش شبکه بولتزمن به عنوان یک روش عددی قدرتمند برای مدل‌سازی جریان سیال و انتقال حرارت مورد استفاده قرار گرفته است. این روش از مدل‌های مزوسکوپی ساده برای شبیه‌سازی رفتار ماکروسکوپی جریان سیال استفاده می‌کند. روش شبکه بولتزمن بر اساس روش شبکه گاز شکل گرفته است. این روش به جای استفاده از عدد بولن[۴] در روش

3. Modified Rayleigh Number
4. Boolean Number

شبکه گاز، از تابع توزیع احتمال استفاده می‌شود. در رابطه (۱۳)، معادلات شبکه بولتزمن برای حل معادلات (۱- الف) تا (۱- ج) جهت حل میدان جریان و انتقال حرارت دو بعدی یک سیال تراکم ناپذیر در محیط متخلخل همگن با استفاده از مدل گرمایی به روش شبکه بولتزمن که توسط ژوا و ژائو [۱۴] پیشنهاد شده، ارائه شده است:

$$f_i(\vec{x}+\vec{e}_i\delta_t, t+\delta_t) - f_i(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau}[f_i(\vec{x},t) - f_i^{(eq)}(\vec{x},t)] + \delta_t \vec{F}_i \quad (۱۳\text{- الف})$$

$$g_i(\vec{x}+\vec{e}_i\delta_t, t+\delta_t) - g_i(\vec{x},t) = -\frac{1}{\tau'}[g_i(\vec{x},t) - g_i^{(eq)}(\vec{x},t)] \quad (۱۳\text{- ب})$$

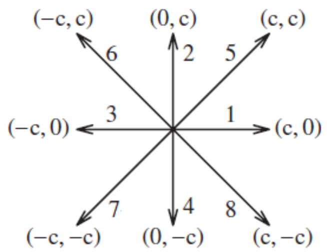
که $f_i(\vec{x},t)$ و $g_i(\vec{x},t)$ احتمال یافتن یک ذره با سرعت $\vec{e}_i$ در مکان $x$ و زمان $t$ و $\delta_t$ معرف گام زمانی می‌باشد. همچنین زمان‌های آسودگی[1] در رابطه (۱۳) مطابق با رابطه (۱۴) تعریف می‌شود.

$$\tau = \frac{\nu_e}{c_s^2 \delta_t} + 0.5 \quad (۱۴\text{- الف})$$

$$\tau' = \frac{\alpha_m}{c_s^2 \delta_t} + 0.5 \quad (۱۴\text{- ب})$$

همان گونه که در شکل ۲ نشان داده شده است، مؤلفه‌های گسسته سرعت $\vec{e}_i$ برای مدل $D_2Q_9$ (مدل دو بعدی شامل ۹ سرعت) از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود.

$$\vec{e}_i = \begin{cases} [0,0] & i=0 \\ c[\cos(\frac{(i-1)\pi}{2}), \sin(\frac{(i-1)\pi}{2})] & i=1\text{-}4 \\ \sqrt{2}c[\cos(\frac{(i-5)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{(i-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4})] & i=5\text{-}8 \end{cases} \quad (۱۵)$$




**شکل ۲** مؤلفه سرعت گسسته $\vec{e}_i$ برای مدل $D_2Q_9$

در رابطه (۱۵)، $c=\delta_x/\delta_t$ بوده و $\delta_x$ فواصل مکانی شبکه بولتزمن را نشان می‌دهد.

در رابطه (۱۳)، $f_i^{(eq)}(\vec{x},t)$ و $g_i^{(eq)}(\vec{x},t)$ توابع توزیع تعادلی بوده و با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) قابل محاسبه‌اند [۱۴]:

$$f_i^{(eq)} = \omega_i \rho[1 + \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{\vec{u}\vec{u}:(\vec{e}_i\vec{e}_i - c_s^2 \mathrm{I})}{2\varepsilon c_s^4}] \quad (۱۶)$$

$$g_i^{eq} = \omega_i T\,(1 + \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}}{c_s^2}) \quad (۱۷)$$

در رابطه (۱۶)، $\omega_i$ ضریب وزنی بوده و مقدار آن از رابطه (۱۸) پیروی می‌کند.

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & i=0 \\ \frac{1}{9} & i=1\text{-}4 \\ \frac{1}{36} & i=5\text{-}8 \end{cases} \quad (۱۸)$$

همچنین $c_s$ برابر با سرعت صوت در شبکه بوده و مقدار آن از رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود.

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (۱۹)$$

مقادیر ماکروسکوپی چگالی و دما از جمع توابع توزیع مطابق با رابطه (۲۰) محاسبه می‌شوند [۱۴].

$$\rho = \sum_i f_i \;,\; \sigma T = \sum_i g_i \quad (۲۰)$$

همچنین مقدار ماکروسکوپیک سرعت نیز با استفاده از رابطه (۲۱) قابل محاسبه است [۱۴].

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{c_0 + \sqrt{c_0^2 + c_1|\vec{V}|}} \quad (۲۱)$$

که در رابطه (۲۱)، $\vec{V}$ از رابطه (۲۲) پیروی می‌کند [۱۴].

$$\rho\vec{V} = \sum_i \vec{e}_i f_i + \frac{\delta_t}{2}\varepsilon\rho\vec{G} \quad (۲۲)$$

دو ضریب $c_0$ و $c_1$ در رابطه (۲۱)، از رابطه (۲۳) به دست می‌آیند:

$$c_0 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon\frac{\delta_t}{2}\frac{\upsilon}{K}) \;,\; c_1 = \varepsilon\frac{\delta_t}{2}\frac{F_\varepsilon}{\sqrt{K}} \quad (۲۳)$$

همچنین جمله نیرو در معادله (۱۳- الف) با استفاده از رابطه (۲۴) قابل بیان است [۱۴].

1. Relaxation Times

$$\vec{F}_i = \omega_i \rho(1-\frac{1}{2\tau})[\frac{\vec{e}_i \cdot \vec{F}}{c_s^2}+\frac{\vec{u}\vec{F}:(\vec{e}_i\vec{e}_i - c_s^2 I)}{\varepsilon c_s^4}] \qquad (۲۴)$$

همان طور که ذکر شد، در مطالعه حاضر از مدل آسایش واحد[1] استفاده شده است که در آن $\alpha_{\mathrm{m}} = \alpha$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین $\sigma = 1$ در نظر گرفته شده است که تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی موجود دارد [۱۰]. برای برقراری شرط تراکم ناپذیری سیال عدد ماخ برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شده است.

در مدل‌سازی جریان سیال شرط عدم لغزش بر روی دیواره‌ها اعمال می‌شود که در روش شبکه بولتزمن برای اعمال این شرط مرزی از طرحی بنام پرش به عقب[2] استفاده می‌کند [۲۰]. برای اعمال شرایط مرزی دما، در دیواره‌های آدیاباتیک بار دیگر از شرط مرزی پرش به عقب برای تابع توزیع دما استفاده می‌شود و شرط مرزی در دیواره‌های دما ثابت (دیواره‌های چپ و راست) با توجه به شکل ۲ با استفاده از روابط (۲۵) و (۲۶) تعریف می‌شود [۲۰].

برای دیواره سمت چپ ($T = T_{\mathrm{h}}$):

$$\begin{aligned} g_1 &= T_{\mathrm{h}}(\omega_1+\omega_3)-g_3 \\ g_5 &= T_{\mathrm{h}}(\omega_5+\omega_7)-g_7 \\ g_8 &= T_{\mathrm{h}}(\omega_8+\omega_6)-g_6 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

برای دیواره سمت راست ($T = T_{\mathrm{c}}$):

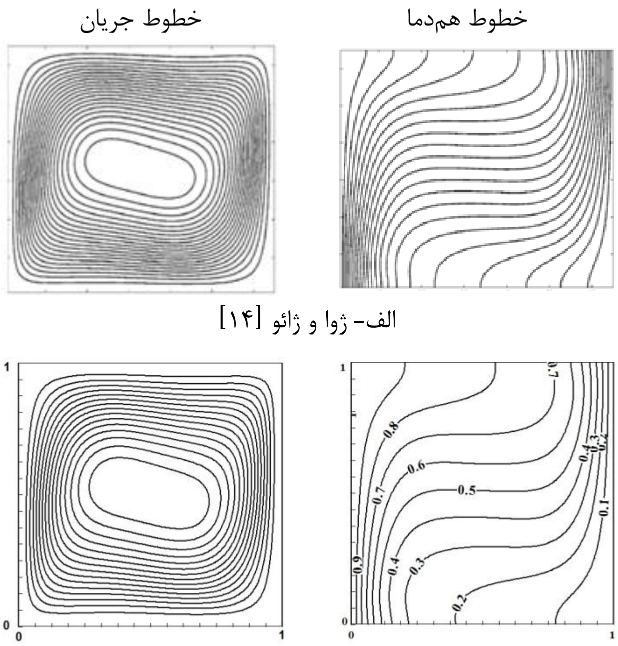
$$\begin{aligned} g_3 &= T_{\mathrm{c}}(\omega_1+\omega_3)-g_1 \\ g_7 &= T_{\mathrm{c}}(\omega_5+\omega_7)-g_5 \\ g_6 &= T_{\mathrm{c}}(\omega_8+\omega_6)-g_8 \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

## ۴- ارزیابی صحت نتایج

در این قسمت، صحت نتایج بدست آمده از روش شبکه بولتزمن در سه حالت حدی با نتایج عددی منتشر شده در این زمینه مقایسه می‌شود. در اولین حالت انتقال حرارت جابجایی آزاد درون محفظه زمانی بررسی می‌شود که ضخامت لایه متخلخل در شکل ۱ برابر با طول محفظه مربعی بوده و ماده متخلخل همگن تمام محفظه را در بر می‌گیرد. در این مرحله نتایج در بازه عدد رایلی $۱۰^{۳} \le \mathrm{Ra} \le ۱۰^{۵}$، عدد دارسی $۱۰^{-۴} \le \mathrm{Da} \le ۱۰^{-۲}$ و ضریب تخلخل $\varepsilon = ۰/۴، ۰/۶، ۰/۹$ بررسی شده است. در حالت دوم نیز انتقال حرارت و جریان سیال زمانی بررسی می‌شود که طول لایه متخلخل برابر با صفر باشد. در واقع در این حالت انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه در غیاب ماده متخلخل بررسی می‌شود. در این مرحله نیز نتایج در بازه عدد رایلی $۱۰^{۳} \le Ra \le ۱۰^{۵}$ گزارش شده است. در حالت سوم الگوی جریان و انتقال حرارت در داخل محفظه‌ای که دارای دو لایه متخلخل افقی می‌باشد، در بازه عدد رایلی $۱۰^{۳} \le \mathrm{Ra} \le ۱۰^{۵}$، عدد دارسی $۱۰^{-۴} \le \mathrm{Da} \le ۱۰^{-۲}$ بررسی شده‌است.

### ۴-۱- انتقال حرارت در یک محفظه پرشده از ماده متخلخل همگن

در این بخش جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در حالتی که ماده متخلخل کل محفظه را اشغال کرده است بررسی شده و نتایج به دست آمده با استفاده از روش شبکه بولتزمن با نتایج منتشر شده در این زمینه مقایسه شده است [۱۵،۱۴،۵]. در شکل ۳ خطوط جریان و کانتور دما در حالتی که $\mathrm{Ra} = ۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da} = ۱۰^{-۲}$ و $\varepsilon = ۰/۴$ نشان داده شده‌اند که تطابق خوبی با نتایج منتشر شده توسط ژوا و ژائو [۱۴] دارد.




الف- ژوا و ژائو [۱۴]

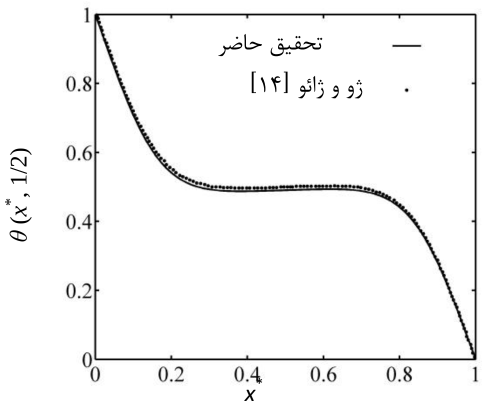
ب- تحقیق حاضر

**شکل ۳** مقایسه خطوط جریان و هم‌دما در $\mathrm{Ra} = ۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da} = ۱۰^{-۲}$، $\mathrm{Pr} = ۱$ و $\varepsilon = ۰/۴$

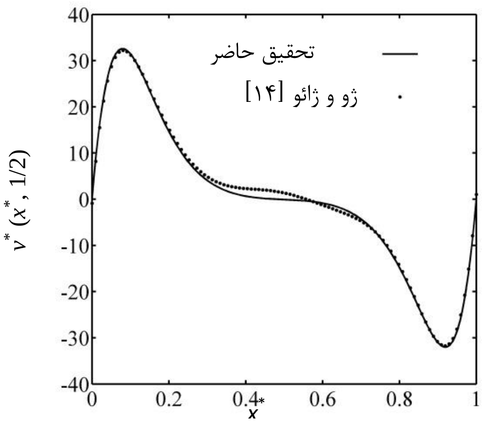
1. Single Relaxation Time Model
2. Bounce Back

برای مقایسه بیشتر نمودار دمای بی بعد و مؤلفه عمودی سرعت بی بعد در امتداد خط افقی وسط محفظه در شکل ۴ رسم شده است.

همان طور که ذکر شد یکی از پارامترهای مهم در بررسی انتقال حرارت در محفظه، عدد ناسلت متوسط است. در جدول ۱ عدد ناسلت متوسط به دست آمده از مطالعه حاضر با حل‌های عددی موجود در مطالعات گذشته، مقایسه شده است. همان طور که در این جدول نشان داده است، نتایج به دست آمده از حل حاضر تطابق خوبی با حل‌های عددی گذشته داشته و خطای نسبی کمتر از ۳٪ می باشد.




الف- نمودار دمای بی بعد




ب- نمودار مؤلفه عمودی سرعت بی بعد

**شکل ۴** مقایسه نمودار دمای بی بعد و مؤلفه عمودی سرعت در امتداد خط افقی محفظه در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$، $\mathrm{Pr}=۱$ و $\varepsilon=۰/۴$

**جدول ۱** مقایسه مقادیر ناسلت متوسط در یک محفظه پر شده از ماده متخلخل با مطالعات گذشته

الف- $\mathrm{Ra}=۱۰^{۳}$ ، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$

| ε | ۰/۴ | ۰/۶ | ۰/۹ |
|---|---|---|---|
| مرجع [۱۵] | - | - | ۱/۰۱۲ |
| مرجع [۵] | ۱/۰۱ | ۱/۰۱۵ | ۱/۰۲۳ |
| مطاالعه حاضر | ۱/۰۲۳ | ۱/۰۲۸ | ۱/۰۳۳ |
| خطا* (٪) | ۱/۲۸۷ | ۱/۲۸۱ | ۰/۹۷۸ |

ب- $\mathrm{Ra}=۱۰^{۴}$ ، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$

| ε | ۰/۴ | ۰/۶ | ۰/۹ |
|---|---|---|---|
| مرجع [۱۵] | - | - | ۱/۶۲۱ |
| مرجع [۵] | ۱/۴۰۸ | ۱/۵۳۰ | ۱/۶۴۰ |
| مطاالعه حاضر | ۱/۳۷۸ | ۱/۵۱۰ | ۱/۶۵۱ |
| خطا* (٪) | ۲/۱۳۱ | ۱/۳۰۷ | ۰/۶۷۱ |

ج- $\mathrm{Ra}=۱۰^{۴}$ ، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۲}$

| ε | ۰/۴ | ۰/۶ | ۰/۹ |
|---|---|---|---|
| مرجع [۱۵] | - | - | ۳/۹ |
| مرجع [۵] | ۲/۹۸۳ | ۳/۵۵۵ | ۳/۹۱ |
| مطاالعه حاضر | ۳/۰۱۴ | ۳/۴۶۳ | ۳/۹۴۶ |
| خطا* (٪) | ۱/۰۳۹ | ۲/۵۸۸ | ۰/۹۲۱ |

د- $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$ ، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۴}$

| ε | ۰/۴ | ۰/۶ | ۰/۹ |
|---|---|---|---|
| مرجع [۱۵] | ۱/۰۶۰ | ۱/۰۶۳ | ۱/۰۶۵ |
| مرجع [۵] | ۱/۰۶۷ | ۱/۰۷۱ | ۱/۰۷۲ |
| مطاالعه حاضر | ۱/۰۷۴ | ۱/۰۷۷ | ۱/۰۷۹ |
| خطا* (٪) | ۰/۶۵۶ | ۰/۵۶۰ | ۰/۶۵۳ |

* خطای نسبی با توجه به مقادیر کزارش شده در مرجع [۵] گزارش شده است.

### ۴-۲- انتقال حرارت در محفظه در غیاب ماده متخلخل

در این قسمت جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه در غیاب ماده متخلخل بررسی می شود. در واقع در این حالت ضخامت ماده متخلخل در شکل ۱ برابر با صفر است. همان طور که ذکر شد، معادلات حاکم بر محیط متخلخل زمانی که $\varepsilon\to۱$ و $\mathrm{Da}\to\infty$ به معادلات ناویر استوکس حاکم بر سیال خالص ساده می‌شود. بر همین اساس برای مدل‌سازی جریان می‌توان از معادلات حاکم بر روش شبکه بولتزمن در حالتی که $\varepsilon=۰/۹۹۹۹$ و $\mathrm{Da}=۱۰^{۷}$ می باشد استفاده کرد.

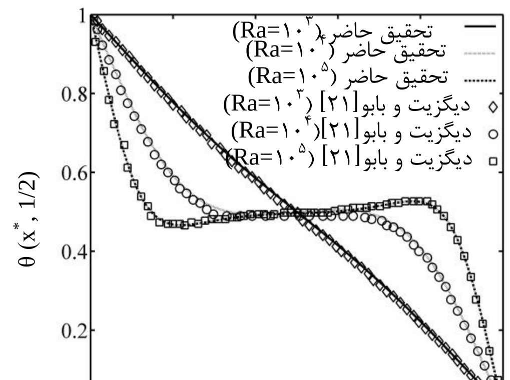
در جدول ۲ عدد ناسلت از حل حاضر با نتایج موجود در مطالعات قبلی مقایسه شده است. همچنین برای مقایسه بیشتر نمودار دمای بی بعد در امتداد خط افقی وسط محفظه برای اعداد رایلی $۱۰^۳$، $۱۰^۴$ و $۱۰^۵$ در شکل ۵ رسم شده است.

## ۴-۳- انتقال حرارت در یک محفظه دارای دو لایه متخلخل افقی

در این قسمت، میدان جریان و انتقال حرارت در داخل یک محفظه که دارای دو لایه متخلخل افقی در قسمت بالایی و پایین می‌باشد، بررسی شده است، تا توانایی روش شبکه بولتزمن در مدل‌سازی صحیح انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه که به طور موضعی از ماده متخلخل پر شده است، نشان داده شود.

**جدول ۲** مقایسه مقادیر ناسلت متوسط در غیاب ماده متخلخل با مطالعات گذشته

| Ra | اندازه شبکه | Pr = ۰/۷۱ | | Pr = ۱ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | مرجع [۲۱] | حل حاضر | مرجع [۱۵] | حل حاضر |
| $۱۰^۳$ | ۱۲۸×۱۲۸ | ۱/۱۲۱ | ۱/۱۳۴ | ۱/۱۱۷ | ۱/۱۳۴ |
| $۱۰^۴$ | ۱۲۸×۱۲۸ | ۲/۲۸۶ | ۲/۲۷ | ۲/۲۴۳ | ۲/۲۸۲ |
| $۱۰^۵$ | ۱۹۲×۱۹۲ | ۴/۵۴۶ | ۴/۵۵ | ۴/۵۷۹ | ۴/۶۲۸ |



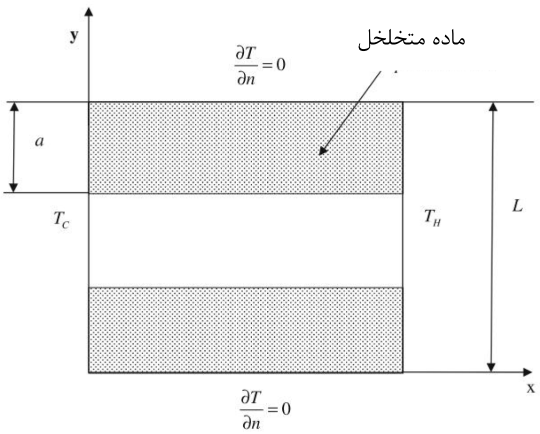

**شکل ۵** نمودار دما بی بعد در مقطع افقی میانی محفظه در $Ra=۱۰^۵, ۱۰^۴, ۱۰^۳$ ، (Pr=۰/۷۱)

همان طور که ذکر شد، یکی از ویژگی‌های قابل توجه روش شبکه بولتزمن توانایی این روش در مدل‌سازی صحیح رفتار سیال در فصل مشترک لایه سیال و لایه متخلخل می‌باشد. برای آزمودن این ویژگی، به معتبرسازی نتایج تحقیق چن و همکاران [۳] مطابق هندسه رسم شده در شکل ۶ در حالتی که مقدار $a/L=۰/۲۵$ است، پرداخته می‌شود. آنها در این مطالعه از شرط مرزی پرش تنش[1] در مرز بین دو لایه متخلخل استفاده کرده‌اند. این شرط مرزی به صورت رابطه (۲۷) قابل بیان است [۳].

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_t}{\partial n}\bigg|_{\text{porous}} - \frac{\partial u_t}{\partial n}\bigg|_{\text{fluid}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{Da}} u_t\bigg|_{\text{interface}} + \beta_2 \frac{1}{\text{Pr}} u_t^2 \qquad (۲۷)$$

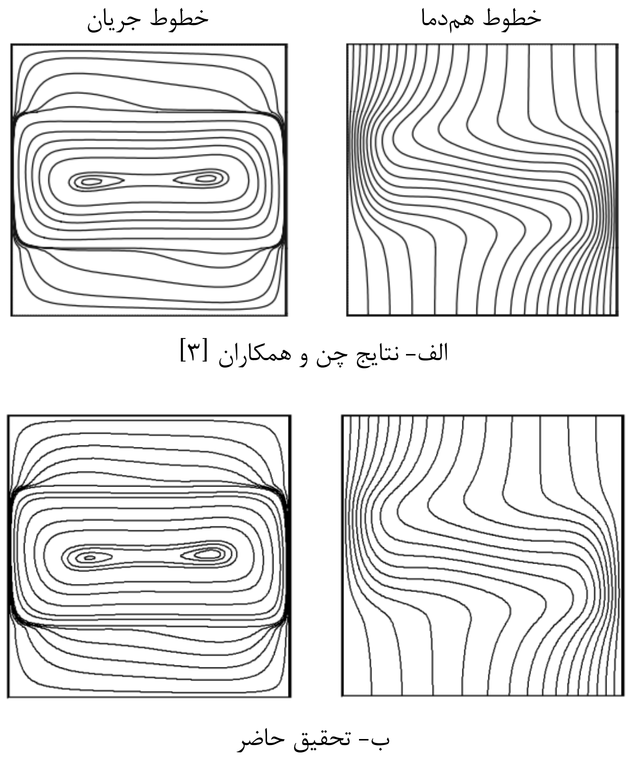
در رابطه (۲۷)، $u_t$ مولفه سرعت بی بعد در راستای مماس بر سطح مشترک دو لایه سیال و متخلخل است. همچنین $n$ نشان دهنده جهت عمود بر سطح می‌باشد. همچنین با حل تحلیلی که توسط اوچائو-تیپیا و ویتاکر ارائه شد، نشان داده شد که دو پارامتر $\beta_1$ و $\beta_2$ می‌توانند مقداری بین ۱ تا ۱- داشته باشند [۳].

در این مقاله، نتایج بدست آمده از کد عددی با نتایج چن و همکاران در حالتی که دو پارامتر $\beta_1$ و $\beta_2$ برابر با صفر در نظر گرفته شده است، مقایسه می‌شود. در شکل‌های ۷ و ۸ خطوط هم‌دما و جریان به دست آمده از حل عددی حاضر به روش شبکه بولتزمن با نتایج چن و همکاران [۳] برای مقادیر $Ra=۱۰^۵$، $Pr=۱$ و $\varepsilon=۰/۴$ در مقادیر مختلف عدد دارسی ($Da=۱۰^{-۵}$ و $Da=۱۰^{-۱}$) مقایسه شده است.

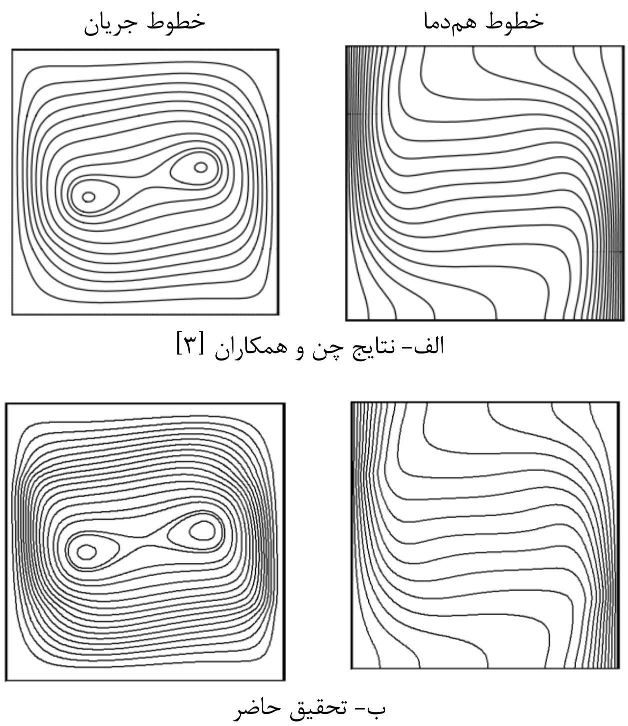



**شکل ۶** هندسه مورد بررسی در تحقیق چن و همکاران [۳]

1. Stress Jump




**شکل ۷** مقایسه خطوط جریان و هم‌دما در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۵}$، $\varepsilon=۰/۴$ و $\mathrm{Pr}=۱$



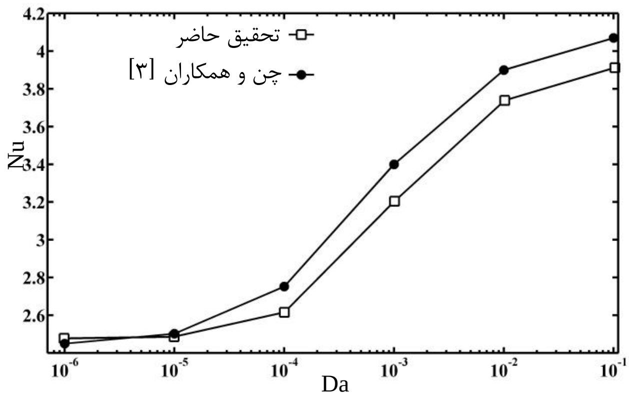

**شکل ۸** مقایسه خطوط جریان و هم‌دما در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۱}$، $\varepsilon=۰/۴$ و $\mathrm{Pr}=۱$

همان طور که در شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از حل عددی حاضر تطابق خوبی با نتایج منتشر شده دارد.

در ادامه برای مقایسه بیشتر در شکل ۹ مقادیر عدد ناسلت بر روی دیواره سرد بدست آمده از حل عددی حاضر با نتایج چن و همکاران [۳] برای $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Pr}=۱$ و $\varepsilon=۰/۴$ در مقادیر مختلف عدد دارسی ($۱۰^{-۶}\le \mathrm{Da}\le ۱۰^{-۱}$) مقایسه شده‌است. بیشینه مقدار خطای نسبی تحقیق حاضر کمتر از ۶٪ می‌باشد. همان طور که در این مطالعه ذکر شده است، به دلیل نوع شرط مرزی اعمال شده در مرز بین لایه متخلخل و سیال، با تغییر دو پارامتر $\beta_1$ و $\beta_2$ عدد ناسلت بدست آمده در تحقیق آنها با دقت ۵٪ گزارش شده است که این یکی از علت‌های افزایش خطای نسبی با تحقیق حاضر به شمار می‌رود.

## ۵- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی

در این بخش، استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی مورد استفاده، بررسی می‌شود. برای این منظور، انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه‌ای متخلخل در $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$ در اعداد دارسی و ضریب تخلخل مختلف بررسی شده است. در یک عدد رایلی ثابت هرچه عدد دارسی کوچکتر باشد، حالت حادتری برای استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی پیش آمده و نیاز به شبکه بزرگ‌تری در حل عددی می‌باشد [۱۴]. مشخصات این شبکه‌بندی‌ها و میزان خطای نسبی عدد ناسلت متوسط از حل حاصله نسبت به مقادیر گزارش شده در مرجع [۵] برای نمونه برای $\mathrm{Ra}=۱۰^{۵}$، $\mathrm{Da}=۱۰^{-۴}$ و $\varepsilon=۰/۴$ در جدول ۳ ارائه شده است.




**شکل ۹** مقایسه مقادیر عدد ناسلت در دیواره سرد برای حل عددی حاضر و نتایج چن و همکاران [۳]

**جدول ۳** بررسی خطای حل عددی در مقادیر عدد ناسلت متوسط در شبکه‌های مختلف محاسباتی برای $Ra = ۱۰^{۵}$، $Da = ۱۰^{-۱}$، $\varepsilon = ۰/۴$ و $Pr = ۱$

| اندازه شبکه | $\overline{Nu}$ | خطای نسبی (٪) | شبکه | $\overline{Nu}$ | خطای نسبی (٪) |
|---|---|---|---|---|---|
| ۶۴×۶۴ | ۱/۱۰۰ | ۲/۱۲۶ | ۱۵۴×۱۵۴ | ۱/۰۷۹ | ۰/۸۱۲ |
| ۹۴×۹۴ | ۱/۰۸۸ | ۱/۵۸۷ | ۱۷۴×۱۷۴ | ۱/۰۷۸ | ۰/۶۷۲ |
| ۱۲۴×۱۲۴ | ۱/۰۸۳ | ۱/۱۲ | ۱۹۲×۱۹۲ | ۱/۰۷۸ | ۰/۵۶ |

با توجه به جدول ۳ شبکه ۱۹۲×۱۹۲ با خطای نسبی حدود ۰/۶٪ شبکه مناسبی برای حل عددی بوده و حل عددی مستقل از شبکه محاسباتی می‌باشد.

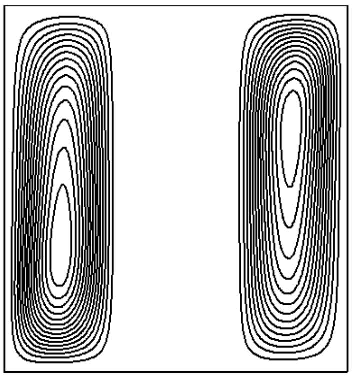
## ۶- نتایج

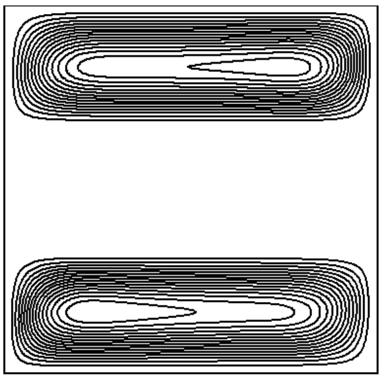
در این قسمت، اثر پارامترهای بی بعد ازجمله عدد رایلی، عدد دارسی، میزان تخلخل و اثر مکان لایه متخلخل میانی در دو حالت عمودی و افقی (شکل ۱) بر انتقال حرارت و جریان سیال در محفظه بررسی می‌شود. قابل ذکر است که لایه متخلخل در وسط محفظه دارای ضخامت ثابت بوده و برابر با ۱/۳ طول محفظه مربعی می‌باشد. همچنین از گرید یکنواخت ۱۳۲×۱۳۲، ۱۳۲×۱۳۲ و ۱۹۲×۱۹۲ به ترتیب برای رایلی‌های $۱۰^{۳}$، $۱۰^{۴}$ و $۱۰^{۵}$ استفاده شده است. عدد ناسلت متوسط در محفظه برای حالت‌های مختلف در جدول ۴ گزارش شده‌است. قابل ذکر است، در این جدول، مقادیر عدد ناسلت متوسط در حالتی که لایه متخلخل عمودی میانی مطابق شکل ۱- الف در محفظه قرار گرفته است با عنوان حالت ۱ و زمانی که لایه متخلخل افقی میانی در محفظه قرار دارد با عنوان حالت ۲ در جدول گزارش شده است.

با توجه به جدول ۴ همواره در اعداد رایلی، دارسی و ضریب تخلخل ثابت مقدار عدد ناسلت متوسط در حالتی که لایه متخلخل میانی به صورت عمودی در محفظه قرار گرفته همواره بیشتر از لایه متخلخل میانی افقی می‌باشد. برای تفسیر این مشاهده ابتدا به تحلیل نتایج در عدد رایلی و ضریب تخلخل ثابت با تغییر عدد دارسی پرداخته می‌شود. سپس میزان حرارت منتقل شده از محفظه در حضور ماده متخلخل و همچنین تأثیر میزان تخلخل ماده متخلخل بر روی انتقال حرارت بررسی می‌شود. ابتدا حالتی در نظر گرفته می‌شود که عدد دارسی لایه متخلخل بسیار کوچک باشد (اعداد رایلی اصلاح شده بسیار پایین از مرتبه $۱۰^{-۱}$). در این حالت به دلیل کوچک بودن عدد دارسی نفوذپذیری سیال در داخل لایه متخلخل کم بوده و سیال برای عبور از لایه متخلخل با مقاومت زیادی روبرو می‌شود. همان طور که در شکل ۱۰ دیده می‌شود، در اعداد دارسی بسیار کوچک نفوذ سیال در داخل لایه متخلخل بسیار ناچیز بوده به طوری که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

**جدول ۴** بررسی اثر موقعیت لایه متخلخل میانی بر روی عدد ناسلت متوسط

| Da | $Ra_m$ | ۱۰ | $۱۰^{۲}$ | $۱۰^{۳}$ | | $۱۰^{۴}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\varepsilon$ | ۰/۴ | ۰/۴ | ۰/۴ | ۰/۹ | ۰/۴ | ۰/۹ |
| $۱۰^{-۴}$ | حالت ۱ | ۲/۹۲۸ | - | - | - | - | - |
| | حالت ۲ | ۲/۳۶۱ | - | - | - | - | - |
| $۱۰^{-۲}$ | حالت ۱ | ۱/۰۸۵ | ۲/۱۱۵ | ۴/۲۶۶ | ۴/۵۳۸ | - | - |
| | حالت ۲ | ۱/۰۵۰ | ۱/۸۳۵ | ۴/۰۶۴ | ۴/۳۶۰ | - | - |
| $۱۰^{-۱}$ | حالت ۱ | - | - | - | - | ۴/۵۲۸ | ۴/۵۸۹ |
| | حالت ۲ | - | - | - | - | ۴/۲۰۰ | ۴/۵۲۳ |

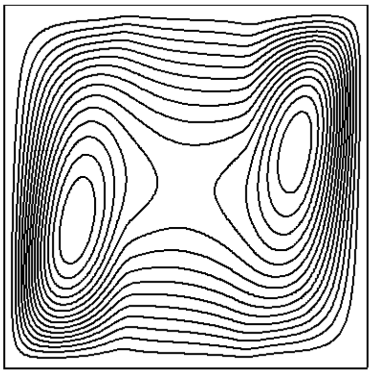

الف- لایه متخلخل عمودی در وسط محفظه


ب- لایه متخلخل افقی در وسط محفظه

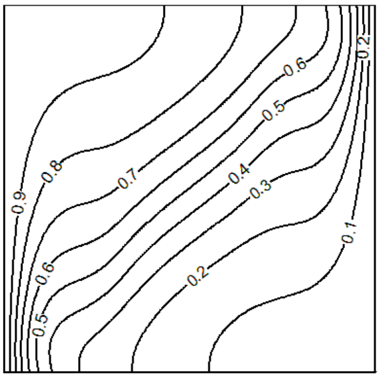
**شکل ۱۰** نتایج عددی خطوط جریان برای $Ra = ۱۰^{۵}$، $Da = ۱۰^{-۶}$، $\varepsilon = ۰/۴$ و $Pr = ۱$

در این حالت سیال در قسمت سیال تمیز محبوس شده و دو گردابه در این نواحی تشکیل می‌شود و به دلیل نفوذ بسیار کم سیال در لایه متخلخل، لایه مرزی در مرز بین سیال تمیز و لایه متخلخل کاملاً مشهود است. با افزایش عدد دارسی میزان نفوذ سیال در داخل لایه متخلخل افزایش یافته و سیال شروع به نفوذ در داخل لایه متخلخل می‌کند. همان طور که در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ (برای اعداد رایلی اصلاح شده پایین از مرتبه۱۰) نشان داده شده است، با افزایش عدد دارسی میزان نفوذ سیال در داخل لایه متخلخل افزایش می‌یابد.

با افزایش عدد دارسی لایه متخلخل، گردابه‌های مشاهده شده در طرفین لایه متخلخل عمودی در شکل ۱۰ (در حالتی که عدد رایلی اصلاح شده بسیار پایین و از مرتبه $10^{-1}$ می‌باشد) به سمت وسط محفظه حرکت می‌کنند.



الف- خطوط جریان

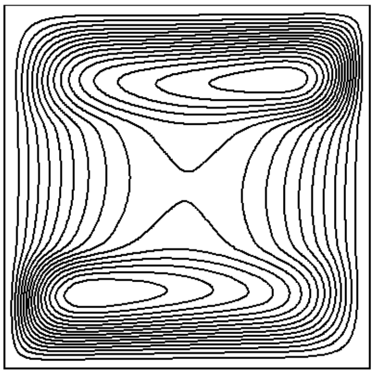



ب- کانتور دما

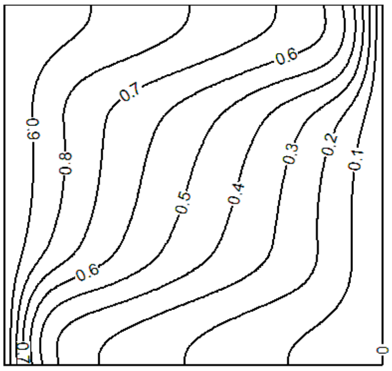
**شکل ۱۱** خطوط جریان برای لایه متخلخل میانی عمودی برای $Ra = 10^{5}$، $Da = 10^{-4}$، $\varepsilon = 0/4$ و $Pr = 1$

همچنین همان طور که در خطوط جریان شکل‌های ۱۰ و ۱۲ نیز مشهود است، در حالتی که لایه متخلخل افقی (با عدد دارسی کم و به طبع آن مقاومت بالا برای اعداد رایلی اصلاح شده از مرتبه ۱۰ و پایین‌تر) در وسط محفظه قرار می‌گیرد دو گردابه در قسمت بالایی و پایینی لایه متخلخل افقی شکل می‌گیرد، زیرا در این حالت سیال برای حرکت از سمت دیواره گرم به سمت دیواره سرد مسیری را انتخاب می‌کند که کمترین مقاومت را در مقابل حرکت سیال از خود نشان می‌دهد.

بنابراین سیال برای حرکت از سمت دیواره گرم به سمت دیواره سرد، در قسمت‌های بالایی و پایینی لایه متخلخل (قسمت بدون ماده متخلخل) جریان داشته و در این نواحی مقاومت کمتری نسبت به حرکت سیال از خود نشان می‌دهد.



الف- خطوط جریان




ب- کانتور دما

**شکل ۱۲** خطوط جریان برای لایه متخلخل میانی افقی برای $Ra = 10^{5}$، $Da = 10^{-4}$، $\varepsilon = 0/4$ و $Pr = 1$

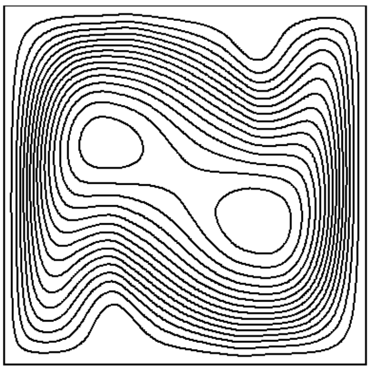
در این حالت هرچند رژیم غالب انتقال حرارت در داخل ناحیه سیال به صورت جابجایی آزاد می‌باشد، اما با توجه با این که در این حالت هنوز عدد رایلی اصلاح شده پایین می‌باشد یا

به عبارتی لایه متخلخل به دلیل نفوذپذیری کم از خود مقاومت نسبتاً بالایی نشان می‌دهد، میزان نفوذ و سرعت سیال در داخل لایه متخلخل پایین بوده و خطوط صاف در کانتور دما در لایه متخلخل در شکل ۱۱ و ۱۲ نشان دهنده این است که رژیم غالب در این ناحیه به صورت هدایت حرارتی است. بنابراین در اعداد رایلی پایین (به دلیل پایین بودن عدد دارسی) جریان سیال در داخل محفظه را می‌توان مانند جریان سیال در داخل محفظه‌ای به ضخامت لایه سیال مدل کرد (خصوصاً در حالت لایه متخلخل میانی افقی که در این حالت دو گردابه نیز در شکل ۱۲ نیز دیده می‌شود. همان طور که نشان داده خواهد شد، با افزایش عدد دارسی این گردابه‌ها از بین خواهند رفت.)

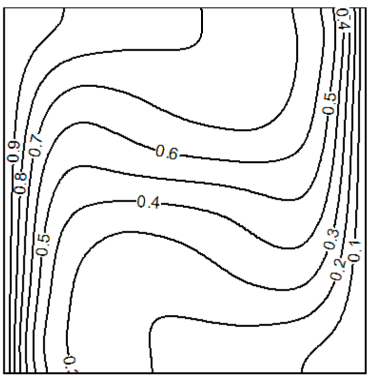
همان طور که قبلاً نیز ذکر شد، نتایج موجود در جدول ۴ نشان می‌دهد که در اعداد دارسی پایین (اعداد رایلی اصلاح شده پایین از مرتبه $۱۰^{۲}$ و پایین‌تر) عدد ناسلت در حالتی که لایه متخلخل افقی در محفظه قرار دارد کمتر از حالتی است که لایه عمودی در محفظه جای گرفته است؛ زیرا در حالتی که لایه متخلخل عمودی در وسط محفظه قرار می‌گیرد، سیال زمان کافی برای گرم شدن و حرکت در کنار دیواره گرم را بدون وجود مقاومت از طرف لایه متخلخل داراست. به عبارتی سیال دارای سطح انتقال حرارتی برابر با طول دیواره گرم می‌باشد، اما در حالتی که لایه متخلخل افقی در داخل محفظه قرار می‌گیرد، سیال با حرکت در قسمت بالایی و پایینی لایه متخلخل افقی، تنها با ۱/۳ طول دیواره گرم در تبادل حرارت است. بنابراین در این حالت در قسمت لایه سیال (بدون وجود ماتریس متخلخل) شدت انتقال حرارت جابجایی آزاد کمتر می‌باشد. همچنین با افزایش عدد دارسی (و به تبع آن عدد رایلی اصلاح شده بالا از مرتبه $۱۰^{۳}$) همان گونه که در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است، میزان نفوذپذیری سیال در داخل لایه متخلخل افزایش یافته به طوری که سیال کاملاً در لایه متخلخل نفوذ می‌کند و به همین دلیل گردابه‌هایی که در قسمت‌های بالایی و پایینی لایه متخلخل افقی در اعداد دارسی پایین دیده می‌شد، از بین می‌رود.

همچنین در این حالت (عدد رایلی اصلاح شده از مرتبه $۱۰^{۳}$)، مطابق جدول ۴ مقدار عدد ناسلت متوسط برای لایه متخلخل عمودی بیشتر از لایه افقی می‌باشد زیرا در حالتی که لایه متخلخل عمودی در وسط محفظه قرار دارد، سیال با جذب انرژی حرارتی از دیواره گرم به سمت دیواره سرد حرکت کرده و با سرعت بالاتری از میان لایه متخلخل (با درصد نفوذ بالا) عبور می‌کند، اما هنگامی که لایه متخلخل افقی در محفظه قرار دارد، انرژی حرارتی به صورت هم‌زمان توسط دو لایه سیال (در بالا و پایین لایه متخلخل) و نیز توسط لایه متخلخل میانی از دیواره گرم به سمت دیواره سرد منتقل می‌شود، بنابراین سرعت سیال و شدت انتقال حرارت جابجایی آزاد در این حالت کمتر بوده و عدد ناسلت کاهش می‌یابد.

به بیانی دیگر هنگامی که دیواره‌های گرم و سرد در سمت چپ و راست لایه متخلخل قرار می‌گیرند قدرت انتقال حرارت جابجایی آزاد در مقایسه با لایه افقی بسیار بالاست، زیرا در این حالت علیرغم وجود انتقال حرارت جابجایی آزاد در بالا و پایین لایه افقی، انتقال حرارت در این نواحی قدرت بالایی ندارد، زیرا صفحات بالایی و پایینی لایه متخلخل افقی آدیاباتیک هستند.

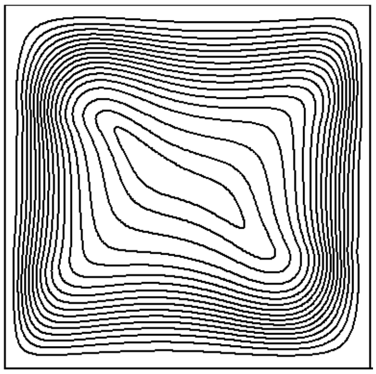


الف- خطوط جریان

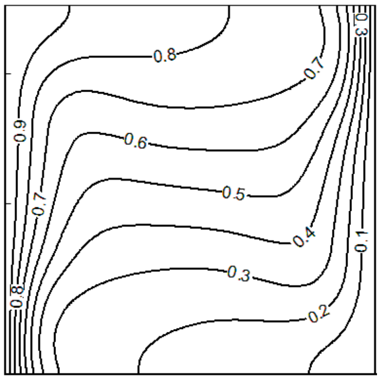



ب- کانتور دما

**شکل ۱۳** خطوط جریان برای لایه متخلخل میانی برای $Ra = ۱۰^{۵}$، $Da = ۱۰^{-۲}$، $\varepsilon = ۰/۴$ و $Pr = ۱$



الف- خطوط جریان




ب- کانتور دما

**شکل ۱۴** خطوط جریان برای لایه متخلخل میانی افقی برای $\mathrm{Ra}=10^{5}$، $\mathrm{Da}=10^{-2}$، $\varepsilon=0/4$ و $\mathrm{Pr}=1$

همچنین همان طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، در مقادیر بالای عدد رایلی اصلاح شده (از مرتبه $10^{3}$)، که مکانیزم غالب انتقال حرارت به صورت جابجایی آزاد می‌باشد، با افزایش میزان تخلخل ماده متخلخل مقدار عدد ناسلت در هر دو موقعیت عمودی و افقی لایه متخلخل افزایش می‌یابد. زیرا با افزایش مقدار تخلخل لایه متخلخل میزان نیروهای درگ وارد شده از محیط متخلخل بر سیال کاهش یافته و در نتیجه سیال با سرعت بیشتری در داخل لایه متخلخل حرکت می‌کند.

با مقایسه مقادیر موجود در جدول‌های ۱ و ۴ می‌توان دریافت که در یک عدد رایلی، دارسی و ضریب تخلخل مشخص مقدار عدد ناسلت متوسط با افزایش میزان ماده متخلخل در محفظه کاهش می‌یابد. به عبارتی در یک عدد رایلی، دارسی و ضریب تخلخل مشخص در حالتی که محفظه از ماده متخلخل پر شده است (محفظه همگن) مقدار عدد ناسلت از حالتی که لایه متخلخل عمودی و یا افقی در محفظه قرار می‌گیرد کمتر است، زیرا با افزایش مقدار ماده متخلخل در محفظه، مقاومت در برابر حرکت سیال افزایش می‌یابد. در یک عدد رایلی ثابت، با افزایش عدد دارسی و ضریب تخلخل ماده متخلخل مقاومت ماده متخلخل در مقابل حرکت سیال کاهش می‌یابد بنابراین همان طور که در جدول ۴ قابل مشاهده است، در اعداد دارسی و ضریب تخلخل بالا ($\mathrm{Da}=10^{-1}$ و $\varepsilon=0/9$) می‌توان اذعان نمود که لایه متخلخل اثری بر انتقال حرارت نداشته و عدد ناسلت به عدد ناسلت در غیاب لایه متخلخل بسیار نزدیک می‌شود. بنابراین در یک رایلی مشخص بیشترین مقدار انتقال حرارت از محفظه در غیاب ماده متخلخل اتفاق می‌افتد زیرا مقاومتی در برابر حرکت سیال وجود نداشته و میزان انتقال حرارت جابجایی آزاد در محفظه شدت می‌گیرد.

## ۷- جمع‌بندی

در این مطالعه به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه حاوی لایه متخلخل میانی پرداخته شد. بر خلاف مطالعات گذشته که با استفاده از روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی براساس مدل‌های دارسی و یا برینکمن می‌باشند در این مطالع از روش شبکه بولتزمن بر اساس معادلات تعمیم یافته ناویر استوکس که تمام نیروهای درگ و نیروهای وارد بر سیال را وارد معادله مومنتم می‌کند، استفاده شده است. از جمله مزایای این روش، تولید شبکه آسان و کم هزینه، سرعت همگرایی مناسب در مقایسه با سایر روش‌های محاسباتی، پایداری مناسب این روش و به کارگیری آسان این روش در مواجه با معادلات پیچیده و مدل‌سازی صحیح جریان سیال در مرز بین سیال و لایه متخلخل می‌باشد.

بعد از معتبرسازی نتایج در دو حالت انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه پرشده از ماده متخلخل همگن و نیز انتقال حرارت در محفظه در غیاب لایه متخلخل به بررسی اثرات اعداد بی بعد حاکم بر مسأله مانند عدد رایلی، عدد دارسی، ضریب تخلخل لایه متخلخل و بخصوص اثر موقعیت لایه متخلخل در دو حالت عمودی و افقی پرداخته شده است. مشاهده شد که با افزایش میزان نفوذپذیری لایه متخلخل یا به عبارتی عدد دارسی ( و متناسب با آن عدد رایلی اصلاح شده) میزان نفوذپذیری سیال در داخل لایه متخلخل افزایش می‌یابد. بنابراین در اعداد دارسی کوچک و متناسب با آن عدد رایلی

اصلاح شده پایین مکانیزم غالب به صورت هدایت حرارتی می‌باشد و با افزایش میزان عدد دارسی میزان نفوذپذیری ماده متخلخل و به تبع آن سرعت سیال در داخل لایه متخلخل افزایش می‌یابد و انتقال حرارت جابجایی آزاد شدت می‌گیرد. همچنین همواره لایه متخلخل میانی عمودی بهترین نرخ انتقال حرارت را دارد. بعلاوه با افزایش ضریب تخلخل در اعداد رایلی بالا میزان سرعت سیال در داخل لایه متخلخل افزایش یافته و انتقال حرارت جابجایی آزاد قدرت بیشتری گرفته و عدد ناسلت بالا می‌رود. در ضریب تخلخل و عدد دارسی بالا، لایه متخلخل تقریباً اثری بر انتقال حرارت نداشته و انتقال حرارت شبیه انتقال حرارت در یک محفظه در غیاب لایه متخلخل می‌باشد.

## ۸- مراجع

[1] Cheng P., “Heat Transfer in Geothermal Systems”, *Advanced in Heat Transfer*, Vol. 14, 1978, pp. 1-105.
[2] Bekermann C., Ramadhyani S., Vishkanta R., “Natural Convective Flow and Heat Transfer Between a Fluid Layer and a Porous Layer Inside a Rectangular Enclosure”, *J. Heat Trans-T ASME*, Vol. 109, 1987, pp. 363-370.
[3] Chen X. B., Yu P., Sui Y., Winoto S. H., Low H. T. “Natural Convection in a Cavity Filled with Porous Layers on the Top and Bottom Walls”, *Transp. Porous Med.*, Vol. 78, 2009, pp. 259-276.
[4] Nield D.A., Bejan A., *Convection in Porous Media*, 3rd ed. Springer, New York, 2006.
[5] Nithiarasu P., Seetharamu K.N., Sundararajan T., “Natural Convective Heat Transfer in a Fluid Saturated Variable Porosity Medium”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 40(16), 1997, pp. 3955-3967.
[6] Tong T.W., Subramanian E., “Natural Convection in Rectangular Enclosures Partially Filled with a Porous Medium”, *Int. J. Heat Fluid Fl.*, Vol. 7, 1986, pp. 3-10.
[7] Nishimura T., Takumi T., Shiraishi M., KawamuraY., Ozoe H., “Numerical Analysis of Natural Convection in a Rectangular Enclosure Horizontally Divided into Fluid and Porous Regions”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, 1986, pp. 889-898.
[8] Du Z.G., Bilgen E., “Natural Convection in Vertical Cavities with Partially Filled Heat-Generating Porous Media”, *Numer. Heat Trandfer A-APPL*, Vol. 18, 1990, pp. 371-386.
[9] Nakayama A., Jones R., Naylor D., Oosthuizen P.H., “Free Convection in a Horizontal Enclosure Partly Filled with a Porous Medium”, *J. Thermophys. Heat Transfer*, Vol. 9, No. 4, 1995, pp. 797-800.
[10] Beckermann C., Viskanta R., Ramadhyani S., “Natural Convection in Vertical Enclosures Containing Simultaneously Fluid and Porous Layers”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 186, 1988, pp. 257-284.
[11] Chen S., Doolen G.D., “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows”, *Annu. Rev. Fluid Mech*, Vol. 30, No. 1, 1998, pp. 329-364.
[12] Succi S., *The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*, Oxford University Press, New York, 2001.
[13] Guo Z., Zhao T.S., “Lattice Boltzmann Model for Incompressible Flows through Porous Media”, *Phys. Rev. E.*, Vol. 66. No. 3, 2002, pp. 036304.
[14] Guo Z., Zhao T.S., “A Lattice Boltzmann Model for Convection Heat Transfer in Porous Media” *Numer. Heat Tr. B-Fund.*, Vol. 47, 2005, pp. 157-177.
[15] Vishnampet R., Narasimhan A., Babu V., “High Rayleigh Number Natural Convection Inside 2D Porous Enclosures Using the Lattice Boltzmann Method”, *J. Heat Transfer*, Vol. 133, 2011, pp. 062501-1.
[16] Rong F.M., Guo Z.L., Lu JH, Shi B.C., “Numerical Simulation of The Flow Around a Porous Covering Square Cylinder in a Channel via Lattice Boltzmann Method”, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, Vol. 65, 2011, pp. 1217-1230.
[17] Ergun S., “Fluid Flow Through Packed Column’’, *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 48, 1952, pp. 89-94.
[18] Vafai K., “Convective Flow and Heat Transfer in Variable-Porosity Media”, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 147, 1984, pp. 233-259.
[19] De Vahl Davis G., “Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Benchmark Numerical Solution”, *Int. J. Numer. Method Fluid*, Vol. 3, 1983, pp. 249-264.
[20] Mohamad A.A., *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computers Codes*, Springer, New York, 2011.
[21] Dixit H.N., Babu V., “Simulation of High Rayleigh Number Natural Convection in a Square Cavity Using the Lattice Boltzmann Method”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 49, 2006, pp. 727-739.