



## محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی در مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی با روش المان محدود توسعه یافته

محمدباقر نظری<sup>۱\*</sup>، محمد جعفری<sup>۲</sup>، مجتبی حاجی محمدی<sup>۳</sup>

۱-۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

\* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۸۷۸۵۵۴۵، mbnazari@shahroodut.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله، از روش المان محدود توسعه یافته برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک تحت شوک مکانیکی و حرارتی استفاده شده است. معادلات ترموالاستیسیته غیرکوپل در نظر گرفته شده است. شبکه المانی ناحیه حل با کاربرد المانهای چهار گره‌ای و هشت گره‌ای ایجاد شده است. برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش نیز انتگرال برهم‌کنش بکار گرفته شده است. برای حل انتگرال زمانی معادلات الاستودینامیک روش نیومارک و برای حل عددی معادله هدایت گرمایی روش کرنک- نیکلسون بکار برده شده است. کلیه مراحل حل مسأله از جمله المان‌بندی و حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج با کدنویسی در نرم‌افزار متلب انجام شده است. در نهایت، در چند مثال عددی ضرایب شدت تنش دینامیکی بدست آمده از روش ارائه شده با نتایج تحلیلی و محاسباتی مقایسه شده است. همچنین، اثر زاویه ناهمسانگردی روی ضرایب شدت تنش حرارتی بررسی شده است.

**کلیدواژه‌ها:** روش المان محدود توسعه یافته، مواد ارتوتروپیک، ضرایب شدت تنش دینامیکی، بارگذاری حرارتی.

## Calculation of dynamic stress intensity factors in orthotropic media under thermal loading by XFEM

M.B. Nazari<sup>1\*</sup>, M. Jafari<sup>2</sup>, M. Hajimohammadi<sup>3</sup>

1,2- Assist., Mech. Eng., shahrood Univ., Shahrood, Iran

3- MSc Student, Mech. Eng., shahrood Univ., Shahrood, Iran

\* P.O.B. 3618785545 Shahrood, Iran. mbnazari@shahroodut.ac.ir

**Abstract-** In this paper, the extended Finite Element Method is implemented to model the effect of the mechanical and thermal shocks on a cracked 2D orthotropic media. The uncoupled thermoelasticity equations are considered. Isoparametric four-node and eight-node rectangular elements are used to discrete governing equations. The dynamical stress intensity factors are computed by the interaction integral method. The Newmark and the Crank-Nicolson time integration schemes are used to numerical solve the spatial-discretized elastodynamic and thermal equations, respectively. A MATLAB code is developed to carry out all stages of the calculations from mesh generation to post-processing. Several elastic and thermoelastic numerical examples are implemented, to check the accuracy of the results and to investigate the effect of the orthotropic direction on the stress intensity factors.

**Keywords:** Extended Finite Element Method, Orthotropic Materials, Stress Intensity Factors (SIFs), Thermal Loading.

### ۱- مقدمه

استحکام به وزن باعث شده است کاربردهای صنعتی و

مهندسی این مواد توسعه یابد. در سازه‌های مواد مرکب نیز

خصوصیات مختلف مواد مرکب از جمله بالا بودن نسبت

برای اولین بار از روش المان محدود توسعه یافته در مسایل مکانیک شکست استفاده کردند [۹]. با استفاده از این روش مدل سازی رشد ترک می تواند بدون شبکه بندی مجدد صورت پذیرد. در این روش یکسری توابع خاص در قالب پیکره بندی واحد به تقریب المان محدود اضافه می شود. دالبو جزئیات مربوط به تعیین گره های اطراف ترک و غنی سازی آنها را بیان کرد و روابط پایه جهت اضافه کردن توابع پله ای واحد و تکینه را برای مدل های ساده با المان های چهار گره ای ارائه نمود [۱۰]. توسعه توابع جدید غنی سازی برای مواد ارتوتروپیک و کاربرد آن در روش المان محدود توسعه یافته، توسط اسدپور و همکاران گزارش شده است [۱۱]. آن ها یک مجموعه یکپارچه از توابع غنی سازی برای المان های اطراف نوک ترک ارائه نمودند و با استفاده از روش انتگرال برهم کنش، ضرایب شدت تنش در مواد ارتوتروپیک تحت بار مکانیکی را بدست آوردند.

مسأله شکست ترموالاستیک نیز به خوبی توسط روش های عددی، غیر از روش المان محدود توسعه یافته مورد مطالعه قرار گرفته است. شیه و همکاران [۱۲]، ویلسون و یو [۱۳] انتگرال را برای بررسی مسائل حرارتی مواد ایزوتروپیک توسعه دادند. پراساد و همکاران [۱۴]، دل ارباو همکاران [۱۵]، شکست ترموالاستیک گذرا و سه بعدی را با استفاده از روش المان مرزی در نوار ایزوتروپیک بررسی کردند. فوجیموتو و نودا ضرایب شدت تنش دینامیکی را در مواد ایزوتروپیک تابعی با استفاده از روش المان محدود تحت شوک حرارتی محاسبه نمودند [۱۶]. کیمو کی سی در سال ۲۰۰۸ انتگرال برهم کنش را برای شکست حرارتی شبه استاتیکی در مواد ایزوتروپیک تابعی بررسی نمودند [۱۷]. شکست ترموالاستیک استاتیکی در مواد ایزوتروپیک به روش المان محدود توسعه یافته توسط دافلو تمور در بررسی قرار گرفت. وی مسائل دو بعدی و سه بعدی با شرایط مرزی حرارتی پایا را بررسی نمود [۱۸]. همچنین، اسلامی و زمانی پیاده سازی روش المان محدود توسعه یافته برای شروع شکست ترموالاستیک دینامیکی را در مواد ایزوتروپیک بررسی نمودند [۱۹]. شریعتی و مهدی زاده [۲۰] رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک های حرارتی/ مکانیکی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. آن ها برای این منظور از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک کوپل استفاده نموده اند. اخیراً، حسینی و همکاران با استفاده از روش المان محدود

وجود ترک در عضوها، باعث شکست آنها در بارهای کمتر از مقدار مورد انتظار می شود. بنابراین، بررسی و پیش بینی رفتار ترک و شکست در مواد مرکب برای طراحی و یا ارزیابی آنها ضروری است. بطوری که در دهه گذشته شکست دینامیکی مواد مرکب یکی از زمینه های مورد توجه محققان بوده است [۱]. از سوی دیگر، بسیاری از سازه ها و ماشین آلات در معرض گرادیان دما یا درجه حرارت بالا قرار می گیرند. بر این اساس، مطالعات بسیاری برای شبیه سازی و تجزیه و تحلیل رفتار مواد تحت بارهای حرارتی انجام شده است.

مطالعه تحلیلی ترک در مواد ارتوتروپیک تحت بار مکانیکی توسط محققانی از جمله موشخلیشویلی [۲]، لخنیتسکی [۳]، سی و همکاران [۴] ارائه شده است. نوبایلو کارلونی [۵] با حل تحلیلی مساله مقدار مرزی در مواد ناهمسانگرد به تجزیه و تحلیل یک ترک ایستا تحت بارگذاری دینامیکی پرداختند. سیمو لی [۶] ضریب شدت تنش را در یک نوار ایزوتروپیک بی نهایت و دارای ترک لبه ای که در معرض شوک حرارتی می باشد، با استفاده از روش تابع وزنی بدست آوردند.

با توجه محدود شدن راه حل های تحلیلی به حالت های خاص مثل ابعاد نامحدود، روش های عددی برای بررسی مسائل پیچیده تر پیشنهاد می شوند. علی آبادی و همکاران، از روش المان مرزی برای انتشار ترک و تجزیه و تحلیل دینامیکی ترک در مواد ارتوتروپیک استفاده کردند [۷]. سانچز و همکارانش با استفاده از روش المان مرزی، ترک در مواد جامد الاستیک دو بعدی، همگن و ناهمسانگرد که تحت بار دینامیکی قرار دارد را بررسی نمودند [۸]. روش المان مرزی، صرف نظر از تمام مزایایی که دارد، در مقایسه با روش المان محدود، کمتر در سیستم های غیرخطی به کار می رود. با این حال، در این روش نیز مانند روش المان محدود کلاسیک برای مدل سازی ترک باید المان ها بر سطح ترک منطبق باشد. همچنین، کاربرد المان های تکین و یا بسیار ریز در نوک ترک برای رصد تکینی میدان تنش ضروری است.

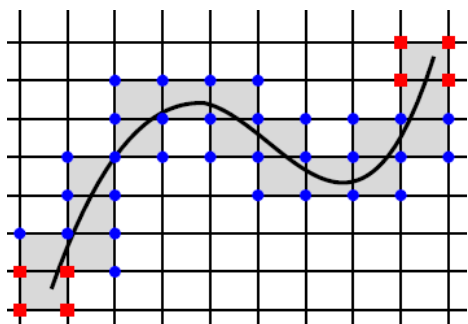
روش المان محدود توسعه یافته با توسعه دادن محلی تقریب در مدل روش المان محدود حول ترک، کاستی این روش را برطرف ساخته است. این روش اجازه می دهد ناپیوستگی سطح ترک و تکینی نوک آن شبیه سازی شود، بدون این که صریحاً ترک در المان بندی لحاظ شود. در سال ۱۹۹۸ بلیچکو و بلک

می‌شود و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند (غنی‌سازی). یعنی با اضافه نمودن توابع خاص، درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می‌آید، به گره‌های آن المان اختصاص پیدا می‌کند. به عنوان مثال مطابق شکل ۱، گره‌های اطراف ترک که با دایره مشخص شده‌اند از طریق تابع پله‌ای واحد غنی می‌شوند و چهار گره اطراف نوک ترک که با مربع مشخص شده از طریق تابع تکین غنی می‌شوند.

تقریب عددی در المان محدود توسعه‌یافته از دو بخش تشکیل شده است: بخش اول تولید مش هندسه دامنه (صرف نظر از وجود هر گونه ترک یا ناپیوستگی‌های دیگر) و بخش دوم غنی‌سازی تقریب المان محدود با توابع مناسب برای مدل‌سازی هر عیب و نقص [۹].

$$u^h(x) = \sum_n \phi_n(x) u_n + \sum_I \phi_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J} \phi_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 C_k^l F_l(x) \right) \quad (1)$$

در رابطه (۱)، عبارت اول مربوط به المان محدود استاندارد است و عبارت دوم برای غنی‌سازی المان‌هایی که ترک آن‌ها را قطع نموده است؛ استفاده می‌شود. تابع  $H(x)$  تابع تعمیم‌یافته هویساید است، که به گره‌های بالای ترک مقدار ۱+ و به گره‌های پایین ترک مقدار ۱- را نسبت می‌دهد. عبارت سوم جهت غنی‌سازی المان حاوی نوک ترک به کار برده می‌شود. در این رابطه،  $I$  مجموعه گره‌های مربوط به بخش درونی ترک (در شکل ۲ با دایره نشان داده شده است) و  $J$  مجموعه گره‌های مربوط به نوک ترک (در شکل ۱ با مربع نشان داده شده است) می‌باشد.



شکل ۱ غنی‌سازی گره‌ها در روش المان محدود توسعه‌یافته. مربع: غنی‌سازی با توابع نوک ترک. دایره: غنی‌سازی با تابع پله‌ای.

توسعه‌یافته به محاسبه ضرایب شدت تنش و بررسی رشد ترک در مواد مرکب تابعی ارتوتروپیک تحت بار حرارتی پایا پرداخته‌اند [۲۱].

بنابر اطلاعات نویسندگان، تاکنون کاربرد روش المان محدود توسعه‌یافته برای مطالعه شکست دینامیکی مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی گزارش نشده است. در این مقاله، ضرایب شدت تنش دینامیکی در محیط دو بعدی ارتوتروپیک تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از انتگرال مستقل از مسیر برهم‌کنش و روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه شده است. در بخش بعد، کاربرد المان محدود توسعه‌یافته در مدل‌سازی ترک با توابع غنی‌سازینوک ترک و میدان‌های جابجایی و تنش در حوزه نوک ترک شرح داده شده است. فرمول‌بندی مکانیک شکست برای تحلیل دینامیکی ترک در مواد ارتوتروپیک، در بخش سوم بحث شده است. در بخش چهارم، انتگرال برهم‌کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش حرارتی میدان‌های کمکی بیان شده است. حل عددی معادله هدایت گرمایی و معادلات ترموالاستیک در بخش پنجم آمده است. در دو بخش بعدی نیز در چند مثال عددی علاوه بر ارزیابی دقت نتایج، جنبه‌های قابل ذکر آن‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری آمده‌است.

## ۲- مدل‌سازی ترک با روش المان محدود توسعه یافته

در این بخش، روش غنی‌سازی جهت مدل‌کردن گسستگی‌های دلخواه در چارچوب الاستیسیته خطی دو بعدی بر اساس افراز واحد تشریح شده است. در این روش، در مقایسه با تقریب کلاسیک برای مدل‌سازی ترک‌ها با المان محدود، با غنی‌سازی ناپیوستگی، هندسه ترک بصورت مستقل از شبکه، نمایش داده شده است. همچنین بمنظور محاسبه دقیق‌تر ضرایب شدت تنش، تقریب در نزدیکی نوک ترک نیز شامل غنی‌سازی می‌شود. در روش المان محدود استاندارد به هر گره از المان، تابع شکل نسبت داده می‌شود و در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد که ترکیب خطی حاصل ضرب تابع شکل هر نقطه داخل المان در تغییر مکان‌های گره‌ای می‌تواند تغییر مکان نقاط داخل المان را مشخص کند. در روش المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل روش المان محدود استاندارد استفاده

در روابط فوق،  $h$  ضریب همرفتی و  $n$  بردار عمودی یکه و رو به خارج روی مرز  $\Gamma$  است. مطابق شکل ۲، فرض می‌شود  $\Gamma_{(i)}$  قسمتی از مرز  $\Gamma$  است که  $\Gamma_i \cap \Gamma_u = \emptyset$  و  $\Gamma_i \cup \Gamma_u = \Gamma$ . روابط ساختاری برای هدایت گرمایی و برای تنش-کرنش به صورت رابطه (۷) است.

$$q = -k \nabla T$$

$$\sigma = \tilde{C} : (\varepsilon - \varepsilon^{th}) \quad (7)$$

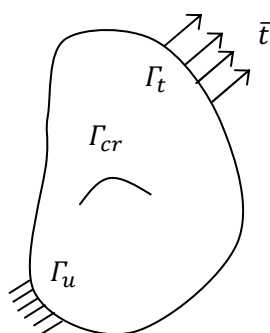
که در آن مقدار  $\varepsilon^{th}$  با استفاده از رابطه (۸) بدست می‌آید.

$$\varepsilon^{th} = \gamma \Delta T \quad (8)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{حالت تنش صفحه‌ای} \quad (9)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \nu_{31}\alpha_3 + \alpha_1 \\ \nu_{32}\alpha_3 + \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{حالت کرنش صفحه‌ای} \quad (10)$$

در روابط بالا،  $C$  تانسور مرتبه چهارم تانسور الاستیک،  $k$  ماتریس هدایت گرمایی،  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی،  $\rho$  چگالی و ظرفیت حرارتی ویژه است. متغیرهای میدان نیز،  $u$  بردار جابجایی،  $\varepsilon$  تانسور کرنش کل،  $\varepsilon^{th}$  تانسور کرنش حرارتی است.  $Q$  منبع حرارتی و  $b$  نیروی کالبدی است. تانسور الاستیک (سفتی) درمواد ارتوتروپیک به صورت رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) تعریف می‌شود.



شکل ۲ جسم با مرزهای داخلی تحت بارگذاری خارجی

حالت تنش صفحه‌ای

$$[C] = \frac{1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_2 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \quad (11)$$

توابع  $F_l(x)$  توابع غنی سازی حوزه نوک ترک می‌باشند که برای رصد تکینی میدان تنش در این ناحیه اضافه شده‌اند و به صورت رابطه (۲)، تعریف می‌شوند.

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \right\} \quad (2)$$

$g_i(\theta)$  و  $\theta_i$  به صورت رابطه (۳)، تعریف می‌شوند.

$$g_k(\theta) = \sqrt{(\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta)^2 + (\mu_{ky} \sin \theta)^2}, \quad (3)$$

$$\theta_k = \arctg \left( \frac{\mu_{ky} \sin \theta}{\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta} \right), \quad k = 1, 2 \quad (4)$$

مقدار  $\mu$  در پیوست معرفی شده است.

### ۳- روابط ترموالاستیسیته در مواد ارتوتروپیک

در یک پیوستار به حجم  $\Omega$  و محصور به منحنی  $\Gamma$  که همزمان تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی قرار دارد؛ شرایط مرزی حرارتی بصورت دمای معلوم  $\bar{T}$  روی مرز  $\Gamma_T$  شار حرارتی معلوم  $\bar{q}$  در جهت  $n$  روی مرز  $\Gamma_d$  و دمای محیط معلوم  $T_\infty$  روی مرز  $\Gamma_c$  است. شرایط مرزی مکانیکی بصورت نیروی معلوم  $\bar{t}$  روی مرز  $\Gamma_t$  و تغییرمکان معلوم  $\bar{u}$  روی مرز  $\Gamma_u$  بیان می‌شود. معادلات حاکم ترموالاستیسیته خطی و شبه‌استاتیکی در ناحیه  $\Omega$  بصورت رابطه (۵)، است.

رابطه هدایت گرمایی:

$$-\nabla q + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{در } \Omega$$

$$T = \bar{T} \quad \text{روی } \Gamma_T$$

$$k \nabla T \cdot n = \bar{q} \quad \text{روی } \Gamma_q$$

$$k \nabla T \cdot n + h(T - T_\infty) = \bar{q} \quad \text{روی } \Gamma_c$$

$$k \nabla T \cdot n = 0 \quad \text{روی } \Gamma_{\text{crack}} \quad (5)$$

معادلات تعادل، شرایط اولیه و مرزی مطابق رابطه (۶) می‌باشند.

$$\nabla \cdot \sigma + b = \rho \ddot{u} \quad \text{در } \Omega$$

$$u = \bar{u} \quad \text{روی } \Gamma_u$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{روی } \Gamma_t$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{روی } \Gamma_{\text{crack}}$$

$$u(x, t = 0) = \bar{u}(0)$$

$$\dot{u}(x, t = 0) = \bar{\dot{u}}(0) \quad (6)$$

که در آن،  $u_n$ ،  $\dot{u}_n$  و  $\ddot{u}_n$  به ترتیب بردار جابجایی، بردار سرعت و بردار شتاب گره‌ها و  $\Delta t$  افزایش زمان در هر گام ( $n$ ) می‌باشد. روش نیومارک به‌ازای پارامترهای  $\alpha=0.5$  و  $\beta=0.25$  به‌طور نامشروط پایدار است [۲۲].

#### ۴- انتگرال برهم‌کنش

در مکانیک شکست، روش‌های مختلفی برای محاسبه عددی ضرایب شدت تنش معرفی شده است که در میان آن‌ها، روش‌های مبتنی بر انرژی مثل انتگرال  $J$ ، روش‌های قوام‌دار و کارآمد به‌شمار می‌روند. انتگرال برهم‌کنش در واقع عبارت برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل (یک میدان اصلی و یک میدان کمکی) و قابل قبول برای سازه حاوی ترک است که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. در این بخش، راجع به انتگرال برهم‌کنش برای مواد ارتوتروپیک تحت بار حرارتی بحث شده است.

فرم معمول انتگرال  $J$  برای یک ترک بدون اعمال نیرو به سطوح آن، به‌صورت رابطه (۱۸) است [۲۳].

$$J = \lim_{\Gamma_s \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (W \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_s \quad (18)$$

مقدار  $W$  به‌صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود.

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (19)$$

با کاربرد قضیه دیورژانس و در نظر گرفتن تابع پیوسته  $q$ ، انتگرال ناحیه‌ای معادل برای انتگرال  $J$  به‌صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود [۲۳].

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j})_{,j} q dA \quad (20)$$

که در آن،  $A$  ناحیه محصور به منحنی  $\Gamma$  است. برای یک سیستم خطی، انتگرال  $J$  برای اعمال همزمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی به‌صورت رابطه (۲۱) قابل بیان است.

$$J^s = J + J^{aux} + M \quad (21)$$

که در آن  $J$  و  $J^{aux}$  به ترتیب مقدار انتگرال  $J$  برای حالت بارگذاری اصلی و کمکی است و انتگرال برهم‌کنش  $M$  به‌صورت زیر حاصل می‌شود [۱۱].

حالت کرنش صفحه‌ای

$$[C] = \begin{bmatrix} aE_1 & bE_1 & 0 \\ cE_2 & dE_2 & 0 \\ 0 & 0 & (ad-bc)G_{12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن،  $E_1$  مدول ارتجاعی در جهت  $E_2 x_1$  مدول ارتجاعی در جهت  $x_2$  و  $G_{12}$  مدول برشی می‌باشد و ضرایب  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  برحسب ضرایب پواسون به‌صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند.

$$a = 1 - \nu_{23}\nu_{32}, \quad b = \nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31} \\ c = \nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}, \quad d = 1 - \nu_{13}\nu_{31} \quad (13)$$

با در نظر گرفتن تابع تقریب به‌صورت رابطه (۱)، فرم گسسته معادلات حاکم به‌صورت رابطه (۱۴) حاصل می‌شود.

$$M\ddot{u} + Ku = F^{ext} \\ C^{th}\dot{T} + K^{th}T = f^{th} \quad (14)$$

در این روابط،  $K$  ماتریس سفتی کل مدل است که متقارن می‌باشد،  $u$  و  $T$  بردار مجهولات گره‌ای است که در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادی استاندارد و درجات آزادی مرتبط با غنی‌سازی هر گره (در صورت وجود) به‌صورت متوالی قرار گرفته است. در رابطه اول،  $F^{ext}$  نیز بردار نیروهای خارجی اعمال شده به گره‌ها می‌باشد و شامل نیروهای مکانیکی و نیروهای حرارتی است.

$$F = F^m + F^{th} \quad (15)$$

در این تحقیق، برای حل معادله گسسته هدایت گرمایی از روش ضمنی کرانک-نیکلسون استفاده شده است. در این روش، دمای گره‌ها در هر گام زمانی  $n$  براساس دمای گره‌ای در گام زمانی قبلی ( $n-1$ ) به‌صورت رابطه (۱۶) به‌دست می‌آید.

$$[2C^{th} + K^{th}\Delta t]T^n = \Delta t(f_{n-1}^{th} + f_n^{th}) + [2C^{th} - K^{th}\Delta t]T_{n-1} \quad (16)$$

برای حل عددی معادله تعادل، روش نیومارک مورد استفاده شده است. در هر مرحله زمانی  $n$ ، شتاب، سرعت و جابجایی در گره‌ها به‌صورت رابطه (۱۷) محاسبه می‌شود:

$$\ddot{u}_n = \frac{F - K \left( u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + (1-2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} \right)}{(M + \beta \Delta t^2 K)} \\ \dot{u}_n = \dot{u}_{n-1} + (1-\alpha) \Delta t \ddot{u}_{n-1} + \alpha \Delta t \ddot{u}_n \\ u_n = u_{n-1} + \Delta t \dot{u}_{n-1} + (1-2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{n-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_n \quad (17)$$

در نتیجه رابطه نهایی به صورت رابطه (۳۰) بدست می آید.

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial(\Delta T)} = -(\tilde{C}\gamma_i)\tilde{S}\sigma_i^{\text{aux}} = -\gamma_i\sigma_i^{\text{aux}} \quad (30)$$

با جایگذاری نتایج فوق در رابطه (۲۵)، فرم نهایی انتگرال برهم کنش برای بار حرارتی به صورت زیر بدست می آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A \left( \rho\ddot{u}_i u_{i,1}^{\text{aux}} + (\gamma_i\sigma_i^{\text{aux}}) \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} \right) q dA \quad (31)$$

رابطه بین انتگرال برهم کنش و ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  در مواد ارتوتروپیک و برای یک ترک ایستا بصورت رابطه (۳۲) قابل بیان است [۱۱].

$$M = 2c_{11}K_I K_I^{\text{aux}} + c_{12}(K_I K_{II}^{\text{aux}} + K_I^{\text{aux}} K_{II}) + 2c_{22}K_{II} K_{II}^{\text{aux}} \\ c_{11} = -\frac{a_{22}}{2} \text{Im}\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}\right) \\ c_{12} = -\frac{a_{22}}{2} \text{Im}\left(\frac{1}{\mu_1 \mu_2}\right) + \frac{a_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 \mu_2) \\ c_{22} = \frac{a_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) \quad (32)$$

در رابطه (۳۲)،  $a_{ij}$  اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته می باشند که براساس فرض حالت صفحه ای بصورت تابعی از ماتریس نرمی  $S_{ij}$  بیان می شوند. مقادیر  $\mu$  ریشه های معادله مشخصه با قسمت موهومی مثبت است که در پیوست آمده است. با انتخاب مناسب میدان های کمکی (مود  $I$  و مود  $II$ ) ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  با حل روابط رابطه (۳۳) بدست می آید.

$$(K_I^{\text{aux}} = 1, K_{II}^{\text{aux}} = 0) \longrightarrow M^{(1)} = 2c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \\ (K_I^{\text{aux}} = 0, K_{II}^{\text{aux}} = 1) \longrightarrow M^{(2)} = c_{12}K_I + 2c_{22}K_{II} \quad (33)$$

میدان های تنش و جابجایی کمکی برای ماده ارتوتروپیک به صورت رابطه (۳۴) و (۳۵) تعریف می شود [۱۱].

$$u_i^{\text{aux}} = K_I^{\text{aux}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^I(\theta) + K_{II}^{\text{aux}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} g_i^{II}(\theta) \quad (34)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{aux}} = K_I^{\text{aux}} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^I(\theta) + K_{II}^{\text{aux}} (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad (35)$$

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})q_{,j}dA \quad (22)$$

که در آن،  $W^{\text{int}}$  تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهم کنش است و به صورت رابطه (۲۳) تعریف می شود.

$$W^{\text{int}} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\text{aux}} + \sigma_{ik}^{\text{aux}}\varepsilon_{ik}^m) \quad (23)$$

رابطه (۲۲) شامل دو عبارت جداگانه است. با اعمال مشتق در انتگرال دوم و با توجه به رابطه تعادل  $\sigma_{ij,j} = 0$  و روابط سازگاری میدان های اصلی و کمکی، انتگرال برهم کنش به صورت رابطه (۲۴) بدست می آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1,j}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1,j} - W^{\text{int}}_{,1})q dA \quad (24)$$

با در نظر گرفتن مؤلفه اینرسی و با اعمال معادله حرکت  $\rho\ddot{u}_i = X_{i,j} + \sigma_{ij,j}$  به جای معادله تعادل برای میدان اصلی، انتگرال برهم کنش به صورت رابطه (۲۵) بدست می آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1} - W^{\text{int}}\delta_{1j})q_{,j}dA + \int_A (\rho\ddot{u}_i u_{i,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}u_{i,1,j}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,1,j} - W^{\text{int}}_{,1})q dA \quad (25)$$

در رابطه (۲۵)،  $\ddot{u}_i$  مؤلفه های بردار شتاب و  $\rho$  چگالی می باشد. مشتق  $W^{\text{int}}$  نسبت به  $x_1$  به صورت رابطه (۲۶) است.

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial x_1} = \sigma_{ij}u_{i,j,1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}}u_{i,j,1} + \left( \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial x_1} \right)_{\text{expl}} \quad (26)$$

که عبارت آخر با استفاده از رابطه (۲۷) بدست می آید.

$$\left( \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial x_1} \right)_{\text{expl}} = \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial(\Delta T)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} \quad (27)$$

با جایگذاری معادله ساختاری در رابطه انرژی کرنشی برهم کنش رابطه (۲۸) استخراج می شود.

$$W^{\text{int}} = \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\text{aux}} = C_{11}\varepsilon_{11}\varepsilon_{11}^{\text{aux}} + C_{12}\varepsilon_{22}\varepsilon_{11}^{\text{aux}} + C_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}^{\text{aux}} + C_{22}\varepsilon_{22}\varepsilon_{22}^{\text{aux}} + 2C_{33}\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - C_{11}\gamma_1\Delta T\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - C_{12}\gamma_2\Delta T\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - C_{12}\gamma_1\Delta T\varepsilon_{22}^{\text{aux}} - C_{22}\gamma_2\Delta T\varepsilon_{22}^{\text{aux}} - 2C_{33}\gamma_3\Delta T\varepsilon_{12}^{\text{aux}} \quad (28)$$

مشتق  $W^{\text{int}}$  نسبت به  $\Delta T$  برابر است با:

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial(\Delta T)} = -(C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2)\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - (C_{12}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2)\varepsilon_{22}^{\text{aux}} - 2C_{33}\gamma_3\varepsilon_{12}^{\text{aux}} \quad (29)$$

## ۵- نتایج عددی

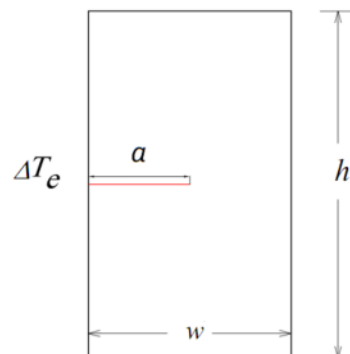
## ۵-۱- ترک لبه‌ای برای ماده ایزوتروپیک تحت بار حرارتی

صفحه دو بعدی با طول  $h=4$  و عرض  $w=1$  واحد در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک لبه‌ای مستقیم است (مطابق شکل ۳). صفحه در لبه چپ به سرعت به اندازه  $\Delta T = -10\text{K}$  سرد می‌شود. تمامی لبه‌های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. ضریب پواسون  $\nu = 0.3$ ، مدول الاستیسیته  $E = 200\text{GPa}$ ، چگالی  $\rho = 1900\text{kg/m}^3$ ، ضریب انبساط حرارتی  $\alpha = 6.68 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$ ، ظرفیت گرمایی ویژه  $C = 461\text{J/kgK}$  و ضریب هدایت حرارتی  $k = 17\text{W/mK}$  می‌باشد. در این مثال از شبکه المانی  $60 \times 160$  استفاده و زمان  $t$  مطابق رابطه (۳۶) بی بعد شده است.

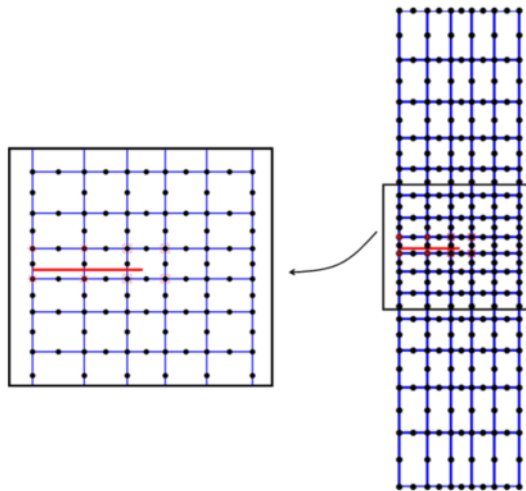
$$\tau = \frac{kt}{\rho c W^2} \quad (36)$$

نتایج برای شبکه‌ای از المان‌های چهار گره‌ای منظم، هشت گره‌ای منظم و هشت گره‌ای ریز شونده در نوک ترک (مطابق شکل ۴) به دست آمده است. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش  $K_I$  برای طول ترک  $a=0.4$  در شکل ۵ رسم و با مقادیر تحلیلی مقایسه شده است. مقدار تحلیلی ضریب شدت تنش  $K_I$  در زمان‌های مختلف توسط لی و سیم [۶] با استفاده از تابع وزنی ارائه شده است.

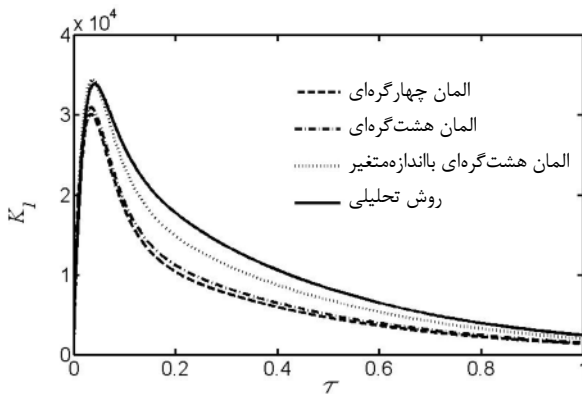
مقدار ضریب شدت تنش برای المان‌های هشت گره‌ای نامنظم بیشترین تطابق را با نتایج تحلیلی دارد. در المان‌های هشت گره‌ای غنی‌سازی فقط برای گره‌های گوشه انجام می‌شود.



شکل ۳ صفحه ایزوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی



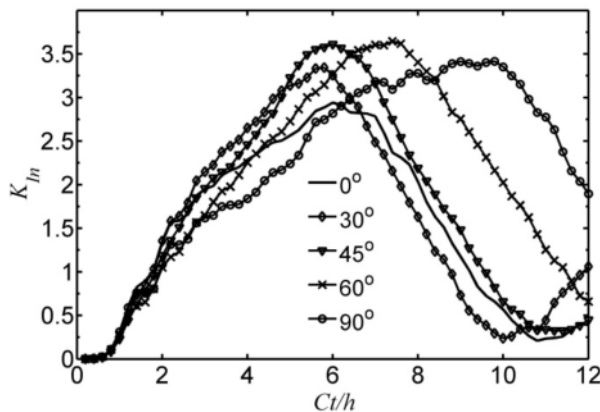
شکل ۴ المان‌های هشت گره‌ای با اندازه متغیر



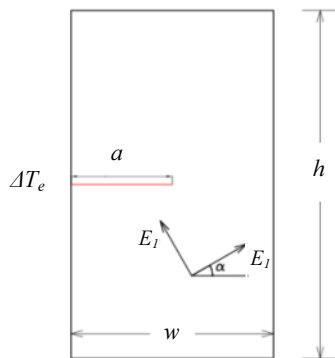
شکل ۵ نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ایزوتروپیک با المان‌های مختلف

## ۵-۲- ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک تحت بار مکانیکی

یک صفحه با ابعاد  $h=40$  واحد و  $w=52$  واحد و ضخامت به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک مستقیم لبه‌ای به طول  $a=12$  واحد است، صفحه از بالا و پایین به یکبار به تحت تنش ثابت و یکنواخت  $\sigma$  قرار می‌گیرد و از آن پس مقدار آن تغییر نمی‌کند (بصورت تابع پله). صفحه قید تغییر مکان ندارد. ناهمسانگردی می‌تواند نسبت به محور افقی زاویه  $(\alpha)$  داشته باشد. این صفحه نازک با الیاف تک جهتی در واقع یک ماده ایزوتروپیک جانبی - حالت خاصی از ماده ارتوتروپیک - است. مشخصات ماده  $\nu_{12} = 0.183$ ،  $E_1 = 111.3\text{GPa}$ ،  $E_2 = 54.8\text{GPa}$  و  $G_{12} = 79.8\text{GPa}$



شکل ۷ مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف با زوایای ناهمسانگردی مختلف در ماده ارتوتروپیک



شکل ۸ صفحه ارتوتروپیک دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری حرارتی

مشخصات ماده  $\nu_{12} = 0.14$ ,  $\nu_{13} = 0.21$ ,  $\nu_{23} = 0.27$ ,  $\nu_{12} = 0.28$ ,  $G_{12} = 38/21 \text{ GPa}$  و  $E_2 = 90/43 \text{ GPa}$ ,  $E_1 = 116/36 \text{ GPa}$  و  $\rho = 3980 \text{ kg/m}^3$  ضریب انبساط حرارتی  $\alpha_1 = 7/5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  و  $\alpha_2 = 8 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ظرفیت گرمایی ویژه  $C = 775 \text{ J/kgK}$  و ضریب هدایت حرارتی به ترتیب  $k_2 = 21/25 \text{ W/mK}$  و  $k_1 = 29/82 \text{ W/mK}$  در نظر گرفته شده است. در این مثال، از شبکه المان هشت گره‌ای  $60 \times 160$  با اندازه متغیر استفاده شده است و مقدار زمان  $t$  مطابق فرمول (۳۷) بی بعد شده است.

$$\tau = \frac{k_{xx} t}{\rho c W^2} \quad (37)$$

ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  برای زوایای ناهمسانگردی مختلف در شکل ۹ برحسب زمان بی بعد رسم شده است. برای مقایسه بهتر نمودارها، نمودار نیمه‌لگاریتمی ضرایب شدت تنش  $K_I$  در شکل ۱۰ آورده شده است. همان‌طور که در نمودار شکل

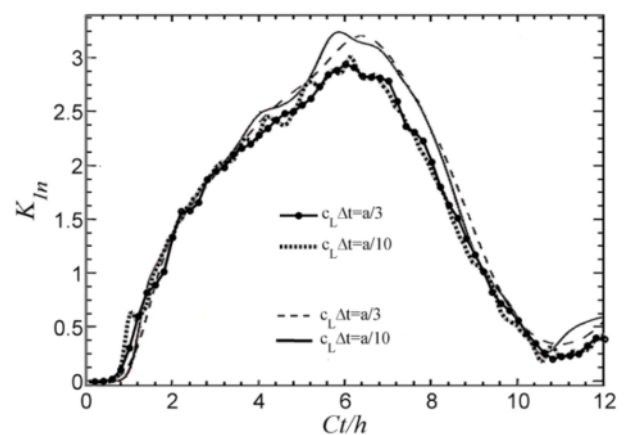
می‌باشد. همچنین گام‌های زمانی برابر  $\rho = 1900 \text{ kg/m}^3$  و  $\Delta t = a/c_1$  و یک بار نیز  $\Delta t = a/c_1$  در نظر گرفته شده است، که  $c_1 = \sqrt{C_{22}/\rho}$  می‌باشد و  $C_{22}$  مؤلفه ماتریس سفتی می‌باشد ( $\sigma = C \epsilon$ ).

مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد  $K_{In}$  برای زمان‌های مختلف با مش  $60 \times 78$  محاسبه و نتایج در شکل ۶ آورده شده است. به علاوه، نتایج بدست آمده با ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{In}$  ارائه شده توسط سانچز و همکارانش [۸] مقایسه شده است.

در این مثال، مقادیر ضریب شدت تنش دینامیکی بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف و برای زوایای ناهمسانگردی مختلف نیز بدست آمده است. گام‌های زمانی برابر  $\Delta t = a/c_1$  در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۷، بیشینه مقدار ضریب شدت تنش در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه کمترین مقدار متناظر نسبت به زوایای دیگر را دارد. از طرفی، زمان رسیدن به مقدار بیشینه برای زوایای ناهمسانگردی مختلف یکسان نیست.

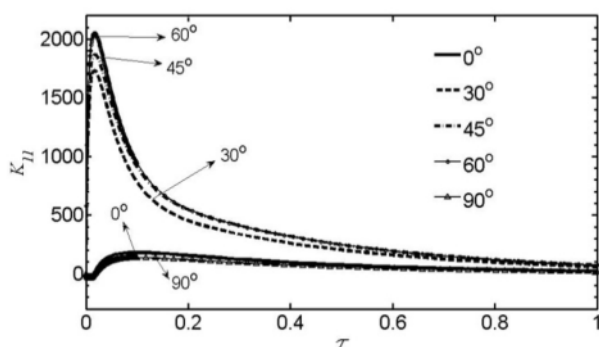
### ۳-۵- ترک لبه‌ای برای ماده ارتوتروپیک تحت شوک حرارتی

صفحه دوبعدی ارتوتروپیک با ابعاد  $h = 4 \text{ mm}$  و  $w = 1 \text{ mm}$  در نظر گرفته می‌شود که دارای ترک لبه‌ای مستقیم به طول  $a = 0.4 \text{ mm}$  است (شکل ۸). صفحه در لبه چپ به سرعت به اندازه  $\Delta T = -10 \text{ K}$  سرد می‌شود. تمامی لبه‌های دیگر عایق و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.



شکل ۹ مقدار ضریب شدت تنش بی بعد  $K_{In}$  در زمان‌های مختلف با زاویه ناهمسانگردی صفر درجه در ماده ارتوتروپیک





شکل ۱۱ نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{II}$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک در زوایای الیاف مختلف

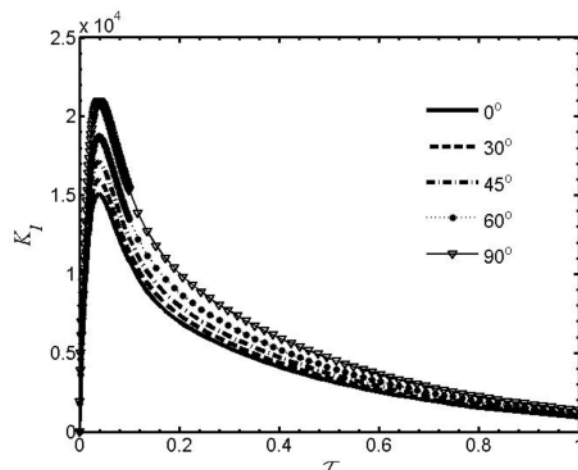
در یک نقطه ثابت از صفحه، ابتدا تنش بخاطر تغییر نمایی دما به آرامی تا مقدار بیشینه زیاد می شود اما با رسیدن موج ناگهان تغییر علامت می دهد. پس از عبور موج نیز تنش به آرامی تغییر می کند. ضرایب شدت تنش نیز تا قبل از رسیدن موج تنش به نوک ترک افزایش می یابند اما با عبور موج و تغییر علامت تنش، مقدار آنها تا رسیدن به مقدار پایا کاهش پیدا می کند. زمان متناظر با مقدار بیشینه با زیاد شدن زاویه ناهمسانگردی افزایش می یابد.

## ۶- نتیجه گیری

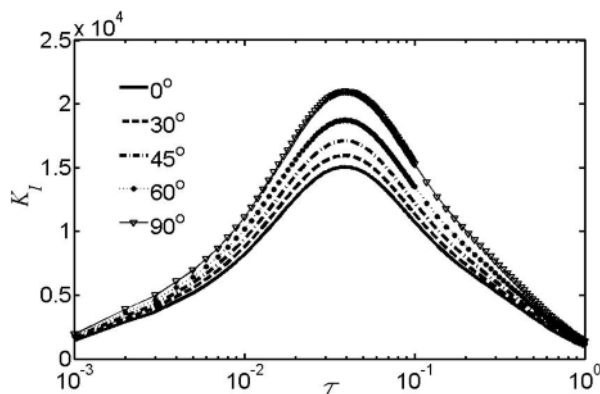
در این مطالعه، روش المان محدود توسعه یافته برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش دینامیکی در محیط های دوبعدی از مواد ارتوتروپیک به کار رفته است. طبق نتایج، در مواد ارتوتروپیک نیز مانند مواد ایزوتروپیک در ابتدای اعمال شوک حرارتی، ضرایب شدت تنش سریعاً تا یک مقدار حداکثر افزایش یافته و سپس با سرعت کمتری کاهش می یابد. این مسأله نشانگر امکان ایجاد رشد ترک در زمان های ابتدایی تغییر دمای صفحه است. به علاوه، در مواد ارتوتروپیک مقدار بیشینه ضرایب شدت تنش و زمان وقوع آن به زاویه ناهمسانگردی کاملاً بستگی دارد. در مثال ذکر شده، بیشینه ضرایب شدت تنش دینامیکی در زاویه ناهمسانگردی صفر درجه دارای کمترین مقدار است و در سریعتر اتفاق می افتد.

برای یک ترک لبه ای عمود، زاویه الیاف نقش موثری در رفتار ترک دارد. تغییر زاویه الیاف از صفر باعث به وجود آمدن ضریب شدت تنش مود II می شود. وجود ضریب شدت تنش مود II باعث انحراف ترک در زمان رشد آن از راستای عمود بر لبه

۹ دیده می شود با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  نیز افزایش می یابد. در این مثال ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{II}$  نیز برای زوایای ناهمسانگردی مختلف محاسبه گردیده و در شکل ۱۱ رسم شده است. مطابق شکل ۱۱ با افزایش زاویه ناهمسانگردی مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_{II}$  نیز افزایش می یابد. برخلاف  $K_I$ ، مقدار  $K_{II}$  در زاویه ناهمسانگردی ۹۰ درجه نمودار مشابه زاویه ناهمسانگردی صفر درجه است. نتایج نشان می دهند در زمان های ابتدایی اعمال شوک، ضرایب شدت تنش به سرعت افزایش و پس از رسیدن به مقدار بیشینه، تا مقدار پایا کاهش می یابد. اعمال شوک حرارتی به صورت سرمایشی به لبه چپ صفحه باعث ایجاد موج تنش در آن می شود.



شکل ۹ نمودار ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک در زوایای الیاف مختلف



شکل ۱۰ نمودار نیمه لگاریتمی ضریب شدت تنش دینامیکی  $K_I$  بر حسب زمان بی بعد در صفحه ارتوتروپیک در زوایای الیاف مختلف

$$g_1^I(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \mu_1 p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \right\}\right]$$

$$g_1^{II}(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ p_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - p_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \right\}\right]$$

$$g_2^I(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \mu_1 q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \right\}\right]$$

$$g_2^{II}(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ q_2 \sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta} - q_1 \sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta} \right\}\right]$$

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \longrightarrow k=1,2$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \longrightarrow k=1,2$$

$\mu$  ریشه معادله مشخصه زیر می‌باشد.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0$$

## ۸- مراجع

- [1] Erdogan F., "Fracture mechanics" *International Journal Solids and Structures*, Vol. 37, No. 1, 2000, pp. 171-183.
- [2] Muskhelishvili N.I., *Some basic problems on the mathematical theory of elasticity.*, Translated by Radok JRM. Noordhoff, Groningen, 1953.
- [3] Lekhnitskii S.G., *Theory of an anisotropic elastic body.*, San Francisco: Holden-Day, 1963.
- [4] Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R., "On cracks in rectilinearly anisotropic bodies" *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol.1, No. 3, 1965, pp. 189-203.
- [5] Nobile L., Carloni C., "Fracture analysis for orthotropic cracked plates", *Compos Struct*, Vol. 68, No. 3, 2005, pp. 285-293.
- [6] Lee K.Y., Sim K.B., "thermal shock stress buckner's weight intensity factor by function method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, No. 4, 1990, pp. 799-804.
- [7] Aliabadi M.H., Sollero P., "Crack growth analysis in homogeneous orthotropic laminates", *Compos Sci Technol*, Vol. 58, No. 10, 1998, pp. 1697-1703.
- [8] Sanchez F., Zhang C., Saez A., "A two-dimensional time-domain boundary element method for dynamic crack problems in anisotropic solids", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, 2008, pp. 1412-1430.
- [9] Belytschko T., Black T., "Elastic crack growth in

می‌شود. این امر از دو تکه شدن قطعه در اثر رشد ترک در راستای آن که در حالت ایزوتروپیک اتفاق می‌افتد جلوگیری می‌نماید. بنابراین، تمایل جهت ناهمسانگردی باعث تغییر مسیر رشد ترک و نهایتاً توقف آن و یا جدا شدن لایه‌ای از سطح قطعه می‌شود.

## ۷- پیوست: توابع زاویه‌ای میدان‌های حوزه نوک ترک

$$f_{11}^I(\theta) = \text{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\}\right]$$

$$f_{11}^{II}(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\}\right]$$

$$f_{22}^I(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\}\right]$$

$$f_{22}^{II}(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} \right\}\right]$$

$$f_{12}^I(\theta) = \text{Re}\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} \right\}\right]$$

$$f_{12}^{II}(\theta) = \text{Re}\left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_1 \sin\theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos\theta + \mu_2 \sin\theta}} \right\}\right]$$

- Archive of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 6, 2000, pp. 377-386.
- [17] KC A., Kim J.H., "Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75, No. 8, 2008, pp. 2542-2565.
- [18] Duflo M., "The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 5, 2008, pp. 827-847.
- [19] Zamani A., Eslami M.R., "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 10, 2010, pp. 1392-1404.
- [20] Shariati M., Mahdizadeh Rokhi M., "Study of Dynamic Fracture of Functionally Graded Materials under Thermo-mechanical Shocks" *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 1, No. 3, pp. 1-16. (In Persian)
- [21] Hosseini S.S., Bayesteh H., Mohammadi S., "Thermo-mechanical XFEM Crack Propagation Analysis of Functionally Graded Materials" *Materials Science and Engineering*, Vol. 561, 2013, pp. 285-302.
- [22] Motamedi D., Mohammadi S., "Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method", *International Journal of Fracture*, Vol. 161, No. 1, 2009, pp. 21-39.
- [23] Kim J.H., Paulino G.H., "The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors", *International Journal Solids and Structures*, Vol. 40, 2003, pp. 3967-4001.
- finite elements with minimal remeshing" *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 45, No. 5, 1999, pp. 601-620.
- [10] Dolbow J., *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*, PhD Thesis, Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, U.S.A, 1999.
- [11] Asadpoure A., Mohammadi S., "Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, 2007, pp. 2150-2172.
- [12] Shih C.F., Moran B., Nakamura T., "Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body", *International Journal of Fracture*, Vol. 30, No. 2, 1986, pp. 79-102.
- [13] Wilson W.K., Yu I.W., "The use of the J-integral in thermal stress crack problems", *International Journal of Fracture*, Vol. 15, No. 4, 1979, pp. 377-387.
- [14] Prasad N.N.V., Aliabadi M.H., Rooke D.P., "The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems", *International Journal Solids and Structures*, Vol. 33, No. 19, 1996, pp. 2695-2718.
- [15] Dell'Erba D.N., Aliabadi M.H., Rooke D.P., "Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems", *International Journal of Fracture*, Vol. 94, No. 1, 1998, pp. 89-101.
- [16] Fujimoto T., Noda N., "Crack Propagation in a Functionally Graded Plate Under Thermal Shock",