



بررسی تاثیر پارامترهای هسته در پاسخ الاستو-دینامیکی تیر ساندویچی مرکب تیموشنکو تحت بارگذاری جرم متحرک

حسن بیگلری^{۱*}، میلاد آزور^۲

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

۲- دانشجوی کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز

*کدپستی ۵۱۶۶۶، hbiglari@tabrizu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۹ تیر ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۷ شهریور ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۳ فروردین ۱۳۹۳

کلید واژگان:

تیر ساندویچی مرکب

ضریب تاثیر اینرسی

سرعت بحرانی

ضریب تقویت دینامیکی

در این مقاله، پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی مرکب نسبتاً ضخیم تحت بارگذاری جرم متحرک با در نظرگیری اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی با شرایط تکیه‌گاهی ساده صورت می‌پذیرد. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. سپس معادلات دیرانسیلی جزئی حاصل، با استفاده از روش آنالیز مودال به معادلات دیرانسیل معمولی با ضرایب متغیر با زمان تبدیل می‌شوند. حل معادلات دیرانسیل معمولی به صورت تحلیلی-عددی با استفاده از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار صورت گرفته است. نتایج حاصل با نتایج موجود در ادبیات موضوع صحت‌گذاری گردیده است. هدف مقاله، بررسی تاثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب لاغری، نحوه چینش الیاف در رویه‌ها، ضخامت و سفتی جانبی هسته، سرعت بارگذاری و اثر اینرسی جرم متحرک روی پارامترهای مهم پاسخ دینامیکی تیر از قبیل ضریب تقویت بار و سرعت بحرانی می‌باشد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که ضخامت و سفتی جانبی هسته تاثیر بسزایی در سرعت بحرانی دارد. همچنین تاثیر اینرسی جرم متحرک، در سرعت‌های زیر و فراتر از سرعت بحرانی اول، بر روی پاسخ تیر متفاوت است.

On the effects of core parameters on elasto-dynamic response of Timoshenko composite sandwich beam under moving mass

Hossein Biglari^{1*}, Milad Azvar²

1- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Iran

* P.O.B. 51666, Tabriz, Iran, hbiglari@tabrizu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 20 April 2013

Accepted 18 September 2013

Available Online 12 April 2014

Keywords:

Composite Sandwich Beam

Inertia Coefficient

Critical Speed

Amplification Factor

Rotary Inertia

ABSTRACT

In this paper, dynamic analysis of simply-supported composite sandwich beam under a moving mass including rotary inertia and transverse shear deformation are investigated. Governing equations are gained using Hamilton's principal. Modal superposition method used to deriving ordinary differential equation of motion in matrix form. Fourth order Runge-Kutta method applied to solving the ODE with time varying coefficients. Parametric studies such as effects of stacking, aspect ratio, core thickness and stiffness, mass and speed of moving load on the midpoint deflection, dynamic magnification factor and critical speed have been studied. The obtained results show that core thickness and stiffness have considerable effects on critical speed. Inertia of moving mass has distinct effects on dynamic response of beam depend on load velocity.

۱- مقدمه

کامپوزیتی غیرهمسانگرد می‌باشد. لایه‌ها بیشتر نقش تحمل گشتاورهای خمشی و هسته وظیفه تحمل نیروهای برشی جانبی را دارد [۱]. به دلیل وجود هسته ضخیم و انعطاف‌پذیر نسبت به رویه‌ها در پل‌های ساندویچی، این سازه‌ها رفتارهای منحصر به فردی نسبت به چندلایه‌های کامپوزیتی دارا می‌باشند. به عنوان مثال، اغماض از اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی هسته، خطای زیادی در محاسبه پاسخ تیرهای ساندویچی ایجاد می‌کند.

در سازه‌های تحت بارگذاری دینامیکی، تنش‌ها و خیزها نسبت به حالت استاتیکی بزرگ‌ترند. از این رو نیاز به تحلیل دینامیکی سازه‌ها اهمیت می‌یابد. اثرات دینامیکی موجود در مسایل دارای بار متحرک تا اواسط قرن نوزدهم میلادی شناخته نشده بود. استوک به عنوان اولین محقق است که در

امروزه، به دلیل افزایش استفاده از وسایل ترابری سنگین و با سرعت بالا و همچنین ضرورت به کارگیری مواد جدید با استحکام بالا و سبک در ساخت پل‌ها و راه‌ها، لزوم داشتن درک جامع روی مسائل بار متحرک هر چه بیشتر احساس می‌شود. مواد ساندویچی به علت دارا بودن نسبت استحکام به وزن بالا، دارای محبوبیت زیادی در کاربردهای صنعتی خصوصاً در ساختمان‌سازی و پل‌سازی نسبت به سایر مواد هستند. یک تیر ساندویچی معمولی متشکل از سه لایه اساسی هسته و رویه‌های بالا و پایین می‌باشد. هسته از مواد با چگالی کم، نظیر لانه زنبوری‌ها و فوم‌های پلیمری و یا چوب‌های بالسا ساخته می‌شود، در حالی که جنس رویه‌ها از مواد با استحکام بالا نظیر فلزات و یا چندلایه‌های

Please cite this article using:

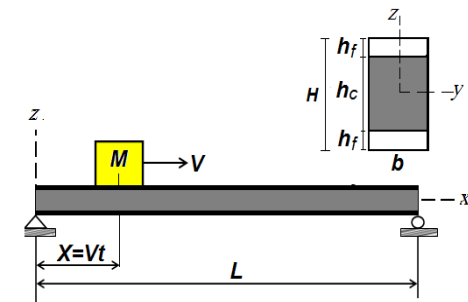
H. Biglari, M. Azvar, On the effects of core parameters on elasto-dynamic response of Timoshenko composite sandwich beam under moving mass, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 2, pp. 63-69, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

هسته تأثیر بسزایی در ضریب تقویت و سرعت بحرانی دارد. همچنین اثر اینرسی جرم متحرک در سرعت‌های زیر و فراتر از سرعت بحرانی متفاوت است. در ضمن ضریب تقویت بار در طول تیر ثابت نبوده و در انتهای تیر دارای مقادیر بزرگ‌تری نسبت به ابتدای تیر است.

۲- فرمول نویسی ریاضی

مطابق شکل ۱، جرم متمرکزی را در نظر بگیرید که روی سطح تیر حرکت می‌کند. در تیر استهلاکی وجود ندارد و جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.



شکل ۱ تیر ساندویچی دارای تکیه‌گاه‌های ساده تحت جرم متحرک

میدان جابه‌جایی در تئوری تیموشنکو به‌صورت زیر است [۱۵]:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) + z\phi(x, t) \\ w(x, z, t) = w_0(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

در رابطه بالا، u, w جابه‌جایی در راستای محورهای مختصات x, z می‌باشد. برای به‌دست آوردن روابط حاکم بر مسئله، از اصل هامیلتون استفاده شده است:

$$\delta \int_0^t (T - U - V) dt = 0 \quad (2)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و V انرژی پتانسیل مطابق روابط زیر هستند:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta T = & - \int_0^t \int_V \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dv dt \\ & - \int_0^t \int_0^L M (V^2 w'' + 2V \dot{w}' + \ddot{w}) \\ & \times \delta_D (x - Vt) \delta w dx dt \\ \int_0^t \delta U dt = & \int_0^t \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dv \\ \int_0^t \delta V dt = & - \int_0^t \int_0^L Mg \delta (x - Vt) \delta w dx dt \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط فوق $\dot{w} = d/dt$ ، $w' = d/dx$ و M, V به ترتیب جرم و سرعت افقی بارگذاری متحرک می‌باشند. با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۱) و استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی و روابط ساختاری تنش-کرنش در روابط (۳) و پس از انتگرال‌گیری جزء به جزء و انجام یک سری عملیات جبری، معادلات حاکم بر خمش دینامیکی تیر و شرایط مرزی آن به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} I_3 \ddot{\phi} + E_{11} \phi - \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \phi'' + E_{11} w' &= 0 \\ I_1 \ddot{w} - E_{11} w'' - E_{11} \phi' + \\ M (V^2 w'' + 2V \dot{w}' + \ddot{w}) \delta (x - Vt) &= Mg \delta (x - Vt) \\ w(0, t) = w'(0, t) &= 0 \\ w(L, t) = w'(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

مورد بار متحرک به مطالعه و بررسی پرداخته است [۲]. در این زمینه کتاب جامعی توسط فریبا نوشته شده که تمامی کارهای موجود در زمینه بار متحرک را تا زمان خودش پوشش می‌دهد [۳]. عمدتاً دو دسته‌بندی در مسائل بارگذاری متحرک وجود دارد: بار متحرک (بدون داشتن اثرات اینرسی) و جرم متحرک. زمانی می‌توان از اینرسی بار متحرک صرف‌نظر کرد که جرم بار متحرک نسبت به جرم کلی تیر ناچیز باشد. تحلیل مسایل بار متحرک نسبتاً ساده‌تر بوده و توسط بسیاری از محققان بررسی شده است [۵، ۴]. در این نوع مسایل، می‌توان از راه تحلیلی به پاسخ دقیق دست یافت. در مسایل جرم متحرک با احتساب اینرسی بار، معادلات حاکم بر حرکت تیر بسیار پیچیده‌تر شده و به جز در موارد خاص مانند طناب بدون جرم، نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت دقیق حل کرد [۶، ۷].

بسیاری از بررسی‌های تحلیلی، عددی و تجربی صورت گرفته تاکنون، مربوط به پاسخ دینامیکی تیر فلزی همسانگرد تحت بارگذاری جرم متحرک مربوط بوده است [۸، ۹]. با وجود تحقیقات فراوان روی مسئله بارگذاری متحرک برای مواد همسانگرد، هنوز این مسئله به‌صورت جدی برای مواد کامپوزیتی و خصوصاً ساندویچی مورد بحث قرار نگرفته است. کدیور و محب‌پور [۱۰] پاسخ دینامیکی چندلایه‌های کامپوزیتی تحت بار متحرک را براساس تئوری‌های کلاسیک، مرتبه اول و مرتبه بالای برشی، به روش المان محدود بررسی کردند. زبیده و ابوهلال [۱۱] به بررسی ارتعاشات اتفاقی تیر کامپوزیتی تحت بار متحرک تصادفی پرداختند. محب‌پور و همکاران [۱۲] به بررسی المان محدود تیر کامپوزیتی تحت بار متحرک نوسانی پرداختند. کایا [۱۳] با معرفی نوع جدیدی از المان، پاسخ دینامیکی تیر چندلایه کامپوزیتی تحت بار متحرک را براساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار داد. در این المان، برای هر لایه یک درجه آزادی دورانی در نظر گرفته است که نیاز به تخصیص یک درجه آزادی بیشتر در جهت طولی و عرضی را از بین برده است. اخیراً، میسیورک [۱۴] پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت بار متحرک (بدون اینرسی) را توسط شیوه ریاضی جدیدی حل نموده و قسمت حل خصوصی پاسخ را به‌صورت حل دقیق به‌دست آورده است.

در مقاله حاضر، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضخامت و سفتی جانبی هسته، ضریب لاغری تیر، چینش الیاف در رویه‌ها، سرعت بارگذاری و اینرسی جرم متحرک بر روی پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی مرکب تحت بارگذاری جرم متحرک بررسی می‌شود. به‌دلیل ضخامت هسته، اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی تأثیر بسزایی در پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی خواهد داشت. لذا برای این بررسی از تئوری تیموشنکو استفاده می‌شود. با به‌کارگیری روش انرژی و اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر مسئله به‌صورت معادلات دیفرانسیل جزئی به‌دست می‌آیند. سپس توسط روش آنالیز مودال^۱، معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسئله به‌صورت ماتریسی استخراج می‌شود. به‌منظور حل معادلات دیفرانسیل از روش عددی رانگ-کوتای مرتبه چهار استفاده شده است. نتایج حاصل از کار حاضر، در مسایل ارتعاش آزاد تیر ساندویچی و همچنین پاسخ دینامیکی تیر فلزی و چندلایه کامپوزیتی تحت بارگذاری جرم و بار متحرک با نتایج موجود در ادبیات موضوع صحنه‌گذاری گردیده است. در ادامه، نتایج جدیدی برای پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت اثر نیرو و جرم متحرک ارائه گردیده است. همچنین تأثیر اینرسی جرم متحرک در سرعت‌های زیر و فراتر از سرعت بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است. نشان داده خواهد شد که ضخامت و سفتی جانبی

کارهای محققین سابق، به اعتبارسنجی مدل ارائه شده پرداخته می‌شود. برای این منظور، ابتدا فرکانس طبیعی تیر ساندویچی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ذکر این نکته ضروری است که اثر فرکانس طبیعی در پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت جرم متحرک دیده می‌شود. فرکانس طبیعی تیر ساندویچی طبق تئوری تیموشنکو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_n|_{\text{Timoshenko}} = \sqrt{\frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4B_0B_4}}{2B_4}} \quad (9)$$

پارامترهای B_0, B_2, B_4 در پیوست ضمیمه شده‌اند. نتایج حاصل از کار حاضر با نتایج موجود در کار خلیلی [۱۶]، که براساس روش المان محدود سفتی دینامیکی بهبودیافته^۲ است، مقایسه می‌شود.

سپس نتایج حاصل از مقاله حاضر در محاسبه پاسخ دینامیکی تیر آلومینیومی تحت جرم متحرک با نتایج تجربی موجود در کار آقای بیللو و همکاران [۱۷] صحت‌گذاری می‌شود. در ادامه، پاسخ دینامیکی تیر چندلایه کامپوزیتی تحت بار متحرک (بدون اینرسی) حاصل از کار حاضر با نتایج المان محدود موجود در کار کدیور [۱۰] و کایا [۱۳] مقایسه می‌شود. در جدول ۱ مشخصات مادی مورد استفاده در قسمت‌های مختلف مقاله ارائه شده است.

در جدول ۲، فرکانس طبیعی پایه برای تیر ساندویچی با رویه‌های آلومینیومی برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف از جمله دو سر تکیه‌گاه ساده (SS)، دو سر تکیه‌گاه گیردار (CC) و یک سر گیردار (CF) ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج حاصل از کار حاضر به خوبی با نتایج مرجع [۱۶] در تطابق است.

جدول ۱ مشخصات مادی استفاده شده در مقاله		
شماره	مشخصات	مرجع
۱	$L=914.4, b=25.4, h_f=0.4572, h_c=12.7 \text{ (mm)}$	خلیلی [۱۶]
	$E_f=68900, G_c=82.68 \text{ (MPa)}$	
	$\rho_f=2680, \rho_c=32.8 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	
۲	$L=711.2, b=25.4, h_f=0.4572, h_c=12.7 \text{ (mm)}$	خلیلی [۱۶]
	$E_f=68900, G_c=82.68 \text{ (MPa)}$	
	$\rho_f=2680, \rho_c=32.8 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	
۳	$L=1218.7, b=25.4, h_f=0.4062, h_c=6.35 \text{ (mm)}$	خلیلی [۱۶]
	$E_f=68,900, G_c=68.9 \text{ (MPa)}$	
	$\rho_f=2687.3, \rho_c=119.7 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	
۴	$L=1053 \text{ (mm)}, E_{eq}=162.6 \text{ (Nm}^2\text{)},$	بیللو [۱۷]
	$m_{eq}=1.847 \text{ (kg/m)}, M=1 \text{ (kg)}$	
۵	$E_{11}=144.8, E_{22}=9.65, G_{12}=4140 \text{ (MPa)}$	کدیور [۱۰]
	$\nu_{12}=0.3(0.25)^*, \rho=1389.23 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	
	$L=10.16, b=0.635, H=0.635 \text{ (cm)}$	
۶	$b=0.2, H=0.4 \text{ (m)}$	تحقیق حاضر
	$E_{11}^f=39, E_{22}^f=8.66, G_{12}^f=3.8 \text{ (GPa)}, \nu_{12}^f=0.28$	
	$E_{11}^c=3.74, E_{22}^c=0.172, G_{12}^c=0.202 \text{ (GPa)}, \nu_{12}^c=0.229$	
	$\rho^f=2100, \rho^c=160 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	

جدول ۲ فرکانس طبیعی (هرتز) تیر ساندویچی [Al/core/Al] برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف			
شرایط تکیه‌گاهی	داده	کار حاضر	خلیلی [۱۶]
دو سر ساده	۱	۵۸/۲۷	۵۷/۱۲
یک سر گیردار	۲	۳۴/۳۲	۳۳/۷۴
دو سر گیردار	۳	۳۵/۴۳	۳۴/۶۱

پارامترهای سفتی $A_{11}, B_{11}, D_{11}, E_{11}$ و ممان‌های اینرسی $I_{1/3}$ در پیوست درج شده‌اند. در معادله بالا، عبارت $2MV\dot{w}'$ نیروی کریولیس است که نقش مستهلک‌کننده را برای سیستم ایفا می‌کند. MV^2w'' نیروی گریز از مرکز است که تا حدودی سفتی خمشی تیر را کاهش می‌دهد و نهایتاً عبارت $M\dot{w}$ حاصل از نیروی اینرسی جرم متحرک در راستای عمودی است.

در آنالیز مودال، جابه‌جایی عمودی تیر را می‌توان به صورت زیر فرض کرد [۵]:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

که در آن N تعداد مودهای در نظر گرفته شده، L طول تیر و n شماره مود مورد نظر است. همچنین $W_n(t), \Phi_n(t)$ مختصات تعمیم یافته و $\sin(n\pi x/L), \cos(n\pi x/L)$ مودهای نرمال تیر با تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشند.

جایگزینی روابط (۵) در معادلات (۴) و ضرب کردن طرفین رابطه دوم در $\sin(i\pi x/L)$ ($i \neq n$) و انتگرال‌گیری روی طول تیر و استفاده از خاصیت متعامد بودن^۱ مودهای نرمال، منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان می‌شود:

$$I_3 \ddot{\Phi}_n + \left[E_{11} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] \Phi_n + E_{11} \left(\frac{i\pi}{L} \right) W_n = 0 \quad (6\text{-الف})$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ I_1 \ddot{W}_n + E_{11} \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 W_n + E_{11} \left(\frac{i\pi}{L} \right) \Phi_n \right\} \delta_{ni} + M \sum_{i=1}^n \left[\ddot{W}_n - V^2 \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 W_n \right] \times \sin\left(\frac{n\pi Vt}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi Vt}{L}\right) + M \sum_{i=1}^n 2V \left(\frac{n\pi}{L} \right) \times \cos\left(\frac{n\pi Vt}{L}\right) \sin\left(\frac{i\pi Vt}{L}\right) = Mg \sin\left(\frac{i\pi Vt}{L}\right) \quad (6\text{-ب})$$

با استفاده از روش اوبراتور، می‌توان دو معادله کوپل بالا را به دو معادله دیفرانسیل مجزا بر حسب W, Φ تبدیل نمود:

$$A_4(t) \frac{d^4 \Phi}{dt^4} + A_3(t) \frac{d^3 \Phi}{dt^3} + A_2(t) \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + A_1 \frac{d\Phi}{dt} + A_0 \Phi = A_5(t) \quad (7)$$

ضرایب معادله فوق در پیوست ضمیمه شده‌اند. حل معادله (۷) با ضرایب متغیر با زمان به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نبوده و باید از روش‌های عددی استفاده شود [۳]. بدین منظور از روش رانگ-کوتا مرتبه چهار استفاده شده است. شرایط اولیه برای حل معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\ddot{\Phi}(0) = \dot{\Phi}(0) = \Phi(0) = \Phi(0) = 0 \quad (8)$$

۳- بحث و بررسی نتایج

۳-۱- اعتبارسنجی نتایج

در این بخش، با مقایسه نتایج حاصل از کار حاضر و نتایج به دست آمده از

مشاهده می‌شود که احتساب اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی تأثیر بزرگی در محاسبه ضریب تقویت به‌دست آمده دارد. مطابق شکل، نتایج به‌دست آمده از کار حاضر در تطابق خوبی با داده‌های به‌دست آمده توسط مراجع [۱۰] و [۱۳] می‌باشد.

۲-۳- نتایج تحقیق حاضر

در این قسمت، نتایج بررسی مربوط به پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی مرکب تحت بارگذاری جرم متحرک ارائه می‌شود. بدین منظور از مشخصات مادی شماره ۶ استفاده می‌شود. تیر دارای روبه‌های چندلایه کامپوزیتی و هسته از جنس چوب بالسا به‌صورت $[\theta/\phi/\text{core}/\phi/\theta]$ است.

در جدول ۳، مقادیر فرکانس طبیعی تیر ساندویچی مرکب با شرایط تکیه‌گاهی مختلف ارائه شده است. در این جدول، تأثیر چینش الیاف در روبه‌ها و ضریب لاغری (L/H) روی فرکانس طبیعی بررسی شده است. مطابق جدول، ضریب لاغری، چیدمان الیاف در روبه‌ها و شرایط تکیه‌گاهی تأثیر بسزایی در فرکانس طبیعی تیر ساندویچی دارد.

در شکل ۴، تأثیر ضخامت هسته (h_c) و سفتی جانبی هسته (E_c) روی فرکانس طبیعی پایه تیر ساندویچی $[0/90/90/0]$ با تکیه‌گاه ساده و ضریب لاغری ($L/H=10$) نمایش داده شده است. افزایش ضخامت هسته دو تأثیر متضاد روی تیر ساندویچی دارد. از یک طرف باعث افزایش سفتی خمشی و از طرفی باعث افزایش جرم سازه می‌شود. مطابق شکل، تا زمانی که هسته تقریباً نود درصد کل ضخامت تیر ساندویچی را تشکیل دهد، تأثیر افزایش سفتی خمشی بیشتر از تأثیر افزایش جرم در تیر ساندویچی می‌باشد. انتظار می‌رود این رفتار در بررسی پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی تحت جرم متحرک نیز مشاهده شود. همچنین، با افزایش سفتی جانبی هسته (E_c)، فرکانس طبیعی تیر ساندویچی همواره افزایش می‌یابد.

جدول ۳ فرکانس طبیعی (هرتز) تیر ساندویچی با چینش‌ها، ضریب لاغری و شرایط تکیه‌گاهی مختلف

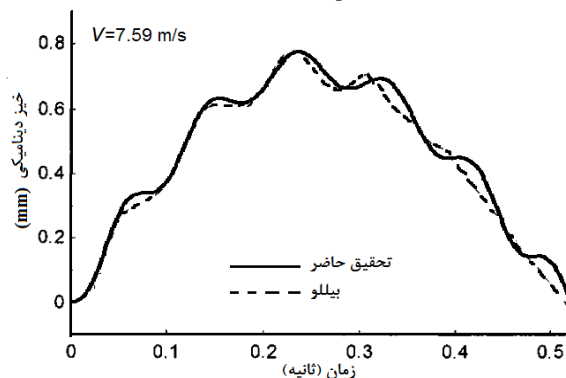
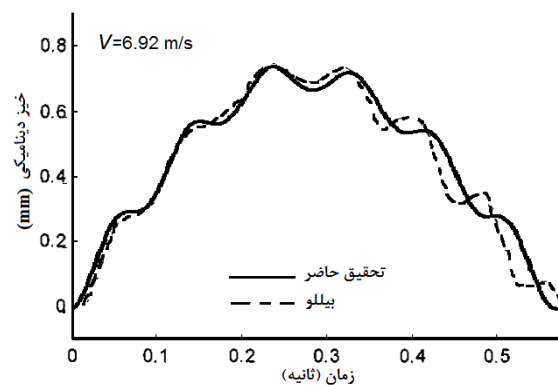
چینش	L/H	شرایط تکیه‌گاهی		
		CC	SS	CF
[۰/۰/هسته/۰/۰]	۱۰	۱۲۸/۹۷	۶۳/۵۰	۲۴/۲۰
	۲۰	۳۷/۶۲	۱۷/۱۹	۶/۲۴
	۱۰۰	۱/۶۰	۰/۷۰	۰/۲۵
[۰/۹۰/هسته/۹۰/۰]	۱۰	۱۰۸/۷۳	۵۳/۱۲	۲۰/۱۴
	۲۰	۳۱/۳۶	۱۴/۲۹	۵/۱۸
	۱۰۰	۱/۳۲	۰/۵۹	۰/۲۰
[۹۰/۰/هسته/۰/۹۰]	۱۰	۱۰۵/۱۷	۵۱/۰۵	۱۹/۲۶
	۲۰	۳۰/۰۴	۱۳/۶۵	۴/۹۴
	۱۰۰	۱/۲۷	۰/۵۵	۰/۱۹
[۹۰/۹۰/هسته/۹۰/۹۰]	۱۰	۷۷/۴۶	۳۶/۸۶	۱۳/۷۳
	۲۰	۲۱/۵۱	۹/۷۰	۳/۵۰
	۱۰۰	۰/۸۸	۰/۳۹	۰/۱۴

در شکل ۵، خیز دینامیکی نقطه میانی تیر ساندویچی $[0/90/90/0]$ در طول زمان عبور جرم متحرک از روی تیر در سرعت بارگذاری $V=50 \text{ m/s}$ نشان داده شده است. برای نمایش تأثیر ضخامت تیر بر پاسخ دینامیکی، نتایج برای سه ضریب لاغری متفاوت نشان داده شده است. فرکانس نوسانات موجود در پاسخ دینامیکی برابر فرکانس طبیعی تیر ساندویچی در ضریب لاغری مربوطه می‌باشد.

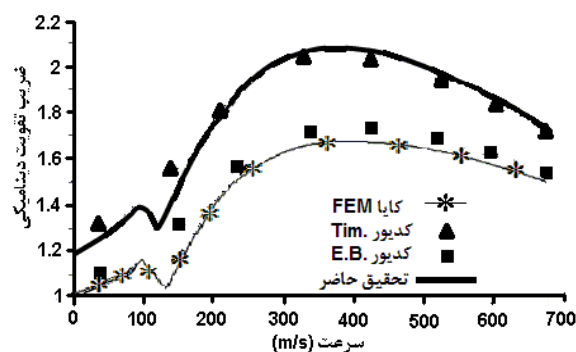
در شکل ۲، پاسخ دینامیکی تیر آلومینیومی ۶۰۶۱ با شرایط تکیه‌گاهی ساده طبق کار حاضر با نتایج تجربی حاصل از کار آقای بیللو و همکاران [۱۷] تحت بارگذاری جرم متحرک 1 kg و سرعت‌های $V=6.92, 7.59 \text{ m/s}$ مورد مقایسه قرار گرفته است. در شکل، نمودار پاسخ دینامیکی برحسب زمان در نقطه $x=7L/16$ از ابتدای تیر ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج حاصل از کار حاضر با دقت خوبی در مطابقت با نتایج تجربی مرجع [۱۷] می‌باشد.

در شکل ۳، ضریب تقویت دینامیکی تیر چندلایه کامپوزیتی با چیدمان الیاف $[0/90]$ تحت بارگذاری بار متحرک ($P=4.45 \text{ N}$) برحسب سرعت بارگذاری بی‌بعد شده ($\alpha = V/C_{cr}$) ترسیم شده است. ضریب تقویت دینامیکی به‌صورت نسبت حداکثر خیز دینامیکی به خیز استاتیکی تیر ($DMF=W_d/W_s$) تعریف می‌شود.

مقدار سرعت بحرانی $C_{cr} = \omega_1 L / \pi = 637.7 \text{ m/s}$ است [۱۳، ۱۰]. تیر دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده، مشخصات مادی شماره ۵ و نسبت طول به ضخامت ($L/H=13.6$) است. نتایج براساس کار حاضر با نتایج المان محدود موجود در کدیور [۱۰] و کایا [۱۳] مقایسه شده است.



شکل ۲ پاسخ دینامیکی برحسب زمان تیر آلومینیومی طبق کار حاضر و نتایج تجربی بیللو [۱۷]



شکل ۳ ضریب تقویت دینامیکی برای نقطه میانی تیر کامپوزیتی

در شکل ۶، تأثیر ضخامت هسته (h_c) و سفتی هسته (E_c) بر روی ضریب تقویت دینامیکی $[0.90/0.90]$ هسته در سرعت بارگذاری $V=50$ m/s نمایش داده شده است. ضریب تقویت دینامیکی همان حداکثر خیز دینامیکی است که نسبت به خیز استاتیکی بی‌بعد شده است. رفتاری که در شکل ۴ بر اثر ضخامت هسته مشاهده شده بود، در نمودار شکل ۶ نیز مشاهده می‌شود. با افزایش ضخامت هسته، سفتی خمشی و جرم تیر افزایش می‌یابد. تأثیر افزایش سفتی خمشی تیر، تا زمانی که $h_c/H < 0.9$ باشد، بیشتر از تأثیر افزایش جرم تیر روی پاسخ دینامیکی است.

تأثیر سفتی جانبی هسته بر ضریب تقویت دینامیکی مقداری پیچیده‌تر است. با افزایش سفتی جانبی هسته، حداکثر ضریب تقویت دینامیکی ابتدا افزایش، سپس کاهش و مجدداً افزایش یافته است. مطابق نمودار، در محدوده $E_c/E_f < 0.6$ ، که معمولاً سفتی هسته در این محدوده قرار دارد، می‌توان از تأثیر سفتی جانبی هسته بر روی ضریب تقویت دینامیکی صرف‌نظر کرد، اما در خارج این محدوده، افزایش سفتی باعث افزایش ضریب تقویت دینامیکی می‌شود.

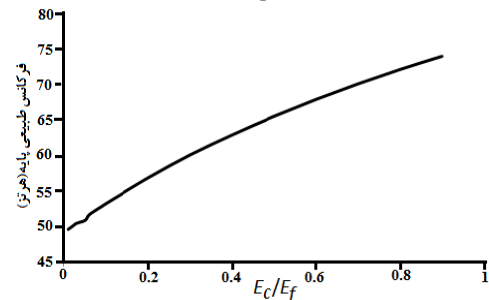
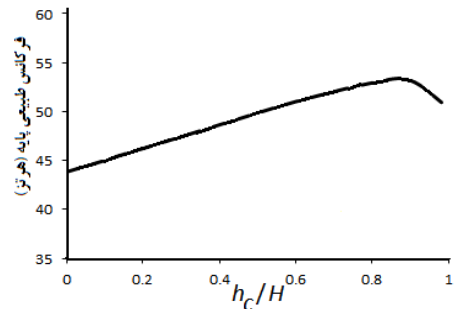
در شکل ۷، ضریب تقویت دینامیکی تیر ساندویچی $[0.90/0.90]$ برای نقاط ابتدایی ($x=L/4$)، میانی ($x=L/2$) و انتهایی تیر ($x=3L/4$) نشان داده شده است. نتایج برای دو حالت بارگذاری بار متحرک (بدون احتساب اینرسی بار) و جرم متحرک (با احتساب اینرسی بار) ارائه شده است. سرعت بارگذاری نسبت به $C_{cr} = \omega_1 L / \pi$ بی‌بعد شده است. C_{cr} سرعتی است که در آن زمان عبور بار از روی طول تیر برابر با پریود اصلی تیر است [۱۳].

مطابق شکل، تیر تحت جرم متحرک دارای ضریب تقویت دینامیکی بزرگ‌تری نسبت به تیر تحت بار متحرک است. این اختلاف در انتهای تیر بیشتر است. علت این پدیده تأثیر اینرسی جرم متحرک است. همچنین، حداکثر ضریب تقویت دینامیکی در ابتدای تیر مقادیر کوچک‌تری نسبت به انتهای تیر دارد. وقوع این امر به این دلیل است که در نقاط انتهایی تیر، دسته امواج خمشی فرصت بیشتری برای کوپل شدن با بار متحرک دارند. مطابق شکل، حداکثر ضریب دینامیکی تقریباً در $V/C_{cr} = 0.6$ روی می‌دهد. این سرعت، سرعت بحرانی V_{cr} نام دارد. در برخی مقالات، سرعت بحرانی را برابر C_{cr} می‌دانند [۱۳]. اما در شکل مشاهده می‌شود که سرعت بحرانی مقدار کوچک‌تری از C_{cr} دارد.

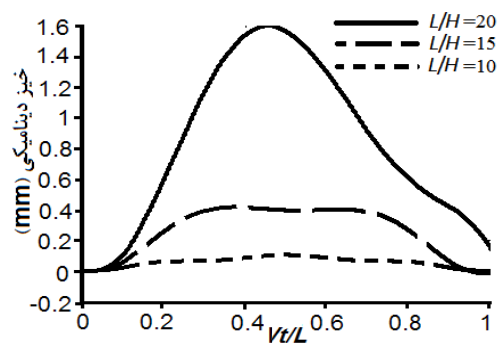
در شکل ۸، تأثیر ضخامت هسته (h_c) و سفتی جانبی هسته (E_c) در نمودار ضریب تقویت دینامیکی برحسب سرعت بارگذاری نشان داده شده است ($M/m=0.5$ ، $h_c/H=5/6$). ضریب تقویت برای نقطه میانی تیر ساندویچی $[0.90/0.90]$ ترسیم شده است.

مطابق شکل، تغییر ضخامت هسته (h_c) تأثیر چندانی در حداکثر ضریب تقویت دینامیکی ندارد و فقط باعث تغییر سرعت بحرانی می‌شود. با افزایش ضخامت هسته، سرعت بحرانی افزایش یافته است. اما، تغییر سفتی جانبی هسته (E_c) باعث تغییر در هر دو مقدار حداکثر ضریب دینامیکی و سرعت بحرانی می‌شود. افزایش سفتی جانبی هسته باعث افزایش سرعت بحرانی می‌شود، اما تأثیر آن بر حداکثر ضریب تقویت دینامیکی پیچیده‌تر بوده و رفتاری همانند شکل ۶ دارد. یعنی ابتدا افزایشی، سپس کاهشی و مجدداً افزایشی است.

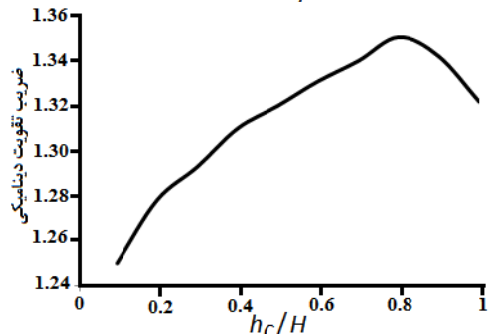
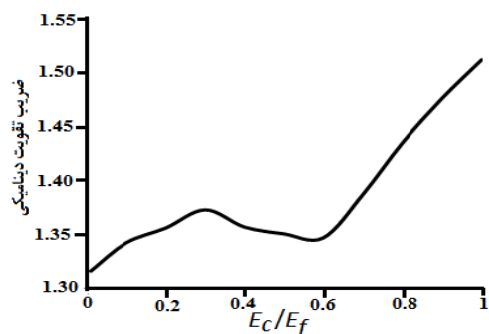
در شکل ۹، تفاوت پاسخ دینامیکی تیر تحت بارگذاری جرم متحرک و بار متحرک، به‌منظور بررسی اثر اینرسی جرم بار، نشان شده است. این بررسی در نسبت‌های جرمی مختلف (M/m) و سرعت‌های بارگذاری مختلف صورت گرفته است (M جرم متحرک و m جرم کل تیر است). برای این بررسی، از ضریب تأثیر اینرسی بهره گرفته شده است. ضریب تأثیر اینرسی طبق تعریف به‌صورت نسبت



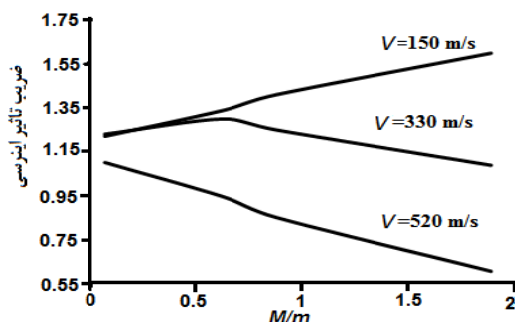
شکل ۴ تأثیر ضخامت هسته (h_c) و سفتی جانبی هسته (E_c) بر فرکانس طبیعی پایه تیر ساندویچی ($L/H=10$).



شکل ۵ تأثیر ضریب لاغری بر روی خیز دینامیکی تیر ساندویچی ($M/m=0.5$ ، $h_c/H=5/6$).



شکل ۶ تأثیر ضخامت و سفتی هسته بر روی حداکثر خیز دینامیکی ($M/m=0.5$ ، $h_c/H=5/6$ ، $V=50$ m/s).


 شکل ۹ ضریب تأثیر اینرسی برای تیر ساندویچی در سرعت‌های مختلف ($h_c/H=5/6$)

$$CIE = \frac{w_{\text{moving.mass}}}{w_{\text{moving.force}}} \quad (10)$$

نتایج برای سرعت‌های زیر بحرانی (150 m/s)، بحرانی (330 m/s) و فرابحرانی (520 m/s) برای نقطه میانی تیر ساندویچی [۰/۹۰/۰] ارائه شده است. مطابق شکل، در سرعت‌های زیر سرعت بحرانی، با افزایش نسبت جرمی ضریب تأثیر اینرسی همواره افزایش می‌یابد؛ یعنی همواره خیز دینامیکی تیر تحت جرم متحرک بزرگ‌تر از بار متحرک است. در سرعت‌های نزدیک سرعت بحرانی، با افزایش نسبت جرمی، ضریب تأثیر اینرسی ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد. ولی همچنان ضریب تأثیر اینرسی همواره بزرگ‌تر از واحد است. در سرعت‌های فراتر از سرعت بحرانی، برخلاف انتظار، تیر تحت جرم متحرک خیز دینامیکی کمتری نسبت به بار متحرک دارد. در این حالت، با افزایش نسبت جرمی، ضریب تأثیر اینرسی همواره کاهش می‌یابد.

۴- نتیجه‌گیری

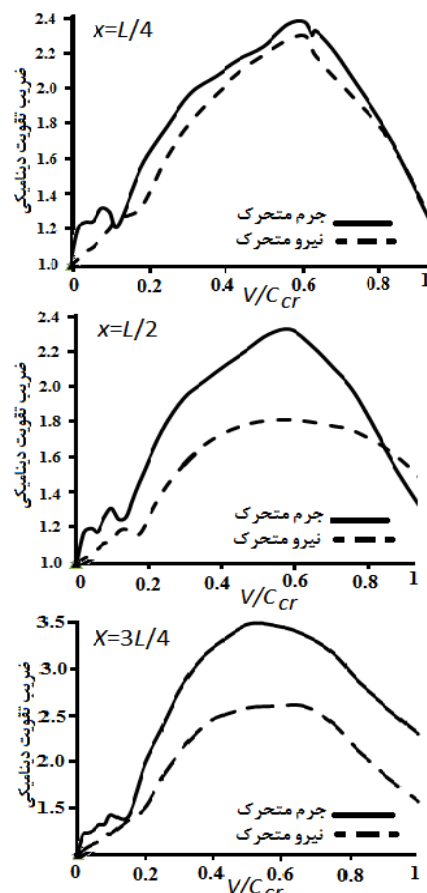
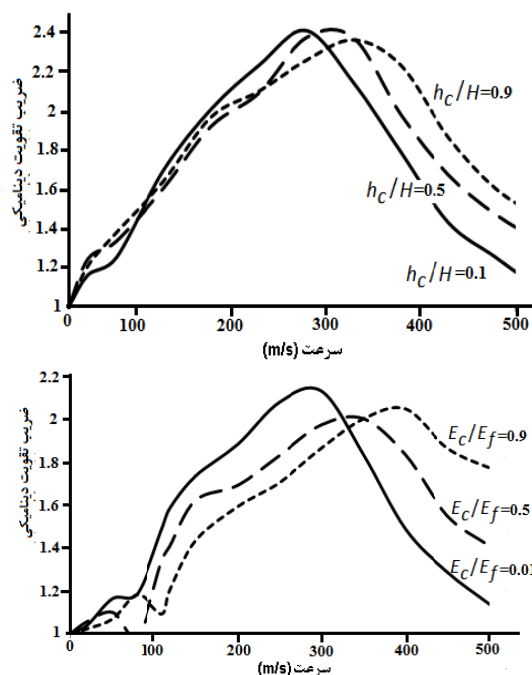
تحقیق حاضر به پاسخ دینامیکی یک تیر ساندویچی مرکب تحت بارگذاری جرم متحرک می‌پردازد. تحلیل ارتعاش آزاد و همچنین خیز دینامیکی نقطه میانی تیر مطابق تئوری تیموشنکو صورت گرفته است. در تئوری تیر تیموشنکو اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی لحاظ شده است. در مقاله حاضر، اثرات ضریب لاغری تیر، ضخامت و سفتی جانبی هسته، چیدمان الیاف در روبه‌ها، سرعت بارگذاری و جرم بارگذاری بر مشخصات پاسخ دینامیکی تیر ساندویچی از جمله فرکانس نوسان، حداکثر خیز و ضریب تقویت دینامیکی مورد بررسی قرار گرفت.

بررسی‌های پارامتری صورت گرفته در تحقیق حاضر نشان داد که مقدار ضخامت هسته و سفتی جانبی هسته تیر ساندویچی تأثیر بسزایی در رفتار دینامیکی سازه خواهد داشت. مشاهده شد که افزایش ضخامت هسته در سرعت بارگذاری ثابت، در ابتدا باعث افزایش فرکانس نوسان و سپس باعث کاهش آن می‌شود، اما افزایش سفتی جانبی هسته همواره باعث افزایش فرکانس نوسان تیر می‌شود.

در نمودار ضریب تقویت دینامیکی برحسب سرعت بارگذاری، افزایش ضخامت هسته تأثیر بسزایی در حداکثر ضریب دینامیکی ندارد، اما باعث افزایش سرعت بحرانی تیر ساندویچی می‌شود. افزایش سفتی جانبی هسته همواره باعث افزایش سرعت بحرانی می‌شود. تأثیر آن بر حداکثر ضریب دینامیکی مقداری پیچیده است. افزایش سفتی جانبی هسته در ابتدا باعث کاهش حداکثر ضریب دینامیکی و سپس باعث افزایش آن می‌شود.

ملاحظه شد که سرعت بحرانی همواره مقداری کوچک‌تر از مقدار $C_{cr} = \omega_1 L / \pi$ دارد. همچنین، حداکثر ضریب تقویت دینامیکی در طول

حداکثر خیز دینامیکی هر نقطه دلخواه از تیر تحت جرم متحرک به حداکثر خیز دینامیکی همان نقطه تحت بار متحرک تعریف می‌شود [۹]:


 شکل ۷ ضریب تقویت دینامیکی برای نقاط مختلف تیر ساندویچی ($h_c/H=5/6$)

 شکل ۸ نمودار ضریب تقویت دینامیکی برحسب سرعت بارگذاری در ضخامت و سفتی جانبی هسته مختلف ($h_c/H=5/6$)

$$A_0^{i,j} = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^3 \delta_{ij} - \frac{2MV^2}{E_{11}} \left(\frac{i\pi}{L} \right) \left[E_{11} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] \times \sin \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

ثابت‌های موجود در رابطه (۹) به شرح زیر است:

$$B_0 = \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4, \quad B_4 = \frac{I_1 I_3}{E_{11}}$$

$$B_2 = I_1 + \left(I_3 + \frac{I_1}{E_{11}} \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2$$

۶- مراجع

- [1] H. Biglari, A. A. Jafari, Free vibration analysis of doubly-curved sandwich panels with flexible core based on high-order theories, *The 18th Annual International Conference on Mechanical Engineering*, ISME 2010, Sharif University, Tehran, Iran, May, 2010 (in Persian).
- [2] S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [3] L. Fryba, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Thomas Telford House Ltd, London, 1999.
- [4] M. Olsson, On the fundamental moving load problem, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 154, No. 2, pp. 299-307, 1991.
- [5] L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, MacMillan, London, 1967.
- [6] C. E. Smith, Motion of a Stretched String Carrying Moving Mass Particle, *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, No.1, pp. 29-37, 1964.
- [7] M. M. Stanicic, J. A. Euler, S. T., Montgomeri, On a theory concerning the dynamic behavior of structures carrying moving mass, *Ingenieur Archive.*, Vol. 43, pp. 295-305, 1974.
- [8] S. Eftekhari Azam, M. Mofid, R. Afghani Khorskani, Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass, *Scientica Iranica A*, Vol. 20, No. 1, pp. 50-56, 2013.
- [9] M. Dehestani, M. Mofid, A. Vafai, Investigation of critical influential speed for moving mass problem on beams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, pp. 3885-3895, 2009.
- [10] M. H. Kadivar, S. R. Mohebpour, Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear effect and rotary inertia under the action of moving loads, *Finite Elements In Analysis and Design*, Vol. 29, pp. 259-273, 1998.
- [11] H. S. Zibdeh, M. Abu-Hilal, Stochastic vibration of laminated composite coated beam traversed by a random moving load, *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 397-404, 2003.
- [12] S. R. Mohebpour, A. R. Fiouz, A. A. Ahmadzadeh, Dynamic investigation of laminated composite beams with shear and rotary inertia effect subjected to the moving oscillators using FEM, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 1118-1126, 2011.
- [13] V. Kahya, Dynamic analysis of laminated composite beams under moving loads using finite element method, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 243, pp. 41-48, 2012.
- [14] K. Misiurek, P. Sniady, Vibration of sandwich beam due to a moving force, *Composite Structures*, Vol. 104, pp. 85-93, 2013.
- [15] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, New York, 1997.
- [16] S. M. R. Khalili, N. Nemati, K. Malekzadeh, A. R. Damanpack, Free vibration analysis of sandwich beams using improved dynamic stiffness method, *Comp. Struc.*, Vol. 92, pp. 387-394, 2010.
- [17] C. Bilello, L. A. Bergman, D. Kuchma, Experimental investigation of a small-scale bridge model under a moving mass, *ASCE Journal of Structural Engineering*, No. 130, pp. 799-804, 2004.

ثابت نیست و در نقاط انتهایی تیر بزرگ‌تر از نقاط ابتدایی تیر است. بررسی بسیار مهم صورت گرفته در کار حاضر مقایسه نتایج حاصل از تحلیل جرم متحرک (در نظرگیری اینرسی بار) و بار متحرک (اغماض از اینرسی بار) می‌باشد. بررسی‌ها نشان داد که خیز دینامیکی تیر تحت جرم متحرک، بسته به سرعت بارگذاری، می‌تواند بیشتر و یا کمتر از خیز دینامیکی تیر تحت بار متحرک باشد. این اختلاف با افزایش نسبت M/m افزایش می‌یابد.

۵- پیوست‌ها

ثابت‌های موجود در رابطه (۴) به شرح زیر است:

$$I_1 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = 2b(\rho_c h_c + \rho_f(H - h_c))$$

$$I_3 = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz = \frac{2b}{3}(\rho_c h_c^3 + \rho_f(H^3 - h_c^3))$$

$$A_{11} = b \sum_{L=0}^n Q_{11}^L (z_L - z_{L-1}), B_{11} = b \sum_{L=0}^n Q_{11}^L \left(\frac{z_L^2 - z_{L-1}^2}{2} \right)$$

$$D_{11} = b \sum_{L=0}^n Q_{11}^L \left(\frac{z_L^3 - z_{L-1}^3}{3} \right), E_{11} = b \sum_{L=1}^n Q_{55}^L (z_L - z_{L-1})$$

که در آن ρ_c, ρ_f چگالی هسته و رویه‌ها، h_c ضخامت هسته، b پهنای تیر، z_L مختصات بالا و پایین هر لایه، Q_{11}, Q_{55} ثوابت ماتریس سفتی هر لایه و $\kappa=5/6$ ضریب تصحیح برشی در تئوری تیموشنکو می‌باشد.

ثابت‌های موجود در رابطه (۷) به شرح زیر است:

$$A_4^{i,j} = \frac{I_1 I_3}{E_{11} (i\pi/L)} \delta_{ij} + \frac{M I_3}{E_{11} (i\pi/L)} \sin \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

$$A_3^{i,j} = \frac{2M I_3 V}{E_{11}} \cos \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

$$A_1^{i,j} = \frac{2MV}{E_{11}} \left[E_{11} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] \times \cos \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

$$A_5^{i,j} = -Mg \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

$$A_2^{i,j} = \left[\frac{I_1}{E_{11} (i\pi/L)} \left[E_{11} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] + I_3 \left(\frac{i\pi}{L} \right) \right] \delta_{ij} + \frac{M}{E_{11} (i\pi/L)} (E_{11} + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 - I_3 V^2 \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2) \times \sin \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$