http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

آبان 1392، دوره 13 شماره 8 ص ص 151-160

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت 91/8/11
تاریخ پذیرش 92/2/7
ارائه در سایت 92/4/30

بررسی اثر ضربه کم سرعت بر نانوتیر تیموشنکو با استفاده از تئوری غیر محلی الاستیسیته

سجاد صیفوری[1]، غلامحسین لیاقت[2*]، مجید فولادی[3]

1- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
2- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
3- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان
* تهران، صندوق پستی 14115-141، ghlia530@ modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله ضربه کم سرعت قائم بر روی نانوتیر تیموشنکو بر اساس تئوری غیر محلی، به‌صورت تحلیلی و برای بررسی رفتار دینامیکی نانوتیر ارائه شده است. با در نظر گرفتن معادلات ارتعاش آزاد تیر، ضربه وارد شده به نانوتیر با استفاده از شرایط مرزی و مقدار اندازه حرکت پرتابه و نانوتیر بلافاصله بعد از برخورد، بیان شده است. شرایط مرزی دو سر ساده و دو سر گیردار، همچنین تأثیر نسبت جرم نانوتیر به پرتابه (نسبت جرم) بر روی تغییر شکل دینامیکی نانوتیر تیموشنکو، بررسی شده است. برای اعتبار سنجی، نتایج حاصل از این روش، با تحلیل‌های موجود و بر اساس تئوری الاستیسته و تئوری تیر کلاسیک، برای دو ماده مختلف (فولاد و آلومینیوم) مقایسه و تطابق مناسبی مشاهده شده است. با افزایش پارامتر غیر محلی، تغییر شکل دینامیکی حداکثر وسط نانوتیر، افزایش یافته و فرکانس نانوتیر در همه نسبت‌های جرم، کاهش یافته است.

کلیدواژگان: تئوری غیر محلی الاستیسیته، ضربه کم سرعت، نانوتیر تیوشنکو، تغییر شکل دینامیکی.

Low velocity impact on Timoshenko nanobeam using a nonlocal elasticity theory

S. Seifoori[1], GH. Liaghat[2*], M. Foladi[3]

1- PhD Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
2- Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran
3- Prof. of Mech. Eng., Shahid Bahonar Univ. Kerman, Iran
* P.O.B. 14115-141 Tehran, Iran. ghlia530@yahoo.com

Abstract- In this article, analytical solutions of low velocity transverse impact on a nanobeam are presented using the nonlocal theory to bring out the effect of the nonlocal behavior on dynamic deflections. Impact of a projectile (mass) on simply supported and clamped nanobeams are investigated using nonlocal Timoshenko beam theory. In order to obtain an analytical result for this problem, an approximate method has been developed wherein the applied impulse is replaced by a suitable boundary condition and initial momentum of projectile and nanobeam. A number of numerical examples with analytical solutions for nonlocal nanobeam and classical beam (steel and aluminum) have been presented and discussed. When the value of the striker mass is increased, the frequencies are decreased and the maximum dynamic deflection at the center of the beam is increased for both of the simply supported and the clamped-clamped nanobeams. The inclusion of the nonlocal effect increases the magnitudes of dynamic deflections and decreases frequencies. Furthermore, the mass and the velocity of the nanoparticle (striker) have significant effects on the dynamic behavior of nanobeam.

Keywords: Nonlocal Elasticity Theory, Low Velocity Impact, Timoshenko Nanobeam, Dynamic Deflection.

1- مقدمه

با استفاده از تئوری غیر محلی در تحلیل نانو تیرها (نانوتیوب‌ها)، توانایی درک رفتار مکانیکی مواد در مقیاس‌های کوچک بیشتر می‌شود. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک و تئوری غیر محلی الاستیسیته در تعریف تنش است. بیشتر تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته، بر اساس روابط ساختاری‌هایپرالاستیک استوار هستند، که فرض می‌کند تنش هر نقطه، به صورت تابعی از کرنش‌های همان نقطه است. تئوری غیر محلی که ابتدا توسط ارینگن [1-3] ارائه شد، بیانگر این است که تنش هر نقطه نه تنها تابعی از میدان کرنش آن نقطه است، بلکه تابع کرنش همه نقاط محیط پیوسته است. این قبیل تئوری‌ها در برگیرنده اطلاعاتی از نیروهای مابین اتم‌ها و اندازه طول‌های داخلی (اثر مقیاس کوچک) که در روابط ساختاری به‌صورت پارامترهای مادی تعریف می‌شوند، هستند. تئوری غیر محلی در بررسی انتشار موج تنش الاستیک، انتشار موج تنش داخل کامپوزیت‌ها، مکانیک شکست، ارتعاشات آزاد و اجباری نانوتیوب‌های کربنی و ورقهای گرافن مورد استفاده قرار گرفته است [5،4]. با توجه به موارد گفته شده ممکن است نانوتیوب (نانوتیر) توسط نانوذره مورد اصابت قرار گیرد. بررسی پدیده ضربه در مقیاس ماکرو، با استفاده از تئوری‌های کلاسیک مرسوم است[7،6].

در این مقاله پدیده ضربه کم سرعت یک نانوذره بر روی یک نانوتیوب، بر اساس فرمول‌بندی تیر تیموشنکو و بر پایه تئوری غیر محلی، بررسی شده است. در این تحقیق سرعت پرتابه تا حدی در نظر گرفته می‌شود که تغییر شکل‌های کلی نانوتیر به‌صورت خطی باشد و به عبارتی ماده نانوتیر وارد ناحیه غیرخطی نشود. به این علت تنها سرعت‌هایی در حدود 1 نانومتر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است طول نانوتیر در نظر گرفته شده برای این تحلیل 10 نانومتر است. شرایط مرزی تکیه گاه دو سرساده و دو سرگیردار و همچنین تأثیر پارامترهای غیر محلی و نسبت جرم نانوتیر به نانوذره بررسی و تحلیل شده است.

2- تئوری غیر محلی الاستیسیته

تئوری غیر محلی الاستیسیته اولین بار توسط ارینگن [1-3] معرفی شد. او فرض کرد که تنش هر نقطه مورد بررسی (مرجع)، به‌صورت تابعی از میدان کرنش همه نقاط محیط پیوسته است. بنابراین تانسور تنش σ در نقطه X به صورت رابطه (1) تعریف خواهد شد:

$$\sigma = \int_V K(\left|X' - X\right|, \tau)\mathrm{t}(X')\,\mathrm{d}X' \qquad (1)$$

که در آن $\mathrm{t}(X')$ تانسور تنش کلاسیک ماکروسکوپی در نقطه X و تابع کرنل $K(\left|X' - X\right|, \tau)$ بیانگر مدول غیر محلی می‌باشد. $\left|X' - X\right|$ بیانگر فاصله و τ ثابت مادی می‌باشد که به مشخصه‌های طولی داخلی و خارجی (از قبیل طول موج، فاصله بین ملکولی و شرایط مرزی) بستگی دارد. تنش ماکروسکوپی t در نقطه X به کرنش ε نقطه X بر طبق قانون عمومی‌هوک در مکانیک جامدات مربوط می‌شود [5]:

$$\mathrm{t}(X) = \mathrm{C}(X) : \varepsilon(X) \qquad (2)$$

که C بیانگر تانسور تنش مرتبه چهار الاستیسیته، $\varepsilon(X)$ تانسور کرنش و : بیانگر ضرب دو نقطه‌ای است. معادله انتگرالی روابط ساختاری (1) حل مسائل الاستیسیته را بسیار سخت می‌کند، بنابراین رابطه ساختاری ساده شده و به فرم دیفرانسیلی توسط ارینگن [1-3] و به صورت رابطه (3) بیان شده است:

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2)\sigma = t, \qquad \tau = \frac{e_0 a}{l} \qquad (3)$$

که e_0 ثابت مادی است که بستگی به نوع ماده دارد، a خصوصیت طول داخلی (از قبیل فاصله بین اتمی)، l ویژگی طول خارجی (از قبیل طول موج و طول ترک) و ∇^2 عملگر لاپلاسین است.

3- مدل تیر تیموشنکو بر اساس تئوری غیر محلی الاستیسیته

برای تیر تیموشنکو همگن همسان‌گرد، رابطه کرنش- جابجایی همانند رابطه (4) است [8]:

$$\varepsilon_{xx} = z\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}, \quad \gamma_{xz} = \phi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \qquad (4)$$

در این رابطه x مختصه طولی از سمت چپ تیر و z مختصه عرضی، از وسط تیر و به سمت پایین در نظر گرفته می‌شود. w بیانگر خیز تیر، ϕ چرخش تیر در اثر خمش، ε_{xx} کرنش عمودی و γ_{xz} کرنش برشی عرضی است. با در نظر گرفتن حرکت هارمونیک و با لحاظ کردن اثر اینرسی دورانی، دو

معادله حاکم طبق روابط زیر به‌دست خواهند آمد [5، 8-10]:

$$\frac{dM}{dx} = Q - \rho I \omega^2 \phi \tag{5}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -\rho A \omega^2 w \tag{6}$$

در این رابطه ω فرکانس، ρ چگالی تیر، $I = \int_A z^2 dA$ ممان اینرسی دوم سطح مقطع و A سطح مقطع تیر است. Q توزیع نیروی برشی و M ممان خمشی در امتداد محور x است:

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA \tag{7}$$

$$Q = \int_A \sigma_{xz} dA \tag{8}$$

که σ_{xx} تنش عمودی و σ_{xz} تنش برشی عرضی است. حل کامل معادله موج به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\hat{w}(x,t) = w(x) \cdot e^{iwt} \tag{9}$$

$$\varphi(x,t) = \phi(x) \cdot e^{iwt} \tag{10}$$

برای تیر همگن و همسانگرد تیموشنکو معادلات ساختاری با روابط (11) و (12) بیان می‌شود[5،8،11-15]:

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad (\mu = e_0^2 a^2) \tag{11}$$

$$\sigma_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} = G \gamma_{xz}, \quad (\mu = e_0^2 a^2) \tag{12}$$

در این رابطه E مدول الاستیسته و G مدول برشی می‌باشد. با صفر قرار دادن پارامتر غیر محلی μ، رابطه ساختاری در حالت کلاسیک به‌دست می‌آید. با ضرب طرفین رابطه (11) در $z\,dA$ و با انتگرالگیری روی کل سطح مقطع خواهیم داشت:

$$M - \mu \frac{d^2 M}{dx^2} = EI \frac{d\phi}{dx} \tag{13}$$

به طور مشابه برای رابطه (12) خواهیم داشت:

$$Q - \mu \frac{d^2 Q}{dx^2} = K_s GA(\phi + \frac{dw}{dx}) \tag{14}$$

که در این رابطه K_s ضریب تصحیح برش برای تیر تیموشنکو است که برای اصلاح فرض ثابت بودن برش، در ضخامت تیر استفاده می‌شود [8].

با جایگذاری روابط (5) و (6) در روابط (13) و (14) ممان خمشی غیر محلی و نیروی برشی بر حسب جابجایی عرضی تیر بیان می‌شود [8-10]:

$$M = EI \frac{d\phi}{dx} - \mu(\rho A \omega^2 w + \rho I \omega^2 \frac{d\phi}{dx}) \tag{15}$$

$$Q = K_s GA(\phi + \frac{dw}{dx}) - \mu \rho A \omega^2 \frac{dw}{dx} \tag{16}$$

با صفر قرار دادن پارامتر غیر محلی μ، روابط ممان و نیروی برشی در حالت کلاسیک بدست خواهد آمد. سرانجام معادله حرکت غیر محلی نانوتیرتیموشنکو، بر اساس جابه جایی عرضی با جایگزینی روابط (15) و (16) در روابط (5) و (6) بدست خواهد آمد [۵،۸،۱۰]:

$$EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} - K_s GA(\phi + \frac{dw}{dx}) + \rho I \omega^2 \phi - \mu \rho I \omega^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \tag{17}$$

$$K_s GA(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2}) + \rho A \omega^2 w - \mu \rho A \omega^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \tag{18}$$

4- ضربه کم سرعت نانوذره بر روی نانوتیر تیموشنکو

برای حل این مساله به صورت تحلیلی، ابتدا پارامترهای بی بعد، مطابق رابطه (19) تعریف می‌شوند.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}$$

$$\bar{w}(\bar{x}) = \frac{w(x)}{L}, \qquad \hat{\bar{w}}(\bar{x},t) = \frac{\hat{w}(x,t)}{L}$$

$$\lambda^2 = \omega^2 \frac{\rho A L^4}{EI}, \quad \Omega = \frac{EI}{K_s GAL^2}, \quad \alpha = \frac{e_0 a}{L}$$

$$\xi = \frac{L\sqrt{A}}{\sqrt{I}}, \quad \bar{v}_2 = \frac{v_2}{L}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{L} \tag{19}$$

که v_2 سرعت اولیه پرتابه قبل از برخورد و L طول نانوتیر می‌باشد. ضربه وارد شده به صورت شرایط مرزی مناسب بیان می‌شود. بنابراین تنها حل معادلات ارتعاشی آزاد تیر، بررسی می‌شود. بنابراین معادلات حرکت حاکم بر نانوتیر (روابط (17) و (18)) بر اساس پارامترهای بی بعد به صورت روابط (20) و (21) بیان خواهند شد:

$$\Omega(1 - \frac{\alpha^2 \lambda^2}{\xi^2}) \frac{d^2 \phi}{d\bar{x}^2} + (\frac{\lambda^2 \Omega}{\xi^2} - 1)\phi - \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0 \tag{20}$$

$$(\frac{d\phi}{d\bar{x}} + \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}) + \lambda^2 \Omega \bar{w} - \alpha^2 \lambda^2 \Omega \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0 \tag{21}$$

روابط (20) و (21) می‌توانند به صورت غیر وابسته (غیر کوپل) و به صورت معادله دیفرانسیل درجه چهارم بر اساس $\bar{w}$ و ϕ مطابق روابط (22) و (23) بیان شوند:

$$(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{\xi^2})(1-\alpha^2\lambda^2\Omega)\frac{d^4\overline{w}}{d\overline{x}^4}+\lambda^2(\Omega+\frac{1-2\Omega\alpha^2\lambda^2}{\xi^2}+\alpha^2)\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}+\lambda^2(\frac{\lambda^2\Omega}{\xi^2}-1)\overline{w}=0 \quad (22)$$

$$(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{\xi^2})(1-\alpha^2\lambda^2\Omega)\frac{d^4\phi}{d\overline{x}^4}+\lambda^2(\Omega+\frac{1-2\Omega\alpha^2\lambda^2}{\xi^2}+\alpha^2)\frac{d^2\phi}{d\overline{x}^2}+\lambda^2(\frac{\lambda^2\Omega}{\xi^2}-1)\phi=0 \quad (23)$$

حل عمومی‌معادلات (22) و (23) مطابق روابط (24) و (25) بیان خواهد شد [۱۲،۱۰،۵]:

$$\overline{w}(x)=C_1\cosh(k_e\overline{x})+C_2\sinh(k_e\overline{x})+C_3\cos(k_f\overline{x})+C_4\sin(k_f\overline{x}) \quad (24)$$

$$\phi(x)=D_1\sinh(k_e\overline{x})+D_2\cosh(k_e\overline{x})+D_3\sin(k_f\overline{x})+D_4\cos(k_f\overline{x}) \quad (25)$$

که در این روابط:

$$\begin{pmatrix}k_e\\k_f\end{pmatrix}=\left[\{\mp\lambda^2(\Omega+\frac{1-2\Omega\alpha^2\lambda^2}{\xi^2}+\alpha^2)+(\lambda^4(\Omega+\frac{1-2\Omega\alpha^2\lambda^2}{\xi^2}+\alpha^2)^2-4\lambda^2(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{\xi^2})(1-\alpha^2\lambda^2\Omega)(\frac{\lambda^2\Omega}{\xi^2}-1))^{0.5}\}/2(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{\xi^2})(1-\alpha^2\lambda^2\Omega)\right]^{1/2} \quad (26)$$

از رابطه (21) ثابت‌های C_i و D_i طبق رابطه (27) به یکدیگر وابسته هستند.

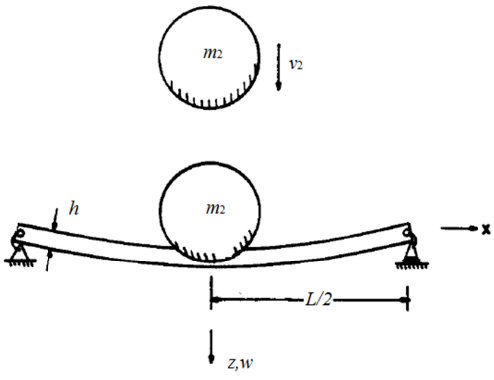
$$D_1=C_1\Psi_\beta,\quad D_2=C_2\Psi_\beta,\quad D_3=C_3\Psi_\gamma,\quad D_4=-C_4\Psi_\gamma$$

$$\Psi_\beta=-\frac{k_e^2+\lambda^2\Omega}{k_e},\quad \Psi_\gamma=\frac{k_f^2-\lambda^2\Omega}{k_f} \quad (27)$$

4-1- نانوتیر با تکیه گاه ساده

در حالت کلی نانوذره‌ای به جرم m_2 و سرعت v_2 به نانوتیری به طول L، مطابق شکل 1 برخورد می‌کند.

برای تیر با تکیه‌گاه ساده، شرایط مرزی شامل صفر بودن مقدار جابجایی و ممان، در دو طرف تیر است [۱۴،۱۲،۵].



شکل 1 برخورد نانوذره به نانوتیر

$$\overline{M}=\frac{ML}{EI}=(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{\xi^2})\frac{d\phi}{d\overline{x}}-\alpha^2\lambda^2\overline{w}=0\rightarrow\frac{d\phi}{d\overline{x}}=0,\qquad \overline{w}=0,\qquad \overline{x}=0,1 \quad \text{در} \quad (28)$$

با جایگذاری دو شرط رابطه (28) در روابط (24) و (25) در x=0، $C_1=0$ و $C_3=0$ خواهد شد. همچنین در اثر تقارن در وسط تیر، دوران سطح مقطع نانوتیر، باید مساوی صفر باشد [6]:

$$\phi(\frac{1}{2})=0\Rightarrow D_4=-D_2\frac{\cosh(\frac{k_e}{2})}{\cos(\frac{k_f}{2})} \quad (29)$$

با جایگذاری شرایط معادله (29) در رابطه (27) ثابت‌های C_2 و C_4 به‌دست خواهند آمد:

$$C_4=C_2\frac{\Psi_\beta\cosh(\frac{k_e}{2})}{\Psi_\gamma\cos(\frac{k_f}{2})} \quad (30)$$

همچنین ناپیوستگی برش تیر در نقطه تماس (نقطه برخورد)، باید مساوی نیروی عکس العمل وارد بر پرتابه باشد. بنابراین برای برخورد مرکزی و با توجه به تقارن رابطه (31) بیان می‌شود [6]:

$$\overline{Q}=\frac{1}{2}m_2\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t^2}\qquad \overline{x}=1/2 \quad \text{در} \quad (31)$$

که $\overline{Q}$ نیروی برشی است. با توجه به رابطه (10) و رابطه (31) خواهیم داشت:

$$K_sGA(\phi+\frac{dw}{dx})-\mu\rho A\omega^2\frac{dw}{dx}=\frac{1}{2}m_2\frac{\partial^2\hat{\bar{w}}}{\partial t^2}\Rightarrow$$
$$K_sGA(0+\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}\cdot e^{i\omega t})-\mu\rho A\omega^2\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}\cdot e^{i\omega t}=$$
$$-\frac{1}{2}m_2\bar{w}L\omega^2\cdot e^{i\omega t} \quad (32)$$

سرانجام با جایگذاری روابط (24) و (25) در رابطه (32) معادله مشخصه نانوتیر تیموشنکو برای تکیه گاه ساده و بر حسب ω بدست خواهد آمد:

$$\frac{\omega^2\rho L^2}{(K_sG-\mu\rho\omega^2)\cdot(k_e+\frac{\Psi_\beta}{\Psi_\gamma}k_f)}\cdot$$
$$\left[\tanh(\frac{k_e}{2})+\frac{\Psi_\beta}{\Psi_\gamma}\tan(\frac{k_f}{2})\right]=2m \quad (33)$$

که $m_1=\rho AL$ جرم نانوتیر و $m=m_1/m_2$ نسبت جرم نانوتیر به پرتابه (نانوذره) است. چون رابطه (33) دارای چندین ریشه بر حسب فرکانس است، جواب کلی به صورت رابطه (34) در نظر گرفته خواهد شد:

$$\hat{\bar{w}}(\bar{x},t)=\sum_{a=1}^{\infty}\bar{w}_a(\bar{x}).e^{i\omega_a t}=$$
$$\sum_{a=1}^{\infty}\bar{w}_a(\bar{x}).(E_a\sin(\omega_a t)+iF_a\cos(\omega_a t)) \quad (34)$$

به علت اینکه در لحظه اولیه (صفر) جابه جایی نانوتیر صفر است، رابطه زیر برقرار است:

$$\hat{\bar{w}}(\bar{x},0)=0, F_a=0 \quad \text{(35- الف)}$$

با جایگذاری رابطه (35- الف) در (34) رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\hat{\bar{w}}(\bar{x},t)=\sum_{a=1}^{\infty}G_aX_a\sin(\omega_a t) \quad \text{(35- ب)}$$

که در این رابطه شرایط زیر برقرار است:

$$G_a=A_aE_a\cosh(\frac{k_{e_a}}{2}),$$
$$X_a=\frac{\sinh(k_{e_a}\bar{x})}{\cosh(\frac{k_{e_a}}{2})}+\frac{\Psi_{\beta_a}}{\Psi_{\gamma_a}}\frac{\sin(k_{f_a}\bar{x})}{\cos(\frac{k_{f_a}}{2})} \quad \text{(35- ج)}$$

ثابت G_a در حقیقت در برگیرنده جایگزینی ضربه وارد شده به نانوتیر، با سرعت اولیه مناسب است. اگر پرتابه با سرعت اولیه v_2 به قسمت مرکز نانوتیر برخورد کند، آنگاه اندازه حرکت تیر و پرتابه بلافاصله بعد از برخورد، باید برابر اندازه حرکت اولیه باشد [6]:

$$\int\frac{\partial\hat{\bar{w}}(\bar{x},0)}{\partial t}dS=m_2\bar{v}_2 \quad (36)$$

که انتگرال dS روی کل جرم پرتابه و نانوتیر است. حال رابطه (37) در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial\hat{\bar{w}}(\bar{x},0)}{\partial t}=\sum_{a=1}^{\infty}\omega_aG_aX_a\equiv\varphi(\bar{x}), \quad (37)$$

اگر دو طرف رابطه در X_b ضرب شود:

$$\sum_{a=1}^{\infty}\omega_aG_aX_aX_b\equiv\varphi(\bar{x})X_b \quad (38)$$

حال اگر رابطه (37) در m_2 ضرب شود و مقدار انتگرال در وسط تیر، با توجه به المان جرم نانوتیر $dm_1=(m_1)d\bar{x}$ به رابطه (38) اضافه شود، با توجه به تقارن رابطه زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\sum_{a=1}^{\infty}\omega_aG_a\cdot\left\{2m_1\int_0^{1/2}X_aX_bdx+m_2X_a(\frac{1}{2})X_b(\frac{1}{2})\right\}=$$
$$2m_1\int_0^{1/2}X_b\varphi(x)dx+m_2X_b(\frac{1}{2})\varphi(\frac{1}{2}) \quad (39)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم می‌توان نشان داد که هنگامی که $a\neq b$ قسمت سمت چپ معادله (39) صفر خواهد شد. بنابراین ثابت G_a از رابطه (40) به‌دست خواهد آمد:

$$G_a=\frac{1}{\omega_a}\cdot\left(\frac{2m_1\int_0^{1/2}X_a\varphi(\bar{x})d\bar{x}+m_2X_a(\frac{1}{2})\varphi(\frac{1}{2})}{2m_1\int_0^{1/2}X_a^2d\bar{x}+m_2X_a^2(\frac{1}{2})}\right) \quad (40)$$

در لحظه اولیه، شرایط رابطه (41) برقرار است:

$$\frac{\partial\hat{\bar{w}}}{\partial t}=0 \quad \text{برای} \quad t=0, x\neq\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial\hat{\bar{w}}}{\partial t}=\bar{v}_2 \quad \text{برای} \quad t=0, x=\frac{1}{2} \quad (41)$$

بنابراین رابطه (40) به رابطه (42) تبدیل خواهد شد:

$$G_a=\frac{1}{\omega_a}\cdot\left(\frac{m_2\bar{v}_2X_a(\frac{1}{2})}{2m_1\int_0^{1/2}X_a^2d\bar{x}+m_2X_a^2(\frac{1}{2})}\right) \quad (42)$$

سرانجام جابجایی دینامیکی نانوتیر تیموشنکو با جایگذاری رابطه (42) در رابطه (35- ب) به‌دست خواهد آمد:

$$\hat{\bar{w}}(\bar{x},t)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_a}\cdot\left(\frac{m_2\bar{v}_2X_a(\frac{1}{2})}{2m_1\int_0^{1/2}X_a^2d\bar{x}+m_2X_a^2(\frac{1}{2})}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{\sinh(k_{e_a}\bar{x})}{\cosh(\frac{k_{e_a}}{2})}+\frac{\Psi_{\beta a}}{\Psi_{\gamma a}}\frac{\sin(k_{f_a}\bar{x})}{\cos(\frac{k_{f_a}}{2})}\right)\cdot\sin(\omega_a t) \tag{43}$$

2-4- نانوتیر با تکیه‌گاه گیردار

برای تیر با تکیه گاه دو سر گیردار، شرایط مرزی عبارت از صفر بودن مقدار جابجایی و شیب در دو طرف تیر است [۱۴،۱۲،۵].

$$\bar{w}(0)=0,\qquad \frac{d\bar{w}(0)}{d\bar{x}}=0 \tag{44- الف}$$

$$\bar{w}(1)=0,\qquad \frac{d\bar{w}(1)}{d\bar{x}}=0 \tag{44- ب}$$

با جایگذاری دو شرط رابطه (44 الف) در رابطه (24) و در x=0 خواهیم داشت: $C_1=-C_3$ و $C_4=-C_2\cdot k_e/k_f$.

با جایگذاری حل عمومی (روابط (24) و (25)) در روابط (29) و (31) معادله مشخصه نانوتیر تیموشنکو برای تکیه‌گاه دو سرگیردار و بر حسب ω به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&[-(U_1Bk_e+U_2)\cdot\sinh(\frac{k_e}{2})+\\&(U_1k_e+U_2B)\cdot\cosh(\frac{k_e}{2})+\\&(-BU_1k_f+\frac{k_e}{k_f}U_2)\cdot\sin(\frac{k_f}{2})-\\&(U_1k_e+U_2B)\cdot\cos(\frac{k_f}{2})]=0\\&B=\frac{\frac{k_e}{k_f}\cos(\frac{k_f}{2})+\frac{\Psi_\beta}{\Psi_\gamma}\cosh(\frac{k_e}{2})}{\frac{\Psi_\beta}{\Psi_\gamma}\sinh(\frac{k_e}{2})-\sin(\frac{k_f}{2})},\\&U_1=(K_sGA-\mu\rho A\omega^2),U_2=\frac{\omega^2m_2L}{2}\end{aligned} \tag{45}$$

همانند قسمت قبل برای تکیه‌گاه ساده، در اینجا نیز رابطه (45) دارای چندین ریشه بر حسب فرکانس است، جواب کلی به صورت رابطه (34) و با توجه به شرط رابطه (35- الف) در نظر گرفته خواهد شد. بنابراین رابطه (46) بدست خواهد آمد:

$$\hat{\bar{w}}(\bar{x},t)=\sum_{a=1}^{\infty}G_aX_a\sin(\omega_a t),\quad G_a=C_{2a}E_a,$$

$$\begin{aligned}X_a=&[-B_a\cosh(k_{e_a}\bar{x})+\sinh(k_{e_a}\bar{x})+\\&B_a\cos(k_{f_a}\bar{x})-\frac{k_{e_a}}{k_{f_a}}\sin(k_{f_a}\bar{x})]\end{aligned}$$

$$B_a=\frac{\frac{k_{ea}}{k_{f_a}}\cos(\frac{k_{f_a}}{2})+\frac{\Psi_{\beta a}}{\Psi_{\gamma_a}}\cosh(\frac{k_{ea}}{2})}{\frac{\Psi_{\beta_a}}{\Psi_{\gamma_a}}\sinh(\frac{k_{ea}}{2})-\sin(\frac{k_{fa}}{2})} \tag{46}$$

سرانجام جابجایی دینامیکی نانوتیر تیموشنکو با تکیه‌گاه دو سر گیردار همانند قسمت قبل و با استفاده از روابط (36) تا (42) به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}\hat{\bar{w}}(\bar{x},t)=&\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_a}\cdot\\&\left(\frac{m_2\bar{v}_2X_a(\frac{1}{2})}{2m_1\int_0^{1/2}X_a^{\,2}dx+m_2X_a^{\,2}(\frac{1}{2})}\right)\cdot\\&[-B_a\cosh(k_{e_a}\bar{x})+\sinh(k_{e_a}\bar{x})+\\&B_a\cos(k_{f_a}\bar{x})-\frac{k_{e_a}}{k_{f_a}}\sin(k_{f_a}\bar{x})]\cdot\sin(\omega_a t)\end{aligned} \tag{47}$$

5- اعتبارسنجی نتایج

برای اعتبار سنجی نتایج در این قسمت، نتایج حاصل از تئوری الاستیسته و تئوری تیر که در [15] آمده است، با نتایج حاصل از این مقاله مقایسه خواهد شد. برای مقایسه نتایج، خواص پرتابه و هدف همانند جدول 1 انتخاب شده است. در این مقایسه دو آزمایش انجام شده است. در آزمایش اول، هم پرتابه و هم هدف فولادی هستند و در آزمایش دوم، جنس پرتابه و هدف از آلومینیوم انتخاب شده است. لازم به ذکر است برای مقایسه نتایج حاصل از این مقاله با نتایج [15] کافی است که مقدار پارامتر غیر محلی $\mu=0$ را قرار داده تا نتایج برای مقیاس ماکرو قابل قیاس باشند.

طول و ضخامت تیر در [15] به ترتیب برابر 200 و 10 میلی‌متر است. تیر از نوع تکیه گاه ساده بوده و در نتیجه برای مقایسه نتایج از رابطه (43) با در نظر گرفتن شش جمله از سری استفاده شده است (با در نظر گرفتن شش جمله اول, نتایج حاصل از این سری با دقت مناسبی همگرا شده‌اند). لازم به ذکر است برای مقایسه نتایج با مرجع [15] در این مرحله، پارامتر غیر محلی $\mu=0$ در نظر گرفته شده است. حداکثر جابجایی مرکز تیر برای سرعت و نسبت جرم 1 ($m=1,v_2=1$) و بر حسب میلی‌متر در جدول 2 نشان داده شده است.

جدول 1 خواص پرتابه و هدف [15]

نوع ماده برای پرتابه و هدف	مدول الاستیسیته (GPa)	چگالی (kgm^{-3})
فولاد	206	7841
آلومینیوم	71	2750

جدول 2 حداکثر جابجایی مرکز تیر (mm)

نوع ماده	تئوری الاستیسیته [15]	تئوری تیر [15]	رابطه (43)
فولاد	0/368	0/304	0/339
آلومینیوم	0/373	0/325	0/344

همان‌گونه که از نتایج جدول 2 ملاحظه می‌شود، مقدار حداکثر جابجایی محاسبه شده با روش جدید و برای یک تیر در مقیاس بزرگ (ماکرو)، تطابق مناسبی با نتایج [15] دارد. لازم به ذکر است که روابط نهایی این تحقیق (روابط (43) و (47))، با تعریف پارامتر غیر محلی μ برای یک نانوتیر (تیر در مقیاس نانو) داده شده است، این در حالی است که با صفر قرار دادن پارامتر غیر محلی می‌توان از این روابط برای یک تیر در مقیاس بزرگ و بر اساس تئوری کلاسیک استفاده کرد (همانند کار سایر محققان [۱۳،۵] برای مسائل استاتیکی و ارتعاشی نانوتیرها). در قسمت بعد درباره نتایج عددی حاصل از روابط این تحقیق، بحث خواهد شد.

6- نتایج عددی و بحث

برای بررسی روابط این تحقیق از پارامترهای زیر و براساس [5] استفاده شده است:

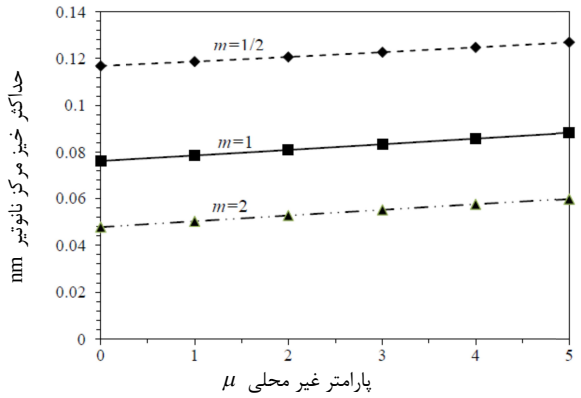
$$E = 30\times10^{6}\,\text{GPa}, \quad \rho = 1\,\text{kg/m}^{3}, \quad h = 0.1\,\text{nm}, \quad L = 10\,\text{nm}, \quad v_2 = 1\,\text{nm/s} \qquad (48)$$

مقدار تغییر شکل حداکثر نانوتیر با تکیه‌گاه ساده و گیردار در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی μ، به ترتیب بر اساس روابط (43) و (47) و با در نظر گرفتن شش جمله از سری و برای مقادیر نسبت جرم $m=1/2,1,2$ در شکل‌های 2 و 3 نشان داده شده است.

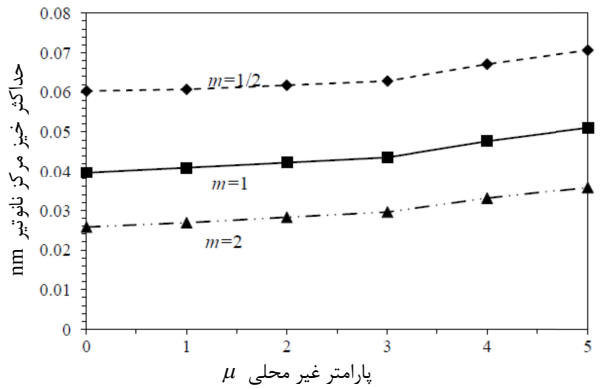
همان‌گونه که از شکل‌های 2 و 3 مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر غیر محلی μ، تغییر شکل حداکثر وسط نانوتیر، در همه نسبت‌های جرم، افزایش یافته است. همچنین با افزایش جرم پرتابه (کاهش نسبت جرم)، تغییر شکل حداکثر برای هر دو تکیه گاه ساده و گیردار، به ازای همه مقادیر μ، افزایش یافته است.

مقادیر فرکانس‌های اول تا ششم در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی μ، به ازای نسبت جرم $m=1$ برای تکیه‌گاه ساده و گیردار، به ترتیب بر اساس معادله‌های مشخصه (33) و (45) در جدول‌های 3 و 4 نشان داده شده است.

همانگونه که از جدول‌های 3 و 4 مشاهده می‌شود، به ازای افزایش پارامتر غیر محلی μ، فرکانس‌های اول تا ششم کاهش پیدا کرده اند. همچنین مقدار فرکانس به ازای هر پارامتر غیر محلی مشخص، از فرکانس اول تا ششم افزایش پیدا کرده است.



شکل 2 تغییر شکل حداکثر نانوتیر با تکیه گاه ساده در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی



شکل 3 تغییر شکل حداکثر نانوتیر با تکیه گاه دو سر گیردار در مقابل تغییرات پارامتر غیر محلی

جدول 3 تغییرات فرکانس‌های اول تا ششم با پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه‌گاه ساده

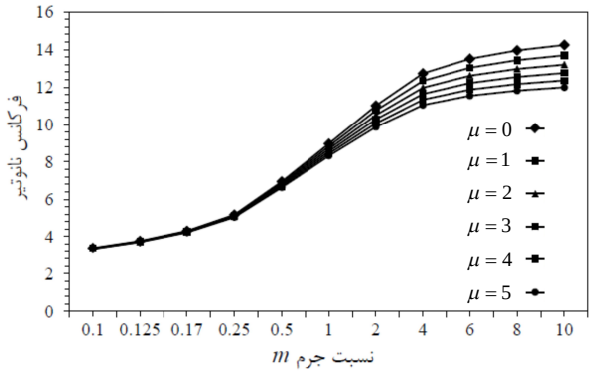
فرکانس	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$
ω_1	8/978	8/836	8/700	8/570	8/446	8/327
ω_2	107/1	86/52	74/48	66/37	60/45	55/87
ω_3	325/5	194/9	152/3	129/3	114/35	103/6
ω_4	665/1	303	226/8	189/12	165/61	149/1
ω_5	1123	407	298/3	246/8	215/1	193/2
ω_6	1697	507/2	367/6	302/8	263/4	236/2

جدول 4 تغییرات فرکانس های اول تا ششم با پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه گیردار

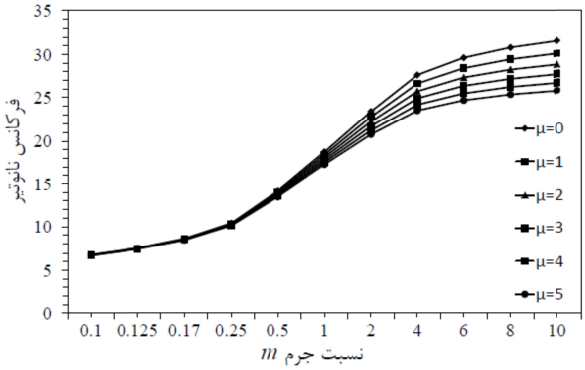
فرکانس	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$
ω_1	18/68	18/36	18/05	17/77	17/49	17/23
ω_2	151/1	120/4	102/9	91/34	82/94	76/49
ω_3	399/3	232/7	180/5	152/7	134/8	122/08
ω_4	769/3	343/7	257/2	214/7	188/2	152/4
ω_5	1257	447/6	327/8	271/1	236/4	169/6
ω_6	1860	548/3	397/8	328	266/1	212/3

مقدار فرکانس‌های اول تا ششم برای نانوتیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار، به علت صلبیت بیشتر، در همه موارد بیشتر از تکیه‌گاه ساده است.

فرکانس اول نانوتیر و مقدار جابجایی مربوط به آن، بیشترین تأثیر را در حداکثر جابجایی مرکز نانوتیر دارد. تغییرات فرکانس اول نانوتیر، بر حسب نسبت جرم و همچنین با در نظر گرفتن اثر پارامترهای غیر محلی، در شکل‌های 4 و 5 نشان داده شده است.



شکل 4 تغییرات فرکانس اول با نسبت جرم به ازای مقادیر پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه گاه ساده



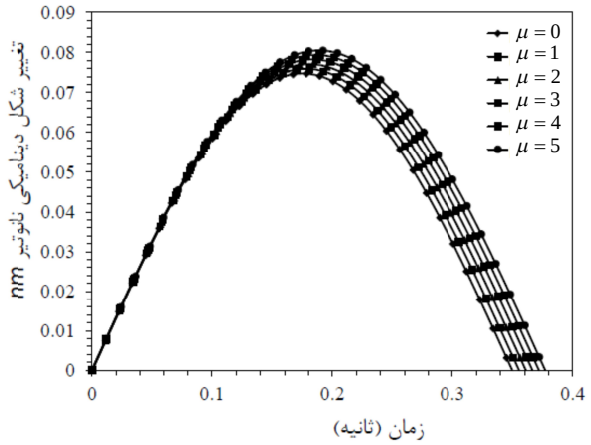
شکل 5 تغییرات فرکانس اول با نسبت جرم به ازای مقادیر پارامتر غیر محلی برای نانوتیر با تکیه گاه دو سر گیردار

همان‌گونه که از شکل‌های 4 و 5 مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت جرم (کاهش جرم پرتابه نسبت به نانوتیر)، بعد از مقدار m=0.5، فرکانس اول نانوتیر در هر دو شرایط مرزی ساده و دوسرگیردار، افزایش قابل توجهی یافته است.

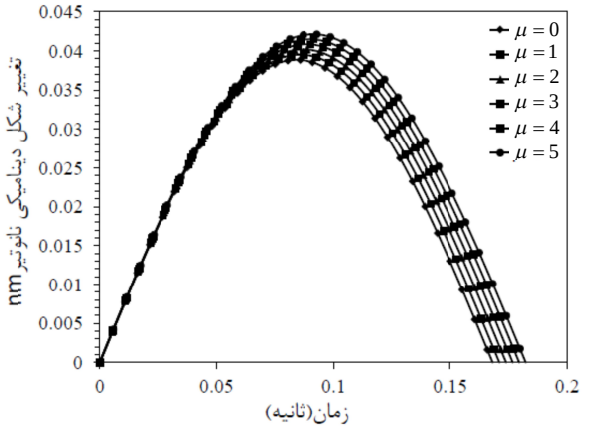
علاوه بر این، با افزایش مقدار پارامتر غیر محلی، فرکانس اول برای هر دو تکیه‌گاه کاهش یافته است. مقدار کاهش فرکانس مطابق شکل‌های 6 و 7، در نسبت‌های جرم بزرگ‌تر، بیشتر است.

به‌طور کلی با افزایش اثر پارامتر غیر محلی حداکثر خیز مرکز نانوتیر افزایش یافته و فرکانس‌های نانوتیر کاهش یافته‌اند. این رفتار نانوتیر به این علت است که از دیدگاه مقیاس نانو می‌توان اتصال اتم‌ها را به‌صورت فنرهایی در نظر گرفت که با افزایش پارامتر غیر محلی (کاهش سختی این فنرها) باعث انعطاف‌پذیری بیشتر نانوتیر می‌شود و این در حالی است که در تئوری محلی این فنرها به صورت صلب در نظر گرفته می‌شوند [8]. هنگامی که جرم پرتابه نسبت به جرم نانوتیر بیشتر است، به عبارتی در نسبت‌های جرمی‌کوچک تأثیر پارامتر غیر محلی قابل توجه نیست (همانند شکل‌های 4 و 5 در نسبت‌های جرمی‌کمتر از m=0.5) و این امر به این علت است که تغییر شکل عمومی‌در این حالت به تغییر شکل محلی غالب بوده و پیوندهای اتمی (فنرهای مذکور) اجازه تغییر شکل را در حین پدیده ضربه پیدا نمی‌کنند.

تغییرات خیز مرکز نانوتیر بر حسب زمان، یا به عبارتی تاریخچه تغییر شکل دینامیکی محل برخورد، برای مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی، در شکل‌های 6 و 7 نشان داده شده است.



شکل 6 تاریخچه تغییر شکل دینامیکی محل برخورد برای نانوتیر با تکیه گاه دو سر ساده



شکل 7 تاریخچه تغییر شکل دینامیکی محل برخورد برای نانوتیر با تکیه گاه دو سرگیردار

برای رسم این شکل‌ها از رابطه (43) برای نانوتیر با تکیه‌گاه ساده، شکل 6 و از رابطه (47) برای نانوتیر با تکیه گاه گیردار، شکل 7 و با در نظر گرفتن نسبت جرم $m=1$ و تنها یک جمله از سری استفاده شده است.

همان‌گونه که از شکل‌های 6 و 7 مشاهده می‌شود، با افزایش پارامتر غیر محلی خیز نانوتیر (تغییر شکل حداکثر)، افزایش داشته و به همین علت زمان رسیدن نانوتیر به حالت تعادل (خیز صفر) افزایش یافته است.

مقدار جابجایی دینامیکی مرکز نانوتیر با تکیه‌گاه ساده، تقریباً دو برابر این مقدار برای تکیه‌گاه گیردار است. در حالی که زمان برخورد در نانوتیر با تکیه‌گاه گیردار، حدوداً نصف زمان برخورد با تکیه‌گاه ساده است.

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تحلیلی جدید، برای بررسی ضربه کم سرعت یک نانوذره، بر روی یک نانوتیر تیموشنکو و بر اساس تئوری غیر محلی ارائه شده است. بر اساس این روش ضربه وارد شده به نانوتیر با شرایط مرزی مناسب و با توجه به مقدار اندازه حرکت پرتابه و نانوتیر بلافاصله بعد از برخورد، بیان شده است. بنابراین در این حالت فقط نیاز به حل معادلات ارتعاشات آزاد نانوتیر است. ابتدا نتایج حاصل از این روش، با استفاده از تحلیل‌های موجود و بر اساس تئوری الاستیسته و تئوری تیر کلاسیک و برای دو ماده مختلف (فولاد و آلومینیم) مقایسه شده و تطابق مناسبی مشاهده شده است. برای مقایسه نتایج حاصل از این مقاله با نتایج تئوری کلاسیک, کافی است که مقدار پارامتر غیر محلی $\mu=0$ را قرار داده تا نتایج برای مقیاس ماکرو قابل استفاده باشند.

در مرحله بعد با استفاده از مقادیر عددی درج شده در سایر مقالات، نتایج حاصل از این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طور کلی با افزایش پارامتر غیر محلی μ، تغییر شکل حداکثر وسط نانوتیر، افزایش و مقدار همه فرکانس‌های نانوتیر در نسبت‌های جرم بیشتر از$m=0.5$، کاهش یافته است. این رفتار به علت انعطاف‌پذیری بیشتر نانوتیر با افزایش پارامتر غیر محلی است.

خیز حداکثر در مرکز نانوتیر در همه مقادیر غیر محلی، برای تکیه ساده بیشتر از تکیه‌گاه دو سرگیردار است. فرکانس‌های نانوتیر با تکیه‌گاه دو سرگیردار، به ازای همه مقادیر غیر محلی، بیشتر از تکیه‌گاه ساده است و این نتیجه به علت صلبیت بیشتر نانوتیر با تکیه‌گاه دو سرگیر دار است.

مقدار جابجایی دینامیکی حداکثر و زمان برخورد در نانوتیر با تکیه‌گاه ساده، تقریباً دو برابر این مقدار برای تکیه‌گاه گیردار است. بعد از اصابت پرتابه به نانوتیر، زمان رسیدن به حالت تعادل (خیز صفر) با افزایش پارامتر غیر محلی، افزایش یافته است.

8- مراجع

[1] Eringen A.C., “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, 1983, pp. 4703–4710.
[2] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[3] Eringen A.C., Edelen D.G.B., "On nonlocal elasticity", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, 1972, pp. 233–248.

[4] Wang C.Y., Zhang J., Fei Y.Q., Murmu T., "Circumferential nonlocal effect on vibrating nanotubules", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 58, No. 1, 2012, pp. 86–90.

[5] Reddy J.N., "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams", *International Journal of Engineering Science,* Vol. 45, No. 2, 2007, pp. 288-307.

[6] Goldsmith W., *Impact, The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids*, Edward Arnold, London, 1960.

[7] Seifoori S., Liaghat G.H., "A semianalytical and numerical study of penetration and perforation of an ogive-nose projectile into concrete targets under normal impact", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 225, No. 8, 2011, pp. 1782-1797.

[8] Wang C.M., Zhang Y.Y., He X.Q., "Vibration of nonlocal Timoshenko beams", *Nanotechnology*, Vol. 18, No. 10, 2007, pp. 105401-105410.

[9] Simsek M., "Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle", *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 7, 2011, pp. 2112-2123.

[10] Lu P., Lee H.P., Lu C., Zhang P.Q., "Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model", *Journal of Applied Physics*, Vol. 99, No. 7, 2006, pp. 73510-73519.

[11] Lu P., Lee H.P., Lu C., Zhang P.Q., "Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 16, 2007, pp. 5289-5300.

[12] Ehteshami H., Hajabasi M.A., "Analytical approaches for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes modeled as multiple nonlocal Euler beams", *Physica E*, Vol. 44, No. 3, 2011, pp. 270-285.

[13] Reddy J.N., "Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 11, 2010, pp. 1507-1518.

[14] Yang J., Ke L.L., Kitipornchai S., "Nonlinear free vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory", *Physica E*, Vol. 42, No. 5, 2010, pp. 1727-1735.

[15] Schonberg W.P., "Predicting the low velocity impact response of finite beams in cases of large area contact", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 8, No. 2, 1989, pp. 87-97.