



حل تحلیلی ارتعاشات عرضی تیر غیرخطی درجه پنجم و بررسی پاسخ فرکانسی آن

محمود پورجمشیدیان^۱، جواد شیخی^۲، سعید محبوب مقدس^{۳*}، مصیب نوروزی نیا^۴

۴-۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

۳- دانشیار گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران

* تهران، کد پستی ۹۴۹۹۷-۱۷۵۶۹، jamshidi@ihu.ac.ir

چکیده- تحلیل ارتعاشات غیرخطی تیرها، که در صنعت و سازه‌های ساختمانی کاربرد وسیعی دارند، دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد. برای رسیدن به یک طراحی مناسب، درک چگونگی ارتعاشات عرضی تیرها و به دست آوردن فرکانس طبیعی آن‌ها بسیار مفید است. لذا در این مقاله، به تحلیل چگونگی ارتعاشات عرضی یک تیر دو سر مفصل، تحت بار محوری ثابت با در نظر گرفتن اثر کشیدگی صفحه میانی و در حضور دمپینگ غیرخطی، در دو حالت تشدید اولیه و ثانویه، با وجود ترم‌های مختلف غیرخطی پرداخته شده است. برای انجام این تحقیق، از روش مقیاس زمانی چندگانه استفاده شده است. به منظور بررسی میزان دقت روش و صحت‌سنجی آن، نتایج به دست آمده از روش حاضر با روش عددی رانگ-کوتای درجه چهارم مقایسه گردید که نشان می‌دهد روش مد نظر دارای دقت زیادی است. همچنین مقایسه‌ای بین این روش و روش تحلیلی هموتویی صورت گرفت که بیان‌گر آن است که در این مسأله، سرعت همگرایی روش مدنظر بیش‌تر از روش هموتویی می‌باشد.

کلیدواژگان: فرکانس غیرخطی، روش مقیاس زمانی چندگانه، دمپینگ غیرخطی.

An analytic solution of transversal vibrations and frequency response of quantic non-linear beam

M. Poorjamshidan¹, J. Sheikhi², S. MahjoobMoghadas^{3*}, M. NorouziNia⁴

1, 4- MSc Student., Mech. Eng., Imam Hossein Univ., Tehran, Iran

2- MSc Student., Civil. Eng., Imam Hossein Univ., Tehran, Iran

3- Assoc. Prof., Dept. of Mech. Eng., Imam Hossein Univ., Tehran, Iran

* P.O.B. 1756994997, Tehran, Iran. jamshidi@ihu.ac.ir

Abstract- Nonlinear vibrations analysis of beams has its own specific importance in industrial, building and civil engineering applications. To achieve a proper design, the understanding of transverse vibrations of double end jointed beams and their nature frequencies, are very useful. In this paper the transverse vibrations analysis of beams with influence of constant axial load are investigated. the effects of mid-plane stretching and nonlinear damping terms in two case of primary and secondary resonance are also addressed. Multiple time scales method is used to make this contribution. In order to verify the accuracy of this method, the results are compared with the results of four order Runge-Kutta numerical method, which has a good accuracy. Comparison of this method and the homotopy method shoes that the convergence of this method is faster than the homotopy method.

Keywords: Non-Linear Frequency, Multiple Time Scales Method, Non-Linear Damping..

۱- مقدمه

تیرها از مهم‌ترین اعضای سازه‌های مهندسی هستند که کاربرد وسیعی در انواع سازه‌ها دارند؛ از سازه‌های در مقیاس میکرو و نانو گرفته همچون: ارتعاش کننده‌های بسیار کوچک، تا سازه‌های در مقیاس ماکرو همچون: بال هواپیما، ماهواره‌های انعطاف‌پذیر و دهنه پل‌های بزرگ. از آنجایی که تیرها کاربردهای وسیعی در عمران، مهندسی مکانیک و صنعت دارند، برای رسیدن به یک طراحی مناسب در عضوهای به شکل تیر، درک چگونگی ارتعاشات تیر در مدهای عرضی آن و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی آن اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. خستگی مواد تشکیل دهنده تیر و خرابی کلی سازه‌ای آن، در ارتعاشات دامنه بزرگ بیشتر نمود پیدا می‌کند، که اثرات مطرح شده حولفرکانس طبیعی خیلی بیش‌تر آشکار می‌شود، [۱]. در این گونه موارد اثرات غیرخطی موجود در معادلات حاکم بر ارتعاشات حرکت تیر، بیش‌تر اهمیت پیدا می‌کند. منابع ایجادکننده ترم‌های غیرخطی در معادله، می‌توانند در حقیقت هندسی، اینرسی یا ماده‌ای باشند. غیر خطی هندسی می‌تواند در اثر کشیدگی صفحه میانی^۱ تیر و انحنای بزرگ تیر به وجود آید و رابطه غیرخطی بین تنش و کرنش ماده‌ی تشکیل دهنده تیر، عامل ایجادکننده غیرخطی ماده‌ای می‌باشد. وجود جرم‌های متمرکز و توزیع شده نامتقارن نیز، عامل ایجاد غیرخطی اینرسی است، [۲]. در تئوری اویلر-برنولی، فرض بر این است که در هنگام تغییر شکل تیر، صفحه‌های سطح مقطع تیر پیوسته به صورت صفحه و عمود بر محور اصلی تیر، باقی می‌مانند؛ همان طور که قبل از تغییر شکل بوده‌اند، [۳]. واقعیت آن است که در این تئوری، از اثرات تغییر شکل برشی و کرنش عمودی عرضی چشم‌پوشی می‌شود، [۴]. پیر بدای و همکاران، با استفاده از روش تحلیلی هموتویی، رفتار غیرخطی یک تیر تحت بار محوری را بررسی کرده و عبارتی مناسب برای بیان فرکانس غیرخطی آن، به دست آوردند، [۵]. صدیقی و همکاران، از این روش برای آنالیز ارتعاشات تیری با دمپینگ غیرخطی استفاده کردند و به نتایج قابل قبولی دست یافتند، [۶]. فودا، از روش مقیاس زمانی چندگانه^۲ برای بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر دو سر مفصل، که در استخراج معادله

آن اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی لحاظ شده بود، استفاده کرد [۷]. رفیعی معادلات یک لوله‌ی نانو کربنی را با شرایط خاص مدل کرده که در آن اثر کشیدگی صفحه میانی نیز به حساب آمده است. سپس از روش فوق برای بررسی پاسخ فرکانسی، در دو حالت تشدید اولیه^۳ و ثانویه^۴ استفاده کرد [۸]. رمضانی و همکاران ارتعاشات یک تیر دو سر گیردار را مورد رسیدگی قرار دادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که برای رسیدن به یک تحقیق دقیق و به موقع در مطالعه سازه‌های الکترومکانیک میکروبی - نانویی، بایستی اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی لحاظ شود [۹]. در بیش‌تر کارهایی که در زمینه بررسی ارتعاشات تیر با دیدگاه غیرخطی، انجام گرفته است، اکثراً ترم غیرخطی درجه سوم را لحاظ نموده و از اثر ترم‌های بالاتر صرف‌نظر کرده‌اند، و سپس به حل تحلیلی مسأله پرداخته‌اند [۱۰-۱۲]. سرما و همکاران، فرمول‌های المان محدود گوناگونی، از ارتعاشات آزاد دامنه بزرگ یک تیر انتها مفصلی را بحث کرده و فرمول تحلیلی را براساس روش ریلی-ریتز ارائه دادند، [۱۳]. حرکت یک تیر با انتهای گیردار و تحت بارگذاری یکنواخت، با استفاده از مدل اویلر-برنولی، توسط پارنل و کوبل بررسی گردید، [۱۴]. از طرفی چن و نایفه، یک تیر یک‌سرگیردار - یک‌سر مفصل را تحت تحریک اولیه، بررسی کردند، [۱۵].

در مقاله حاضر، ابتدا توسط روش مقیاس زمانی چندگانه^۵، پاسخ زمانی تیر غیر خطی به دست آمده است. برای بررسی دقت و صحت جواب به دست آمده، حل تحلیلی با حل به دست آمده از روش عددی رانگ کوتای درجه چهارم^۶، مقایسه شده است. هم‌چنین در ادامه، مقایسه‌ای بین این روش و حل تحلیلی هموتویی صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که در این مسأله، پاسخ روش تحلیلی مطابقت خوبی با روش عددی دارد و سرعت همگرایی آن، نسبت به سایر روش‌ها، بالاتر است. سپس، به بررسی تأثیر پارامترهای طراحی بر پاسخ سیستم، پرداخته شده است. از طرفی برای انجام یک پیش‌بینی دقیق‌تر از رفتار ارتعاشی تیر، پاسخ فرکانسی آن، در حالت‌های مختلف تشدید اولیه و ثانویه، به دست آورده شده است. آن‌گاه

3. Primary Resonance

4. Secondary Resonance

5. Poincare - Lindstedt Method

6. Runge - Kutta Method Fourth Order

1. Mid-Plane Stretching

2. Multiple Time Scale (MIS)

$$\begin{aligned} & \times (\phi'^2 \phi^{(4)}) Y^3(t) + \frac{9}{4} EI (\phi'^4 \phi^{(4)}) \\ & \times Y^5(t) + EI \phi^{(4)} Y(t) + P_0 \phi Y(t) + \\ & \frac{3}{2} P_0 (\phi'^2 \phi'') Y^3(t) \phi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

با توجه به شکل مد اول تیر دو سر مفصل، $f(x) = \sin \pi x / L$ معادله (۳)، به صورت معادله (۴) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} & \ddot{Y}(t) + \frac{c}{m} \dot{Y}(t) + \left(\frac{EI \pi^4}{ml^4} - \frac{P_0 \pi^2}{ml^2} \right) Y(t) - \\ & \left(\frac{P_0 \pi^4}{2ml^4} + \frac{7EI \pi^6}{8ml^6} \right) Y^3(t) - \frac{27EI \pi^8}{20ml^8} \\ & Y^5(t) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ترم‌های غیرخطی موجود در معادله (۴) حاصل کشیدگی صفحه میانی تیر به دلیل ارتعاشات دامنه بزرگ آن می‌باشند. برای سادگی، می‌توان معادله (۴) را به شکل خلاصه معادله (۵) نوشت:

$$\ddot{Y} + \mu \dot{Y} + \omega_n^2 Y - \beta Y^3 - q Y^5 = 0 \quad (5)$$

فرض می‌شود ضریب دمپینگ برای تیر به شکل معادله (۶) تعریف شود.

$$\mu(Y) = \mu - \alpha Y^2 + \lambda Y^4 \quad (6)$$

در نتیجه، معادله حاکم بر ارتعاشات عرضی یک تیر تحت دمپینگ غیرخطی و تحریک خارجی، به صورت معادله (۷) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} & \ddot{Y} + (\mu - \alpha Y^2 + \lambda Y^4) \dot{Y} + \omega_n^2 Y - \beta Y^3 - \\ & q Y^5 = k \cos \Omega t \end{aligned} \quad (7)$$

در معادله (۷)، ترم $k \cos(\Omega t)$ ، تحریک خارجی می‌باشد. در ادامه به حل معادله (۷) پرداخته شده است.

۳- تحلیل ارتعاشات آزاد

در ابتدا، با صرف‌نظر از تحریک خارجی معرفی شده در معادله (۷)، حالت ارتعاشات آزاد تیر تحت دمپینگ غیرخطی، بررسی شده است. با توجه به ماهیت ترم‌های غیرخطی موجود در معادله حاکم بر ارتعاشات تیر، از روش مقیاس زمانی برای حل مسأله استفاده می‌شود. برای امکان اعمال روش مقیاس زمانی چندگانه، معادله (۷) به صورت معادله (۸)، بازنویسی شده است.

تأثیر مشخصه‌های مختلف، از جمله: ضرایب دمپینگ و ترم‌های غیرخطی و همچنین اثر دامنه تحریک بر پاسخ فرکانسی سیستم، بررسی شده است.

۲- فرمول‌بندی مسأله

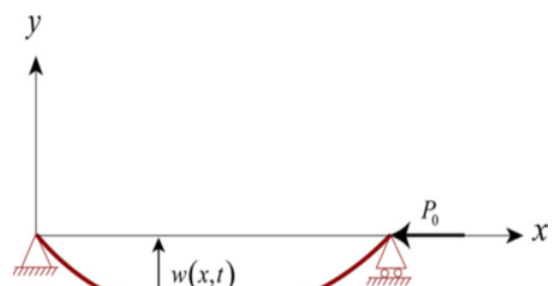
معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر حرکت خمشی یک تیر دو سر مفصل با ترم غیرخطی درجه پنجم، تحت نیروی محوری ثابت، به شکل معادله (۱) به دست آمده است [۱۶].

$$\begin{aligned} & m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + c \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{27}{2} EI \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 - \\ & 3EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 - 3EI \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \\ & \frac{9}{4} EI \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \\ & P_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{3}{2} P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

در معادله (۱)، w تغییر شکل عرضی تیر، m جرم واحد طول، E مدول الاستیسیته، I ممان اینرسی مقطع و P_0 نیروی محوری ثابت است. اکنون حل معادله (۱) به صورت معادله (۲) فرض می‌شود.

$$w(x, t) = Y(x) \phi(t) \quad (2)$$

با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱) و با استفاده از روش گالرکین، معادله (۱)، به صورت معادله (۳) بازنویسی می‌شود.



شکل ۱ مدل یک تیر دو سر مفصل با یک تکیه‌گاه آزاد در جهت طولی و تحت بار محوری ثابت

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left(m \phi(x) \ddot{Y}(t) + c \phi(x) \dot{Y}(t) + \frac{27}{2} EI \phi^2 \right. \\ & \left. \phi''^3 Y^5(t) - 3EI (\phi'' Y(t))^3 - 3EI \right. \end{aligned}$$

$O(\varepsilon^1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_1(T_0, T_1, T_2)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 Y_1(T_0, T_1, T_2) = - \\ \mu \frac{\partial}{\partial T_0} Y_0(T_0, T_1, T_2) - \lambda a_0^4 \\ \times Y_0(T_0, T_1, T_2)^4 \frac{\partial}{\partial T_0} Y_0(T_0, T_1, T_2) - \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} Y_0(T_0, T_1, T_2) + a_0^2 \alpha \\ \times Y_0(T_0, T_1, T_2)^2 \frac{\partial}{\partial T_0} Y_0(T_0, T_1, T_2) \\ + \beta a_0^2 Y_0(T_0, T_1, T_2)^3 + q a_0^4 \\ \times Y_0(T_0, T_1, T_2)^5 \end{aligned} \quad (14)$$

$O(\varepsilon^2)$:

با جایگذاری معادله (۱۳) در معادله (۱۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} D_0^2 Y_1 + \omega_n^2 Y_1 = \\ \frac{1}{16} (4\beta a_0^2 + 5q a_0^4) \cos(3\omega_n T_0 + 3\beta_0(T_1, T_2)) + \\ \frac{3}{16} \omega_n a_0^2 \left(\lambda a_0^2 + \frac{4}{3} \alpha \right) \sin(3\omega_n T_0 + 3\beta_0(T_1, T_2)) \\ + \frac{1}{16} q a_0^4 \cos(5\omega_n T_0 + 5\beta_0(T_1, T_2)) + \frac{1}{16} \lambda a_0^4 \omega_n \\ \times \sin(5\omega_n T_0 + 5\beta_0(T_1, T_2)) + \frac{32}{16} \left(\frac{\partial}{\partial T_1} \beta_0(T_1, T_2) \right) \\ \times \omega_n \cos(\omega_n T_0 + \beta_0(T_1, T_2)) + \left(\frac{10}{16} q a_0^4 + 12\beta a_0^2 \right) \\ \times \cos(\omega_n T_0 + \beta_0(T_1, T_2)) + \frac{1}{8} (8\mu - 2a_0^2 \alpha + y a_0^4) \omega_n \\ \times \sin(\omega_n T_0 + \beta_0(T_1, T_2)) \end{aligned} \quad (15)$$

شرط حل‌پذیری معادله (۱۵)، جلوگیری از شکل‌گیری ترم‌های بسیار بزرگ^۲ در پاسخ زمانی است. لذا باید، ضریب ترم‌های $\sin(\omega_0 T_0 + \beta_0(T_1, T_2))$ و $\cos(\omega_0 T_0 + \beta_0(T_1, T_2))$ در معادله (۱۵) صفر در نظر گرفته شود، تا ترم‌هایی به شکل $t \sin(\omega_0 T_0 + \beta_0(T_1, T_2))$ و $t \cos(\omega_0 T_0 + \beta_0(T_1, T_2))$ در پاسخ ظاهر نشود. بنابراین معادلات (۱۶) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \dot{Y} + \varepsilon (\mu - \alpha Y^2 + \lambda Y^4) \dot{Y} + \omega_n^2 Y \\ - \varepsilon (\beta Y^3 + q Y^5) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

که در معادله (۸)، ε پارامتری کوچک و بدون بعد می‌باشد. در روش مقیاس زمانی چندگانه، مقیاس‌های زمانی به صورت $T_n = \varepsilon^n t$ معرفی شده، که به ترتیب بیان‌گر مقیاس‌های زمانی، از سریع تا کند، هستند. با استفاده از این روش، پاسخ معادله (۸) به صورت معادله (۹) فرض شده است:

$$\begin{aligned} Y(T_0, T_1, T_2, \dots, T_n) = Y_0(T_0, T_1, \dots, T_n) + \\ \varepsilon Y_1(T_0, T_1, \dots, T_n) + \dots + \\ \varepsilon^n Y_n(T_0, T_1, \dots, T_n) + O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

از طرفی مشتقات با استفاده از روش زنجیره‌ای به صورت معادله (۱۰) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 [2D_0 D_2 + D_1^2] \end{aligned} \quad (10)$$

هم‌چنین با توجه به نوع دمپینگ موجود در معادله حاکم بر حرکت، نتیجه می‌شود که سیستم از نوع خود-نگهدارنده^۱ بوده [۲]، و لذا، برای به دست آوردن دامنه ارتعاشات، با کمک ε دامنه به صورت معادله (۱۱) بسط داده شده است:

$$a(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots \quad (11)$$

به همین خاطر معادله (۸) به شکل معادله (۱۲) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{Y} + \varepsilon (\mu - \alpha a^2(\varepsilon) Y^2 + \lambda a^4(\varepsilon) Y^4) \dot{Y} + \\ \omega_n^2 Y + \varepsilon (\beta a^2(\varepsilon) Y^3 + q a^4(\varepsilon) Y^5) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

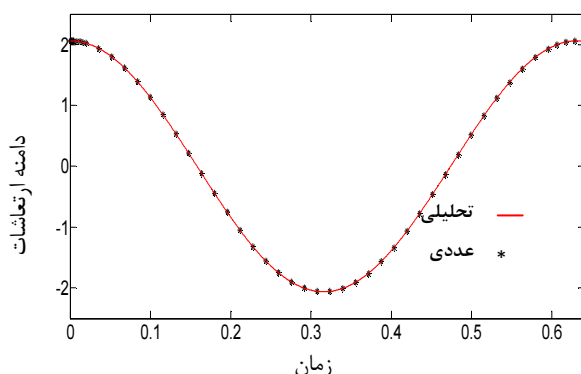
با جایگزینی معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۱) در معادله (۱۲) و مساوی قرار دادن توان‌های یکسان ε در دو طرف معادله، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل عادی به شکل معادله (۱۳) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^0): \\ \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} Y_0(T_0, T_1, T_2) + \omega_n^2 Y_0(T_0, T_1, T_2) = 0 \\ \rightarrow Y_0 = \cos(\omega_n T_0 + \beta_0(T_1, T_2)) \end{aligned} \quad (13)$$

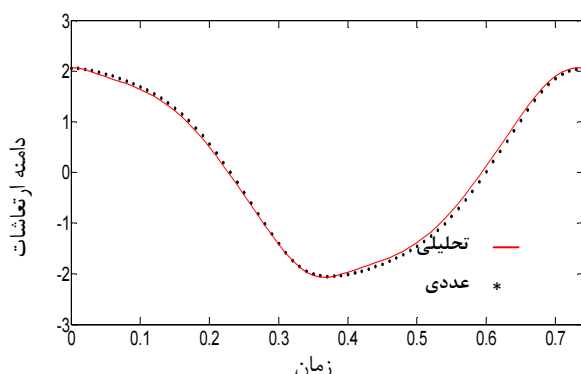
1. Self-Sustained

2. Secular Term

دست آمده به روش مقیاس زمانی، در دامنه وسیعی از مقادیر ε ، کاملاً با نتایج حاصل از حل مسأله با روش عددی رانگ - کوتای مرتبه چهارم منطبق هستند. در واقع در مقادیر کوچک ε انطباق روش تحلیلی و عددی بیشتر است که بیانگر وابستگی روش به مقدار پارامتر کوچک ε است.



شکل ۲ مقایسه بین حل تحلیلی با $\varepsilon = 0.2$ و حل عددی



شکل ۳ مقایسه بین حل تحلیلی با $\varepsilon = 0.8$ و حل عددی

جدول ۱ مقایسه مقادیر دامنه به دست آمده از روش حاضر

و روش هموتویی [۶]

مرتبه تقریب روش حاضر	مقدار دامنه (a)	مرتبه تقریب روش هموتویی	مقدار دامنه (a)
۱	۲/۰۲۶۰۳۹۲۲	۲	۲/۰۷۳۱۶۹۰۲
۲	۲/۰۶۰۹۱۶۴۳	۴	۲/۰۶۳۵۵۲۲۵
۳	۲/۰۶۱۹۲۳۵۶	۸	۲/۰۶۱۹۲۵۹۲

در شکل‌های ۴ و ۵، اثر ضریب ترم‌های غیرخطی درجه سوم و پنجم بر پاسخ زمانی سیستم، بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار این دو ضریب، پریود

$$32 \left(\frac{\partial}{\partial T_1} \beta_0(T_1, T_2) \right) \omega_n + 10q a_0^4 + 12\beta a_0^2 = 0$$

$$8\mu - 2a_0^2 \alpha + \lambda a_0^4 = 0 \quad (16)$$

با حل دستگاه معادلات (۱۶) عباراتی به صورت معادلات (۱۷) محاسبه می‌شوند.

$$\beta_0(T_1, T_2) = -\frac{1}{32} \frac{(10q a_0^4 + 12\beta a_0^2)}{\omega_n} T_1 + \beta_1(T_2)$$

$$a_0 = \left(\frac{\alpha + (\alpha^2 - 8\lambda\mu)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

به این ترتیب، با حل معادله (۱۵)، تخمین مرتبه دوم پاسخ به صورت معادله (۱۸) خواهد شد.

$$Y_1 = M_1 \cos(3\omega_n T_0 + 3\beta_0(T_1, T_2)) +$$

$$M_2 \sin(3\omega_n T_0 + 3\beta_0(T_1, T_2)) +$$

$$M_3 \cos(5\omega_n T_0 + 5\beta_0(T_1, T_2)) +$$

$$M_4 \sin(5\omega_n T_0 + 5\beta_0(T_1, T_2)) \quad (18)$$

که ضرایب $M_1, M_2, \dots$ در معادله (۱۸)، در پیوست آمده است. به صورت مشابه، می‌توان تخمین‌های بالاتر را محاسبه کرد. پس از محاسبه تخمین‌های بالاتر Y_1, Y_2 و غیره، آن‌ها را در معادله (۱۹) قرار داده و در دامنه $a(\varepsilon)$ ، که هم‌زمان با محاسبه مراتب بالاتر، ترم‌های بعدی آن نیز محاسبه می‌شود، ضرب خواهد شد. سپس، تنها ثابت انتگرالی ایجاد شده در $\beta_0(T_1, T_2)$ با اعمال تنها شرط اولیه مورد نیاز برای مسأله، یعنی $Y(0) = 0$ ، به دست آورده می‌شود.

برای بررسی دقت و صحت نتایج بدست آمده از روش فوق، در جدول ۱ مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از این روش و حل تحلیلی هموتویی، که یک روش جدید و دقیق در حل مسائل غیرخطی است [۱۷، ۶]، انجام گرفت، که بیانگر آن است، در مسأله حاضر، سرعت همگرایی روش به کار رفته در این مقاله، چون مقدار ε کوچک فرض شده است بیش‌تر از روش هموتویی می‌باشد، چرا که در روش هموتویی وابستگی به وجود پارامتر کوچک ε وجود ندارد. بنابراین از این روش می‌توان برای سیستم‌های دارای ویژگی خودنگه‌دارنده‌گی، به طور گسترده استفاده کرد.

همان‌طور که در شکل‌های ۲ و ۳ می‌توان دید، نتایج به

با جایگذاری (۲۱) در (۲۲)، و برای جلوگیری از به وجود آمدن ترم‌های بزرگ زمانی، بایستی ضریب ترم $e^{i\omega T}$ برابر صفر قرار داده شود در نتیجه معادله (۲۳) محاسبه خواهد شد:

$$\begin{aligned} & -2i\omega_n \frac{\partial A}{\partial T_1} - 2\left(\bar{A}^2(-5q + i\lambda\omega_n)A^2\right)A \\ & - (\bar{A}(3\beta + i\alpha\omega_n)A + i\mu\omega_n)A \\ & + \frac{1}{2}k e^{\sigma T_1} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

با فرض $A = (a(T_1)/2)e^{i\beta_0(T_1)}$ و جایگذاری در معادله (۲۲) معادله (۲۴) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\mu\omega_n a + \frac{1}{16}\lambda\omega_n a^5 - \frac{1}{8}\alpha\omega_n a^3 \\ & - \frac{1}{2}k \sin(\sigma T_1 - \beta_0) = 0 \\ & \frac{3}{8}\beta a^3 + \frac{5}{16}q a^5 + a\beta'\omega_n + \frac{1}{2}k \cos(\sigma T_1 - \beta_0) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

معادله فرکانسی سیستم، با تعریف $\theta = \sigma T_1 - \beta_0$ و توجه به این موضوع که در حالت پاسخ یکنواخت^۲، تغییرات a و θ صفر خواهد بود، به شکل معادله (۲۵) خواهد شد.

$$\begin{aligned} k^2 = & 4\omega_n^2 \left(-\frac{1}{8}\alpha a^3 + \frac{1}{16}\lambda a^5 + \frac{1}{2}\mu a \right)^2 + \\ & 4\omega_n^2 \left(\frac{3}{8\omega_n}\beta a^3 + aq + \frac{5}{16}\frac{\delta}{\omega_n}a^5 \right)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

در شکل‌های ۶، ۷ و ۸ اثر پارامترهای طراحی، از جمله ضرایب دمپینگ غیرخطی و دامنه تحریک خارجی، بر پاسخ فرکانسی سیستم بررسی شده است. آنچه که مشخص است، افزایش مقدار دامنه تحریک باعث افزایش میزان نرم‌شوندگی سیستم ارتعاشی می‌شود و همچنین مشاهده می‌شود که، اثر ضرایب ترم‌های دمپینگ غیرخطی درجه سوم و پنجم، عکس هم است. برای مثال با افزایش ضریب دمپینگ غیرخطی درجه پنجم می‌توان از ایجاد پرش^۳ در سیستم جلوگیری کرده در صورتی که ضریب ترم دمپینگ غیرخطی درجه سوم عکس این اتفاق را سبب می‌شود. در شکل‌های ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود که تأثیر ضرایب ترم‌های غیرخطی روی پاسخ فرکانسی از نوع نرم‌شونده بوده که تأیید کننده شکل‌های ۲ و ۳، یعنی افزایش پریود زمانی هم‌زمان با افزایش مقدار این ضرایب، می‌باشند.

زمانی پاسخ افزایش می‌یابد؛ یعنی افزایش آنها باعث کاهش فرکانس ارتعاش سیستم می‌شود.

۴- تحلیل ارتعاشات اجباری

۴-۱- تشدید اولیه: برای بررسی این حالت، معادله (۷) به شکل معادله (۱۹) بازنویسی شده است.

$$\begin{aligned} & \ddot{Y} + \varepsilon(\mu - \alpha Y^2 + \lambda Y^4)\dot{Y} + \omega_n^2 Y - \\ & \varepsilon(\beta Y^3 + q Y^5) = \varepsilon k \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

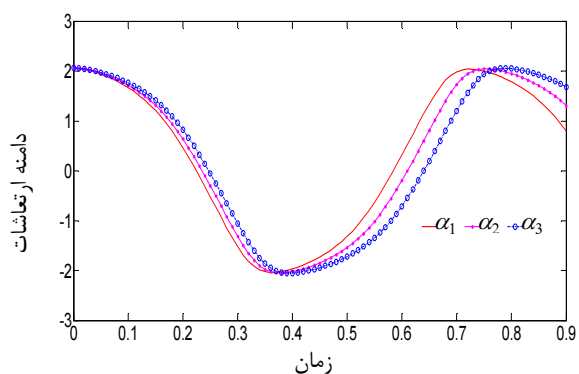
که در معادله (۱۹) تعریف معادله (۲۰) وجود دارد.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (20)$$

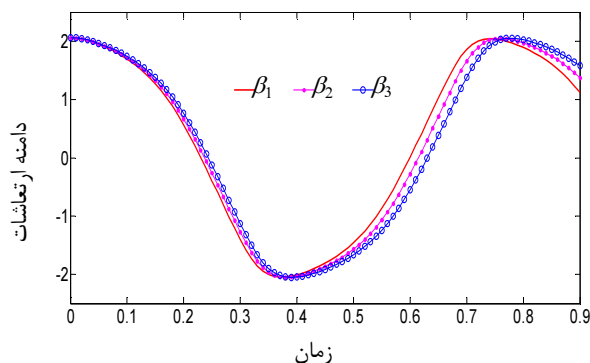
σ پارامتر انحراف از تشدید^۱ می‌باشد. در این حالت می‌توان نوشت:

$$D_0^2 Y_0 + \omega_n^2 Y_0 = 0 \rightarrow Y_0 = A(T_1)e^{i\omega_n T_0} + cc \quad (21)$$

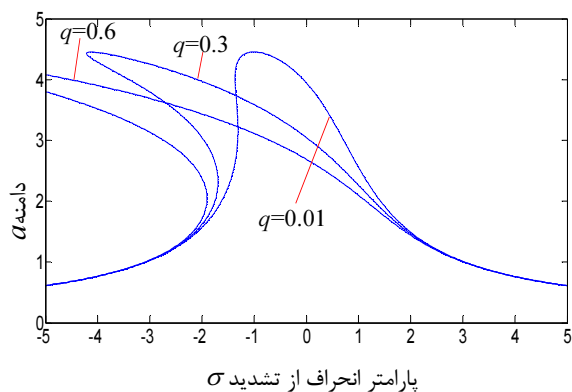
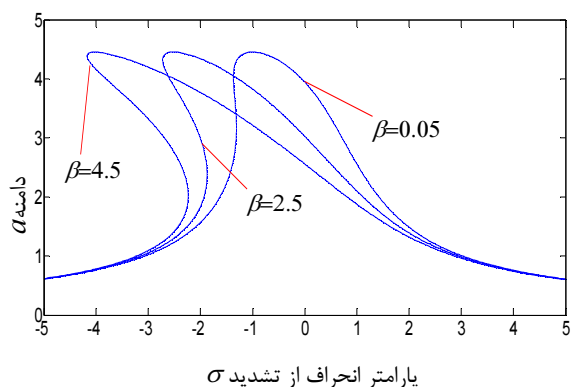
$$\begin{aligned} D_0^2 Y_1 + \omega_n^2 Y_1 = & -\mu D_0 Y_0 - \lambda y_0 D Y_0 - 2D_0 D_1 Y_0 + \\ & \alpha Y_0^2 D_0 Y_0 + \beta Y_0^3 + q Y_0^5 + k \cos(\omega_n T_0 + \sigma T_1) \end{aligned} \quad (22)$$



شکل ۴ پاسخ زمانی سیستم به ازای: $\alpha = 0.5, 2.5, 4.5$



شکل ۵ پاسخ زمانی سیستم به ازای: $\beta = 0.5, 2.5, 4.5$

شکل ۹ پاسخ فرکانسی تیر برای سه مقدار متفاوت q شکل ۱۰ پاسخ فرکانسی تیر به ازای مقدارهای متفاوت برای β

در این حالت پارامتر انحراف از تشدید به صورت معادله (۲۷) بیان می‌شود.

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (27)$$

$O(\varepsilon^0)$:

$$D_0^2 Y_0 + \omega_n^2 Y_0 = k \cos(\Omega t) \rightarrow$$

$$Y_0 = A(T_1) e^{i\omega_n T_0} + \frac{1}{2} \frac{k}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} e^{i\Omega T_0} + c_0 c_0 \quad (28)$$

$O(\varepsilon^1)$:

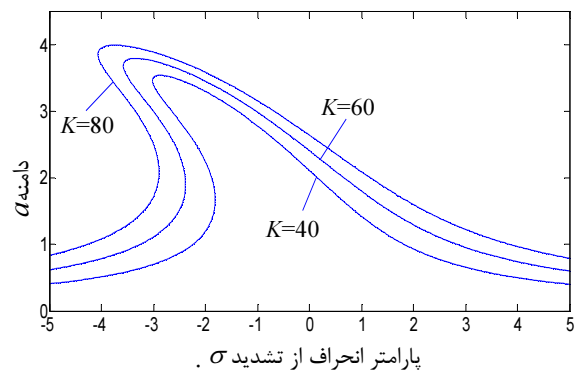
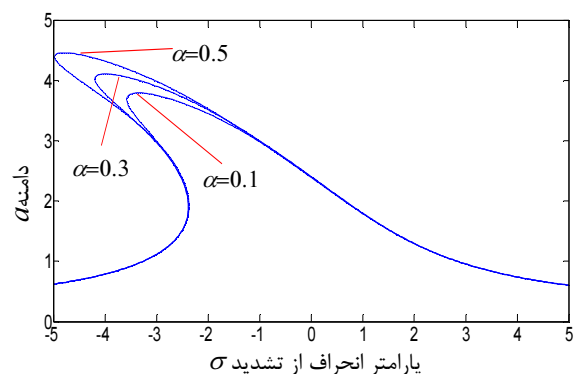
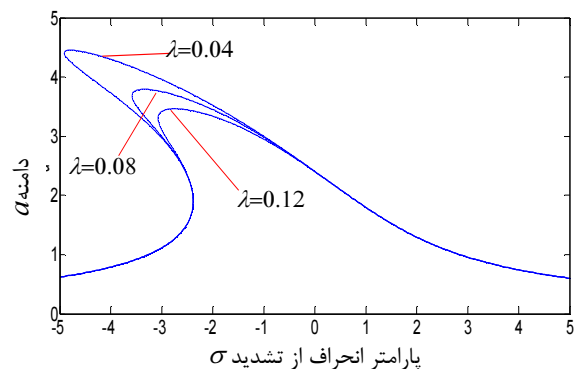
$$D_0^2 Y_1 + \omega_n^2 Y_1 = -\mu D_0 Y_0 - \lambda Y_0 D_0 Y_0 - 2D_0 D_1 Y_0 - \alpha D_0 Y_0 Y_0^2 + \beta Y_0^3 + q Y_0^5 \quad (29)$$

با جایگذاری معادله (۲۸) در معادله (۲۹) و همچنین با برقرار بودن فرضیات قبلی، در حالتی که فقط ترم غیرخطی درجه سوم و ضریب دمپینگ در نظر گرفته شده است، پاسخ فرکانسی به شکل معادله (۳۰) به دست می‌آید.

۲-۴ تشدید ثانویه:

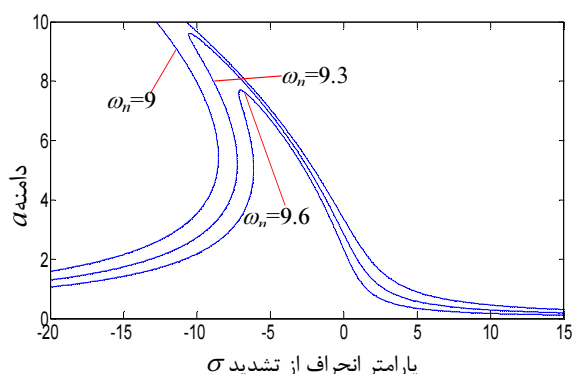
۱-۲-۴ حالت سوپر هارمونیک^۱: برای بررسی تشدید ثانویه، معادله (۷) به صورت معادله (۲۶) بازنویسی شده است:

$$\ddot{Y} + \varepsilon(\mu - \alpha Y^2 + \lambda Y^4) \dot{Y} + \omega_n^2 Y - \varepsilon(\beta Y^3 + q Y^5) = k \cos \Omega t \quad (26)$$

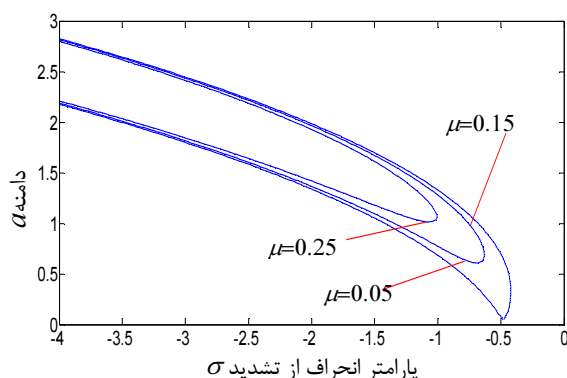
شکل ۶ پاسخ فرکانسی تیر به ازای مقادیر متفاوت K شکل ۷ پاسخ فرکانسی تیر به ازای مقادیر متفاوت α شکل ۸ پاسخ فرکانسی تیر به ازای مقادیر متفاوت λ

1. Super Harmonic

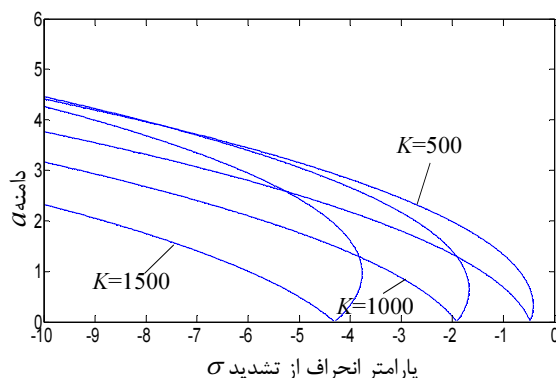
چندگانه است، مقایسه‌های انجام گرفته بین آن و روش عددی و تحلیلی هموتوبی، بیانگر آن است که این روش هم دارای دقت زیادی در حل این گونه مسائل، دارای ویژگی خودنگه‌دارنده، می‌باشد و هم سرعت همگرایی آن نسبت به روش‌های تحلیلی دیگر، روش معروف هموتوبی، بیش‌تر است.



شکل ۱۱ پاسخ فرکانسی در حالت تشدید ثانویه (سوپر هارمونیک)



شکل ۱۲ پاسخ فرکانسی در حالت تشدید ثانویه (مادون هارمونیک)



شکل ۱۳ پاسخ در حالت تشدید ثانویه (مادون هارمونیک)

از طرفی، کشیدگی صفحه میانی تیر در اثر ارتعاشات دامنه بزرگ باعث ایجاد دو ترم غیرخطی درجه سوم و پنجم می‌شود.

$$\begin{cases} \omega_n \frac{\partial a}{\partial T_1} + \mu \omega_n \frac{a}{2} - \beta l^3 \sin(\sigma T_1 - \beta) = 0 \\ a \frac{\partial \beta_0}{\partial T_1} \omega_n + \frac{3}{8} \beta a^3 + 3 \beta k^2 + \beta k^3 \\ \cos(\sigma T_1 - \beta_0) = 0 \end{cases}$$

$$(\beta L^3)^2 = \left(a \omega_n \sigma + \frac{3}{8} \beta a^3 + 3 \beta L^2 \right)^2 + \frac{1}{4} (\mu \omega_n a)^2 \rightarrow L = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (30)$$

و در شرایطی که فقط دمپینگ غیرخطی درجه سوم در معادله نگه داشته شود، معادله فرکانسی به شکل معادله (۳۱) خواهد شد:

$$\left(\frac{\alpha \Omega L^3}{\omega_n} \right)^2 = (\alpha \sigma)^2 + \left(\frac{\mu a}{2} - \frac{1}{8} \alpha a^3 - \alpha k^2 \right)^2 \quad (31)$$

۴-۲-۲- حالت مادون هارمونیک:

در این حالت، از آن جایی که $\Omega = 3\omega_n + \varepsilon \sigma$ می‌باشد، معادله پاسخ فرکانسی برای شرایطی که تنها ترم غیرخطی درجه‌ی سوم و ضریب دمپینگ خطی نگه داشته شود، به صورت معادله (۳۲) به دست خواهد آمد:

$$\left[\frac{2\mu\omega_n}{3L\beta a} \right]^2 + \left[\frac{9a^2\beta}{8\omega_n} + \frac{9\beta L^2}{\omega_n} + q \right]^2 \left[\frac{9\omega_n}{9L\beta a} \right]^2 = 1 \quad (32)$$

در شکل ۱۱ منحنی پاسخ فرکانسی سیستم در حالت سوپرهارمونیک و به ازای مقادیر متفاوت ω_n آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اثر این پارامتر و ضریب تحریک خارجی یکسان است. شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به ترتیب پاسخ فرکانسی را در حالت مادون هارمونیک و برای مقادیر متفاوت از ضریب دمپینگ خطی و همچنین ضریب تحریک خارجی نشان می‌دهند. در این شکل‌ها، همچنین پدیده بایفرکیشن قابل مشاهده می‌باشد به گونه‌ای که به ازای هر مقدار انحراف از تشدید دو دامنه وجود دارد.

۵- نتیجه‌گیری

روشی که در مقاله حاضر استفاده شد، روش مقیاس زمانی

- "On the homotopy analysis method for non-linear vibration of beams", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 2, Ap. 24, 2009.
- [6] Sedighi H.M., Shirazi K.H., ZareJ., "An analytic solution of transversal oscillation of quantic non-linear beam with homotopy analysis method", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, No. 1, Ap. 25, 2012, pp. 777-784.
- [7] Foda M.A., "Influence of shear deformation and rotary inertia on nonlinear free vibration of a beam with pinned Ends", *Journal Computers and Structures*, Vol. 71, No. 20, 1998, pp. 663-670.
- [8] Rafiee R., "Analysis of nonlinear vibrations of a carbon nanotube using perturbation technique", *Journal of mechanics modares*, Vol. 12, No. 3, 2012, pp. 60-67. (In Persian)
- [9] Ramezani A., Alasty A., Akbari J., "Effects of rotary inertia and shear deformation on nonlinear free vibration of microbeams", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 128, No. 2, Apr. 12, 2006, pp. 611-615.
- [10] Sedighi H.M., Shirazi K.H., ZareJ., "Novel equivalent function for deadzone nonlinearity: applied to analytical solution of beam vibration using He's parameter expanding method", *Latin Am. Journal of Solids Structure*, Vol. 9, No. 3, Ma. 14 2012, pp. 130-138.
- [11] Barari A., Kaliji H.D., Ghadami M., Domairry G., "Non-linear vibration of Euler- Bernoulli beams", *Latin Am. Journal of Solids Structure*, Vol. 8, No. 2, 2011, pp. 139-148.
- [12] Aghababaei O., Nahvi H., Ziaei-Rad S., "Dynamic bifurcation and sensitivity analysis on dynamic responses of geometrically imperfect base excited cantilevered beams", *Journal of Vibroengineering*, Vol. 13, No. 2, Oct. 6, 2009, pp. 52-65.
- [13] Sarma B.S., Vardan T.K., Parathap H., "On various formulation of large amplitude free vibration of beams", *Journal of Computers and Structures*, Vol. 29, No. 1, 1988, pp. 959-966.
- [14] Parnell L.A., Cobble M.H., "Lateral displacement of a cantilever beam with a concentrated mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44, No. 1, Feb. 22, 1976, pp. 499-510.
- [15] Chin C.M., Nayfeh A.H., "Three-to-one internal resonance in hinged-clamped beams", *Journal of the Nonlinear Dynamics*, Vol. 12, No. 1, 1997, pp. 129-154.
- [16] Zhang W., Feng X.W., Jean W.Z., "Local bifurcations and codimension-3 degenerate bifurcations of a quintic nonlinear beam under parametric excitation", *Journal of Chaos Solitons Fractals*, Vol. 24, No. 2, Sep. 15, 2005, pp. 977-998.
- [17] Rafeipo H., Lotfavar A., Hamzeh Shalamzari s., "Nonlinear vibration analysis of functionally graded beam on winkler-pasternak foundation under mechanical and thermal loading via homotopy analysis method", *Journal of mechanics modares*, Vol. 12, No. 2, 2012, pp. 87-101. (In Persian)

همان‌طور که در شکل‌های پاسخ زمانی پیداست، حساسیت پاسخ، به تغییر ضریب ترم غیرخطی درجه پنجم بیش‌تر است پس در محاسبات دقیق برای بررسی درست رفتار سیستم‌های ارتعاشی لازم است که این ترم را نیز به حساب آورد. در پاسخ فرکانسی آن‌چه که بیش‌تر مورد توجه قرار می‌گرفت، اثر نرم-شوندگی ایجاد شده توسط این دو ترم غیرخطی است که افزایش آنها باعث افزایش پریود زمانی پاسخ می‌گردد. از طرفی افزایش مقدار ω_n و دامنه تحریک خارجی، تأثیر یکسانی بر پاسخ فرکانسی دارند زیرا هر دوی آنها باعث افزایش نرم-شوندگی غیرخطی می‌شوند. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، ضرایب درجه سوم و پنجم دمپینگ غیرخطی، دارای تأثیر عکس هم هستند، به گونه‌ای که با افزایش مقدار ضریب دمپینگ درجه پنجم می‌توان از پرش در پاسخ فرکانسی جلوگیری کرد، در صورتی که افزایش ترم درجه سوم باعث قوی‌تر شدن احتمال پرش می‌شود.

۶- پیوست

$$M_1 = -\frac{1}{128} \frac{(4\beta a_0^2 + 5qa_0^4)}{\omega_n^2} \quad (\text{پ-۱})$$

$$M_2 = -\frac{\left(\frac{3a_0^2}{128}\right)\left(\lambda a_0^2 - \frac{4}{3}\alpha\right)}{\omega_n} \quad (\text{پ-۲})$$

$$M_3 = -\frac{qa_0^4}{384\omega_n^2} \quad (\text{پ-۳})$$

$$M_4 = -\frac{\lambda a_0^4}{384\omega_n} \quad (\text{پ-۴})$$

۷- مراجع

- [1] Ahmadian M.T., Mojahedi M., "Free Vibration Analysis of a Nonlinear Beam Using Homotopy and Modified Lindstedt-Poincare Methods", *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 1, No. 1, Ma. 20, 2009, pp. 29-36.
- [2] Nayfeh A.H., Mook D.T., *Nonlinear Oscillations*, First Ed., New York, Wiley, 1979.
- [3] Shames I.H., Dym C.L., *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, First Ed., New York, McGraw-Hill, 1985.
- [4] Malatkar P., *Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates*, PhD Thesis, Virginia, Virginia Polytechnic Institute, 2003.
- [5] Pirbodaghi T., Ahmadian M.T., Fesanghary M.,