



روش برآورد خطا و نظریه تطبیقی غنی سازی - جابه جایی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط برای حل مسایل الاستیسیته

صائب فرجی¹، محمد هادی افشار^{2*}

1- دانش آموخته مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

2- دانشیار مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* تهران، صندوق پستی 163-16765، mhafshar@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 25 تیر 1392

پذیرش: 06 شهریور 1392

ارائه در سایت: 31 اردیبهشت 1393

کلید واژگان:

روش بدون شبکه

حداقل مربعات گسسته مختلط بدون شبکه

نظریه تطبیقی

غنی سازی-جابه جایی

الاستیسیته خطی

چکیده

در این مقاله روش برآورد خطا و نظریه تطبیقی غنی سازی-جابه جایی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط، برای بهبود دقت جوابهای مسایل الاستیسیته خطی مسطح ارائه شده است. این روش از دو روش غنی سازی و جابه جایی شبکه به طور همزمان استفاده می کند. در هر مرحله غنی سازی، دیاگرام ورنی برای مشخص کردن موقعیت گرههایی که باید به شبکه اضافه شوند، به کار برده شده است. بعد از هر مرحله غنی سازی، خطای گرههای جدید اضافه شده از روی خطای گرههای آرایش مرحله قبلی تخمین زده می شوند، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی شود و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در دو روش غنی سازی-جابه جایی و غنی سازی متداول یکسان هستند. سپس یک فرایند جابه جایی شبکه بعد از هر مرحله غنی سازی برای بهبود دقت جوابها استفاده می شود. روش غنی سازی-جابه جایی تا بدست آوردن دقت مورد نظر ادامه می یابد. روش ارائه شده با بدست آوردن یک آرایش هموار، علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه برخی گرهها که در روش غنی سازی متداول رخ می دهد، باعث بهبود دقت جوابها نیز می شود. مثالهای عددی حل شده در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جوابهای بدست آمده از روش غنی سازی-جابه جایی با روش غنی سازی متداول و جوابهای تحلیلی دقیق، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان داده اند.

Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems

Saeb Faraji, Mohammadhadi Afshar*

Department of Civil Engineering, Iran University of Science and technology, Tehran, Iran

*P.O.B. 16765-163 Tehran, Iran, mhafshar@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 July 2013
Accepted 28 August 2013
Available Online 21 May 2014

Keywords:

Meshless Method
Mixed Discrete Least Squares Meshless
Adaptive Refinement
Node Enrichment-moving
linear Elasticity

ABSTRACT

In this paper a node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement procedure in Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM) method is suggested to improve the solution of elasticity problems. The suggested method uses of both node enrichment and node moving refinement procedures simultaneously. The voronoi diagram is used to locate the position of new added nodes in enrichment step. The errors of new added nodes, after each enrichment procedure, are calculated via interpolation rather than the error of simulation nodes to reduce the computational effort. So, the additional simulation effort does not spend and the steps of suggested method and conventional enrichment procedure are the same. Completing the enrichment step, a node moving procedure is used to improve the solutions and solving the nodes excessive vicinity problem that is happened in conventional node enrichment procedure, especially with irregular node distribution. The node enrichment-moving method is continued to obtain the desirable accuracy. The proposed method is used to solve several examples and the results are presented and compared with those of conventional node enrichment procedure and analytical exact solutions. The results show superior efficiency, effectiveness and accuracy of the proposed method compared to conventional node enrichment method.

1- مقدمه

به کارگیری فرایندهای نظریه تطبیقی مثل گسسته سازی مجدد، جابه جایی گرهها و غنی سازی در این روش به علت این که باید اتصال نظام مند اجزا حفظ شود، سخت تر است.

برای حل این مشکلات، روش بدون شبکه که برای گسسته سازی ناحیه مسأله، از آرایش گرهها به جای جزء بندی (المان بندی) ناحیه استفاده می کند،

روش اجزای محدود از روشهای عددی است که کارایی خود را در حل مسایل مهندسی نشان داده است، اما این روش برای حل برخی مسایل مثل مسایلی با مرز متحرک، مسایلی با تغییر شکل های زیاد و گسترش ترک که احتیاج به گسسته سازی مجدد دارند با مشکلاتی همراه است. همچنین

Please cite this article using:

S. Faraji, M.H. Afshar, Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 3, pp. 194-202, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ارائه شده است. از جمله روش‌های بدون شبکه معروف می‌توان به روش ذره هیدرودینامیک هموار¹ [1]، روش بدون جزء گالرکین² [۲،۳]، روش بدون شبکه محلی پترف-گالرکین³ [4]، روش ابر بدون شبکه⁴ [5]، روش نقطه محدود⁵ (FPM) [6]، روش دوباره‌سازی هسته ذره⁶ [7] و روش معادله انتگرالی مرزی محلی⁷ [8] اشاره کرد. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته⁸ اولین بار توسط افشار و ارزانی [9] برای حل معادلات پواسون به کار گرفته شد. به علت اینکه در این روش از شکل قوی معادلات دیفرانسیلی برای گسسته‌سازی آنها استفاده می‌شود، فرایند انتگرال‌گیری عددی حذف می‌شود، بنابراین هزینه محاسباتی آن از روش‌های بدون شبکه‌ای مثل روش بدون جز گالرکین، که از شکل ضعیف معادلات استفاده می‌کنند، کمتر است. اخیراً شبیری و افشار [10] از این روش برای شبیه‌سازی مسأله سطح آزاد استفاده کرده‌اند. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم مکان⁹ توسط فیروزجایی و افشار [11] برای حل معادلاتی از نوع بیضوی ارائه شد، و تاثیر نقاط هم مکان در بالا بردن دقت و نرخ همگرایی مورد مطالعه قرار گرفت. این روش بعدها توسط نیسی‌پور و همکاران [12] در حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح به کار رفت. افشار و همکاران [13] از این روش برای شبیه‌سازی تطبیقی معادلاتی از نوع هذلولی استفاده کردند. اخیراً، روش حداقل مربعات گسسته مختلط¹⁰ توسط امانی و همکاران [14] برای حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح ارائه شده است. در روش حداقل مربعات گسسته مختلط، ناحیه مسأله با استفاده از گره‌هایی گسسته‌سازی شده و سپس جواب مسأله با استفاده از توابع شکل حداقل مربعات متحرک¹¹ تخمین زده می‌شود، با کمینه کردن تابع باقی‌مانده‌ای نسبت به مقادیر گرهی مجهول، مقدار جواب در گره‌ها محاسبه می‌شود. تابع باقی‌مانده‌ای از مجموع باقی‌مانده حاصل از قرارگیری تابع تخمینی در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و باقی‌مانده حاصل از قرارگیری آن در شرایط مرزی بدست می‌آید. در این روش از فرمول‌بندی مختلط استفاده می‌شود، به طوری که تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به طور هم زمان محاسبه می‌شوند. در فرمول‌بندی غیر مختلط ابتدا تغییر مکان‌ها محاسبه می‌شوند، سپس تنش‌ها با استفاده از مشتقات توابع شکل و رابطه بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها بدست آیند. اما در فرمول‌بندی مختلط توابع شکل به طور یکسان برای تخمین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به کار می‌روند و معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و معادلاتی که رابطه بین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها را بیان می‌کنند به طور هم زمان حل می‌شوند. از آنجا که دقت خود توابع شکل از مشتقاتشان یک مرتبه بالاتر است، دقت جواب‌های بدست آمده برای روش‌هایی که از فرمول‌بندی مختلط استفاده می‌کنند نسبت به روش‌هایی که از فرمول‌بندی غیر مختلط استفاده می‌کنند، بیشتر است. همچنین این موضوع باعث می‌شود تا نرخ همگرایی جواب‌های بدست آمده برای تنش‌ها، یک مرتبه نسبت به روش‌های غیر مختلط افزایش یابد.

به منظور افزایش دقت جواب‌های روش‌های عددی، روش‌هایی نیز برای برآورد خطا و تظریف تطبیقی، گسترش پیدا کرده‌اند. روش غنی‌سازی آرایش یکی از روش‌های تظریف تطبیقی خطا در روش‌های بدون شبکه است. در این روش با

در نظر گرفتن یک سلول ورونی¹² برای هر گره و اضافه کردن گره‌های جدید در رئوس سلول‌هایی که خطای گره مربوط به آن سلول بیشتر از میانگین خطای کل شبکه است، آرایش موجود غنی می‌شود. این روش با کاهش فاصله بین گره‌ها باعث کاهش خطا می‌شود. افشار و همکاران [15] این روش را برای غنی‌سازی شبکه با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و برای حل مسایل الاستیسیته خطی به کار برده‌اند. روش جابه‌جایی گره‌ها نیز یک روش تظریف تطبیقی خطا در روش‌های بدون شبکه است که با جابه‌جا کردن گره‌ها به قسمتی از ناحیه مسأله که خطای بیشتری دارد، منجر به کاهش فاصله گره‌ها از همدیگر در آن ناحیه شده و خطا را کاهش می‌دهد. افشار و همکاران [16] این روش را در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته و برای حل مسایل الاستیسیته خطی به کار برده‌اند. روش غنی‌سازی کارایی مناسبی از خود نشان داده است. اما در بعضی موارد بدشکلی سلول ورونی، منجر به نزدیکی بیش از اندازه بعضی از گره‌ها جدید اضافه شده به همدیگر شده و این نزدیکی بیش از اندازه گره‌ها، قدرت تخمین توابع شکل را کاهش داده و در نتیجه دقت جواب‌ها کاهش می‌یابد. این مشکل در آرایش‌های نامنظم بیشتر خود را نشان می‌دهد. روش جابه‌جایی نیز به طور مؤثر در کاهش خطا به کار گرفته شده است، اما به علت این که در این روش گرهی به آرایش اولیه اضافه نمی‌شود، دقت جواب‌ها تا میزان مشخصی بهبود می‌یابد و برای افزایش دقت جواب‌ها از یک میزان مشخص باید از روش غنی‌سازی استفاده کرد. در این مقاله روش برآورد خطا و تظریف تطبیقی غنی‌سازی - جابه‌جایی با استفاده از روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط برای بدست آوردن جواب‌های دقیق‌تر در مسایل الاستیسیته مسطح، ارائه شده است. این روش از دو روش غنی‌سازی و جابه‌جایی شبکه به طور هم‌زمان استفاده می‌کند. در مرحله غنی‌سازی، مانند روش غنی‌سازی متداول، دیاگرام ورونی برای مشخص کردن موقعیت گره‌هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به کار برده می‌شود. بعد از هر مرحله غنی‌سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش مرحله قبلی تخمین زده می‌شوند و هر مرحله از روش با یک فرایند جابه‌جایی شبکه به اتمام می‌رسد. به همین ترتیب، فرایند غنی‌سازی - جابه‌جایی تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه می‌یابد. در روش غنی‌سازی - جابه‌جایی، خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی، با استفاده از درون‌یابی تخمین زده می‌شوند، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی‌شود و همان تعداد مراحل که برای تحلیل شبکه در روش غنی‌سازی متداول لازم است در روش غنی‌سازی - جابه‌جایی استفاده می‌شود. فرایند جابه‌جایی شبکه علاوه بر حل مشکل نزدیکی بیش از اندازه برخی گره‌ها در روش غنی‌سازی متداول، با ارائه یک آرایش هموار شده به جواب‌هایی با دقت بالاتر منجر می‌شود. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های بدست آمده از روش پیشنهادی غنی‌سازی - جابه‌جایی با جواب‌های روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌های عددی حل شده، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان می‌دهند.

2- تابع شکل حداقل مربعات متحرک

روش‌های مختلفی برای تولید توابع شکل در روش‌های بدون شبکه وجود دارند، از جمله این روش‌ها می‌توان به روش بیشینه انتروپی¹³ [17و18]، روش تابع پایه شعاعی¹⁴ [19]، روش کریجینگ متحرک¹⁵ [20] و روش جزءبندی واحد¹⁶ [21] اشاره کرد. تابع شکل حداقل مربعات متحرک [22] که در این مقاله از آن استفاده شده است، یکی از معمول‌ترین توابع تخمینی در

1- Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

2- Element-free Galerkin (EFG)

3- Local Petrov-Galerkin (MLPG)

4- Hp-Meshless cloud

5- Finite Point Method (FPM)

6- Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)

7- Local Boundary Integral Equation (LBIE)

8- Discrete Least Square Meshless (DLSM)

9- Collocation Discrete Least Square Meshless (CDLSM)

10- Mixed Discrete Least Squares Meshless (MDLSM)

11- Moving Least Squares (MLS)

12- Voronoi Diagram

13- Maximum Entropy

14- Radial Basis Function (RBF)

15- Moving Kriging (MK)

16- Partition of Unity (PU)

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \varphi = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1+\nu)} \quad (13)$$

در رابطه (14) روابط بین تغییر مکان ها و تنش ها معرفی شده اند.

$$\begin{cases} \sigma_x = (\varphi + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y = \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (14)$$

که در آن σ_x و σ_y به ترتیب تنش قائم در جهت x و y بوده و τ_{xy} تنش برشی است. با استفاده از رابطه (14) می توان معادله (12) را به صورت رابطه (15) بازنویسی کرد.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -f_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -f_y \end{cases} \quad (15)$$

که در آن f_x و f_y نیروی بدنی در جهت x و y هستند. با جمع بندی و بازنویسی معادلات (14) و (15)، رابطه (16) بدست می آید.

$$T(u) + f = 0 \quad (16)$$

بردار f در رابطه (17) نشان داده شده است.

$$f = [0, 0, 0, f_x, f_y] \quad (17)$$

رابطه (18) بردار u را معرفی کرده است.

$$u^T = [u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] \quad (18)$$

عملگر T در رابطه (19) تعریف شده است.

$$T(u) = A_1 u_x + A_2 u_y + A_3 u \quad (19)$$

ضرایب A_1 ، A_2 و A_3 در رابطه (20) نشان داده شده اند.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \varphi + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

در این صورت باقی مانده تابع تخمینی از معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله در گره i ام از رابطه (21) بدست می آید.

$$(R_{\Omega})_i = T(u)_i + f_i \quad (21)$$

با داشتن شرایط مرزی که در رابطه (22) ارائه شده اند

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}, v = \bar{v}, t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \\ t_y &= \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x \end{aligned} \quad (22)$$

و در آن n_x و n_y بردار نرمال وارد بر مرز و t_x و t_y نیروی گسترده وارد بر مرز در جهت x و y هستند، باقی مانده تابع تخمینی از شرایط مرزی حاکم بر مسأله در گره i ام از رابطه (23) محاسبه می شود.

$$(R_{\Gamma})_i = D(u)_i - \bar{u}_i \quad (23)$$

$\bar{u}$ و D از روابط (24) و (25) محاسبه می شوند.

$$\bar{u}^T = [\bar{u}, \bar{v}, t_x, t_y] \quad (24)$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_x & 0 & n_y \\ 0 & 0 & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (25)$$

با جمع باقی مانده حاصل از قرارگیری تابع تخمینی برای مقادیر مجهول

روش های بدون شبکه است که به خوبی کارایی خود را نشان داده است. در این روش با در نظر گرفتن زیر ناحیه هایی برای هر گره، تابع تخمینی u در هر زیر ناحیه از رابطه (1) محاسبه می شود.

$$u(X) = \sum_{i=1}^k p_i(X) a_i(X) = P^T(X) a(X) \quad (1)$$

تابع پایه P در رابطه (2) معرفی شده است.

$$P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^m, \dots, y^m] \quad (2)$$

که در آن m و k به ترتیب عبارتند از درجه تابع پایه و تعداد مؤلفه های آن. به طور مثال برای تابع پایه مرتبه دوم ($m=2$)، تعداد مؤلفه های تابع پایه (k) برابر شش است. a بردار ضرایب تابع پایه است. با تعریف تابع دوم وزن داری به صورت رابطه (3)

$$J = \sum_{m=1}^{n_s} w_m (X - X_m) (P^T(X_m) a(X) - \bar{u}_m)^2 \quad (3)$$

که در آن $\bar{u}_m$ و w_m به ترتیب جواب و تابع وزن در گره m ام هستند و n_s تعداد کل گره های موجود در هر ناحیه تأثیر است، تابع وزن مورد استفاده در این مقاله تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم¹ است که در رابطه (4) معرفی شده است. در رابطه (4) $d = ||X - X_m|| / d_{nm}$ شعاع ناحیه تأثیر گره m را نشان می دهد.

$$w_m(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & \frac{1}{2} \leq d < 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (4)$$

با به حداقل رساندن تابع J رابطه (5) بدست می آید.

$$u(X) = P^T(X) S^{-1}(X) C(X) \bar{u} \quad (5)$$

در رابطه (5) $\bar{u}$ بردار جواب های گرهی است و ضرایب S و C در روابط (6) و (7) معرفی شده اند.

$$S(X) = \sum_{m=1}^{n_s} w_m (X - X_m) P(X_m) P^T(X_m) \quad (6)$$

$$C(X) = [w_1(X - X_1) P(X_1), w_2(X - X_2) P(X_2), \dots, w_{n_s}(X - X_{n_s}) P(X_{n_s})] \quad (7)$$

در این صورت رابطه (8) برقرار است.

$$u(X) = N^T(X) \bar{u} \quad (8)$$

که در آن تابع شکل N از رابطه (9) بدست می آید.

$$N^T = P^T(X) S^{-1}(X) C(X) \quad (9)$$

از روابط (10) و (11) برای محاسبه مشتقات جزئی تابع شکل استفاده شده است.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial P^T}{\partial x} S^{-1} C + P^T \frac{\partial S^{-1}}{\partial x} C + P^T S^{-1} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P^T}{\partial y} S^{-1} C + P^T \frac{\partial S^{-1}}{\partial y} C + P^T S^{-1} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (11)$$

3- روش حداقل مربعات گسسته مختلط برای حل مسایل الاستیسیته

خطی سطح

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسایل الاستیسیته خطی سطح به صورت رابطه (12) تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left[(\varphi + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= f_x \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left[(\varphi + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= f_y \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن u و v به ترتیب تغییر مکان در جهت x و y هستند. مقادیر φ و μ در حالت تنش مسطح از رابطه (13) محاسبه می شوند.

استفاده می شود، بنابراین هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نمی شود و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در دو روش غنی سازی - جابه جایی و غنی سازی متداول یکسان هستند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه فرایندهای درونیابی خطا و جابه جایی شبکه هزینه محاسباتی بسیار ناچیزی در مقایسه با تحلیل شبکه دارند، بنابراین روش ارائه شده از نظر هزینه محاسباتی تفاوت محسوسی با روش غنی سازی متداول ندارد.

4-2-1- روش غنی سازی

در مرحله غنی سازی از دیاگرام ورونوی برای پیدا کردن موقعیت گره های جدیدی که باید به آرایش موجود اضافه شوند، استفاده شده است. در این روش گره های جدید در رئوس سلول های ورونوی که خطای گره های مربوط به آنها از خطای میانگین بیشتر است، اضافه می شوند. سلول های ورنوی با کمک دیاگرام دلونوی که با ایجاد یک مش بندی مثلثی به شناسایی گره های همسایه می پردازند، ساخته می شوند؛ به این ترتیب که پس از ترسیم دیاگرام دلونوی عمود منصف هر یک از خطوط واصل بین گره های همسایه که از روی دیاگرام دلونوی بدست آمده اند ترسیم می شوند، عمود منصف های ترسیمی همدیگر را در نقاطی قطع می کنند، اشکال محدب حاصل از وصل کردن این تقاطع ها به همدیگر سلول های ورونوی را می سازند. شکل 1 نحوه اضافه شدن گره های جدید را نشان می دهد. از این روش برای غنی سازی آرایش، جهت بهبود دقت جواب های مسائل الاستیسیته خطی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته استفاده شده است [15]. در این روش خطای میانگین از رابطه (31) محاسبه می شود.

$$e_{average} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_t} e_i^2}{n_t}} \quad (31)$$

4-2-2- روش جابه جایی شبکه

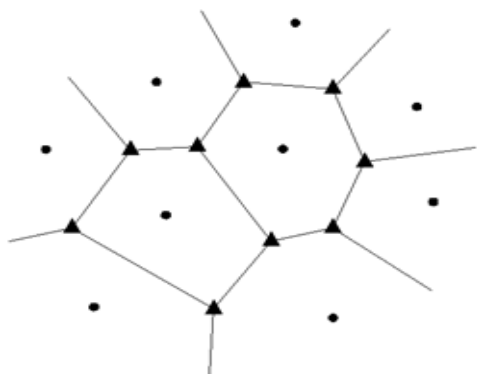
در این بخش به طور خلاصه روش جابه جایی شبکه توضیح داده می شود، از این روش برای تطریف تطبیقی خطا در روش حداقل مربعات گسسته و برای حل مسائل الاستیسیته خطی استفاده شده است [16] که برای توضیح بیشتر می توان به آن مراجعه کرد. برای جابه جایی شبکه، گره های همسایه با استفاده از فنرهای مجازی به همدیگر متصل می شوند. همانطور که در شکل 2 نشان داده شده است، برای مشخص کردن گره های همسایه از دیاگرام ورونوی استفاده شده است. سختی این فنرهای مجازی از رابطه (32) محاسبه می شود.

$$l_{ij} = e_i + e_j \quad (32)$$

که در این رابطه e_i و e_j به ترتیب خطای گره های i و j هستند و l_{ij} سختی فنری است که گره های i و j را به همدیگر متصل کرده است.

در این صورت نیروی محوری این فنر از رابطه (33) محاسبه می شود.

$$b_{ij} = l_{ij} \|X_i - X_j\| \quad (33)$$



شکل 1 • گره های آرایش موجود، ▲ گره های اضافه شده

گره ای در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و شرایط مرزی، برای هر گره فرضی i ام تابعک باقی مانده ای به صورت رابطه (26) تعریف می شود.

$$I_i = (R_\Omega^T R_\Omega)_i + \alpha (R_\Gamma^T R_\Gamma)_i \quad (26)$$

با جمع تابعک باقی مانده ای گره ها، تابعک باقی مانده ای کل بدست می آید. با به حداقل رساندن تابعک باقی مانده ای کل نسبت به مقادیر مجهول گره ای، رابطه (27) محاسبه می شود.

$$KU = F \quad (27)$$

$$K_{mn} = \sum_{i=1}^{n_t} [T(N_m)]_i^T [T(N_n)]_i + \alpha \sum_{i=1}^{n_b} [DN_m]_i^T [DN_n]_i \quad (28)$$

$$F_m = \sum_{i=1}^{n_t} [T(N_m)]_i^T f_i + \alpha \sum_{i=1}^{n_b} [DN_m]_i^T \bar{u}_i \quad (29)$$

U بردار مقادیر مجهول گره ای بوده و n_t و n_b به ترتیب نشان دهنده تعداد گره های موجود در کل ناحیه و تعداد گره های موجود در مرزها می باشند. α ضریب پنالتی است، که باید مقداری به اندازه کافی بزرگ اختیار شود.

4-2- برآورد خطا و روش تطریف تطبیقی غنی سازی - جابه جایی

4-1-1- برآورد خطا

برآورد خطا اولین قدم برای انجام یک فرایند تطریف تطبیقی است. با الهام از روش های به کار گرفته شده در اجزای محدود، روش های متعددی برای برآورد خطا در روش ها بدون شبکه ارائه شده اند. این روش ها را می توان در دو گروه عمده روش های باقی مانده ای¹ و روش های دوباره یابی² تقسیم بندی کرد. در روش های باقی مانده ای، با قرارگیری جواب های روش عددی در شرط دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و شرایط مرزی، باقی مانده های دیفرانسیلی و مرزی بدست می آیند و مجموع این دو باقی مانده برای تخمین خطا استفاده می شود. روش های دوباره یابی از کمیت های دیگری مثل گرادینان (تغییرات) جواب ها که با دوباره یابی از روی جواب ها بدست می آیند، برای تخمین خطا استفاده می کنند. در این مقاله از روش باقی مانده ای برای تخمین خطا استفاده شده است. در این مقاله برای محاسبه خطای هر گره فرضی i ام از رابطه (30) استفاده شده است.

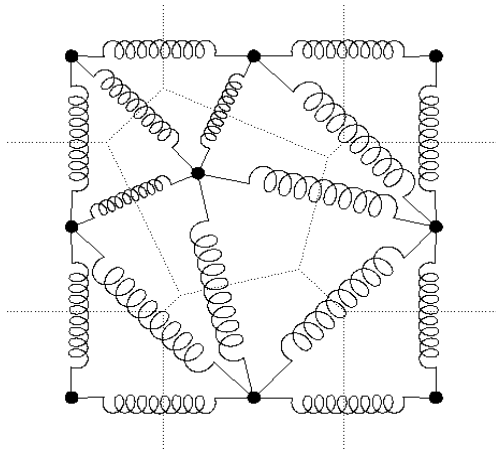
$$e_i = \sqrt{\frac{I_i}{U^T U}} \quad (30)$$

در این رابطه e_i خطای اختصاص داده شده به هر گره بوده و کمیت های I_i و U به ترتیب در روابط (26) و (27) معرفی شده اند.

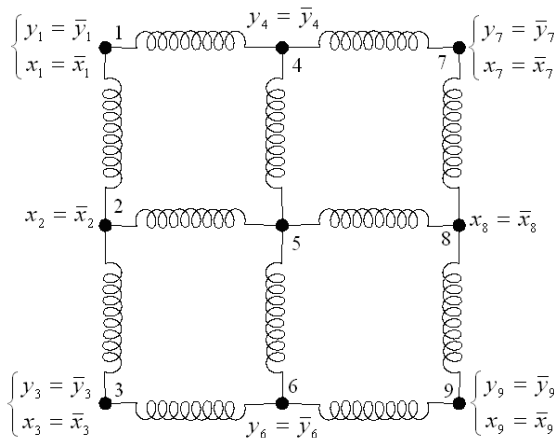
4-2- روش غنی سازی - جابه جایی

روش ارائه شده در این مقاله به نام روش غنی سازی - جابه جایی از دو مرحله تشکیل شده است. در مرحله غنی سازی بعد از تحلیل و برآورد خطای آرایش، گره های جدید در قسمتی از ناحیه که خطای بیشتری دارد اضافه می شوند و سپس خطای گره های اضافه شده، با درونیابی از روی خطای گره های آرایش تحلیل شده تخمین زده می شوند. بعد از تکمیل مرحله غنی سازی، یک فرایند جابه جایی شبکه با توجه به خطای بدست آمده برای گره های آرایش تحلیل شده و خطای تخمین زده شده برای گره های جدید اضافه شده انجام می شود. جابه جایی شبکه با در اختیار قرار دادن یک آرایش هموار و مناسب، به بهبود دقت جواب ها می انجامد. در روش ارائه شده، از روش درونیابی برای تخمین خطای گره های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی سازی

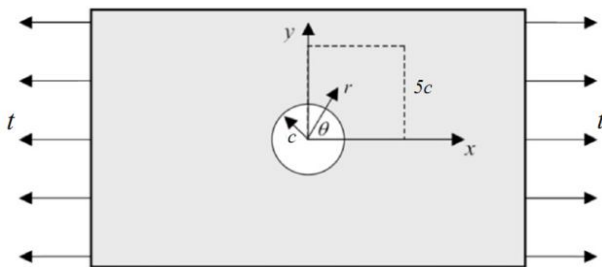
1- Residual Based Methods
2- Recovery Based Methods



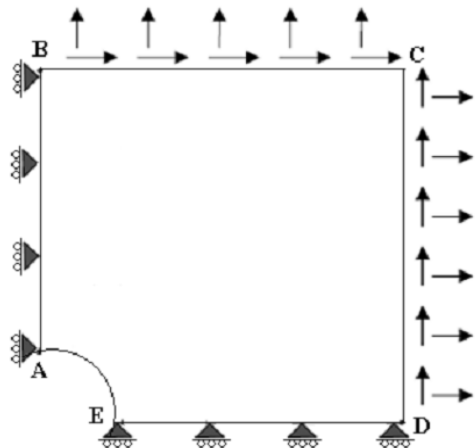
شکل 2 دیاگرام ورونوی برای گره‌های همسایه و فنرهای بین آنها



شکل 3 شرایط مرزی برای یک سیستم ساده از فنرها



شکل 4 صفحه بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای، تحت اثر بار محوری گسترده t



شکل 5 شرایط مرزی اعمال شده برای صفحه بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای

که در رابطه بالا X_i و X_j مختصات گره‌های i و j بوده و b_{ij} نیروی محوری است که در گره‌ها به فنر وارد می‌شود. با بازنویسی رابطه (33) در حالت دو بعدی رابطه (34) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} l_{ij} & 0 & -l_{ij} & 0 \\ 0 & l_{ij} & 0 & -l_{ij} \\ -l_{ij} & 0 & l_{ij} & 0 \\ 0 & -l_{ij} & 0 & l_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x^i \\ b_y^i \\ b_x^j \\ b_y^j \end{bmatrix} \quad (34)$$

در رابطه بالا b_x^i ، b_y^i ، x_i و y_i به ترتیب نیروی محوری و مختصات گره i ام در جهت x و y هستند. در حالت کلی، با جمع بندی رابطه (34) معادله (35) بدست می‌آید.

$$LX = B \quad (35)$$

که در آن L ماتریس سختی، B بردار نیروها و X مختصات جدید گره‌هاست. برای محاسبه مختصات جدید گره‌ها معادله تعادلی (36) حل می‌شود.

$$LX = 0 \quad (36)$$

شرایط مرزی که برای حل معادله تعادلی استفاده شده‌اند، در رابطه (37) ارائه شده‌اند.

$$\Delta X_i^T n_i = [4x_i \quad 4y_i] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = [(x_i - \bar{x}_i) \quad (y_i - \bar{y}_i)] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = 0 \quad (37)$$

$\bar{x}_i$ و $\bar{y}_i$ به ترتیب مختصات اولیه گره مرزی i ام و n_x^i و n_y^i به ترتیب بردار نرمال وارد بر این گره در جهت x و y هستند. شرایط مرزی اعمال شده باعث می‌شوند تا گره‌های مرزی فقط در راستای مرز جابه‌جا شوند و از ناحیه مسأله خارج نشوند. شکل 3 شرایط مرزی اعمال شده با این روش را برای یک سیستم ساده نشان می‌دهد.

5- مثال‌های عددی

در این بخش با حل دو مثال عددی در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی - جابه‌جایی با جواب‌های بدست آمده از روش غنی‌سازی متداول و همچنین جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌ها، کارایی روش غنی‌سازی - جابه‌جایی نشان داده شده است. در این مقاله از روش حداقل مربعات متحرک، با تابع پایه مرتبه دوم برای تولید توابع شکل استفاده شده است و روش حداقل مربعات گسسته مختلط با اختیار ضریب پنالتی (α) برابر 10^8 برای شبیه‌سازی مثال‌ها به کار رفته است. در این مثال‌ها خطای کل از رابطه (38) محاسبه شده است.

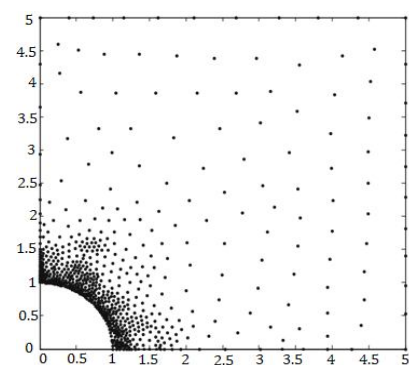
$$\text{خطای کل} = \sum_{i=1}^{n_t} e_i^2 \quad (38)$$

5-1- صفحه بی‌نهایت با سوراخ مرکزی

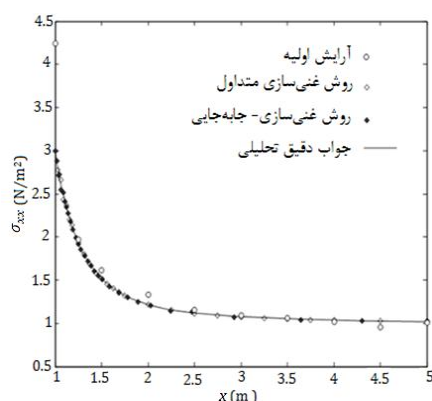
در این مثال یک صفحه بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ای که تحت اثر نیروی گسترده محوری t قرار دارد حل شده است. به دلیل بی‌نهایت بودن صفحه و با توجه به شرایط تقارنی فقط ربعی از ناحیه به ابعاد $5c$ حل شده است. شکل 4 مشخصات این مثال را نشان می‌دهد.

شرایط مرزی حاکم بر این مثال در شکل 5 نشان داده شده است. برای مرزهای AB و ED شرط تقارنی، برای مرز AE شرط فیزیکی عاری از بار و برای مرزهای BC و CD شرط مرزی تنش بدست آمده از جواب دقیق مسأله مورد استفاده قرار گرفته است.

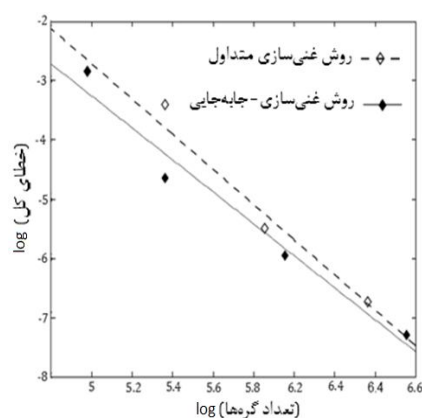
جواب تحلیلی دقیق این مسأله که توسط تیموشنکو و گودیر ارائه شده است [23] در روابط (39-43) ارائه شده‌اند.



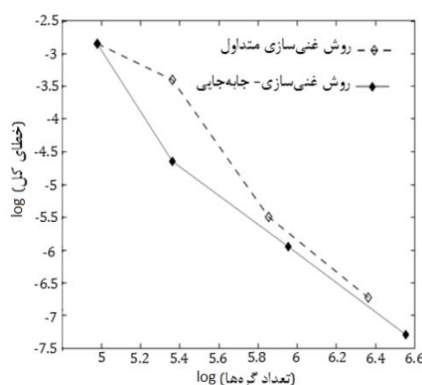
شکل 8 آرایش نهایی 702 گرهی بدست آمده برای مثال اول بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی-جابه‌جایی



شکل 9 مقایسه تنش σ_{xx} بر روی مرز $x=0$ برای مثال اول



شکل 10 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی در مراحل مختلف تظریف برای مثال اول



شکل 11 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی در مراحل مختلف تظریف برای مثال اول

$$u_r = \frac{t}{4G} \left[r \left(\frac{\phi - 1}{2} + \cos(2\theta) \right) + \frac{c^2}{r} (1 + (1 + \phi) \cos(2\theta)) - \frac{c^4}{r^3} \cos(2\theta) \right] \quad (39)$$

$$u_\theta = \frac{t}{4G} \sin(2\theta) \left[(1 - \phi) \frac{c^2}{r} - r \frac{c^4}{r^3} \right] \quad (40)$$

$$\sigma_x = t \left[1 - \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3c^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (41)$$

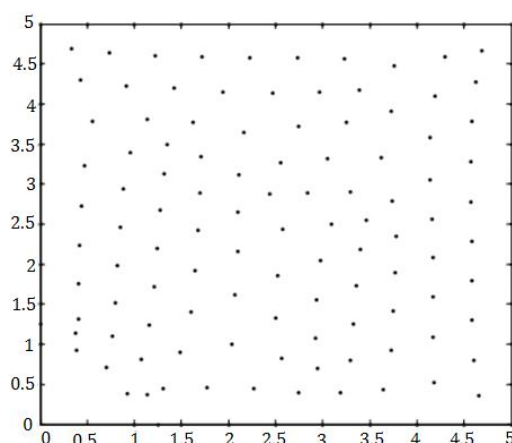
$$\sigma_y = - \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) + \frac{3c^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right] \quad (42)$$

$$\tau_{xy} = -t \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) - \frac{3c^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right] \quad (43)$$

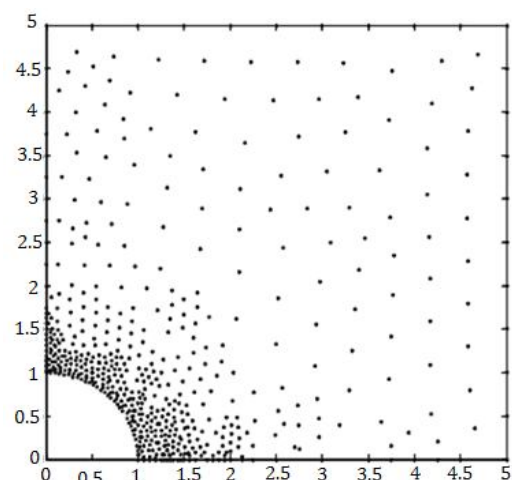
که در آنها $\phi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ، ν ضریب پواسون و G مدول برشی هستند. در این مثال $c=1$ ، $E=1000$ ، $\nu=0.3$ و $t=1$ فرض شده‌اند. شکل‌های 6 تا 8 آرایش اولیه و نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و روش غنی‌سازی-جابه‌جایی را بعد از سه مرحله تظریف نشان می‌دهند. خطای آرایش اولیه 145 گرهی 0/058 بدست آمده است.

جواب‌های بدست آمده برای تنش نرمال در جهت x برای آرایش اولیه و نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی در شکل 9 باهم مقایسه شده‌اند.

اشکال 10 و 11 و جدول 1 خطای بدست آمده برای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی-جابه‌جایی را باهم مقایسه کرده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده غنی‌سازی-جابه‌جایی را در مقایسه با روش غنی‌سازی متداول نشان می‌دهند.



شکل 6 آرایش اولیه 145 گرهی برای مثال اول



شکل 7 آرایش نهایی 579 گرهی بدست آمده برای مثال اول بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی متداول

جدول 1 مقایسه تعداد گره‌ها و خطای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی برای مثال اول

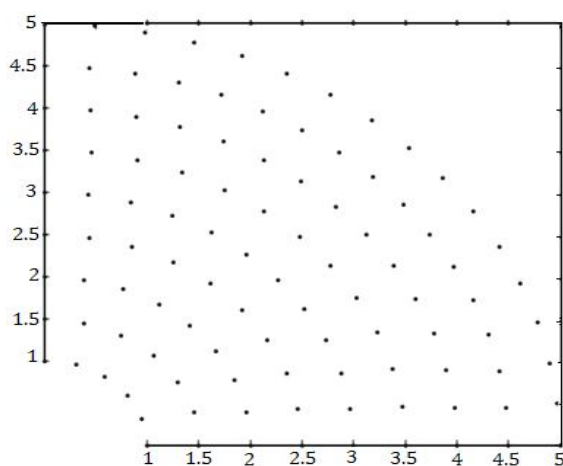
نام روش	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	تعداد گره‌ها	زمان محاسباتی
مرحله اول تظریف	0/0096	0/0333	213	(s)21
مرحله دوم تظریف	0/0026	0/0041	385	(s)72
مرحله سوم تظریف	4E-6/82	0/0012	702	(s)255

$$\sigma_r = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (44)$$

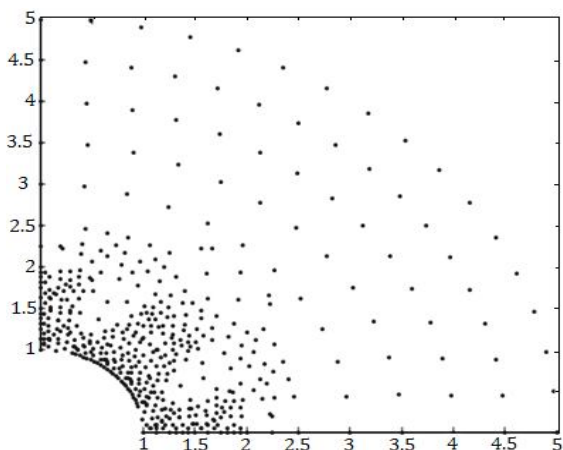
$$\sigma_\theta = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (45)$$

σ_r و σ_θ به ترتیب تنش نرمال در جهت شعاعی و زاویه‌ای هستند. مقادیر ثابت در نظر گرفته شده برای این مثال عبارتند از: $a=1, b=5, P=1, \nu = 0.3$. شکل‌های 14 تا 16 آرایش اولیه و نهایی بدست آمده بعد از سه مرحله تظریف را برای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی نشان می‌دهند. خطای بدست آمده برای آرایش اولیه 106 گرهی برابر 0/0280 می‌باشد.

در شکل 17 تنش نرمال در جهت x برای آرایش اولیه و آرایش نهایی روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی باهم مقایسه شده‌اند. شکل‌های 18 و 19 خطای دو روش غنی‌سازی متداول و روش غنی‌سازی - جابه‌جایی را در مراحل مختلف تظریف باهم مقایسه کرده‌اند.



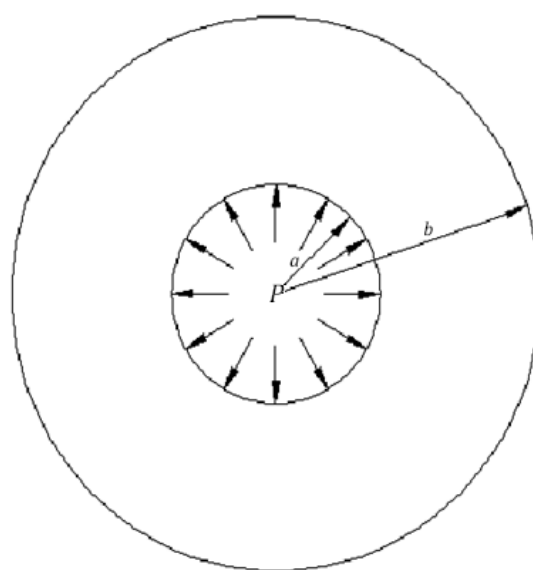
شکل 14 آرایش اولیه 106 گرهی برای مثال دوم



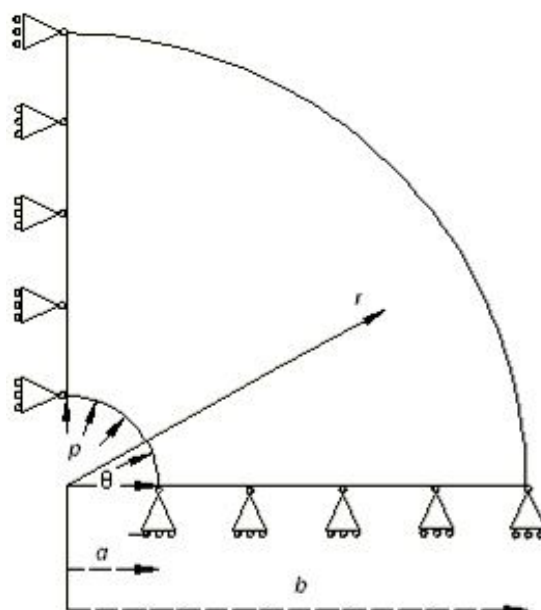
شکل 15 آرایش نهایی 491 گرهی بدست آمده برای مثال دوم بعد از سه مرحله تظریف با استفاده از روش غنی‌سازی متداول

5-2- استوانه توخالی تحت فشار داخلی

در این مثال، همان‌طور که در شکل 12 نشان داده شده است، یک استوانه توخالی که تحت اثر فشار داخلی P قرار دارد مورد بررسی قرار گرفته است. به دلیل تقارن، ربعی از این مثال مورد تحلیل قرار گرفته است. شکل 13 شرایط مرزی تقارنی و فیزیکی حاکم بر این مسأله را نشان می‌دهد. جواب تحلیلی دقیق این مسأله [23] در روابط (44 و 45) ارائه شده است.



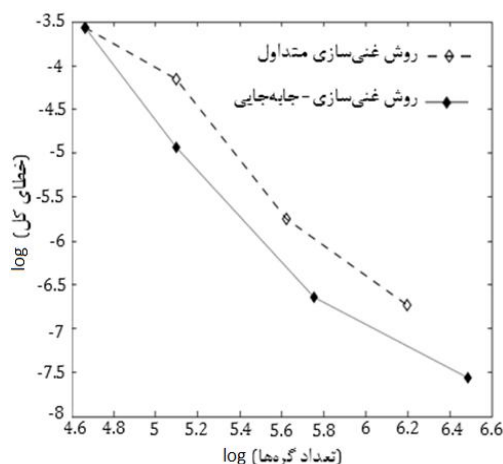
شکل 12 مقطع استوانه توخالی تحت فشار داخلی



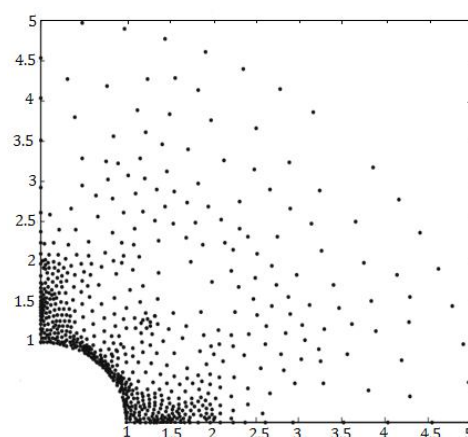
شکل 13 شرایط مرزی اعمال شده برای استوانه توخالی تحت فشار داخلی

جدول 2 مقایسه تعداد گره‌ها و خطای روش‌های غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی برای مثال دوم

نام روش	خطای کل		تعداد گره‌ها		زمان محاسباتی	
	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول	روش غنی‌سازی - جابه‌جایی	روش غنی‌سازی متداول
مرحله اول تطریف	0/0072	0/0156	164	164	(s)17	(s)17
مرحله دوم تطریف	0/0013	0/0032	315	276	(s)62	(s)1
مرحله سوم تطریف	4E-5/21	0/0012	656	491	(s)305	(s)3



شکل 19 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی در مراحل مختلف تطریف برای مثال دوم

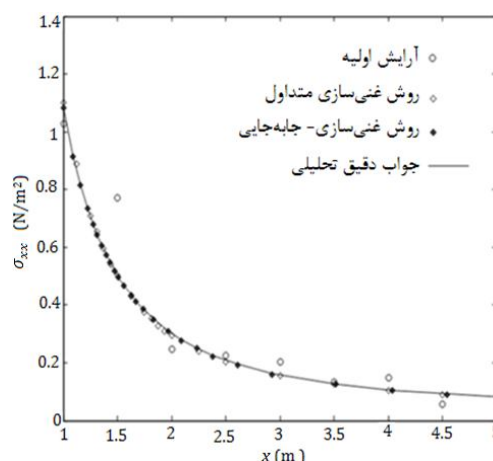
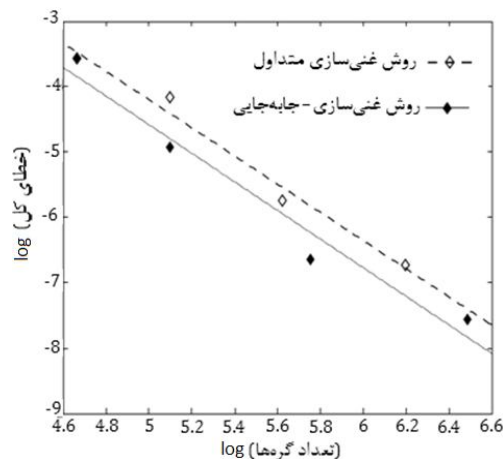


شکل 16 آرایش نهایی 656 گرهی بدست آمده برای مثال دوم بعد از سه مرحله تطریف با استفاده از روش غنی‌سازی - جابه‌جایی

در جدول 2 خطا و تعداد گره‌های دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده کارایی و دقت بالاتر روش غنی‌سازی - جابه‌جایی را نسبت به روش غنی‌سازی متداول نشان می‌دهند.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تطریف تطبیقی غنی‌سازی - جابه‌جایی در روش حداقل مربعات گسسته مختلط و برای بدست آوردن جواب‌هایی با دقت بالاتر در مسائل الاستیسیته خطی ارائه شد. روش ارائه شده، از دو روش غنی‌سازی و جابه‌جایی شبکه به طور هم‌زمان استفاده می‌کند. در مرحله غنی‌سازی، روش غنی‌سازی متداول، دیاگرام ورونوی برای مشخص کردن موقعیت گره‌هایی که باید به شبکه اضافه شوند، به کار برده شد. بعد از هر مرحله غنی‌سازی، خطای گره‌های جدید اضافه شده از روی خطای گره‌های آرایش تحلیل شده در مرحله قبلی تخمین زده شد. بعد از تکمیل فرایند غنی‌سازی و تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، در هر مرحله یک فرایند جابه‌جایی شبکه به کار برده شد. و به همین ترتیب، فرایند غنی‌سازی - جابه‌جایی تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه یافت. از آنجا که در روش ارائه شده، از روش درون‌یابی برای تخمین خطای گره‌های جدید اضافه شده، بعد از هر مرحله غنی‌سازی استفاده شد، هزینه محاسباتی اضافی برای تحلیل مجدد صرف نشد و تعداد مراحل لازم برای تحلیل شبکه در روش غنی‌سازی - جابه‌جایی نسبت به روش غنی‌سازی متداول تغییر نکرد. روش غنی‌سازی - جابه‌جایی علاوه بر این که، مشکل نزدیکی بیش از اندازه برخی گره‌ها را که در روش غنی‌سازی متداول به علت بدشکلی سلول‌های ورونوی رخ می‌دهد رفع می‌کند، با دستیابی به یک آرایش هموار، جواب‌هایی با دقت بالاتر، در مقایسه با روش غنی‌سازی متداول، ارائه می‌کند؛ در حالی که از نظر هزینه محاسباتی روش ارائه شده تغییر محسوسی نسبت به روش غنی‌سازی متداول ندارد. مثال‌های عددی حل شده در حوزه الاستیسیته خطی و مقایسه جواب‌های

شکل 17 مقایسه تنش σ_{xx} بر روی مرز $x=0$ برای مثال دوم

شکل 18 مقایسه خطای دو روش غنی‌سازی متداول و غنی‌سازی - جابه‌جایی در مراحل مختلف تطریف برای مثال دوم

بدست آمده از روش پیشنهادی غنی‌سازی - جابه‌جایی با جواب‌های روش غنی‌سازی متداول و جواب‌های تحلیلی دقیق موجود برای مثال‌های عددی حل شده، کارایی و دقت بالاتر روش ارائه شده را نشان دادند.

7- مراجع

- [12] M. Naisipour, M. H. Afshar, B. Hassani, A. R. Firoozjaee, Collocation discrete least square (CDLS) method for elasticity problems, *International Journal of Civil Engineering*, v7, pp. 9-18, 2009.
- [13] M. Afshar, M. Lashckarbolok, G. Shobeyri, Collocated discrete least squares meshless (CDLSM) method for the solution of transient and steady-state hyperbolic problems, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 60, No. 10, pp. 1055-1078, 2009.
- [14] J. Amani, M. Afshar, M. Naisipour, Mixed discrete least squares meshless method for planar elasticity problems using regular and irregular nodal distributions, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 36, No. 5, pp. 894-902, 2012.
- [15] M. Afshar, J. Amani, M. Naisipour, A node enrichment adaptive refinement in Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 36, No. 3, pp. 385-393, 2012.
- [16] M. Afshar, M. Naisipour, J. Amani, Node moving adaptive refinement strategy for planar elasticity problems using discrete least squares meshless method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 47, No. 12, pp. 1315-1325, 2011.
- [17] N. Sukumar, Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 61, No. 12, pp. 2159-2181, 2004.
- [18] M. Arroyo, M. Ortiz, Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 65, No. 13, pp. 2167-2202, 2006.
- [19] G.-R. Liu, Y.-T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*: Springer, 2005.
- [20] L. Gu, Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 56, No. 1, pp. 1-11, 2003.
- [21] N. Sukumar, Z. Huang, J. H. Prévost, Z. Suo, Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 59, No. 8, pp. 1075-1102, 2004.
- [22] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of computation*, Vol. 37, No. 155, pp. 141-158, 1981.
- [23] S. Timoshenko, J. Goodier, *Theory of elasticity*, Third ed., New York: McGraw-Hill, 1970.
- [1] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to non-spherical stars, *Monthly notices of the royal astronomical society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [2] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, T. Belytschko, Y. Lu, L. Gu, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 40, No. 8, pp. 1483-1504, 1997.
- [3] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 37, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- [4] S. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
- [5] T. Liszka, C. Duarte, W. Tworzydło, hp-Meshless cloud method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 263-288, 1996.
- [6] E. Oñate, F. Perazzo, J. Miquel, A finite point method for elasticity problems, *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 22, pp. 2151-2163, 2001.
- [7] W. K. Liu, S. Jun, Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *International journal for numerical methods in fluids*, Vol. 20, No. 8-9, pp. 1081-1106, 1995.
- [8] T. Zhu, J.-D. Zhang, S. Atluri, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational mechanics*, Vol. 21, No. 3, pp. 223-235, 1998.
- [9] H. Arzani, M. Afshar, Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, Vol. 42, pp. 23-31, 2006.
- [10] G. Shobeyri, M. Afshar, Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method, *Computers & Fluids*, Vol. 39, No. 3, pp. 461-470, 2010.
- [11] A. R. Firoozjaee, M. H. Afshar, Discrete least squares meshless method with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations, *Engineering analysis with boundary elements*, Vol. 33, No. 1, pp. 83-92, 2009.