



بررسی پدیده پرش و ناپایداری بالواره غیرخطی به روش اتفاقی

سعید ایرانی^{۱*}، سعیدسازش^۲، مهدی شایانمهر^۳

۱- استادیار مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران.

۲، ۳- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران.

* تهران، صندوق پستی ۳۳۸۱-۱۶۷۶۵، irani@kntu.ac.ir

چکیده- در این مطالعه به ارائه یک روش جدید برای بررسی ناپایداری سیستم‌های آیروالاستیک غیرخطی پرداخته می‌شود. در این روش از قابلیت تحلیل ارتعاشات اتفاقی یک سیستم غیرخطی مبتنی بر خواص آماری پاسخ و بسط آن برای یک سیستم آیروالاستیک غیرخطی استفاده می‌شود تا بتوان ناپایداری این سیستم غیرخطی را بدون ورود به حوزه زمان و همچنین بدون تحلیل نوسانات چرخه حد بررسی کرد. برای این منظور از یک بالواره غیرخطی دو درجه آزادی با فنر درجه ۳ تحت جریان شبه‌پایا استفاده می‌شود. در ابتدا فرض می‌شود که علاوه بر نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی یک نیروی اتفاقی به صورت نویز سفید و با تابع چگالی احتمال گوسین به بالواره غیرخطی وارد می‌شود. با استفاده از روش خطی‌سازی آماری و آنالیز ارتعاشات اتفاقی سیستم‌های غیرخطی، معادله یک نگاشت غیرخطی یک بعدی برای واریانس پاسخ و سرعت جریان بدست می‌آید. از تحلیل این نگاشت غیرخطی یک معادله جبری غیرخطی شامل دو متغیر واریانس پاسخ و سرعت جریان ایجاد می‌گردد، و با حل این معادله برای سرعت‌های مختلف جریان، سرعت ناپایداری سیستم غیرخطی در نقطه واریانس بیشینه محاسبه می‌شود. در نهایت با تحلیل این معادله غیرخطی، پدیده پرش در نمودار سرعت-واریانس توسط نقطه دوشاخگی مماسی بررسی می‌شود.

کلیدواژگان: فلاتر، بالواره غیرخطی، پدیده پرش، دوشاخگی تانژانتی، روش اتفاقی.

Jump Phenomenon and Flutter Analysis of Nonlinear Airfoil with Stochastic Approach

S. Irani^{1*}, S. Sazesh², M. Shayanmehr³

1- Assist. Prof., Aero. Eng., KhajehNasirToosi Univ., Tehran, Iran

2, 3- Graduated M.Sc. in Aero. Eng., KhajehNasirToosi Univ., Tehran, Iran

* P. O. B. 16765-3381, Tehran, Iran. irani@kntu.ac.ir

Abstract- In this study a new approach for investigating the flutter speed of nonlinear aeroelastic systems is proposed. In this approach, the compatibility of nonlinear random vibration analysis based on the statistical properties of response is used and extended to the nonlinear aeroelastic systems to analyze the instability of these systems with using neither time domain analysis nor limit cycle oscillations. To this aim a 2-degree nonlinear airfoil with cubic torsional spring under quasi steady flow is considered as an aeroelastic system. At first, one random Gaussian white noise is added to the aerodynamic lift force then the statistical linearization and the random vibration analysis of the nonlinear systems are used to obtain a nonlinear map of response-variance with flow velocity as the control parameter. This nonlinear map leads to a nonlinear algebraic equation which consists of two parameters as the flow velocity and variance of the response. By solving this nonlinear equation for various flow velocities, the flutter speed is considered as the maximum of response-variance. Finally the jump phenomenon is also investigated where tangent bifurcation occurs.

Keywords: Flutter, Nonlinear airfoil, Jump Phenomenon, Tangent bifurcation, Stochastic Method.

۱- مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌های آیروالاستیک غیرخطی از موضوعات مورد مطالعه و پژوهش در چند دهه اخیر بوده است. در همین راستا تحلیل رفتار و ناپایداری ایرفویل‌های غیرخطی در جریان‌های مادون صوت یکی از بخشهای این مطالعات است. اصولاً در مطالعات انجام شده در این حوزه دو روش بررسی انتخاب شده است. در روش اول سیستم آیروالاستیک غیرخطی در حوزه زمان و عموماً از طریق تکنیک‌های حل عددی بررسی می‌گردد و در روش دوم در حوزه فرکانس و از طریق آنالیز نوسانات چرخه حد، به تحلیل سیستم پرداخته می‌شود. حل‌های عددی به طور عمده شامل روش‌هایی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل سیستم غیرخطی در حوزه زمان می‌باشند و از آن جمله می‌توان به روش‌های تفاضل محدود [۱]، رانگ-کوتا [۲] و روش سیکلی اشاره کرد.

حل‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی عموماً شامل تکنیک توابع توصیف هستند. این تکنیک برای اولین بار به منظور بررسی ناپایداری سطح کنترلی یک بال با سختی غیرخطی به کار گرفته شد [۳]. بعدها پاسخ تحلیلی یک سیستم آیروالاستیک غیرخطی تحت تحریک بیرونی سینوسی بدست آمد [۴]. یکی از روش‌های دیگر بررسی سیستم آیروالاستیک غیرخطی استفاده از سیستم خطی معادل و بکارگیری روش‌های تحلیل ناپایداری خطی برای سیستم خطی معادل بوده است [۵-۷].

در طول یک دهه گذشته روش‌هایی به منظور آنالیز سیستم‌های آیروالاستیک غیرخطی به کار گرفته شدند که از مهم‌ترین آنها می‌توان به روش هارمونیک بالانس [۸]، هارمونیک بالانس بُعد بالا [۹، ۱۰]، هارمونیک بالانس افزایشی [۱۱]، هارمونیک بالانس بیضوی [۱۲] روش سیکلی کاهش یافته [۱۳]، روش مینیفولد مرکزی [۱۴]، روش اغتشاشات افزایشی [۱۵]، روش نقطه تبدیل [۱۶] و روش هوموتوبی [۱۷، ۱۸] اشاره کرد. در بسیاری مواردی نیز از ترکیب روش‌های ذکر شده و روش‌های حل عددی به صورت توأمان استفاده شده است برای نمونه روش هارمونیک بالانس افزایشی و روش عددی نیوتون-رافسون با یکدیگر تلفیق شده‌اند [۱۹]. در بررسی‌های جدیدتر نیز از دمپر معادل در ایرفویل‌های دارای سختی درجه ۳ به عنوان بخشی از آیرودینامیک مسأله استفاده شده است [۲۰] و یا در مطالعه دیگری با بهینه‌سازی روش

هارمونیک بالانس افزایشی و ترکیب آن با مسأله کمینه‌سازی معادل، رفتار دینامیکی سیستم آیروالاستیک بررسی شده است [۲۱].

در بسیاری موارد انتخاب حدس اولیه به منظور اطمینان از همگرایی الگوریتم حل مشکل است، بنابراین توسعه روش‌های جدید و کارآمد به منظور تأمین دقت مورد نیاز در سرعت‌های مختلف جریان و بررسی ناپایداری سیستم‌هایی با غیرخطی‌های بزرگ امری لازم به نظر می‌رسد.

در این مطالعه به معرفی یک روش جدید برای بررسی ناپایداری بالواره غیرخطی پرداخته می‌شود. در این راستا ابتدا با اضافه کردن یک نویز سفید به نیروی برآ، امکان بررسی مسأله در محیط ارتعاشات اتفاقی ایجاد می‌گردد. سپس از روش خطی‌سازی آماری، سیستم آیروالاستیک غیرخطی بر حسب واریانس پاسخ سیستم، خطی می‌شود. برای این منظور ابتدا یک ترم معادل خطی برای بخش غیرخطی سیستم در نظر گرفته شده و میانگین مربعات اختلاف بخش خطی معادل و بخش غیرخطی مینیمم می‌گردد. در نهایت سیستم بر حسب واریانس پاسخ، خطی شده و معادله یک نگاشت غیرخطی بر حسب واریانس پاسخ بدست می‌آید. که در این نگاشت غیرخطی، پارامتر کنترل سرعت جریان می‌باشد. از حل این نگاشت، واریانس سیستم بر حسب سرعت جریان به دست می‌آید و در نقطه بیشینه واریانس که نماینده بیشترین پراکندگی داده‌ها می‌باشد، سرعت فلاتر سیستم تعریف می‌گردد. از بررسی معادله غیرخطی جبری که از نگاشت غیرخطی یک بعدی بدست می‌آید، سرعت دوشاخگی سیستم در دوحالت فتر سخت و نرم شونده بررسی می‌شود و سرعت جریانی که در آن پرش در نمودار سرعت واریانس اتفاق می‌افتد، محاسبه می‌گردد. مزیت استفاده از این روش، پرهیز از به کارگیری حل عددی معادلات دیفرانسیل غیرخطی و یا حتی به کار گرفتن روش‌های معمول آنالیز فلاتر می‌باشد که نه تنها فرایند حل را ساده و سریعتر می‌کند بلکه می‌توان پدیده پرش را به وسیله نقطه دو شاخگی مماسی بررسی نمود.

۲- معادلات حرکت

مدل نشان داده شده در شکل ۱، یک ایرفویل دو درجه آزادی پیچشی و انتقالی می‌باشد. زاویه پیچش حول محور الاستیک

که در آن بردار q ماتریس‌های M, C, K بردار غیرخطی $g(q)$ و بردار نیروی $Q(t)$ به صورت روابط (۶) تا (۹) محاسبه می‌شوند.

$$M = \begin{bmatrix} m + \pi\rho_\infty b^2 & mbx_\theta - \pi\rho_\infty b^3 a \\ mbx_\theta - \pi\rho_\infty b^3 a & I_p + \pi\rho_\infty b^4 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 2\pi\rho_\infty bU^2 \\ 0 & -\pi\rho_\infty b^2 U^2 (2a+1) + k_\theta \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\pi\rho_\infty bU & 2\pi\rho_\infty b^2 U (1-a) \\ -\pi\rho_\infty b^2 U (2a+1) & \pi\rho_\infty b^3 U a (2a-1) \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -f(t) \\ b \left(\frac{1}{2} + a \right) f(t) \end{bmatrix}, g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\theta^3 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

۳- فرمول‌بندی ریاضی

اگر معادله سیستم غیرخطی به صورت رابطه (۵) باشد، با فرض گوسین بودن بردار نیروی تحریک $Q(t)$ و استفاده از روش خطی‌سازی آماری، سیستم خطی معادل به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + K^e q = Q(t) \quad (۱۰)$$

برای بدست آوردن K^e ابتدا تفاضل سیستم غیرخطی و سیستم خطی معادل تشکیل می‌شود [۲۴].

$$\varepsilon = g(q) - K^e q \quad (۱-۱۱)$$

سپس باید میانگین آماری نرم اقلیدسی این تفاضل کمینه شود.

$$E \{ \|\varepsilon\|_2 \} = E \{ \varepsilon^T \varepsilon \} = \sum_{i=1}^n E \{ \varepsilon_i^2 \} = \text{کمینه} \quad (۲-۱۱)$$

برای این منظور $E \{ \varepsilon_i^2 \}$ نسبت به درایه‌های ماتریس سختی سیستم خطی معادل، کمینه می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial K_{ij}^e} E \{ \varepsilon_i^2 \} = \frac{\partial}{\partial K_{ij}^e} E \left\{ \left(g_i - \sum_{j=1}^n K_{ij}^e q_j \right)^2 \right\} = 0 \quad (۳-۱۱)$$

از ساده کردن رابطه (۳-۱۱)، روابط (۴-۱۱) و (۵-۱۱) حاصل می‌شود.

$$E \{ q_j g_i \} = \sum_{s=1}^n K_{is}^e E \{ q_s q_j \} \quad (۴-۱۱)$$

$$E \{ g_i q^T \} = E \{ q^T q \} K_{i*}^{e*} \quad (۵-۱۱)$$

با θ و حرکت انتقالی با h نشان داده می‌شود. نقاط P, C, Q, T ، به ترتیب مرکز آیرودینامیکی، مرکز جرم، مرکز الاستیک و نقطه ۳/۴ وتر هستند. فنر انتقالی یک فنر خطی با سختی K_h و فنر پیچشی یک فنر درجه سه غیرخطی با گشتاور بازگرداننده $M(\theta)$ می‌باشد. جرم ایرفویل با m و ممان اینرسی آن با I_p و با توجه به شکل ۱ $e-a$ با x_θ نشان داده می‌شود. معادله حاکم بر این ایرفویل با استفاده از معادلات لاگرانژ و با در نظر گرفتن نیروی برآ L ، گشتاور آیرودینامیکی $M_{1/4}$ و اضافه کردن نیروی اتفاقی f به نیروی برآ به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود [۲۲].

$$\begin{cases} m\ddot{h} + mbx_\theta \ddot{\theta} + k_h h = -[L + f(t)] \\ I_p \ddot{\theta} + mbx_\theta \ddot{h} + M(\theta) = M_{1/4} + b(0.5+a)[L + f(t)] \end{cases} \quad (۱)$$

با توجه به در نظر گرفتن ترم غیرخطی درجه سه برای فنر پیچشی، گشتاور بازگرداننده $M(\theta)$ به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$M(\theta) = k_\theta \theta + \alpha\theta^3 \quad (۲)$$

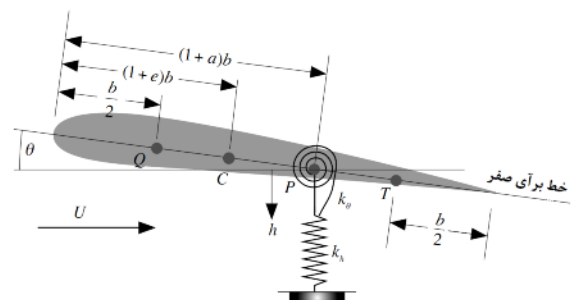
برای جریان شبه‌پایا با سرعت U ، نیروی برآ و ممان آیرودینامیکی با استفاده از تئوری بالواره نازک به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود [۲۳].

$$L = \pi\rho_\infty b^2 \left(\ddot{h} + U\dot{\theta} - ba\ddot{\theta} \right) + 2\pi\rho_\infty bU \left(\dot{h} + U\theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right) \quad (۳)$$

$$M_{1/4} = -\pi\rho_\infty b^3 \left(\frac{1}{2} \ddot{h} + U\dot{\theta} + b \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2} \right) \ddot{\theta} \right) \quad (۴)$$

از جایگذاری معادلات (۲) تا (۴) در معادله (۱) رابطه (۵) بدست می‌آید.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + g(q) = Q(t) \quad (۵)$$



شکل ۱ نمای شماتیک بالواره دو درجه آزادی [۲۲]

K_i^e بیانگر سطر i ام ماتریس K^e می‌باشد.

با فرض گوسین بودن پاسخ، سمت چپ رابطه (۵-۱۱)، به صورت رابطه (۱۱-۶) نوشته می‌شود [۲۴].

$$E\{g_i q^T\} = E\{q^T q\} E\left\{\left[\frac{\partial g_i}{\partial q}\right]^T\right\} \quad (6-11)$$

با توجه به معادلات (۵-۱۱) و (۶-۱۱) درایه‌های ماتریس سختی به صورت رابطه (۸-۱۱) محاسبه می‌شود.

$$K_i^e = E\left\{\frac{\partial g_i}{\partial q}\right\} \quad (7-11)$$

$$K_{ij}^e = E\left\{\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\right\} \quad (8-11)$$

نماد $E\{\cdot\}$ نمایانگر میانگیری آماری می‌باشد.

با توجه به این که تحریک و پاسخ به صورت گوسین می‌باشد، بنابراین رابطه (۸-۱۱) به صورت رابطه (۹-۱۱) محاسبه خواهد شد.

$$K_{ij}^e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} e^{-\frac{(\theta - \theta_m)^2}{2\sigma_\theta^2}} d\theta \quad (9-11)$$

با در نظر گرفتن بردار غیرخطی $g(q)$ به صورت معادله (۸)، ماتریس سختی معادل K^e از رابطه (۱۲) به دست می‌آید

$$K^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha E\{\theta^2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3\alpha\sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن σ_θ^2 میانگین مربعات زاویه پیچشی و یا در حالتی که میانگین پاسخ (θ_m) صفر باشد همان واریانس پاسخ پیچشی می‌باشد [۲۵].

چنانچه مشخص است با استفاده از روش خطی‌سازی آماری، سیستم غیرخطی حول واریانس پاسخ، خطی شده است. حال با استفاده از تحلیل ارتعاشات اتفاقی، واریانس پاسخ، از روی سیستم خطی شده، نیز بدست می‌آید. برای این منظور ابتدا ماتریس پاسخ فرکانسی سیستم محاسبه می‌شود.

$$H(\omega) = [-[M]\omega^2 + [C]i\omega + [K + K^e]]^{-1} \quad (13)$$

در گام بعد، ماتریس چگالی طیفی سیستم تشکیل می‌شود.

$$S_{qq} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{h\theta} \\ S_{\theta h} & S_{\theta\theta} \end{bmatrix} = H^*(\omega) S_Q H^T(\omega) \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، S_Q تابع چگالی طیفی تحریک می‌باشد که با استفاده از نوع نیروی اتفاقی در نظر گرفته شده و رابطه (۹) به

دست می‌آید. در صورتی که نیروی $f(t)$ نویز سفید باشد، S_Q از رابطه (۱۵) حاصل می‌شود.

$$S_Q = \begin{bmatrix} S_0 & -b\left(\frac{1}{2} + a\right)S_0 \\ b\left(\frac{1}{2} + a\right)S_0 & b^2\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 S_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) S_0 شدت نویز سفید است. در ادامه می‌توان واریانس پاسخ را برای درجه آزادی پیچشی به دست آورد.

$$\sigma_\theta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta\theta} d\omega \quad (16)$$

با توجه به روابط (۱۲) تا (۱۴) می‌توان دید که $S_{\theta\theta}$ تابعی از σ_θ^2 می‌باشد، و برای این که سیستم خطی شده با سیستم غیرخطی معادل باشد باید مقدار واریانس که از معادله (۱۶) به دست می‌آید با آنچه در خطی‌سازی سیستم به کار رفته است برابر باشد، برای این منظور ابتدا مقدار واریانس را صفر در نظر گرفته و سیستم خطی می‌شود، سپس مقدار جدید واریانس، از عبارت (۱۶) محاسبه شده و دوباره این مقدار بدست آمده، برای خطی‌سازی سیستم بکار می‌رود، با تکرار این روش پس از همگرا شدن پاسخ، مقدار واریانس محاسبه می‌شود. لازم به تذکر است که، $S_{\theta\theta}$ تابعی از سرعت جریان نیز می‌باشد، بنابراین این عمل برای هر سرعت جریان باید تکرار گردد تا نمودار واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان بدست آید. عمل تکرار ذکر شده در حقیقت ایجاد یک نگاشت درجه اول غیرخطی می‌کند که می‌توان آنرا به صورت رابطه (۱۷) نمایش داد.

$$\sigma_{\theta(n+1)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta\theta}(U, \omega, \sigma_{\theta(n)}^2) d\omega \quad (17)$$

اگر فرض شود برای هر مقدار داده شده از سرعت جریان U^* ، پاسخ‌ها در $n \rightarrow \infty$ همگرا شود، به این معنی که $\sigma_{\theta(n+1)}^2 = \sigma_{\theta(n)}^2 = \sigma_\theta^2$ باشد، لذا نگاشت (۱۶) به معادله جبری غیرخطی (۱۸) تبدیل می‌گردد که با حل آن، مقدار واریانس پاسخ، برای هر سرعت جریان محاسبه می‌شود.

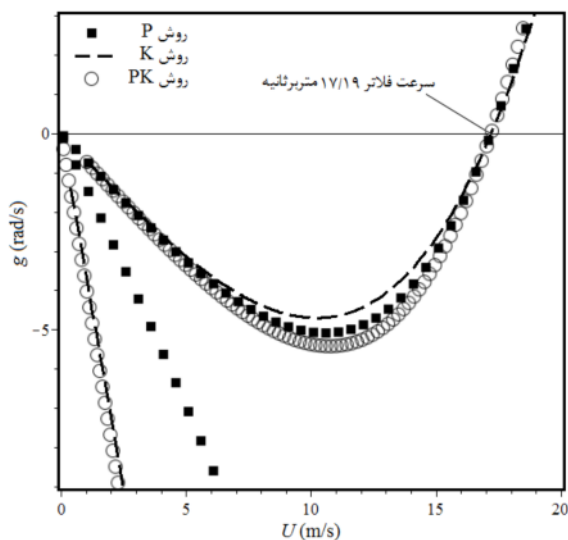
$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\theta\theta}(U^*, \sigma_\theta^2, \omega) d\omega - \sigma_\theta^2 = 0 \quad (18)$$

۴- مثال عددی

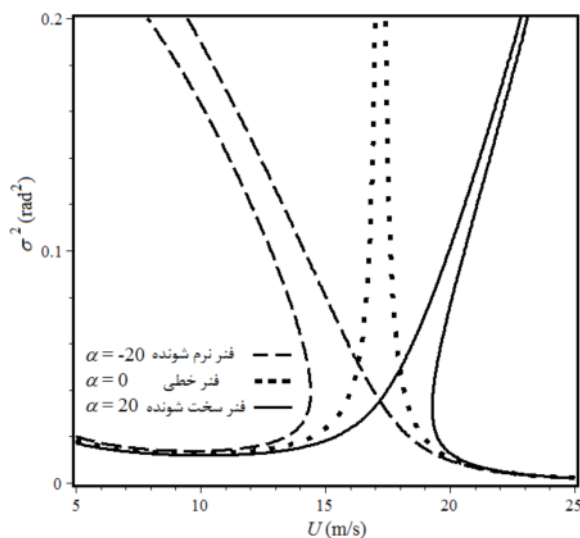
در این قسمت روش شرح داده شده (بررسی معادلات (۱۶) تا (۱۸)) بر روی دو بالواره اعمال می‌شود. پارامترهای سازه‌ای مربوط به بالواره اول، خواص جریان و شدت تحریک تصادفی در

جدول ۱ پارمترهای سازه‌ای بالواره و شدت تحریک تصادفی [۷]

پارامتر	توضیح	مقدار
b	نیم وتر	۰/۱۱۸ متر
ρ_s	چگالی جریان آزاد	۱/۲۲۵ کیلوگرم بر مترمکعب
a	مکان محور الاستیک	-۰/۴۱
x_θ	نابالانسی استاتیکی بی‌بعد	۰/۱۵
I_p	ممان اینرسی	۰/۰۰۲۹ کیلوگرم مترمربع
k_h	سفتی خمشی	۸۲۱/۱۳ نیوتون بر متر
k_θ	سفتی پیچشی	۲۲/۱۹ نیوتون متر بر رادیان
m	جرم ایرفویل	۰/۶۸۶ کیلوگرم
S_0	شدت تحریک تصادفی نویز سفید	۱ نیوتون ثانیه بر مترمربع



شکل ۳ تغییرات دمپینگ بر حسب سرعت جریان (سرعت فلاتر)



شکل ۴ واریانس پاسخ پیچشی بر حسب سرعت جریان

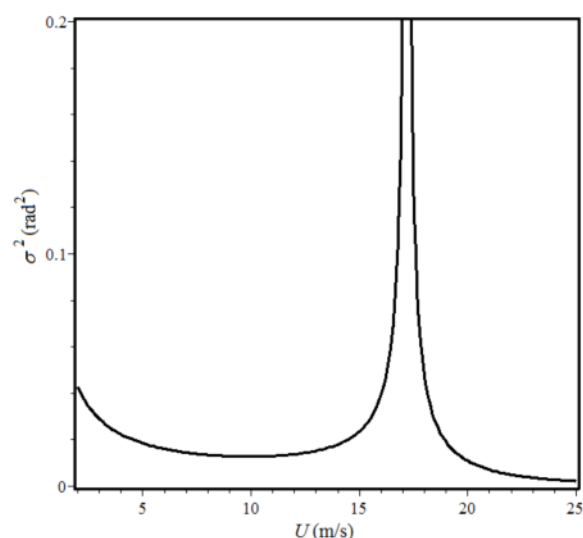
جدول ۱ ذکر شده است. نتایج برای دو حالت خطی ($\alpha=0$) و غیرخطی ($\alpha=20, -20$) بالواره اول و ($\alpha=40, -40$) بالواره دوم بدست آمده است.

۴-۱- سیستم خطی ($\alpha=0$)

از آنجا که در حالت خطی، چگالی طیفی پاسخ ($S_{\theta\theta}$) تنها تابع فرکانس و سرعت جریان می‌باشد، می‌توان با استفاده از معادله (۱۶) مقدار واریانس پاسخ را به ازای سرعت‌های مختلف جریان بدست آورد که نتیجه آن در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در سرعت ۱۷/۱۹ متر بر ثانیه مقدار بیشینه واریانس پاسخ، اتفاق می‌افتد. بنابراین این سرعت به عنوان سرعت ناپایداری سیستم در نظر گرفته می‌شود. برای اعتبارسنجی فرایند ذکر شده، از روش‌های P، K و PK [۲۲]، که از روش‌های متداول آنالیز ناپایداری سیستم‌های آیروالاستیک می‌باشند، نیز استفاده شده است. این نتایج در شکل ۳ و جدول ۲ نشان داده شده است.

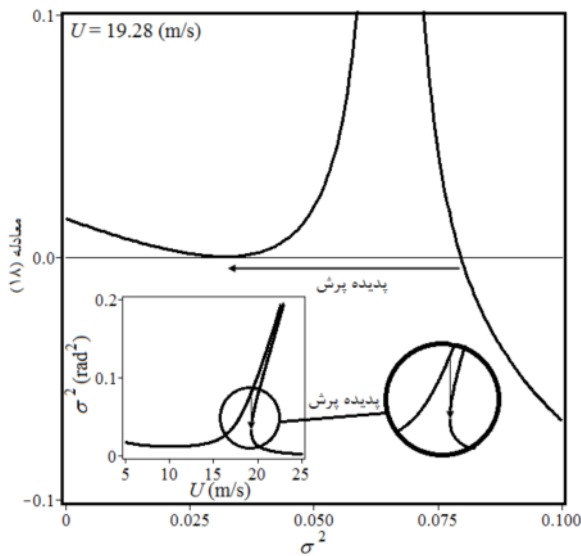
۴-۲- سیستم غیرخطی ($\alpha=20, -20$)

در این قسمت به تحلیل مسأله غیرخطی در دو حالت فنر سخت‌شونده و نرم‌شونده پرداخته می‌شود. با حل معادله (۱۸) به ازای سرعت‌های مختلف جریان، نمودار واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان بدست می‌آید که در شکل ۴ نشان داده شده است.


 شکل ۲ واریانس پاسخ پیچشی بر حسب سرعت جریان ($\alpha=0$)

جدول ۲ سرعت فلاتر از روش اتفاقی و روش‌های کلاسیک

روش	سرعت فلاتر (متر بر ثانیه)
[۲۲] P, K, PK	۱۷/۱۹
روش اتفاقی	۱۷/۱۹

شکل ۶ پدیده پرش در ریشه معادله (۱۸) ($\alpha=20$)

این دو ریشه جدید نیز با افزایش سرعت از یکدیگر جدا شده و یکی نقش جاذب (ریشه پایدار) و دیگری نقش دافع (ریشه ناپایدار) را بازی می‌کند. در شکل ۶، پدیده پرش در نمودار سرعت-واریانس نیز نشان داده شده است.

۴-۲-۲- سیستم با فنر نرم‌شونده ($\alpha=20$)

با بررسی معادله (۱۸) برای حالت نرم‌شونده می‌توان دریافت که در ابتدا، سیستم به ازای هر سرعت جریان دارای ۳ ریشه می‌باشد که ریشه اول پایدار و دو ریشه دیگر ناپایدار هستند و عمل همگرایی همواره به سمت ریشه اول میل می‌کند (شکل ۷). با افزایش سرعت جریان ریشه پایدار و ناپایدار سیستم به سمت هم حرکت کرده و در سرعت جریان ۱۴/۴ متر بر ثانیه، روی هم منطبق می‌شوند و خاصیت خود را به ریشه سوم می‌دهند، این نقطه همان نقطه دو شاخگی تانژانسی بوده که در آن واریانس پاسخ سیستم به سمت مقدار بالاتر پرش می‌کند (شکل ۸). در شکل ۸، پدیده پرش در نمودار سرعت-واریانس نیز نشان داده شده است.

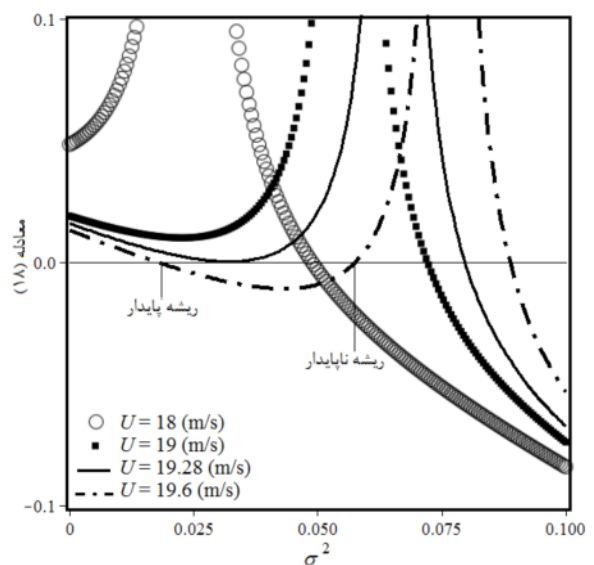
۴-۳- مثال عددی دوم

در این بخش از مشخصات بالواره دیگری (جدول ۳) استفاده می‌شود و سرعت ناپایداری آن در حالت‌های خطی و غیرخطی توسط روش اتفاقی، محاسبه می‌گردد. نتایج حاصل با استفاده از پاسخ زمانی سیستم، در سرعت جریان قبل و بعد از فلاتر صحه‌گذاری شده است.

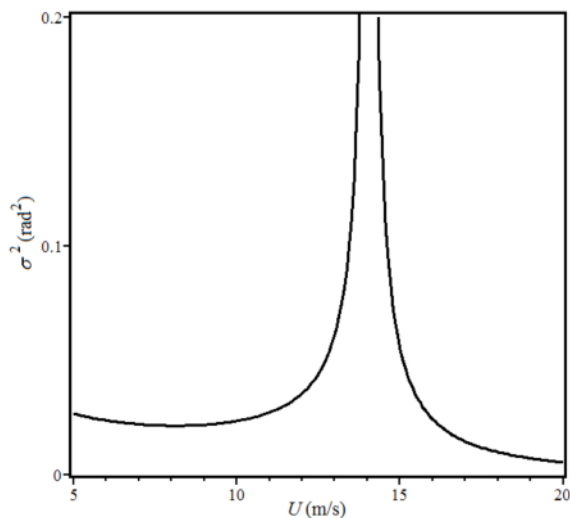
همان‌طور که مشخص است در حالت غیرخطی با فنر سخت‌شونده، نمودار واریانس-سرعت نسبت به حالت خطی خود به سمت راست و در حالت غیرخطی با فنر نرم‌شونده به سمت چپ انحنای پیدا کرده است و بنابراین به ازای برخی مقادیر سرعت جریان در حالت غیرخطی، بیشتر از یک جواب برای واریانس سیستم بدست می‌آید. این موضوع سبب می‌شود که در سیستم پدیده پرش اتفاق بیافتد که در قسمت‌های بعدی مطالعه، به صورت مجزا برای هر دو حالت غیرخطی با فنر سخت‌شونده و فنر نرم‌شونده بررسی می‌شود.

۴-۲-۱- سیستم با فنر سخت‌شونده ($\alpha=20$)

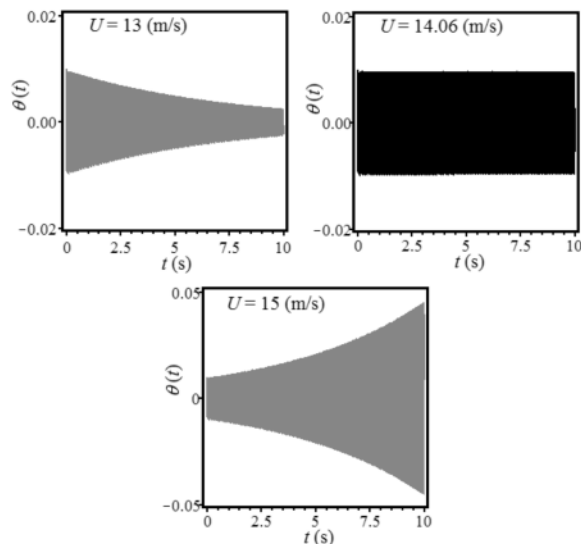
از بررسی ریشه‌های معادله (۱۸) در حالت سخت‌شونده می‌توان به وضوح مشاهده کرد که با افزایش سرعت جریان، مقدار واریانس پاسخ که همان ریشه معادله (۱۸) (محل برخورد با محور افقی) است، افزایش می‌یابد (شکل ۵) و در سرعت جریان ۱۹/۲۸ متر بر ثانیه، با ایجاد دوشاخگی تانژانسی، دو ریشه جدید در معادله ایجاد می‌شود و باعث می‌شود که واریانس پاسخ به سمت ریشه ایجاد شده پرش کرده و کاهش واریانس پاسخ رخ دهد (شکل ۶).

شکل ۵ ریشه‌های معادله (۱۸) ($\alpha=20$)

در شکل ۹ واریانس پاسخ بر حسب سرعت جریان نمایش داده شده است. در سرعت ۱۴/۰۶ متر بر ثانیه مقدار بیشینه واریانس رخ داده است که نمایانگر سرعت فلاتر می‌باشد. در شکل ۱۰ پاسخ زمانی سیستم، قبل، در حین و بعد از فلاتر نمایش داده شده است که دقیقاً همان سرعت ۱۴/۰۶ متر بر ثانیه را به عنوان سرعت فلاتر نشان می‌دهد. در شکل ۱۱ ناپایداری این بالواره در حالت غیرخطی با فنر سخت و نرم‌شونده بررسی شده است.

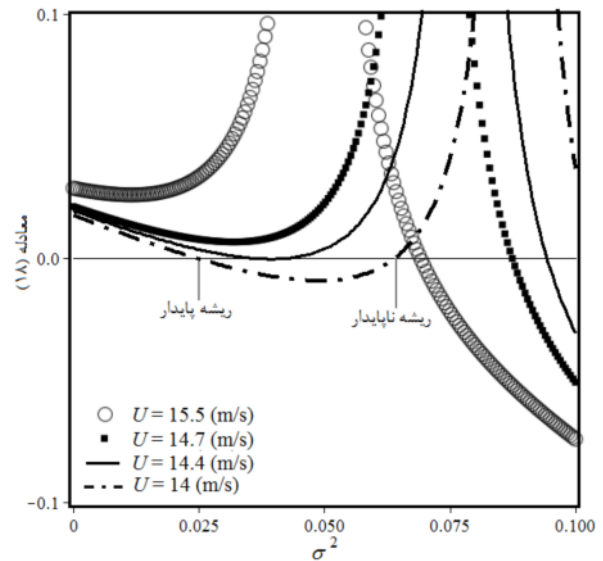


شکل ۹ واریانس پاسخ پیچشی بر حسب سرعت جریان

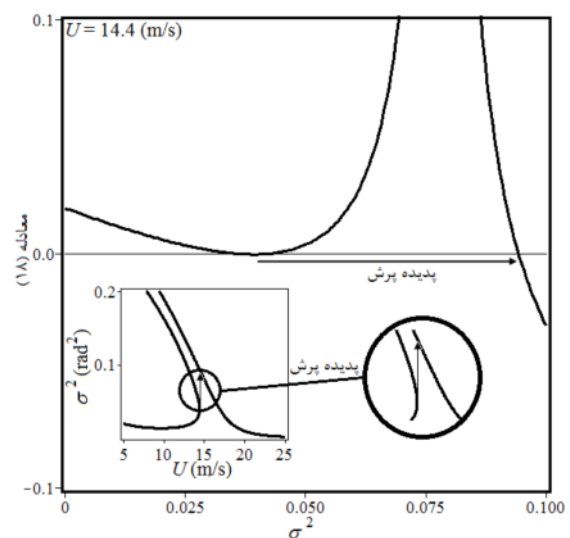


شکل ۱۰ پاسخ زمانی بالواره دوم، (سرعت قبل، فلاتر و بعد از فلاتر)

در حالت سخت‌شونده مقدار واریانس با رسیدن به سرعت ۱۵/۶۶ متر بر ثانیه و ایجاد دوشاخگی تانژانتی به سمت پایین



شکل ۷ ریشه‌های معادله (۱۸) ($\alpha = -20$)



شکل ۸ پدیده پرش در ریشه معادله (۱۸) ($\alpha = -20$)

جدول ۳ پارمترهای سازه‌ای بالواره و شدت تحریک تصادفی [۲۲]

پارامتر	توضیح	مقدار
b	نیم وتر	۰/۱۵ متر
ρ_x	چگالی جریان آزاد	۱/۲۲۵ کیلوگرم بر مترمکعب
a	مکان محور الاستیک	-۰/۲
x_θ	نابالانسی استاتیکی بی‌بعد	۰/۱
I_p	ممان اینرسی	۰/۰۰۹۳۵ کیلوگرم مترمربع
k_h	سفتی خمشی	۲۷۷۰/۸۸ نیوتون بر متر
k_θ	سفتی پیچشی	۹۳/۵۲ نیوتون متر بر رادیان
m	جرم ایرفویل	۱/۷۳۲ کیلوگرم
S_0	شدت تحریک تصادفی نویز سفید	۱ نیوتون ثانیه بر مترمربع

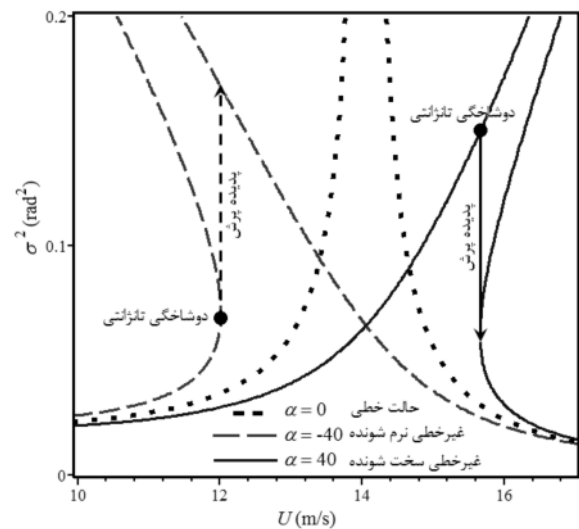
از آنجا که در پدیده‌های تصادفی، واریانس، نمایانگر میزان پراکندگی داده‌ها می‌باشد و می‌توان آن را نماینده دامنه فرایند اتفاقی دانست، لذا سرعت جریانی که در آن بیشینه واریانس اتفاق می‌افتد، به عنوان سرعت ناپایداری سیستم در نظر گرفته می‌شود.

در حالت خطی، نتایج با روش‌های دیگر بررسی ناپایداری سیستم از جمله روش P ، K و PK و همچنین پاسخ زمانی سیستم، صحه گذاری شد. در حالت غیرخطی با فنر نرم شونده نمودار سرعت-واریانس نسبت به حالت خطی به سمت چپ انحنا پیدا کرده و مشخص شد که به ازای برخی مقادیر سرعت جریان، ۳ مقدار برای واریانس پاسخ سیستم بدست می‌آید. با استفاده از آنالیز نگاشت غیرخطی معلوم شد که با تغییر سرعت جریان، مقدار واریانس پاسخ، از طریق دوشاخگی تانژانسی به سمت مقدار بالاتر پرش می‌کند و از آنجایی که مقدار بیشینه واریانس به عنوان ناپایداری سیستم مطرح می‌شود، این سرعت را می‌توان به عنوان سرعت ناپایداری در نظر گرفت. در حالت غیرخطی با فنر سخت شونده، نمودار سرعت-واریانس نسبت به حالت خطی به سمت راست انحنا پیدا کرده است و با بهره‌گیری از آنالیز نگاشت غیرخطی معلوم شد که با تغییر سرعت جریان و رخ دادن دوشاخگی تانژانسی، واریانس پاسخ به سمت مقدار پایین‌تر پرش می‌کند. این سرعت را نیز می‌توان به عنوان سرعت ناپایداری در نظر گرفت.

همان‌گونه که در شکل ۱۲ مشخص است نقطه پرش و لذا ناپایداری سیستم در سیستم غیرخطی با فنر نرم‌شونده نسبت به حالت خطی زودتر اتفاق می‌افتد و ناپایداری و پرش برای سیستم غیرخطی با فنر سخت شونده دیرتر از حالت خطی اتفاق می‌افتد. و همواره پرش در حالتی رخ می‌دهد که در سیستم دوشاخگی تانژانسی اتفاق بیافتد. در جدول‌های ۴ و ۵ می‌توان مقادیر سرعت فلاتر را برای سه حالت یاد شده مشاهده نمود.

مزیت استفاده از این روش برای بررسی ناپایداری سیستم-های خطی، سهولت روش حل و حذف فرایند همگرایی در روش‌های کلاسیک بررسی فلاتر می‌باشد و در حالت غیرخطی نیز این روش، فرایند حل عددی معادلات دیفرانسیل سیستم را حذف کرده و بدون ورود به حوزه زمان و حتی بدون بررسی چرخه حد، می‌تواند ناپایداری سیستم و مواردی مانند پرش و دوشاخگی را معین سازد. همچنین با استفاده از این روش برای

پرش کرده و در حالت نرم شونده مقدار واریانس با رسیدن به سرعت ۱۲ متر بر ثانیه و ایجاد دو شاخگی تانژانسی به سمت بالا پرش می‌کند. لذا ماکزیمم واریانس در حالت سخت‌شونده در سرعت ۱۵/۶۶ متر بر ثانیه و در حالت نرم شونده در سرعت ۱۲ متر بر ثانیه شکل می‌گیرد و این ماکزیمم واریانس به عنوان سرعت ناپایداری غیرخطی معرفی می‌شود.



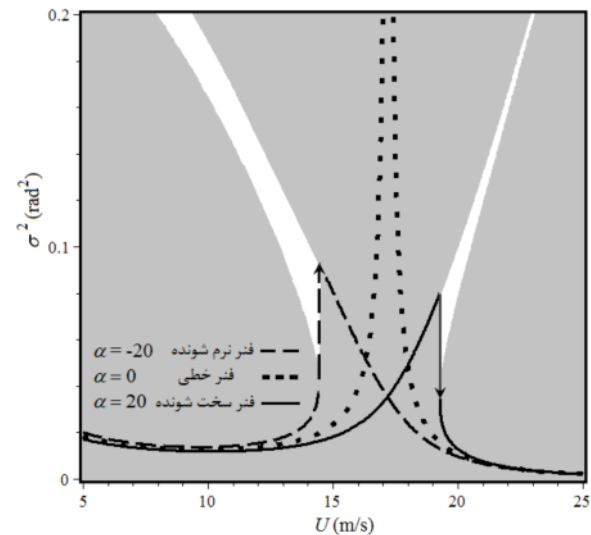
شکل ۱۱ واریانس پاسخ بر حسب سرعت و پدیده پرش (بالواره دوم)

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی ناپایداری بالواره، با عامل غیرخطی فنر درجه ۳، در دو حالت فنر سخت و نرم شونده تحت اثر جریان شبه پایا پرداخته شد. برای این منظور ابتدا یک نیروی اتفاقی نویز سفید به نیروی برآ اضافه شد تا بتوان از قابلیت تحلیل اتفاقی سیستم‌های غیرخطی برای بررسی سیستم مورد نظر استفاده شود. لازم به ذکر است بار وارده بر بالواره را می‌توان به صورت متوسط نیروی برآ به همراه ترم تصادفی نیز در نظر گرفت که این ترم تصادفی با تابع احتمال گوسین و به صورت نویز سفید می‌باشد. در ادامه از روش خطی‌سازی آماری، یک سیستم خطی معادل برای مجموعه در نظر گرفته شد و اختلاف میانگین آماری این سیستم معادل، با سیستم اصلی کمینه گردید. و در نهایت به تحلیل واریانس پاسخ سیستم خطی شده معادل پرداخته شد. در نتیجه این روش یک نگاشت غیرخطی بدست آمد که از بررسی این نگاشت، در دو حالت خطی و غیرخطی نمودار واریانس بر حسب سرعت رسم گردید.

- [4] Lee B.H.K., Gong L., Wong Y.S., "Analysis and computation of nonlinear dynamic response of a two-degree-of-freedom system and its application in aeroelasticity", *Journal of Fluids and Structures*, No. 11, 1997, pp. 225–246.
- [5] Liu J.K., Zhao L.C., "Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow", *Journal of Sound and Vibration*, No. 154(1), 1992, pp. 117–124.
- [6] Price S.F., Alighanbari H., Lee B.H.K., "The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities", *Journal of Fluids and Structures*, No. 9, 1995, pp. 175–193.
- [7] Shahrzad P., Mahzoon M., "Limit cycle flutter of airfoils in steady and unsteady flows", *Journal of Sound and Vibration*, No. 256(2), 2002, pp. 213–225.
- [8] Lee B.H.K., Liu L., Chung K.W., "Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces", *Journal of Sound and Vibration*, No. 281, 2005, pp. 699–717.
- [9] Liu L.P., Dowell E.H., "The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: Effect of high harmonics", *Journal of Nonlinear Dynamics*, No. 37, 2004, pp. 31–49.
- [10] Liu L., Dowell E.H., Thomas J.P., "A high dimensional harmonic balance approach for an aeroelastic airfoil with cubic restoring forces", *Journal of Fluids and Structures*, No. 23, 2007, pp. 351–363.
- [11] Raghothama A., Narayanan S., "Nonlinear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method", *Journal of Sound and Vibration*, No. 226(3), 1999, pp. 493–517.
- [12] Chen Y.M., Liu J.K., "Elliptic harmonic balance method for two degree-of-freedom self-excited oscillators", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, No. 14, 2009, pp. 916–922.
- [13] Beran P.S., Lucia D.J., "A reduced order cyclic method for computation of limit cycles", *Journal of Nonlinear Dynamics*, No. 39, 2005, pp. 143–158.
- [14] Liu L., Wong Y.S., Lee B.H.K., "Application of the center manifold theory in nonlinear aeroelasticity", *Journal of Sound and Vibration*, No. 234, 2000, pp. 641–659.
- [15] Chung K.W., He Y.B., Lee B.H.K., "Bifurcation analysis of a two-degree-of-freedom aeroelastic system with hysteresis structural nonlinearity by a perturbation-incremental method", *Journal of Sound and Vibration*, No. 320, 2009, pp. 163–183.
- [16] Liu L., Wong Y.S., Lee B.H.K., "Nonlinear aeroelastic analysis using the point transformation method, Part 1: Freeplay Model", *Journal of Sound and Vibration*, No. 253(2), 2002, pp. 447–469.
- [17] Liao S.J., "An analytic approximate approach for

حالت غیرخطی به جای محدوده فلاتر، سرعت دقیق فلاتر مشخص می‌شود.



شکل ۱۲ واریانس پاسخ بر حسب سرعت و پدیده پرش (بالواره اول)

جدول ۴ سرعت فلاتر حالات خطی و غیرخطی بالواره اول

روش	سرعت فلاتر (متر بر ثانیه)
حالت خطی	۱۷/۱۹
غیرخطی نرم شونده	۱۴/۴
غیرخطی سخت شونده	۱۹/۲۸

جدول ۵ سرعت فلاتر حالات خطی و غیرخطی بالواره دوم

روش	سرعت فلاتر (متر بر ثانیه)
حالت خطی	۱۴/۰۶
غیرخطی نرم شونده	۱۲
غیرخطی سخت شونده	۱۵/۶۶

۶- مراجع

- [1] Lee B.H.K., Le Blanc P., "Flutter analysis of a two-dimensional airfoil with cubic nonlinear restoring force", *Aeronautical Note NAE-AN-36*, NRC No. 25438, 1986, National Research Council of Canada.
- [2] Lee B.H.K., Jiang L.Y., Wong Y.S., "Flutter of an airfoil with a cubic nonlinear restoring force", *AIAA Paper 98-1725*, 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 20–23 April, 1998, Long Beach, CA.
- [3] Shen S.F., "An approximate analysis of nonlinear flutter problems", *Journal of Aerospace Science*, No. 26, 1959, pp. 25–32.

- an external store”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, No. 47, pp. 2012, pp. 75–83.
- [22] Hodges D.H., Pierce G.A., *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press, 2002, Cambridge.
- [23] Bisplinghoff R.L., Ashley H., Halfman R.L., *Aeroelasticity*, Dover Publications, Inc., 1996, New York.
- [24] Roberts J.B., Spanos P.D., *Random vibration and statistical linearization*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990, England.
- [25] Sazesh S., *Vibrational analysis of wing under stochastic condition and nonlinear parameters*, MSc Thesis, Department of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology, 2012, Tehran. (In Persian)
- free oscillations of self-excited system”, *Journal of Nonlinear Mechanics*, No. 39, 2004, pp. 271–280.
- [18] Chen Y.M., Liu J.K., “Homotopy analysis method for limit cycle flutter of airfoils”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 203(2), 2008, pp. 854–863.
- [19] Cheung Y.K., Chen S.H., Lau S.L., “Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems”, *Journal of Sound and Vibration*, No. 140, 1990, pp. 273–286.
- [20] Chen Y.M., Liu J.K., Meng G., “Equivalent damping of aeroelastic system of an airfoil with cubic stiffness”, *Journal of Fluids and Structures*, No. 27, 2011, pp. 1447–1454.
- [21] Chen Y.M., Liu J.K., Meng G., “An incremental method for limit cycle oscillations of an airfoil with