



استفاده از همسایگی همگن در محاسبه بردار نرمال ابرهای نقاط

ابوالفضل فورجی‌نژاد^۱، خلیل خلیلی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* بیرجند، صندوق پستی ۹۷۱۷۵/۶۱۵، kkhilali@birjand.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۲ آذر ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۶ آذر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۰۲ تیر ۱۳۹۳

کلید واژگان:

ابر نقاط

نزدیک‌ترین k همسایگی

بردان نرمال سطح

گراف همسایگی

ارائه مدل‌های سه بعدی بر پایه نقاط به دلیل سادگی آن مورد توجه قرار گرفته است. پایه بسیاری از تحلیل‌های صورت پذیرفته در ابر نقاط، مشخص کردن همسایگی‌های هر نقطه در ابر نقاط است. در این مقاله برای تعیین همسایگی‌های یک نقطه در ابر نقاط از روشی جدید با نام همسایگی همگن استفاده شده است. در این روش برای تعیین همسایگی، اقدام به بهبود روش نزدیک‌ترین k همسایگی شد تا علاوه بر نزدیک بودن همسایگی‌ها، توزیع آن‌ها در اطراف نقطه مورد بررسی نیز لحاظ شود. در این پژوهش تأثیر انتخاب همسایگی‌ها بر تخمین بردار نرمال سطح مورد بررسی قرار گرفته و بردار نرمال سطح با استفاده از همسایگی همگن محاسبه شده است. برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی، بردار نرمال سطح با استفاده از همسایگی‌های به دست آمده از روش نزدیک‌ترین k همسایگی نیز محاسبه و با بردار نرمال حاصل شده از روش همسایگی همگن مقایسه شد. نتایج حاصله نشان داد که همسایگی همگن در تخمین بردار نرمال از دقت بهتری برخوردار است. همچنین برای ارزیابی کارکرد همسایگی همگن در هم‌مرجع‌سازی ابرهای نقاط مورد استفاده قرار گرفت که نتایج به دست آمده نشان داد استفاده از آن می‌تواند سبب کاهش خطا در هم‌مرجع‌سازی ابرهای نقاط شود.

Using homogeneous neighborhood in point clouds normal vector calculation

Abolfazl Foorginejad¹, Khalil Khalili^{2*}

1- Mechanical Engineering, Birjand University, Birjand, Iran

2- Mechanical Engineering, Birjand University, Birjand, Iran

* P.O.B. 97175/615, Birjand, Iran, kkhilali@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 03 December 2013

Accepted 07 December 2013

Available Online 23 June 2014

Keywords:

Point Cloud

K- Nearest Neighbors

Surface Normal Vector

Neighborhood Graph

ABSTRACT

Point based 3D modeling has recently received greater attention, mainly due to its simplicity. One of the most fundamental operations for point set processing is to find the neighbors of each point in point clouds. This paper presents a new method called homogeneous neighborhood for determining neighbors in point clouds. This method of choosing neighbors, in addition to the distance takes into consideration the directional balance by improving the k nearest neighbors. The directional balance describes whether the neighbors are well spread around the point of concern. In this study effects of selecting neighbors on normal vector estimation are investigated. Normal vector is calculated using homogeneous neighborhood. For evaluation of the proposed method in determining neighbors, normal vector are calculated using the k nearest neighbors. The results show that the homogeneous neighborhood method is more accurate in normal vector estimation than the k nearest method. For evaluation of the homogeneous neighborhood method, it was employed in point cloud registration application. The results of registration by using the homogeneous neighborhood show that this method of neighbor selection yields reduced registration errors.

۱- مقدمه

استفاده از مدل‌های سه بعدی بر پایه نقاط، به دلایلی چون سرعت، ظرفیت رایانه‌های شخصی، سادگی ساختار، در دسترس بودن داده‌های به دست آمده از وسایل اندازه‌گیری و افزایش سرعت داده‌گیری، به تازگی مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. یکی از روش‌های نمایش سطوح مدل استفاده از نقطه به عنوان عنصر پایه ساختار هندسی است. بر این اساس یک سطح شامل مجموعه‌ای از نقاط می‌شود که ابر نقاط نامیده می‌شود [۱].

استفاده از مجموعه نقاط به عنوان یکی از روش‌های پایه بیان‌کننده

هندسه اشکال، به طور هم‌زمان با گسترش کاربرد سطوح شکل آزاد^۱ مانند نرېز^۲ و مش‌ها، بسط یافته است. به دلیل توانایی مؤثر در نمایش و امکان تحلیل انعطاف‌پذیر هندسه مدل‌های سه بعدی پیچیده، استفاده از هندسه مبتنی بر نقاط مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. از طرف دیگر با رشد فناوری اسکن سه بعدی لیزری، مجموعه‌های نقاط، بیشتر و راحت‌تر در قابل حصول هستند. امروزه استفاده مستقیم از ابر نقاط بدون تبدیل آن به فرم‌های دیگر مانند مش و سطح در کاربردهایی مانند نمایش، ویرایش و ساخت و

1- Freeform

2- NURBS (Non Uniform Rational B-Spline)

Please cite this article using:

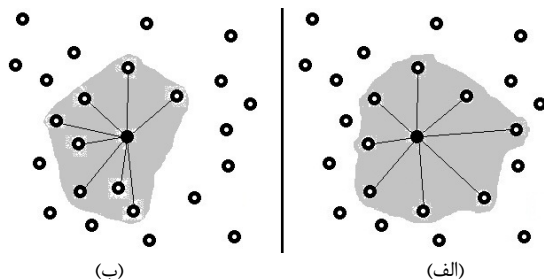
A. Foorginejad, Kh. Khalili, Using homogeneous neighborhood in point clouds normal vector calculation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 155-163, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

برازش یک سطح درجه ۲ [۱۰] مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش‌های تعیین همسایگی مبتنی بر نزدیک‌ترین k همسایگی‌ها با وجود این‌که در بسیاری از کاربردها مورد استفاده قرار گرفته‌اند، دارای دو ضعف است. نزدیک‌ترین k همسایگی‌های مورد اشاره ممکن است در مواردی که داده‌ها دارای شبکه‌بندی با فرمت ثابتی نیستند، برای تخمین بردار نرمال مناسب نباشند. مقدار k نیز برای تمام کاربردها یکسان نبوده و بسته به کاربرد مورد نظر و داده‌های ابر نقاط تعیین می‌شود [۱۱]. روش دیگری که براساس فواصل اقلیدسی همسایگی‌های یک نقطه از ابر نقاط را مشخص می‌کند، کره همسایگی^۳ است. در این روش نقاطی که داخل کره‌ای با شعاع مشخص و مرکز نقطه‌ای که قصد به‌دست آوردن همسایگی‌های آن وجود دارد، قرار می‌گیرند به‌عنوان همسایگی‌های نقطه مدنظر انتخاب می‌شوند. این روش‌ها به‌دلیل ساده بودن عمومیت یافته‌اند و در پژوهش‌های بسیاری برای تعیین نقاط همسایگی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، اما نتایج، به‌ویژه زمانی که توزیع نقاط یکنواخت نباشد، چندان رضایت‌بخش نیست [۱۲].

ایجاد مش‌های چندضلعی و تعیین فصل مشترک‌های چندضلعی‌ها برای مشخص کردن تعیین همسایگی‌های یک نقطه در ابر نقاط، روش دیگری برای تعیین همسایگی‌های یک نقطه در ابر نقاط است [۱۳]. بر خلاف ابر نقاط که هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد ارتباط بین نقاط در آن وجود ندارد، مش ارتباط بین همسایگی‌ها را از طریق لبه‌ها ارائه می‌دهد. ساختار مش از مجموعه‌ای از لبه و راس^۴ تشکیل شده است. همسایگی‌های مرتبه اول یا اولین حلقه همسایگی با تعیین اشتراک یک راس در لبه‌ها مشخص می‌شود. از آنجایی که تولید مش‌ها به شکل زنجیره‌ای انجام می‌پذیرد نقطه شروع در مش‌زنی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. زمانی که نقاط شروع مش‌زنی متفاوت باشد، همسایگی‌های یک نقطه در ابر نقاط یکسان نخواهد بود و در نتیجه بردار نرمال تخمین زده شده از نقاط همسایگی یک نقطه از ابر نقاط، در صورت تغییر مش‌بندی، تغییر خواهد کرد. این موضوع به شکل آشکاری بر ثبات تخمین بردار نرمال با استفاده از مش‌بندی تأثیر می‌گذارد.

برای ثبات تخمین بردار نرمال با استفاده از مش‌بندی، می‌توان برای تعیین همسایگی‌ها از مش‌زنی به روش مثلث‌سازی دلونی^۵ استفاده کرد. مثلث‌سازی دلونی، با کمک دوگانگی هندسی و دیاگرام ورونوی^۶ مش لازم را تولید می‌کند و در این روش نقطه شروع مش‌زنی تأثیری بر مش تولید شده ندارد. دیاگرام ورونوی مستقل از چگالی و توزیع نقاط داده است و از آن مهم‌تر این‌که نقاط همسایگی ورونوی، همسایگی‌هایی را مشخص می‌کند که به نحو قابل اتکایی، نماینده هندسه محلی سطح هستند. مش دلونی در هر حالتی کم‌ترین حجم یک مدل سه‌بعدی را استخراج می‌کند. با افزایش تراکم نقاط، تقریب شکل و مزیت‌های مش دلونی بهبود می‌یابد [۱۴].



شکل ۱ الف - ۸ همسایگی همگن؛ ب - نزدیک‌ترین ۸ همسایگی

تولید کاربرد بیشتری پیدا کرده است [۲]. یافتن همسایگی‌های یک نقطه یکی از اصول پردازش هندسه ابر نقاط است که می‌تواند به شکل مستقیم در محاسبه بردار نرمال [۳]، یا غیرمستقیم در کاهش داده‌ها [۴]، ایجاد مدل LOD^۱ [۵] و ویرایش ابر نقاط [۶] به‌کار رود.

یک ابر نقاط معمولاً شامل میلیون‌ها نقطه است. با بهبود فن‌آوری اسکن امکان تبدیل مدل‌های بزرگ به ابر نقاط فراهم آمده است [۷]. ابر نقاط صرفاً شامل مجموعه‌ای از نقاط اسکن شده است که در این مجموعه هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد ارتباط بین نقاط وجود ندارد و ممکن است حتی اطلاعات توپولوژیکی را نیز دربر نداشته باشد. گرچه دریافت اطلاعات توپولوژیکی با استفاده از الگوریتم‌های مناسب بر ابر نقاط، قابل دریافت است. محاسبه بردار نرمال سطح برای سطوح ابر نقاط، یکی از پرکاربردترین خواص هندسی قابل استنتاج از ابر نقاط است. استفاده در فیلتر نویز برای نویززدایی، واضح کردن مدل، تعیین نرخ نمونه برداری و تعیین انحنای سطوح از جمله کاربردهای بردار نرمال سطح است. موضوع مشترکی که در تمامی کاربردهای یاد شده وجود دارد تعیین همسایگی‌های نقاط، در ابر نقاط است [۸].

در پژوهش حاضر روش جدیدی برای تعیین همسایگی‌های نقاط در ابر نقاط ارائه شده است. در این روش برای تعیین همسایگی‌ها علاوه بر فاصله، چگونگی توزیع همسایه‌ها در جهت مختلف، نیز مد نظر قرار می‌گیرند. همسایگی‌های به‌دست آمده از این روش همسایگی‌های همگن نامیده می‌شوند. البته روش پیشنهادی روش جستجوی جدیدی در ابر نقاط محسوب نمی‌شود و دارای این قابلیت است که همسایه‌های با توزیع یکنواخت از لحاظ جهت را از میان همسایه‌هایی که بر صفحه مماس در نقطه مورد بررسی، تصویر گشته‌اند انتخاب کند. به عبارتی دیگر الگوریتم پیشنهادی سبب بهبود روش‌های تعیین همسایگی می‌شود. شکل ۱ نمونه‌ای از انتخاب همسایگی‌های همگن به روش پیشنهادی را نشان می‌دهد و تفاوت انتخاب نقاط به نحو مورد نظر با انتخاب نزدیک‌ترین همسایگی‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. با توجه به این‌که الگوریتم پیشنهادی انتخاب یک مجموعه از همسایگی‌ها به شکل همگن از میان همسایه‌های جستجو شده توسط سایر روش‌هاست بنابراین اگر روش جستجوی همسایگی‌ها در برخی موارد دارای خطا در انتخاب همسایگی‌ها باشد طبیعتاً این روش نیز دچار خطا خواهد شد.

روش‌های تعیین همسایگی در ابر نقاط در بخش ۲ مرور می‌شود. در بخش ۳ الگوریتم مورد استفاده برای تعیین همسایگی همگن شرح داده می‌شود. در بخش ۴ انواع روش‌های تعیین بردار نرمال مورد بررسی قرار می‌گیرد و در بخش ۵ نتایج به‌دست آمده مورد تحلیل قرار گرفته و کارایی روش پیشنهادی در تخمین بردار نرمال با سایر روش‌ها مقایسه می‌شود.

۲- تعیین همسایگی

بردار نرمال یک مشخصه هندسی سطح سه‌بعدی است و برای هر نقطه از سطح می‌توان بردار نرمال را به‌عنوان یکی از خواص هندسی آن سطح مشخص کرد. تخمین قابل اعتماد بردار نرمال یک نقطه از ابر نقاط، بستگی به انتخاب درست نقاط همسایگی آن نقطه دارد. پژوهش‌گران بسیاری تعداد ثابتی از نزدیک‌ترین همسایگی‌های اقلیدسی نقاط را برای تخمین بردار نرمال یک نقطه مشخص مورد استفاده قرار داده‌اند. با توجه به این‌که همسایگی‌های یک نقطه براساس یک k ثابت که مبین تعداد همسایگی‌ها است، تعیین می‌شود به این همسایگی‌ها، نزدیک‌ترین k همسایگی‌ها^۲ گفته می‌شود. نزدیک‌ترین k همسایگی‌ها برای تعیین صفحه مماس بر یک نقطه [۹] یا

3- Ball-neighbor
4- Vertex
5- Delaunay triangulation
6- Voronoi diagram

1- Level of detail
2- K Nearest Neighbors (k-NN)

کیرکپاتریک و راتکه [۱۵] گراف همسایگی پارامتری با نام اسکلت بتا را معرفی کردند. در این روش پارامتر بتا کنترل کننده شکل منطقه مؤثر است. گابریل گراف در واقع اسکلت بتا با بتا برابر یک است و در صورتی که $\beta=2$ گراف همسایگی نسبی حاصل می شود. در شکل ۳ نمونه ای از گراف های تعیین همسایگی نشان داده شده است.

۳- همسایگی همگن

این بخش چگونگی انتخاب همگن همسایگی ها را برای محاسبه بردار نرمال توضیح می دهد. ما و کریپس [۴] برای انتخاب شش همسایه همگن یک نقطه از ابر نقاط، از یک روش ساده وزن دادن استفاده کردند تا انتخاب صحیح همسایگی ها براساس پارامترهای فاصله اقلیدسی و توزیع یکنواخت زاویه بین تصویر همسایگی ها بر صفحه مماس بر سطح، در نقطه مورد بررسی صورت پذیرد. همان گونه که در شکل ۴ نشان داده شده است، نقاط p_{i-1} و p_{i+1} هم جوار نقطه p_i است. θ_i زاویه بین اضلاع $C_i = p - p_i$ و $C_{i+1} = p - p_{i+1}$ بوده که براساس رابطه (۳) به دست می آید.

$$\theta_i = \cos^{-1}(c_i \cdot c_{i+1} / (d_i d_{i+1})) \quad (3)$$

که در رابطه بالا $d_i = \|p - p_i\|$ است.

با استفاده از رابطه ای مشابه رابطه ۳ مقدار θ_{i+1} نیز به دست می آید. با استفاده از رابطه (۴) برای هر نقطه همسایگی p_i می توان وزنی را اختصاص داد.

$$w_i = (\theta_i + \theta_{i+1}) d_i^{-1} \quad (4)$$

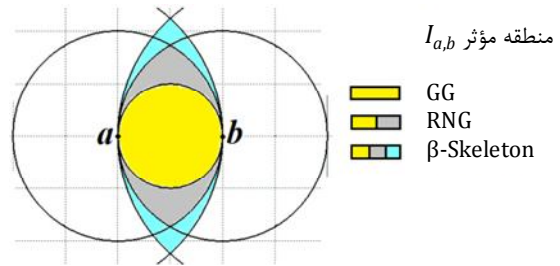
وزن هایی که با رابطه (۴) تولید می شوند خواص دلخواهی را ایجاد می کند. در صورت نزدیک بودن همسایگی p_i به نقطه p وزن بزرگ تری به نقطه p_i اختصاص می یابد که سبب می شود نقاط نزدیک تر در اولویت انتخاب به عنوان همسایگی قرار گیرند. همچنین با افزایش $\theta_i + \theta_{i+1}$ مقدار وزن اختصاصی افزایش یافته، که این موضوع سبب می شود در حد امکان نقاط همسایگی دارای توزیع یکنواختی شوند. ما و کریپس برای دستیابی به شش همسایگی دارای نزدیک ترین فاصله به نقطه p و بیشترین توزیع زاویه ای حول نقطه p ابتدا تعدادی نقطه را بر حسب معیار نزدیک بودن به نقطه p به عنوان نقاط کاندید انتخاب کردند. سپس وزن مرتبط با هر کدام از نقاط کاندید را محاسبه و نقطه دارای کمترین وزن را از مجموعه نقاط کاندید حذف کرده و وزن ها دوباره محاسبه می شود. با هر بار تکرار این عمل یکی از نقاط کاندید حذف می شود و این کار تا زمان رسیدن به شش نقطه کاندید ادامه می یابد. نقاط کاندید باقی مانده در حقیقت شش همسایگی نقطه p بوده که حتی المقدور نزدیک ترین نقاط بوده و از طرف دیگر دارای توزیع زاویه بیشتری حول نقطه p نیز است [۴].

پارک و همکاران [۱۲] برای یافتن همسایگی های یک نقطه از گراف همسایگی استفاده کردند. آن ها منطقه مؤثر را یک بیضی براساس رابطه (۵) تعیین کرده و گراف همسایگی را گابریل گراف بیضی نام نهادند.

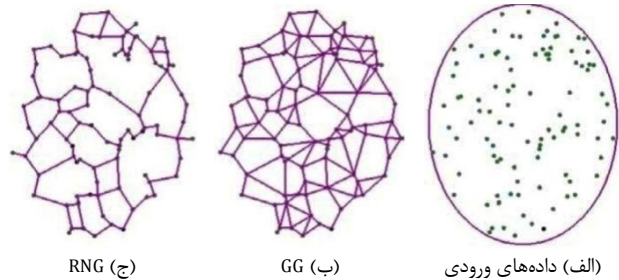
$$EGG \text{ برای } I_{a,b}: x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} \leq R^2 \quad (5)$$

در رابطه بالا R نصف فاصله اقلیدسی بین نقاط a و b است.

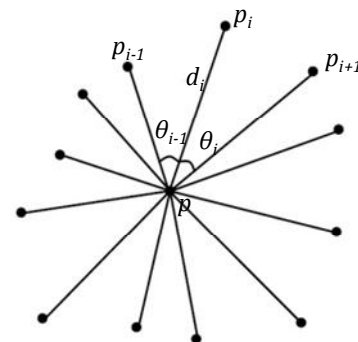
آن ها به ازاء مقادیر مختلف α اقدام به ترسیم گابریل گراف بیضی کردند و با توجه به نتایج تحلیل و آزمایشات صورت پذیرفته به این نتیجه رسیدند که به ازاء $\alpha = 0.7$ ، گابریل گراف بیضی همسایگی ها را به شکل متعادلی با در نظر گرفتن فاصله و توزیع متوازن انتخاب می کند. آن ها نتایج به دست آمده توسط این گراف را برای تخمین بردار نرمال مناسب دانستند. در صورتی که در برخی کاربردها نیاز به استفاده از همسایگی درجه دوم یا به عبارتی همسایه همسایه ها وجود داشته باشد، مقدار پارامتر α باید مقادیر کمتری انتخاب شود [۱۲].



شکل ۲ انواع مناطق مؤثر



شکل ۳ نمونه ای از گراف همسایگی نسبی و گابریل گراف [۱۲]



شکل ۴ نقاط همسایگی وزن دار [۴]

گراف همسایگی^۱ راه دیگری برای به دست آوردن همسایگی های نقطه مورد بررسی، در ابر نقاط است. گراف همسایگی یک نقطه داده شده از مجموعه نقاط S ، گرافی تشکیل شده از مجموعه رئوس S و مجموعه لبه های مشخص کننده ارتباط بین رئوس است. لبه ها در گراف همسایگی با استفاده از منطقه مؤثر I مشخص می شوند. براساس تعاریف متفاوتی که برای منطقه مؤثر ارائه می شود، چندین گراف همسایگی وجود دارد. در شکل ۲ مناطق مؤثر نشان داده شده است. در صورتی دو نقطه a و b از مجموعه نقاط S تشکیل یک لبه را می دهند که اشتراک بین منطقه مؤثر I و مجموعه نقاط S برابر تهی باشد $I_{a,b} \cap S = \emptyset$ [۱۲].

گابریل گراف^۲ نقاط a و b را در صورتی که رابطه (۱) برای تمام مجموعه رئوس S برقرار باشد به یکدیگر متصل می کند.

$$d_{a,b} \leq \sqrt{d_{a,v}^2 + d_{b,v}^2} \quad (1)$$

برای تمامی $v \in S$

$d_{a,b}$ نشان دهنده فاصله اقلیدسی بین نقاط a, b است.

گراف همسایگی نسبی^۳ نقاط a و b را براساس رابطه (۲) به یکدیگر متصل می کند.

$$d_{a,b} \leq \max \{d_{a,b}, d_{a,b}\} \quad (2)$$

برای تمامی $v \in S$

1- Neighborhood graph

2- Gabriel Graph(GG)

3- Relative Neighborhood Graph(RNG)

$$H = \left(\sum_{i=1}^8 |\alpha_i| + bias \right) \times \left(\sum_{i=1}^8 d_i \right) \quad (6)$$

α اختلاف زاویه‌ای بین جهت پره و جهت بردار تفاضل همسایگی انتخاب شده و مرکز چرخ تعادل، $bias$ عدد ثابت، d فاصله بین همسایگی انتخاب شده و مرکز چرخ تعادل؛ است.

ضریب همگنی معرف دو خاصیت از همسایگی‌های یک نقطه است. همان گونه که رابطه (۶) نشان می‌دهد با افزایش فاصله همسایگی‌ها از نقطه مورد بررسی ضریب همگنی افزایش می‌یابد، بنابراین این ضریب نشان‌دهنده دوری و نزدیکی همسایگی‌ها است. از طرف دیگر در صورتی که جهت بردار تفاضل همسایگی‌ها و مرکز چرخ تعادل با جهت پره‌ها اختلاف داشته باشند این اختلاف α سبب افزایش مقدار ضریب همگنی می‌شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت هرچه مقدار ضریب همگنی کمتر باشد همسایگی‌ها حتی‌الامکان دارای نزدیک‌ترین فواصل به نقطه مورد بررسی با توزیع یکنواخت حول آن نقطه است. در نظر گرفتن مقدار ثابت در رابطه (۶) بدین دلیل بوده که در صورتی که در حالت ایده‌آل هیچ گونه اختلاف α وجود نداشته باشد تأثیر فاصله تا نقطه مورد بررسی در محاسبه ضریب همگنی حذف نشود.

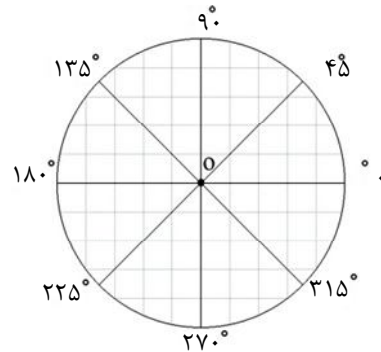
در مرحله بعد پس از این که ضریب همگنی برای نخستین نقطه به‌دست آمد، چرخ تعادل حول نقطه o شروع به چرخش کرده و جهت اولین پره آن با بردار تفاضل دومین نقطه از مجموعه 20 همسایگی و مرکز چرخ تعادل $p_2 - o$ هم‌جهت می‌شود. مانند مرحله نخست برای هر کدام از پره‌های چرخ تعادل یک نقطه همسایگی از میان 20 همسایگی، که دارای کمترین اختلاف زاویه‌ای بین جهت پره و جهت بردار تفاضل همسایگی و مرکز چرخ تعادل انتخاب می‌شود و ضریب همگنی برای همسایگی‌های انتخاب شده دوباره به‌دست می‌آید. این کار برای تمامی مجموعه 20 همسایگی تکرار می‌شود. در نهایت همسایگی‌های مرتبط با کوچک‌ترین مقدار ضریب همگنی به‌عنوان همسایگی همگن انتخاب می‌شوند.

۴- بردار نرمال

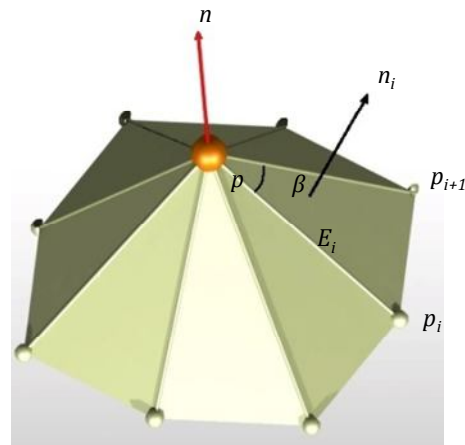
این بخش ضمن پرداختن به انواع روش‌های محاسبه بردار نرمال، چگونگی محاسبه بردار نرمال در ابر نقاط در پژوهش حاضر را ارائه می‌کند. اولین روشی که برای محاسبه بردار نرمال ارائه شد و قابلیت محاسبه بردار نرمال سطوح ابر نقاط را دارا بود، توسط گوراد [۱۶] ارائه شد. رابطه (۷) راستای بردار نرمال را مشخص می‌کند. این روش تعیین بردار نرمال، میانگین وزنی برابر^۱ نام‌گذاری شده است.

$$n_{MWE} \parallel \sum_{i=1}^k n_i \quad (7)$$

همان‌طور که در شکل ۶ نشان داده شده است n_i بردار عمود بر وجه است. رابطه (۷) نشان می‌دهد که راستای بردار نرمال در نقطه p موازی با مجموع بردارهای عمود بر وجوه به وجود آمده از همسایگی‌های اطراف نقطه p است. در این روش بردار نرمال هر یک از وجوه تأثیر یکسانی بر بردار نرمال در نقطه p دارد، بنابراین اگر ابر نقاط فاقد شبکه بوده و همسایگی‌ها دارای توزیع یکنواختی در اطراف نقطه مورد بررسی نباشند بردار نرمال به درستی محاسبه نخواهد شد. تورمر و ووثریج [۱۷] با در نظر گرفتن زاویه بین دو لبه مشکل عدم توزیع یکنواخت را برطرف کردند. این روش تعیین بردار نرمال سطح که از رابطه (۸) به‌دست می‌آید میانگین وزنی زاویه‌ای^۲ نام‌گذاری شده است.



شکل ۵ چرخ تعادل برای ۸ همسایگی همگن



شکل ۶ بردار نرمال سطح در ابر نقاط

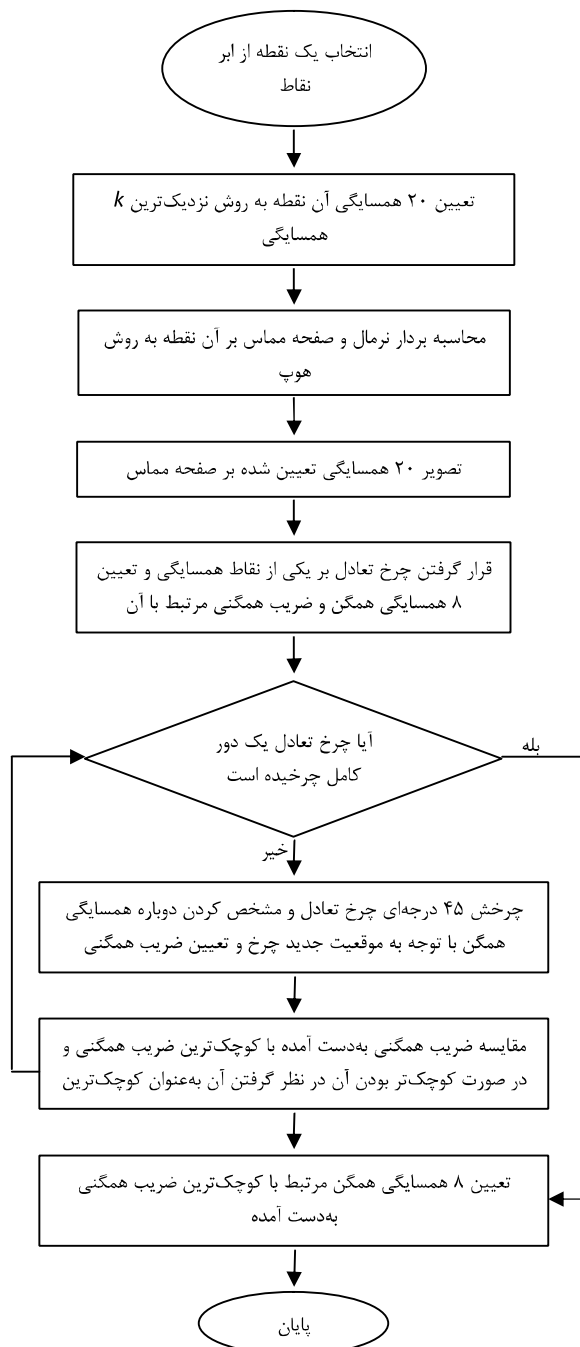
در این پژوهش برای یافتن نقاط همسایگی دارای توزیع متوازن از روش جدیدی به نام همسایگی همگن استفاده شد. در همسایگی همگن پارامترهای نزدیک بودن نقاط همسایگی و توزیع یکنواخت و متوازن نقاط در تمامی جهات اطراف نقطه مورد بررسی، لحاظ شد. به دلیل این که یک ابر نقاط از تعداد قابل توجهی نقطه تشکیل شده و انجام یک عملیات هر چند ساده بر تمامی ابر نقاط امری زمان‌بر محسوب می‌شود، بیشتر پژوهش‌گران خطاهای به وجود آمده در اثر نامتوازن بودن همسایگی‌ها را در نظر نمی‌گیرند. بنابراین در این پژوهش تلاش شد تا روشی ارائه شود که با کم‌ترین حجم محاسبات همسایگی همگن قابل قبولی به‌دست آید. محدودیتی برای انتخاب تعداد همسایگی‌ها در روش پیشنهادی وجود ندارد با این وجود در پژوهش حاضر تعداد همسایگی‌های همگن ۸ همسایه در نظر گرفته شد. برای یافتن ۸ همسایگی همگن یک نقطه در ابر نقاط ابتدا ۲۰ نقطه نزدیک به نقطه مورد بررسی انتخاب می‌شود. برای یافتن همسایگی‌هایی که از نظر جهت یکنواخت توزیع گشته باشند از چرخ تعادل نشان داده شده در شکل ۵ استفاده می‌شود. در حالت ایده‌آل، زمانی که بردار تفاضل همسایگی و نقطه مورد بررسی $p - p_i$ در امتداد پره‌های چرخ تعادل قرار گیرد و با آن اختلاف زاویه‌ای نداشته باشد، توزیع همسایگی‌ها کاملاً همگن است.

رویه انتخاب همسایگی همگن بدین شرح است: ابتدا نقطه مرکزی چرخ تعادل o بر نقطه مورد بررسی p قرار می‌گیرد و جهت اولین پره چرخ تعادل با بردار تفاضل اولین همسایگی و مرکز چرخ تعادل $p_1 - o$ هم‌جهت می‌شود. برای هر کدام از پره‌های چرخ تعادل یک نقطه همسایگی از میان ۲۰ همسایگی، که دارای کمترین اختلاف زاویه‌ای بین جهت پره و جهت بردار تفاضل همسایگی و مرکز چرخ تعادل انتخاب می‌شود. ضریب همگنی H برای همسایگی‌های انتخاب شده براساس رابطه (۶) به‌دست می‌آید.

1- Mean Weighted Equally (MWE)
2- Mean Weighted by Angle (MWA)

در مورد جزئیات الگوریتم پیشنهادی در بخش‌های ۳ و ۴ به تفصیل توضیح داده شده است. با این وجود برای مشخص شدن صریح‌تر، مراحل کار در قالب یک روند نما در شکل ۷ نشان داده شده است.

شکل ۸ قسمتی از یک ابر نقاط را نشان می‌دهد که یک نقطه از آن (نقطه p) برای تعیین همسایگی همگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تعیین ۸ همسایگی همگن نخست نزدیک‌ترین ۲۰ همسایه به نقطه p مشخص شده و از بین این همسایه‌ها براساس روش ارائه شده در بخش همسایگی همگن، ۸ همسایه انتخاب می‌شوند. با داشتن مختصات ۲۰ نقطه صفحه مماس بر نقطه p با استفاده از روش هوپ و همکاران [۹] تعیین می‌شود. مختصات این ۲۰ نقطه که در صفحه مماس بر نقطه p تصویر شده‌اند، در جدول ۱ نشان داده شده است.



شکل ۷ روند نمای تعیین همسایگی همگن

$$n_{MWA} \left\| \sum_{i=1}^k \beta_i n_i \right\| \quad (8)$$

در رابطه بالا β_i همان‌گونه که در شکل ۶ نشان داده شده است زاویه بین دو لبه E_i و E_{i+1} از وجه i ام است. مقدار β_i از رابطه (۹) قابل محاسبه است.

$$\sin \beta_i = \frac{|E_i \times E_{i+1}|}{|E_i||E_{i+1}|} \quad (9)$$

روش میانگین وزنی زاویه‌ای، وزن‌های غیریکسانی که از روابط هندسی به‌دست می‌آیند را برای تعیین بردار نرمال پیشنهاد می‌کند. ماکس [۱۸] روشی مشابه روش میانگین وزنی زاویه‌ای برای تعیین وزن‌ها ارائه کرد. در روش ارائه شده توسط ماکس وزن‌ها با کمک طول لبه‌های جانبی و سینوس زاویه بین لبه‌ها مشخص می‌شوند، بنابراین این روش میانگین وزنی سینوس و طول لبه‌های دو طرف نامیده شده است. رابطه (۱۰) راستای بردار نرمال را با این روش مشخص می‌کند.

$$n_{MWSELR} \left\| \sum_{i=1}^k \frac{n_i \sin \beta_i}{|E_i||E_{i+1}|} \right\| \quad (10)$$

برخی پژوهش‌گران با برازش یک منحنی درجه ۲ بر همسایگی‌های یک نقطه اقدام به تخمین بردار نرمال با استفاده از روابط تحلیلی می‌کند [۱۱]. رابطه (۱۱) معرف سطح درجه ۲ است.

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D + E xy + F xz + G x + H yz + J y + K z = 0 \quad (11)$$

برای سطح برازش شده بردار نرمال در نقطه p ، با استفاده از رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید.

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)}{\left| \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \right|} \quad (12)$$

هوپ و همکاران [۹] روشی را برای محاسبه صفحه مماس و بردار نرمال سطح برای هر نقطه در ابر نقاط پیشنهاد می‌کنند. در این پژوهش، از روشی مشابه برای تخمین بردار نرمال استفاده می‌شود. برای یک نقطه دلخواه $P \in S \subset R^3$ ، بردار نرمال با مشخص کردن همسایگی همگن براساس رویه‌ای که در بخش پیشین یاد شد، تخمین زده می‌شود. همسایگی همگن با علامت $N_H(P)$ نشان داده می‌شود. برای محاسبه بردار نرمال، مرکز O_i مربوط به $N_H(P)$ ابتدا محاسبه می‌شود. بردار نرمال n با استفاده از تحلیل اجزای اصلی^۲ (PCA) تخمین زده می‌شود. برای اندازه‌گیری بردار نرمال، ماتریس مرتبط کوواریانس $N_H(P)$ براساس رابطه (۱۳) شکل می‌گیرد.

$$M_{cov} = \sum_{x_i \in N_H(P)} (X_i - O_i)(X_i - O_i)^T \quad (13)$$

اگر $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ مقادیر ویژه ماتریس M_{cov} باشند و بردارهای ویژه متناظر با هریک از مقادیر ویژه بردارهای $\xi_1^1, \xi_2^2, \xi_3^3$ باشند و همچنین $\lambda_1^1 < \lambda_2^2 < \lambda_3^3$ باشد، ξ_1^1 بردار نرمال نقطه p است. در پژوهش حاضر برای محاسبه بردار نرمال از روش هوپ و همکاران استفاده شد.

۵- پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی و نتایج

برای محاسبه بردار نرمال روش‌های مختلفی وجود دارد. انتخاب همسایگی‌های یک نقطه بر نتایج محاسبه بردار نرمال تأثیر می‌گذارد. در این پژوهش روشی جدید برای انتخاب همسایگی‌ها به نام همسایگی همگن ارائه شد، در ابتدا برای تبیین موضوع مثالی از همسایگی همگن مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس در ادامه به تأثیرات این روش انتخاب همسایگی، بر محاسبه بردار نرمال پرداخته می‌شود.

1- Mean Weighted by Sine and Edge Length Reciprocal (MWSELR)
2- Principal component analysis

همان گونه که در بخش ۳ توضیح داده شد ابتدا نقطه مرکزی چرخ تعادل ۵ بر نقطه مورد بررسی p قرار می گیرد و جهت اولین پره چرخ تعادل با بردار تفاضل اولین همسایگی و مرکز چرخ تعادل $p_1 - o$ هم جهت می شود. برای هر کدام از پره های چرخ تعادل یک نقطه همسایگی از میان ۲۰ همسایگی، که دارای کمترین اختلاف زاویه ای بین جهت پره و جهت بردار تفاضل همسایگی و مرکز چرخ تعادل انتخاب می شود. این عمل ۲۰ بار برای ۲۰ همسایگی اطراف نقطه p تکرار می شود. در هر مرحله با انتخاب یک همسایگی جهت پره اول چرخ تعادل از آن نقطه همسایگی عبور می کند. مقدار ضریب همگنی برای هر تکرار مشخص می شود. در نهایت براساس کمترین مقدار ضریب همگنی، همسایگی همگن تعیین می شود.

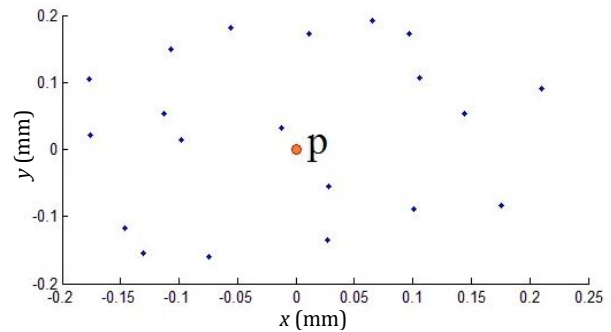
شکل ۹ همسایگی های انتخاب شده به ازاء یک دور چرخش چرخ تعادل حول نقطه o را نشان می دهد. شکل ۹ بیان کننده این موضوع است که در این روش به ازاء هر همسایگی از نزدیک ترین ۲۰ همسایگی نخستین، وضعیتی از همسایگی ها با توزیع یکنواخت قابل انتخاب است. بنابراین پس از چرخش یک دور چرخ تعادل ۲۰ ترکیب از همسایگی ها با توزیع تقریباً یکنواخت وجود دارد که براساس معیار ضریب همگنی همسایگی همگن از میان آن ها انتخاب می شود. مقدار ضریب همگنی برای ۲۰ همسایگی نقطه p در جدول ۲ آورده شده است. شکل ۱۰ مختصات همسایگی همگن نقطه p را مشخص می کند.

شکل ۱۱ بردارهای نرمال ابر نقاط مربوط به سطح یک دندان را که با استفاده از همسایگی همگن محاسبه شده اند نشان می دهد. ابر نقاط گرفته شده از سطوح فرم آزاد و یا قطعات پیچیده مانند شکل ۱۱ برای ارزیابی صحت محاسبه بردار نرمال چندان مناسب نیست. میزان خطای بردار نرمال ابر نقاط برگرفته از این گونه سطوح به دلیل این که فاقد روابط تحلیلی هستند قابل اندازه گیری نیست، بنابراین در این پژوهش ابر نقاط برگرفته از سطح یک کره برای ارزیابی تأثیر همسایگی همگن بر محاسبه بردار نرمال مورد استفاده قرار گرفت.

شکل ۱۲ ابر نقاط قسمتی از یک کره را که از ۳۰۰۰ نقطه تشکیل شده به همراه بردارهای نرمال محاسبه آن را نشان می دهد. این نقاط به شکل تصادفی با توزیع یکنواخت، از قسمتی از یک کره با شعاع ۵ و مرکز (۰، ۰، ۰) انتخاب شده اند. همسایگی همگن برای تمامی نقاط این ابر نقاط به دست آمده و بردار نرمال هر یک از نقاط با استفاده از تحلیل اجزای اصلی (PCA) تخمین زده می شود.

بردارهای نرمال ابر نقاط با استفاده از دو روش تعیین همسایگی، همسایگی همگن و نزدیک ترین k همسایگی تعیین شدند. میزان خطای محاسبه بردار نرمال در ابر نقاط مربوط به کره به آسانی قابل محاسبه است. بردار نرمال سطح یک نقطه از کره برداری است که از آن نقطه و مرکز کره عبور می کند. بنابراین با ضرب نقطه ای بردار نرمال محاسبه شده در برداری که نقطه مورد بررسی و مرکز کره تشکیل می دهند میزان اختلاف زاویه ای بردارها قابل محاسبه است که این میزان اختلاف زاویه ای به عنوان خطای تخمین بردار نرمال در نظر گرفته می شود. مقدار خطای محاسبه بردار نرمال ابر نقاط سطح کره، برای هر یک از روش های نزدیک ترین k همسایگی و همسایگی همگن در جدول ۳ گزارش شده است.

موضوع دیگری که در این روش تعیین همسایگی قابل بحث است حجم کم محاسبات برای دستیابی به یک ترکیب از همسایگی های قابل قبول، برای محاسبه بردار نرمال است. به عنوان نمونه برای انتخاب ۸ همسایگی از میان ۲۰ همسایگی اگر قرار باشد تمامی حالات مورد بررسی قرار گیرد، ۱۲۵۹۷۰ ترکیب مختلف وجود دارد ولی با این روش ۲۰ ترکیب از بین تمامی ترکیب ها مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۸ یک نقطه از ابر نقاط و نزدیک ترین ۲۰ همسایگی آن

جدول ۱ مختصات نزدیک ترین ۲۰ همسایگی نقطه p نشان داده شده در شکل ۷

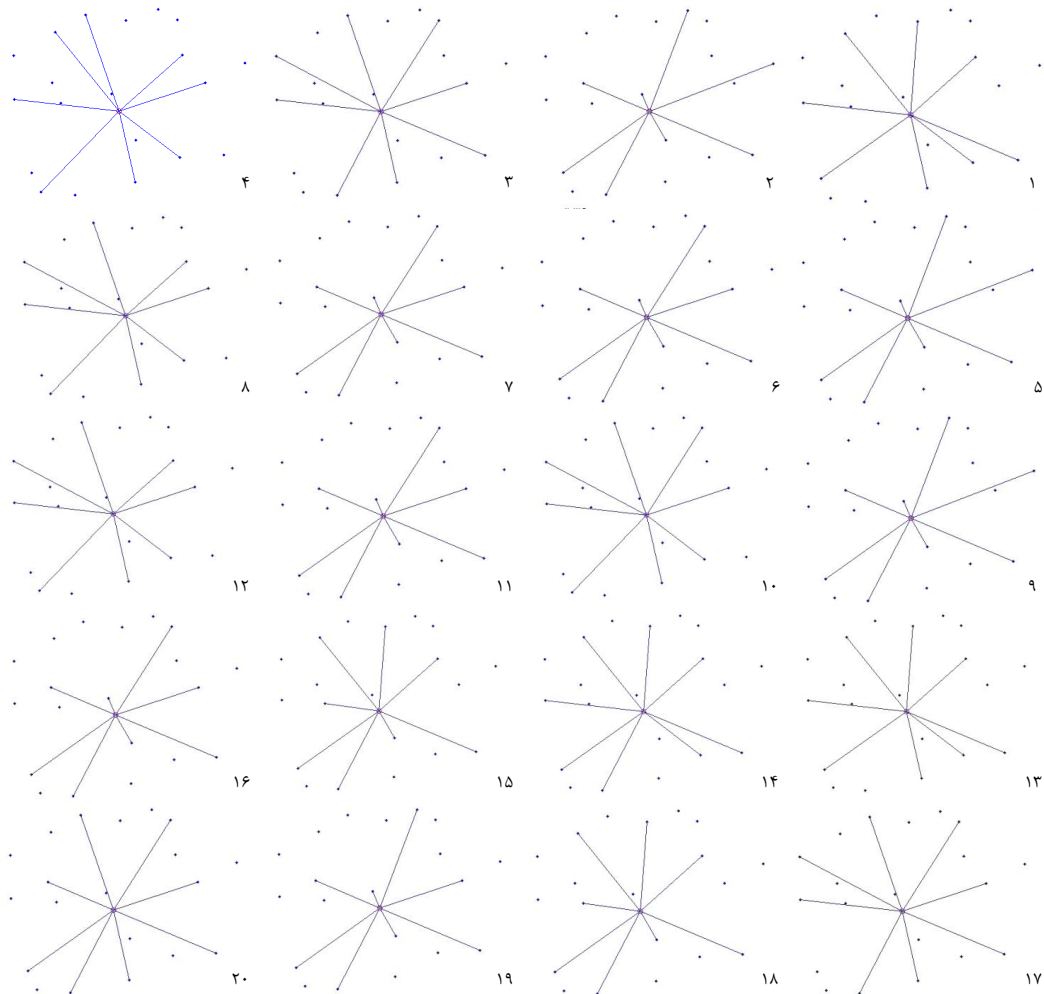
همسایگی	x (mm)	y (mm)
۱	۲۴۲/۰۰۷۱۹۵۹	۸۴/۴۸۷۳۹۳۵
۲	۲۴۲/۰۴۷۳۹۹۳	۸۴/۴۰۰۱۹۹۴
۳	۲۴۱/۹۲۱۹۹۱۱	۸۴/۴۶۹۸۱۰۱
۴	۲۴۱/۹۰۶۷۹۱۹	۸۴/۵۰۹۰۰۰۲
۵	۲۴۲/۱۲۰۸۰۲۴	۸۴/۳۶۸۱۳۳
۶	۲۴۲/۰۴۶۵۹۴۶	۸۴/۳۲۰۷۹۸۵
۷	۲۴۲/۱۲۵۰۰۴۵	۸۴/۵۶۱۶۰۸۷
۸	۲۴۲/۱۶۳۵۹۸۵	۸۴/۵۰۸۷۹۹۰
۹	۲۴۲/۰۳۰۵۹۰۸	۸۴/۶۲۷۴۰۴۸
۱۰	۲۴۱/۹۴۵۲۰۷۱	۸۴/۲۹۶۴۰۵۳
۱۱	۲۴۱/۸۴۳۵۹۶۱	۸۴/۴۷۶۹۹۹۹
۱۲	۲۴۱/۹۱۲۷۹۷۱	۸۴/۶۰۴۳۹۷۴
۱۳	۲۴۱/۸۷۳۲۰۴۷	۸۴/۳۳۷۸۰۰۷
۱۴	۲۴۱/۹۶۳۴۰۱۴	۸۴/۶۳۷۶۰۴۷
۱۵	۲۴۲/۱۹۴۷۸۶۷	۸۴/۳۷۱۵۹۶۶
۱۶	۲۴۲/۱۱۶۸۰۸۹	۸۴/۶۲۷۷۹۹۷
۱۷	۲۴۱/۸۸۸۷۹۱۳	۸۴/۳۰۱۳۹۷۲
۱۸	۲۴۲/۰۸۵۰۰۹۸	۸۴/۶۴۸۱۹۹۴
۱۹	۲۴۱/۸۴۲۶۱۲۶	۸۴/۵۶۰۵۹۵۵
۲۰	۲۴۲/۲۲۹۴۰۲۱	۸۴/۵۴۶۴۰۲۱

جدول ۲ ضریب همگنی برای نزدیک ترین ۲۰ همسایگی نقطه p

همسایگی	ضریب همگنی	همسایگی	ضریب همگنی
۱	۹۳/۰۷	۱۱	۴۸/۰۴
۲	۶۱/۱۲	۱۲	۹۶/۴۸
۳	۷۵/۲۱	۱۳	۹۳/۰۷
۴	۱۱۰/۱۸	۱۴	۹۷/۶۱
۵	۵۴/۲۴	۱۵	۸۶/۱۱
۶	۴۸/۰۴	۱۶	۴۸/۶۸
۷	۴۹/۹۵	۱۷	۷۸/۷۶
۸	۹۹/۰۴	۱۸	۸۶/۱۱
۹	۶۳/۰۶	۱۹	۴۹/۶۹
۱۰	۹۰/۲۶	۲۰	۶۷/۷۴

جدول ۳ مقایسه تأثیر روش های نزدیک ترین k همسایگی و همسایگی همگن بر محاسبه بردار نرمال

روش تعیین همسایگی	میانگین مقدار خطای تخمین بردار نرمال
نزدیک ترین k همسایگی	0.75°
همسایگی همگن	0.39°



شکل ۹ همسایگی‌های همگن انتخاب شده در یک دور چرخش چرخ تعادل

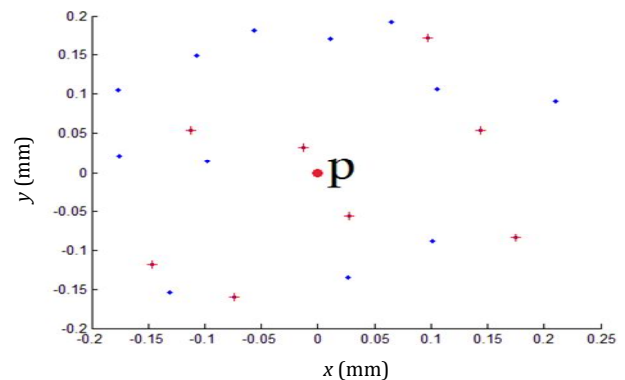
با در نظر گرفتن این نکته که ابر نقاط می‌تواند شامل میلیون‌ها نقطه باشد می‌توان نتیجه گرفت که همسایگی همگن یک روش کاربردی در تعیین همسایگی نقاط در ابر نقاط است.

برای آزمون کاربردی بودن روش پیشنهادی تعیین همسایگی، کاربرد همسایگی همگن در هم‌مرجع‌سازی^۱ ابرهای نقاط مورد بررسی قرار گرفت. در این آزمون از روش هم‌مرجع‌سازی انحنای چتری استفاده شد. انحنای چتری برای ابر نقاط با استفاده از رابطه (۱۴) به‌دست می‌آید. مقدار انحنای چتری k_{um} براساس جمع تصاویر بردارهای واحد تفاضل همسایگی‌ها و نقطه مورد بررسی، بر بردار نرمال سطح به‌دست می‌آید [۱۹].

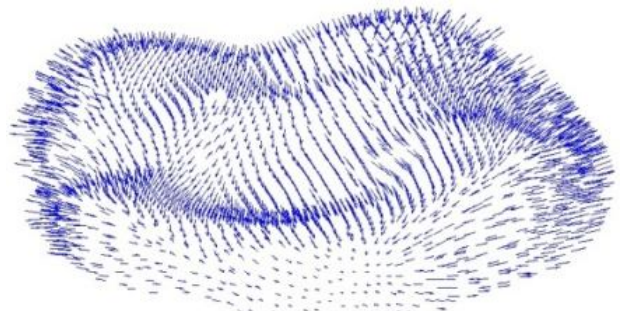
$$k_{um} = \sum_{i=1}^8 \text{ABS} \left(\frac{N_i - p}{|N_i - p|} \cdot n \right) \quad (14)$$

که در رابطه بالا n بردار نرمال سطح p مختصات نقطه مورد بررسی و N_i مختصات همسایگی i ام است.

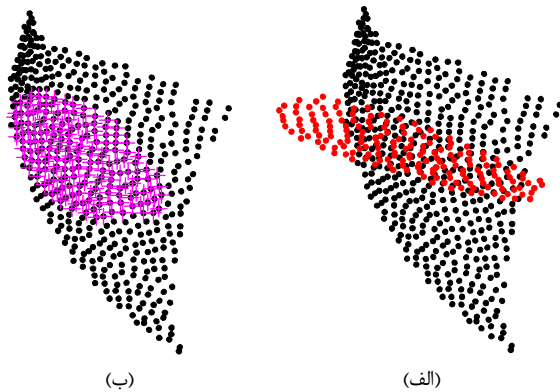
همان‌گونه که رابطه (۱۴) نشان می‌دهد انتخاب همسایگی‌ها و بردار نرمال دو عامل تعیین‌کننده مقدار انحنای چتری است. از طرف دیگر هر دو عامل به روش انتخاب همسایگی‌ها وابسته است، بنابراین این روش برای آزمون کاربردی بودن الگوریتم تعیین همسایگی پیشنهادی، مناسب است. بدین منظور نسبت به هم‌مرجع‌سازی ابرهای نقاط نشان داده در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ اقدام شد.



شکل ۱۰ همسایگی همگن نقطه p



شکل ۱۱ بردارهای نرمال یک ابر نقاط



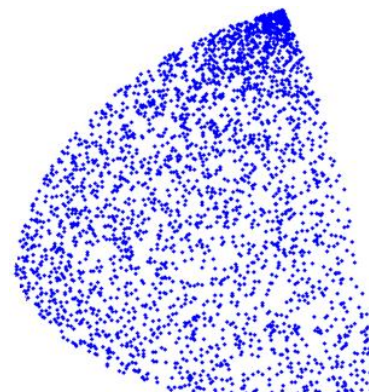
شکل ۱۴ الف- دو ابر نقاط پیش از هم‌مرجع سازی ب- ابرهای نقاط پس از هم‌مرجع سازی

هم‌مرجع‌سازی ابرهای نقاط نشان داده شده در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ با استفاده از الگوریتم‌های تعیین همسایگی نزدیک‌ترین همسایگی و همسایگی همگن برای هر یک از ابرهای نقاط انجام پذیرفته و نتایج حاصله در جدول ۴ نشان داده شده است.

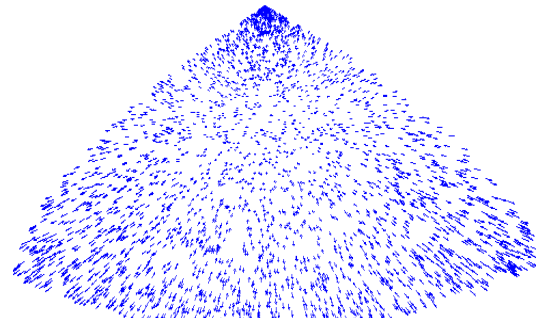
نتایج حاصله نشان از کاهش خطا در صورت استفاده از همسایگی همگن دارد. البته در مواردی که توزیع نقاط در ابر نقاط یکنواخت باشد مانند شکل ۱۴ بهبود مقدار خطا کاهش می‌یابد، که در حقیقت نشان‌دهنده توزیع مناسب همسایگی‌ها در نقاط ابر نقاط شکل ۱۴ است. در مواردی که تغییرات انحنای شدیدتر باشد به دلیل عدم توزیع یکنواخت نقاط در هر اسکن در صفحات با زوایای متفاوت نیاز به استفاده از همسایگی همگن بیشتر احساس می‌شود. زمانی که دوربین به حالت عمود بر یک سطح قرار گیرد تعداد نقاط بیشتری را نسبت به زمانی که عمود بر سطح قرار نگیرد برداشت می‌کند، بنابراین در قسمت‌هایی که سطوح جسم تغییر جهت می‌دهند یا به عبارتی انحنای شدیدتری دارند استفاده از همسایگی همگن به دلیل یکنواخت کردن توزیع همسایگی‌ها و به تبع آن محاسبه دقیق‌تر بردار نرمال، معنادار می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش جدیدی برای تعیین همسایگی در ابر نقاط با نام همسایگی همگن معرفی شد. هدف از ارائه این روش تعیین همسایگی نقاط در ابر نقاط، با در نظر گرفتن پارامترهای نزدیک بودن نقاط همسایگی و توزیع یکنواخت و متوازن نقاط در تمامی جهات اطراف نقطه مورد بررسی است. با توجه به این‌که ابر نقاط معمولاً از حجم زیادی از مختصات نقاط تشکیل می‌شود، تمام تحلیل‌هایی که بر آن انجام می‌شود از جهت کاربردی بودن نباید از محاسبات بالایی برخوردار باشند. روش پیشنهادی با حجم محاسبات کم قادر به تعیین همسایگی مناسب با نتایج قابل قبول در تخمین بردار نرمال سطح است. نتایج حاصل از محاسبه بردار نرمال با استفاده از تحلیل اجزای اصلی (PCA) نشان داد مقدار خطا در محاسبه بردار نرمال براساس روش پیشنهادی در مقایسه با محاسبه بردار نرمال با استفاده از نزدیک‌ترین k همسایگی، تقریباً به نصف کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که همسایگی همگن نسبت به نزدیک‌ترین k همسایگی از دقت بالاتری در تخمین بردار نرمال برخوردار است، بنابراین برای کاربردهای نمایش ابر نقاط مانند رندر کردن که چندان دقت از درجه اهمیت بالایی برخوردار نیست می‌توان از روش‌های ساده‌تر تعیین همسایگی مانند نزدیک‌ترین k همسایگی استفاده کرد و در کاربردهای با دقت بالاتر مانند هم‌مرجع‌سازی و ویرایش ابر نقاط استفاده از روش همسایگی همگن توصیه می‌شود.

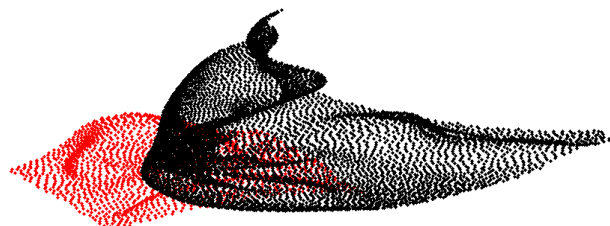


(الف)



(ب)

شکل ۱۲ الف- ابر نقاط قسمتی از یک کره ب- بردارهای نرمال ابر نقاط کره



(الف)



(ب)

شکل ۱۳ الف- دو ابر نقاط پیش از هم‌مرجع سازی ب- ابرهای نقاط پس از هم‌مرجع سازی

جدول ۴ مقایسه نتایج حاصل از هم‌مرجع‌سازی انحنای چتری در دو روش متفاوت

تعیین همسایگی		
روش تعیین همسایگی	ابر نقاط	خطای هم‌مرجع‌سازی (mm)
نزدیک‌ترین k همسایگی	شکل ۱۳	۰/۶۲۴۹
	شکل ۱۴	۰/۱۸۱۳
همسایگی همگن	شکل ۱۳	۰/۳۷۴۱
	شکل ۱۴	۰/۱۶۷۵

۷- مراجع

- [10] M. Yang, E. Lee, Segmentation of Measured Point Data Using a Parametric Quadric Surface Approximation, *Computer-Aided Design*, Vol. 31, No. 7, pp. 449-457, 1999.
- [11] D. O. Yang, H. Feng, On the Normal Vector Estimation for Point Cloud Data from Smooth Surface, *Computer-Aided Design*, Vol. 37, No. 10, pp. 1071-1079, 2005.
- [12] J. C. Park, H. Shin, B. K. Choi, Elliptic Gabriel Graph for Finding Neighbors in a Point Set and Its Application to Normal Vector Estimation, *Computer-Aided Design*, Vol. 38, No. 6, pp. 619-626, 2006.
- [13] H. Woo, E. Kang, S. Wang, K.H. Lee, A New Segmentation Method for Point Cloud Data, *International Journal Machine Tools Manufacturing*, Vol. 42, No. 2, pp. 167-178, 2002.
- [14] J.D. Boissonnat, Geometric Structures for Three-Dimensional Shape Representation, *ACM Trans Graph*, Vol. 3, No. 4, pp. 266-286, 1984.
- [15] D. Kirkpatrick, J. Radke, A Framework for Computational Morphology, *Computational geometry*, Vol.2, No. 1, pp. 217-248, 1985.
- [16] H. Gouraud, Continuous Shading of Curved Surfaces, *IEEE Trans. on Computers*, Vol. 20, No. 6, pp. 623-629, 1971.
- [17] G. Thurmer, C. Wuthrich, Computing Vertex Normals from Polygonal Facets, *Journal of Graphics Tools*, Vol. 3, No. 1, pp. 43-46, 1998.
- [18] N. Max, Weights for Computing Vertex Normals from Facet Normals, *Journal of Graphics Tools*, Vol. 4, No. 2, pp. 1-6, 1999.
- [19] A. Foorginejad, K. Khalili, *Umbrella curvature: a new curvature estimation method for point clouds*, Procedia Technology, Mures, Romania pp. 345-350, 2013.
- [1] P. Azariadis, N. Sapidis, Product Design Using Point-Cloud Surfaces: A Recursive Subdivision Technique for Point Parameterization, *Computers in Industry*, Vol. 58, No. 8, pp. 832-843, 2007.
- [2] L. Kobbelt, M. Botsch, A Survey of Point-based Techniques in Computer Graphics, *Computers & Graphics*, Vol. 28, No. 6, pp. 801-814, 2004.
- [3] C. Grimm, W. Smart, Shape Classification and Normal Estimation for Nonuniformly Sampled, Noisy Point Data, *Computers & Graphics*, Vol. 35, No. 4, pp. 904-915, 2011.
- [4] X. Ma, R. Cripps, Shape Preserving Data Reduction for 3D Surface Points, *Computer-Aided Design*, Vol. 43, No. 8, pp. 902-909, 2011.
- [5] S. Rusinkiewicz, M. Levoy, QSPat: a Multiresolution Point Rendering System for Large Meshes, Proceedings of SIGGRAPH, New orleans, USA, 2000.
- [6] M. Zwicker, M. Pauly, O. Knoll, M. Gross, *Pointshop 3D: an Interactive System for Point-Based Surface Editing*, Proceedings of SIGGRAPH, San antonio, USA, 2002.
- [7] M. Levoy, K. Pulli, B. Curless, S. Rusinkiewicz, D. Koller, L. Pereira, M. Ginzton, S. Anderson, J. Davis, J. Ginsberg, J. Shade, D. Fulk, *The Digital Michelangelo Project: 3D Scanning of Large Statues*, Proceedings of the SIGGRAPH Conference, New Orleans, USA, pp. 131-144, 2000.
- [8] J. Sankaranarayanan, H. Samet, A. Varshney, A Fast all Nearest Neighbor Algorithm for Applications Involving Large Point-Clouds, *Computers & Graphics*, Vol. 31, No. 2, pp. 157-174, 2007.
- [9] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, W. Stuetzle, *Surface Reconstruction from Unorganized Points*, Proceedings of the 19th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, Chicago, USA, pp. 71-80, 1992.