



تحلیل الاستیک تغییر شکل‌های بزرگ صفحات گرد توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی به کمک روش رهایی پویا

محمد اسماعیل گل‌مکانی^{۱*}، مسعود محرابیان^۲

۱- استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

چکیده- در این تحقیق تحلیل غیر خطی خمش صفحات گرد توخالی کامپوزیتی چند لایه، با تقویت کننده حلقوی بررسی شده است. به این منظور از تئوری مجزا سازی صفحات تقویت شده برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ تحت بارگذاری گسترده استفاده شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و معادلات تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن، استخراج شده‌اند. نتایج عددی با استفاده از روش رهایی پویا در ترکیب با تکنیک تفاضل محدود مرکزی، بدست آمده‌اند. برای نیل به این هدف از برنامه کامپیوتری فرتن استفاده شده است. به منظور اعتبارسنجی دقت روش حاضر، نتایج با موارد موجود در دیگر مقالات و همچنین نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. کد کامپیوتری نوشته شده قابلیت حل چیدمان‌های متقارن، پاد متقارن و حالت کلی برای قرارگیری لایه‌ها را دارد. تأثیرات ضخامت صفحه، نسبت‌های مختلف شعاع خارجی به داخلی، عمق تقویت کننده، شرایط مرزی و چیدمان لایه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژگان: صفحات حلقوی چند لایه، تقویت کننده حلقوی، خمش غیر خطی، روش رهایی پویا، تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول.

Elastic large deflection analysis of ring-stiffened annular laminated plates by using of dynamic relaxation method

M.E. Golmakani^{1*}, M. Mehrabian²

1- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad Branch, Mashhad, Iran

2- MSc student, Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad Branch, Mashhad, Iran

* P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran. m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

Abstract- In this study, nonlinear bending analysis of ring-stiffened annular laminated composite plates is studied. A discretely stiffened plate theory for elastic large deflection analysis of uniformly distributed loaded is introduced. The governing equations are derived based on a first-order shear deformation plate theory (FSDT) and large deflection von Karman equations. The numerical results are obtained using the dynamic relaxation (DR) method combined with the central finite difference discretization technique. For this purpose, a FORTRAN computer program is developed to generate the numerical results. In order to verify the accuracy of the present method the results are compared with those available in the literatures and ABAQUS finite element package as well. The computer code can handle symmetric, unsymmetrical and general theta-ply schemes. The effects of the plate thicknesses, different ratio of outer to inner radius, depth of stiffener, boundary condition and laminates lay-up are studied in detail.

Keywords: Annular Laminated Plates, Ring Stiffener, Non-Linear Bending, Dynamic Relaxation Method, First-Order Shear Deformation Theory.

۱- مقدمه

مواد مرکب به سبب دارا بودن خواص مکانیکی مناسب از قبیل وزن سبک، مقاومت بالا، رسانایی پایین حرارتی و الکتریکی و استحکام در برابر خوردگی در مقایسه با مواد ساده، دارای کاربرد وسیعی در شاخه‌های مختلف صنایع و مهندسی از قبیل مکانیک، هوافضا، نیروگاه‌های هسته‌ای و سازه‌های دریایی می‌باشند. از طرفی سازه‌ها در معرض خطر خمش و کمانش قرار دارند و توجه به رفتار صفحات به عنوان یکی از پر کاربردترین اجزای تشکیل‌دهنده سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده‌اند. بطوریکه در سال‌های اخیر محققان داخلی ترغیب شده‌اند تا بررسی‌هایی را در ارتباط با رفتار صفحات کامپوزیتی انجام دهند [۱-۴].

یکی از راه‌های جلوگیری از این خطرات احتمالی، استفاده از تقویت کننده‌ها^۱ است. اکثر تقویت کننده‌ها به شکل تیر هستند که به عنوان بخشی مجزا به هندسه صفحه اضافه می‌شوند. با انجام این عمل، ظرفیت تحمل بار صفحه افزایش یافته و در مقابل هرگونه تغییر شکل، مقاومت خوبی از خود نشان می‌دهد. به خاطر این ویژگی، صفحات تقویت شده در صنایع هوا فضا، ساخت پل‌ها، ساختمان‌ها، تانکرها و همچنین اخیراً در صنایع پتروشیمی، کاربرد فراوانی دارند.

دو دیدگاه برای صفحات تقویت شده وجود دارد، اولین دیدگاه وقتی مطرح می‌شود که تعداد تقویت کننده‌ها زیاد باشند، در این حالت سازه بطور تقریبی به شکل یک صفحه اورتوتروپیک در نظر گرفته می‌شود که دارای ضخامت یکسانی است و معادلات حاکم، این صفحه را بصورت یک صفحه بدون تقویت کننده تحلیل می‌کنند. در دیدگاه دوم تعداد تقویت کننده‌ها کم می‌باشد، صفحه و تقویت کننده به عنوان دو بخش جدا از هم عمل می‌کنند، عکس‌العمل‌های نیرویی و پیوستگی حرکتی در مرز بین این دو، در نظر گرفته می‌شوند. عکس‌العمل تقویت کننده را به عنوان نیروی حجمی وارد بر صفحه، در معادلات تعادل وارد کرده و عکس‌العمل صفحه بر روی تقویت کننده بصورت نیروی گسترش یافته در راستای طول آن، در نظر گرفته می‌شود. در سال ۱۹۹۷ این نظریه به عنوان تئوری صفحات تقویت شده مجزا^۲، برای تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک و الاستو-پلاستیک صفحات مستطیلی استفاده شد [۵].

صفحات دایروی توپر و تو خالی، اغلب به عنوان درپوش و یا در انتهای ظروف استوانه‌ای که تحت بارگذاری فشاری داخلی یا خارجی قرار دارند، استفاده می‌شوند. تعداد اندکی پژوهش در زمینه صفحات گرد توپر و تو خالی تقویت شده صورت گرفته و اکثراً در زمینه صفحات مربعی و مستطیلی بوده است. در سال ۱۹۹۷ کلی و همکارش [۶] به تحلیل استاتیکی و دینامیکی یک صفحه مستطیلی چند لایه تقویت شده پرداختند. در این تحقیق اثرات عمق، تعداد و محل قرار گیری تقویت کننده مورد بررسی قرار گرفته است. کینگ و همکارانش [۷] ارتعاشات آزاد صفحه مستطیلی چند لایه تقویت شده را بر پایه تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول^۳ بررسی کرده‌اند. بر اساس تئوری‌های مرتبه بالای موضعی-سراسری^۴ و مدل اجزاء محدود^۵، لی و همکارش [۸] خمش صفحه مستطیلی چند لایه تقویت شده را مورد بررسی قرار دادند. بر اساس این طرح، تقویت کننده به عنوان جزئی از صفحه در نظر گرفته می‌شود. نتایج عددی نشان داده که استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای موضعی-سراسری در پیش‌بینی رفتار خمشی صفحه، نسبت به تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول، مناسب‌تر است.

با توجه به این که هندسه مورد استفاده در پژوهش حاضر، صفحه حلقوی و ساختار آن چند لایه می‌باشد، تحقیقات انجام شده مرتبط با صفحات حلقوی چند لایه نیز بررسی شده است. در سال ۱۹۹۵ جیانگ [۹] بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی به تحلیل کمانش صفحه حلقوی چند لایه پرداخت است. بر اساس تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول، دومیر [۱۰] پاسخ استاتیکی و گذرا این هندسه را بررسی کرد و معادلات حاکم با ترکیب روش‌های ارتاگنال^۶ و نیومارک^۷ حل شده‌اند. سپس تأثیر ضخامت صفحه، در تغییر شکل و تنش‌های ایجاد شده برای چیدمان‌های متقارن و پادمتقارن، بررسی شده است. بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی حل دقیقی برای صفحه حلقوی چند لایه، متشکل از لایه‌هایی با خواص همسانگرد^۸، توسط دینگ و همکارانش [۱۱] انجام شد و نتایج حاصل با موارد بدست آمده بر اساس تئوری کلاسیک صفحات^۹، تئوری

3. First Order Shear Deformation Theory

4. Higher-Order Global-Local Theories

5. Finite Element

6. Orthogonal Point Collocation Method

7. Newmark- β

8. Isotropic

9. Classic Plate Theory

1. Stiffener

2. Discretely Stiffened Plates Theory

روش رهایی پویا انجام گرفته است.

۲- استخراج روابط

در این بخش، معادلات حاکم بر تعادل برای صفحه گرد توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی، استخراج و مورد بحث قرار می‌گیرد. هندسه و دستگاه مختصات مورد استفاده برای چند لایه مورد نظر در شکل ۱ نشان داده شده است.

۲-۱- میدان تغییر مکان

برای صفحه حلقوی چند لایه و با توجه به تغییر فرم برشی مرتبه اول، میدان تغییر مکان برای هر نقطه درون صفحه بصورت رابطه (۱) بیان می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} U(r, z) &= u(r) + z\varphi_r(r) \\ W(r, z) &= w(r) \end{aligned} \quad (1)$$

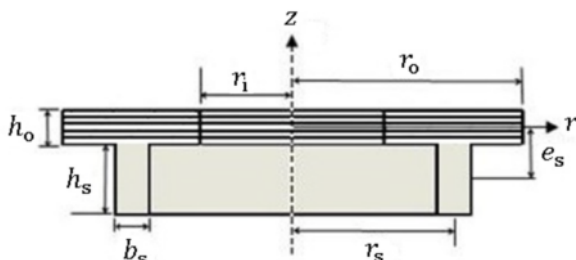
در روابط بالا u و w جابجایی در راستای r و z ، φ_r نیز جابجایی زاویه‌ای حول راستای r می‌باشند. معادلات کرنش جابجایی با در نظر گرفتن فرضیات تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن، بصورت رابطه (۲) بیان می‌شود [۱۰].

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_r^0 + z\kappa_r^0, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z\kappa_\theta^0 \\ \varepsilon_r^0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{rz}^0 = \frac{\partial w}{\partial r} + \varphi_r \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط بالا ε_{rz}^0 مربوط به کرنش برشی صفحه میانی می‌باشد. روابط مربوط به انحنای صفحه میانی بصورت رابطه (۳) بیان می‌شوند:

$$\kappa_r^0 = \frac{\partial \varphi_r}{\partial r}, \quad \kappa_\theta^0 = \frac{\varphi_r}{r} \quad (3)$$

در حالت تقارن محوری جسم نسبت به محور z متقارن بوده و لذا بارها و تغییر مکان‌های حاصل از بارها نیز نسبت به محور z متقارن خواهند بود.



شکل ۱ هندسه و دستگاه مختصات مورد استفاده برای مسأله

رئیسینر^۱ و مدل اجزاء محدود مقایسه شده است. در سال ۲۰۰۹ ویسوانتان و همکارانش [۱۲] پژوهشی در ارتباط با ارتعاشات آزاد صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان متعامد^۲ انجام دادند. تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی^۳ بر روی پارامتر فرکانس برای چیدمان‌های متقارن و پادمتقارن در این پژوهش بررسی شده است.

همان طور که گفته شد، استفاده از تقویت کننده‌ها به علت بالا بردن ظرفیت تحمل بار سازه، از اهمیت خاصی برخوردارند. با نگاهی گذرا به پژوهش‌های انجام شده به فقدان تحقیقات موجود در زمینه هندسه دایره‌ای توپر و توخالی با تقویت کننده حلقوی، پی برده می‌شود. در سال ۱۹۸۵ بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و تئوری صفحات تقویت شده مجزا، تروی و آوانسیان [۱۳] تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک صفحه دایره‌ای با تقویت کننده حلقوی را با روش رهایی پویا^۴ مورد بررسی قرار قرار دادند. جزئیات اندازه تقسیمات شعاعی برای همگرایی حل و همچنین تغییر شکل‌های صفحه با تقویت کننده و بدون آن، مورد مطالعه قرار گرفته است.

با بررسی انجام شده، می‌توان گفت که تاکنون تحقیقی در زمینه تحلیل استاتیکی غیر خطی صفحات گرد توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی بر پایه تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول انجام نشده است. از اهداف کلی این تحقیق، کاربرد روش رهایی پویا برای اولین بار در تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ صفحات گرد توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی و مشاهده رفتار و پاسخ‌های آن می‌باشد. در پژوهش حاضر فایبرها در راستای مختصات کارتزین قرار گرفته‌اند. در این تحقیق، ضمن در نظر گرفتن تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول، کد نوشته شده قابلیت حل چیدمان‌های متقارن، پاد متقارن و همچنین ترکیب لایه‌هایی با جهت‌گیری اختیاری برای فایبرها را دارا می‌باشد. تأثیرات نسبت ضخامت به شعاع، شرایط مرزی ساده^۵ و گیردار^۶، چیدمان لایه‌ها، عمق تقویت کننده و همچنین نسبت شعاع داخلی به خارجی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای بدست آوردن نتایج عددی، فرایند حل با

1. Reissner Plate Theory
2. Cross-Ply
3. Rotary Inertia
4. Dynamic Relaxation Method
5. Simply Support
6. Clamp

همچنین نیروهای برشی عرضی عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} Q_r \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s A_{44} & k_s A_{45} \\ k_s A_{45} & k_s A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

که در رابطه بالا k_s ضریب تصحیح برشی بوده و مقدار آن برابر 5/6 در نظر گرفته می‌شود. برای A_{ij} نیز بیان می‌شود:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 4, 5 \quad (9)$$

در روابط ذکر شده N_θ, N_r نیروهای غشایی در واحد طول، M_θ, M_r گشتاورهای خمشی در واحد طول و Q_r ، Q_θ نیروهای برشی عرضی در واحد طول می‌باشند. با انجام ضرب ماتریسی روابط (۶) و (۸) و جایگذاری (۲) و (۳) در روابط حاصل، پنج معادله بر حسب جابجایی‌ها، دوران‌ها و منته‌های تنش و گشتاور، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_r &= A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{u}{r} \right) \\ &\quad + B_{11} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + B_{12} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \\ N_\theta &= A_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + A_{22} \left(\frac{u}{r} \right) \\ &\quad + B_{12} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + B_{22} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \\ M_r &= B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + B_{12} \left(\frac{u}{r} \right) \\ &\quad + D_{11} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + D_{12} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \\ M_\theta &= B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) + B_{22} \left(\frac{u}{r} \right) \\ &\quad + D_{12} \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \right) + D_{22} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \\ Q_r &= k_s A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \varphi_r \right) \end{aligned} \quad (10)$$

۲-۲- معادلات حاکم بر تعادل

برای استخراج معادلات، صفحه تقویت شده به عنوان یک صفحه معمولی در معرض تعدادی بار حجمی، که عکس‌العمل تقویت کننده بر روی صفحه است، در نظر گرفته می‌شود. این عکس‌العمل‌ها در جهات مثبت در شکل ۲ نشان داده شده است.

در چنین مسائلی کرنش‌های برشی مستقل از θ هستند و در نتیجه مشتقات آنها نسبت به θ صفر می‌شوند ($\gamma_{r\theta}^0$ و $\kappa_{r\theta}^0$). لذا کرنش‌ها و انحنای در راستای $r\theta$ حذف می‌شوند. با استفاده از روابط (۴)، تنش‌ها بر حسب کرنش‌ها حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \overline{Q_{11}} \varepsilon_r + \overline{Q_{12}} \varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta &= \overline{Q_{12}} \varepsilon_r + \overline{Q_{22}} \varepsilon_\theta \\ \tau_{rz} &= G_{rz} \varepsilon_{rz}^0 \end{aligned} \quad (4)$$

منتجه‌های نیرو و گشتاور توسط معادلات (۵) به تنش‌های داخلی وابسته هستند:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha dz, \quad M_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha z dz \\ Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_\beta dz \end{aligned} \quad (5)$$

در روابط ذکر شده $\alpha = r, \theta$ و $\beta = rz$ می‌باشند. رابطه (۶) بیانگر شکل کلی معادلات تشکیل دهنده صفحات چند لایه در حالت کلی می‌باشد [۱۲]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_r^0 \\ \kappa_\theta^0 \\ \kappa_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_r^0 \\ \kappa_\theta^0 \\ \kappa_{r\theta}^0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

در روابط بالا A_{ij} سفتی‌های کششی، D_{ij} سفتی‌های خمشی و B_{ij} سفتی‌های اتصال خمش-کشش می‌باشند و به ترتیب با روابط (۷) بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} (z_k - z_{k-1}) \quad i, j = 1, 2, 6 \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}^k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad i, j = 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (7)$$

T_s که ناشی از محل اتصال تقویت کننده به صفحه می‌باشند، طبق روابط (۱۲) ارائه می‌شوند [۱۳].

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{N_s}{r_s} \\ F_z &= \frac{N_s}{r_s} \frac{\partial w}{\partial r} \\ T_s &= \frac{1}{r_s} (M_s + N_s e_s) \\ e_s &= \frac{1}{2} (h_s + h_0) \\ r_s &= \frac{1}{2} (r_i + r_o) \end{aligned} \quad (12)$$

در روابط بالا N_s نیروی محوری در واحد طول و M_s گشتاور داخلی خمشی در واحد طول تقویت کننده می‌باشند. e_s فاصله عمودی بین سطح خنثی صفحه و مرکز سطح تقویت کننده و r_s محل قرارگیری تقویت کننده است. روابط کرنش و انحناء تقویت کننده بر اساس تئوری تغییر شکل‌های بزرگ، بصورت رابطه (۱۳) بیان می‌شوند.

$$\varepsilon_{\theta s}^0 = \frac{1}{r} (u + e_s \varphi_r), \quad \kappa_{\theta s}^0 = \kappa_{\theta}^0 \quad (13)$$

در روابط بالا $\varepsilon_{\theta s}^0$ و $\kappa_{\theta s}^0$ به ترتیب کرنش محیطی و انحنای محیطی مرکز سطح مقطع تقویت کننده می‌باشند. برای تقویت کننده می‌توان نیروی محوری را به کرنش محیطی و لنگر خمشی آن را به انحنای محیطی با رابطه (۱۴) مربوط کرد.

$$\begin{aligned} N_s &= E_s h_s b_s \varepsilon_{\theta s}^0 \\ M_s &= \left(\frac{E_s h_s^3 b_s}{12} \right) \kappa_{\theta s}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

در روابط ذکر شده، h_s ، b_s و E_s به ترتیب، عرض، ارتفاع و مدول الاستیک تقویت کننده معرفی شده‌اند.

۲-۴- شرایط مرزی

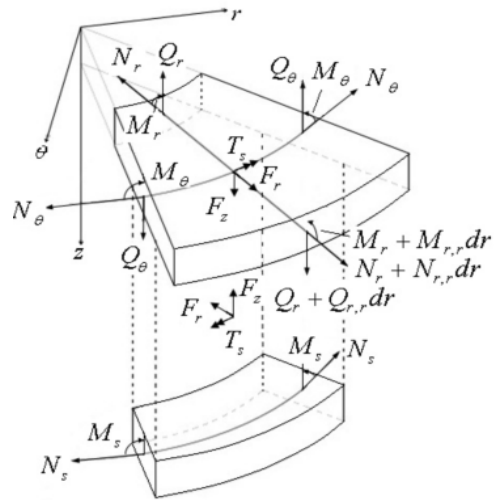
در پژوهش حاضر دو نوع شرط مرزی ساده و گیردار مورد بررسی قرار گرفته که روابط حاکم بر این شرایط در روابط (۱۵) آورده شده است.

شرط مرزی ساده:

$$u = w = M_r = 0 \quad (1-15)$$

شرط مرزی گیردار:

$$u = w = \varphi_r = 0 \quad (2-15)$$



شکل ۲ نیروهای داخلی و عکس‌العملی صفحه و تقویت کننده

معادلات را نیز می‌توان از طریق مینیمم‌سازی انرژی و یا تعادل المان بدست آورد. به علت تقارن موجود در هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی، حالت تقارن محوری بر یک مسأله حاکم خواهد بود. بنابراین صرف‌نظر از تقارن خواص مواد نسبت به محور z مؤلفه‌هایی از کرنش و تنش که دارای اندیس $r\theta$ می‌باشند، در معادلات حاکم وارد نمی‌شوند. در تحقیق حاضر سه معادله غیرخطی تعادل حاکم بر تغییر فرم‌های بزرگ با در نظر گرفتن تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول و از تعادل نیرویی المان در راستاهای شعاعی و عرضی و تعادل گشتاور حول محور r طبق رابطه (۱۱) تعیین شده است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \frac{F_r}{\Delta r} &= 0 \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r - \frac{T_s}{\Delta r} &= 0 \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + q + \frac{F_z}{\Delta r} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

بخش‌های زیرخطدار نیروی‌های حجمی می‌باشند که از عکس‌العمل تقویت کننده بر روی صفحه، ایجاد می‌شوند.

۲-۳- معادلات حاکم بر تقویت کننده

همان‌طور که برای صفحه بیان شد، بر تقویت کننده نیز یک سری روابط حکم فرماست. معادلات تعادل تقویت کننده بر حسب نیروهای واکنشی F_r ، F_z و کوپل پیچشی واکنشی

۳- روش حل معادلات غیر خطی

سیستم معادلات تعادل که بیانگر پاسخ تغییر شکل‌های بزرگ غیرخطی صفحه دایره‌ای توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی می‌باشد، بسیار پیچیده و دشوار برای حل به شکل فشرده^۱ است. بنابراین استفاده از روش‌های عددی توصیه می‌شود. روش‌های عددی مختلفی وجود دارد که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در تحقیق حاضر، روش عددی رهایی پویا در تلفیق با تفاضل محدود^۲ برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی صفحه استفاده شده است.

روش رهایی پویا یک پروسه تکراری است که هدف آن بطور کلی، انتقال یک سیستم استاتیکی به فضای دینامیکی برای بدست آوردن حالت پایدار استاتیکی می‌باشد. این روش بطور خاص، برای تحلیل مسائل با رفتارهای غیرخطی مناسب است. علاوه بر این به علت فرمول‌سازی صریح^۳ فضای کمی‌را در حافظه کامپیوتر اشغال کرده و بسیار مناسب برای کدنویسی است. به خاطر این مزایا، بسیاری از محققان از روش رهایی پویا برای حل معادلات خطی و غیرخطی استفاده کرده‌اند [۱۳-۱۸].

۳-۱- روش رهایی پویا

استفاده از روش رهایی پویا به اوایل قرن بیستم باز می‌گردد. در روش رهایی پویا، یک سیستم استاتیکی با افزودن نیروهای فرضی اینرسی^۴ و دمپینگ^۵ به یک فضای ساختگی دینامیکی انتقال می‌یابد [۱۵]:

$$[M]\{\ddot{x}\}^n + [C]\{\dot{x}\}^n + [K]\{x\}^n = \{P(t^n)\} \quad (16)$$

در این رابطه، $[M]$ ، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس‌های جرمی، دمپینگ و سفتی می‌باشند. همچنین $\{x\}^n$ بردار جابجایی و $\{\dot{x}\}^n$ و $\{\ddot{x}\}^n$ به ترتیب بیانگر سرعت و شتاب می‌باشند. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای شتاب و سرعت به ترتیب بصورت روابط (۱۷) و (۱۸) حاصل می‌شوند:

$$\{\ddot{x}\}^n = \frac{\{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}} + \{\dot{x}\}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\{\dot{x}\}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\{x\}^n + \{x\}^{n-1}}{\Delta t} \quad (18)$$

در این معادله، Δt گام زمانی ساختگی است. بر طبق مقدار میانگین، سرعت به شکل رابطه (۱۹) بیان می‌شود:

$$\{\dot{x}\}^n = \frac{\{\dot{x}\}^{n-\frac{1}{2}} + \{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (19)$$

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۹) در رابطه (۱۶) و ساده سازی آن، سرعت در گام $(n+1/2)$ حاصل شده و همچنین جابجایی در گام $(n+1)$ بدست خواهد آمد که معادلات آن در روابط (۲۰) و (۲۱) مشاهده می‌شود.

$$\{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{([M]/\Delta t - [C]/2)\{\dot{x}\}^{n-\frac{1}{2}} + ([M]/\Delta t + [C]/2)\{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}}}{([M]/\Delta t + [C]/2)} \quad (20)$$

$$\{x\}^{n+\frac{1}{2}} = \{x\}^n + \Delta t \{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (21)$$

به منظور داشتن معادلات تکرار صریح، ماتریس جرمی ساختگی باید قطری در نظر گرفته شود. همچنین، ماتریس دمپینگ با رابطه (۲۲) به ماتریس جرمی وابسته باشد:

$$[C] = c[M] \quad (22)$$

در رابطه بالا c ضریب دمپینگ می‌باشد. با جایگذاری (۲۲) در (۲۰) رابطه (۲۳) حاصل می‌شود.

$$\{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2 - \Delta tc)}{(2 + \Delta tc)} \{\dot{x}\}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\Delta t}{(2 + \Delta tc)} [M]^{-1} \{R\} \quad (23)$$

$$\{x\}^{n+1} = \{x\}^n + \Delta t \{\dot{x}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (24)$$

در اینجا $\{R\}^n$ بردار نیروهای باقی‌مانده^۶ بوده که به صورت رابطه (۲۵) تعریف شده است.

$$\{R\}^n = \{P\}^n - [K]\{x\}^n \quad (25)$$

حل مسائل، با بکار بردن روابط (۲۳) و (۲۴) و استفاده از رابطه مناسبی برای محاسبه c ، زمان نمود Δt و ماتریس $[M]$ قابل انجام است. پیشنهاد می‌شود برای شروع به حل مقادیر صفر را به بردارهای $\{x\}^0$ و $\{\dot{x}\}^{-\frac{1}{2}}$ اختصاص داده شود. از این طریق، سرعت در وسط گام، با استفاده از رابطه (۲۳) بدست آمده و سپس بردار جابجایی با استفاده از رابطه (۲۴) حاصل می‌شود. این پروسه تا وقتی که همگرایی حل به حالت پایدار برسد، ادامه خواهد داشت. به طوری که در هر گام

باید آنها را به فرمت مسائلی با مقدار اولیه معین درآورد. برای نیل به این هدف باید نیروهای فرضی اینرسی و دمپینگ را بصورت رابطه (۲۹) به سمت راست معادلات تعادل اضافه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \frac{F_r}{\Delta r} &= m_u \frac{d^2 u}{dt^2} + c_u \frac{du}{dt} \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r - \frac{T_s}{\Delta r} &= m_{\varphi_r} \frac{d^2 \varphi_r}{dt^2} + c_{\varphi_r} \frac{d\varphi_r}{dt} \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + q + \frac{F_z}{\Delta r} \\ &= m_w \frac{d^2 w}{dt^2} + c_w \frac{dw}{dt} \end{aligned} \quad (29)$$

همان طور که در بخش روش رهایی پویا توضیح داده شد، حل یک مسئله با روابط (۲۳) و (۲۴) قابل انجام است. در رابطه (۲۳) مقدار $\{R\}^n$ که به عنوان بردار نیروهای باقی‌مانده معرفی شد، همان مقادیر سمت چپ روابط (۲۹) می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر در سمت راست روابط (۲۹) به جای مشتقات اول و دوم زمانی روابط (۱۹) و (۱۷) را جایگذاری کرده و عبارت حاصل برای بدست آوردن $\{\ddot{x}\}^{n+1/2}$ ، که در آن $x = u, w, \varphi_r$ می‌باشد، ساده شود، روابط (۳۰) حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i^{n+1/2} &= \frac{2\Delta t^n}{2 + \Delta t^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \frac{F_r}{\Delta r} \right)_i^n + \frac{2 - \Delta t^n c_i^n}{2 + \Delta t^n c_i^n} \dot{u}_i^{n-1/2} \\ \dot{\varphi}_{ri}^{n+1/2} &= \frac{2\Delta t^n}{2 + \Delta t^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r - \frac{T_s}{\Delta r} \right)_i^n + \frac{2 - \Delta t^n c_i^n}{2 + \Delta t^n c_i^n} \dot{\varphi}_i^{n-1/2} \\ \dot{w}_i^{n+1/2} &= \frac{2\Delta t^n}{2 + \Delta t^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{Q_r}{r} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + q + \frac{F_z}{\Delta r} \right)_i^n + \frac{2 - \Delta t^n c_i^n}{2 + \Delta t^n c_i^n} \dot{w}_i^{n-1/2} \end{aligned} \quad (30)$$

پس از حل روابط (۳۰)، مقادیر سرعت‌ها بدست می‌آیند. حال با استفاده از رابطه (۳۱) مقادیر جابجایی‌ها و دوران‌ها، در انتهای هر بازه زمانی محاسبه می‌شود:

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t^{n+1} \dot{x}^{n+1/2} \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)، $x = u, w, \varphi_r$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از (۳۰) و (۳۱) و روابط (۲) تا (۱۴) معادلات کامل مورد نیاز،

بردارهای جابجایی و سرعت اصلاح می‌شوند. نکته مهم اینجاست که مقادیر مناسبی برای جرم، دمپینگ و گام زمانی انتخاب شود تا پایداری و بازه همگرایی سریعی، حاصل شود.

انتقال یک مسئله استاتیکی به یک فضای دینامیکی ساختگی احتیاج به یک سری فاکتورهای ضروری دارد تا پروسه حل شروع شود. به عبارت دیگر روش تکرار رهایی پویا بطور کلی ناپایدار است، بنابراین باید فاکتورهای مورد نیازی انتخاب شود تا نتایج حل، همگرایی پروسه را تضمین کنند. این فاکتورها عبارتند از ماتریس جرمی، ضریب دمپینگ، گام زمانی و بردار جابجایی اولیه. با توجه به تئوریه گرشگورین^۱، ماتریس جرمی را می‌توان با رابطه (۲۶) بدست آورد.

$$m_{ii} \geq \frac{1}{4} \Delta t^2 \sum_{j=1}^n |K_{ij}| \quad (26)$$

$$K = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (27)$$

در رابطه بالا $x = u, w, \varphi_r$ و F سمت چپ معادلات تعادل می‌باشند. فاکتور مهم بعدی ضریب دمپینگ است که طبق ایده ارائه شده توسط ژانگ، بصورت رابطه (۲۸) بدست می‌آید:

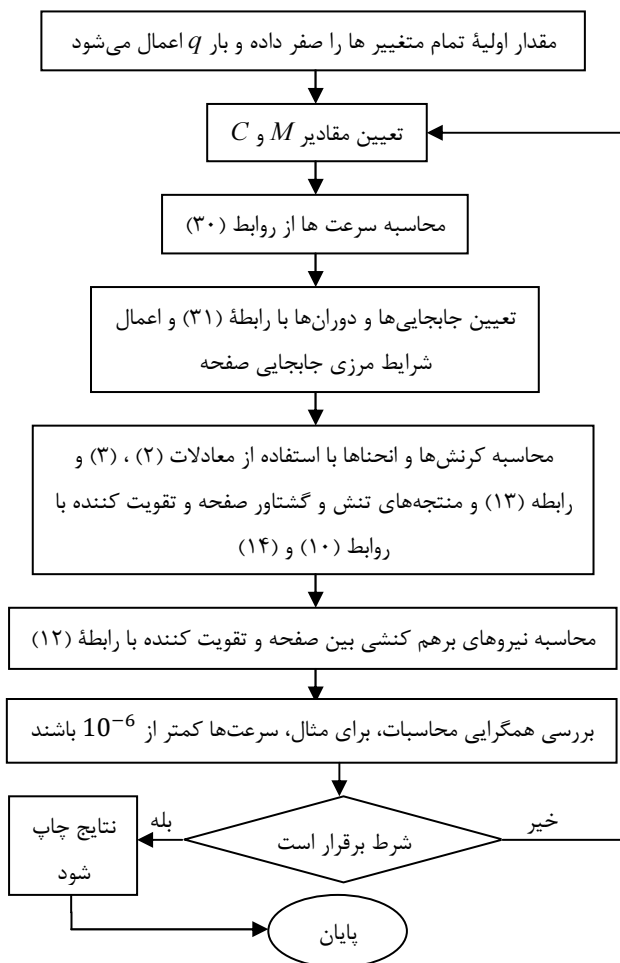
$$c_n = 2 \left\{ \frac{\{x_n\}^T \{F(x_n)\}}{\{x_n\}^T [M_n] \{x_n\}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

پارامتر دیگری که بسیار تأثیرگذار بوده گام زمانی است. استفاده از گام زمانی ثابت و معین در طول کل مراحل تکرار بسیار رایج‌تر از دیگر روش‌ها می‌باشد. اندروود [۲۰] مقادیر ثابت ۱ و ۱/۱ را برای گام زمانی پیشنهاد داده است. در حقیقت، انتخاب مقداری کمی بیشتر از ۱ می‌تواند پایداری و همگرایی را تضمین کند. آخرین فاکتوری که بر بازه همگرایی تأثیرگذار است، بردار جابجایی اولیه می‌باشد. به عبارت دیگر انتخاب مقدار مناسبی نزدیک به جواب باعث می‌شود برای رسیدن به همگرایی، مراحل تکرار کمتری نیاز باشد. این امر نشان دهنده این است که پروسه رهایی پویا معمولاً با هر بردار جابجایی اولیه‌ای به حل می‌رسد. مقدار صفر و یک بسیار رایج است.

۳-۲- تبدیل به فرمت مقدار اولیه

معادلات حاکم از نوع مسائل با مقدار مرزی مشخص می‌باشند و

1. Gersghorin's Theorem



شکل ۳ فلوجارت مراحل حل روش رهایی پویا

جدول ۱ مقایسه بیشینه خیز $W_{\max}$ (mm) برای صفحه دایره‌ای با نتایج حاصل از تحقیق آزمایشگاهی مرجع [۱۸]

q (kg/mm ²)	پژوهش حاضر		مرجع [۱۸]	
	گیردار	ساده	گیردار	ساده
۰/۱	۰/۲۵	۰/۸۲	۰/۲۷	۰/۸۵
۰/۲	۰/۴۸	۱/۶۱	۰/۵۱	۱/۶۷
۰/۳	۰/۶۹	۳/۱۱	۰/۷۵	۳/۴۱

به عنوان چهارمین مثال و به منظور حصول اطمینان کامل از نتایج ارائه شده، در جدول ۲، مقادیر بدست آمده برای صفحه حلقوی چند لایه [60/-60/60/-60] با هندسه مشابه مثال دوم و شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار، با نتایج بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته و مطابقت بسیار خوبی بین روش حل حاضر و پاسخ‌های آباکوس مشاهده می‌شود.

برای الگوریتم رهایی پویا تشکیل می‌شوند. ترتیب مراحل بیان شده برای حل مسأله مطابق شکل ۳ می‌باشد.

۴- بحث و نتایج عددی

۴-۱- اعتبارسنجی حل

برای نشان دادن صحت و دقت روش عددی حاضر، چهار مثال در این بخش آورده شده است. در مثال اول، نتایج حاصل از روش رهایی پویا برای صفحه دایره‌ای همسانگرد، با اعداد بدست آمده در تحقیق آزمایشگاهی مرجع [۱۸] در جدول ۱ مقایسه شده‌اند (مشخصات مدل در مرجع [۱۸] موجود است). در مثال دوم نتایج حاصل از خمش غیر خطی صفحه گرد توپر همسانگرد با تقویت کننده حلقوی با مورد موجود در مرجع [۱۳] برای هر دو شرایط مرزی گیردار و ساده مقایسه شده است. مشخصات هندسی مورد استفاده توسط تروی و آوانسیان $r_0/h_0 = 25$ ، $r_s/r_0 = 0.5$ ، $h_s/h_0 = 4$ ، $b_s/h_0 = 1$ می‌باشند. این پژوهش بر پایه تئوری کلاسیک صفحات انجام شده که با استفاده از آن، نیروی واکنشی پیچشی T_s را نمی‌توان بر اساس دستگاه معادلات تعادل کلاسیک، بصورت نیروی حجمی در نظر گرفت. برای رفع این مشکل تروی و آوانسیان T_s را بصورت توزیع فشار یکنواخت در راستای تقویت کننده در نظر گرفتند [۱۳]. با وجود خلاقیت بالای این مدل‌سازی به خاطر وابستگی آن به نحوه مش‌بندی عاری از خطا نیست. در تحقیق حاضر معادلات ک+ه بر پایه تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول استخراج شده‌اند، واکنش پیچشی T_s بطور مستقیم و بدون مدل‌سازی وارد معادلات شده و نتایج دارای دقت بیشتری هستند. در شکل ۴ نمودار خیز بیشینه بی بعد $W_{\max}/h_0$ بر حسب افزایش بار بی بعد $\bar{q} = Qr_0^4/Eh_0^4$ نشان داده شده است. در مثال سوم نتایجی برای صفحه گرد توخالی همسانگرد با تقویت کننده حلقوی و شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار، با بهره‌گیری از نرم‌افزار المان محدود آباکوس بدست آمده است. مشخصات ماده مورد استفاده $E = 70\text{GPa}$ ، $\nu = 0.3$ ، $r_i/r_0 = 0.2$ و بقیه نسبت‌ها مشابه مثال اول می‌باشند. شکل ۵ نمودار خیز بیشینه بی بعد $W_{\max}/h_0$ بر حسب افزایش بار بی بعد $\bar{q} = Qr_0^4/Eh_0^4$ را نشان می‌دهد.

۴-۲- بحث و نتایج عددی

در تحقیق حاضر نتایج عددی برای صفحه گرد توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی و بدون آن، تحت بار گسترده مکانیکی و شرایط مرزی مختلف گیردار-گیردار (CC)، ساده-ساده (SS)، گیردار-ساده (CS) و ساده-گیردار (SC) بدست آمده‌اند. صفحه کامپوزیتی چند لایه گرافیت/اپوکسی با خواص ذکر شده در رابطه (۳۲) مورد نظر بوده است [۱۹].

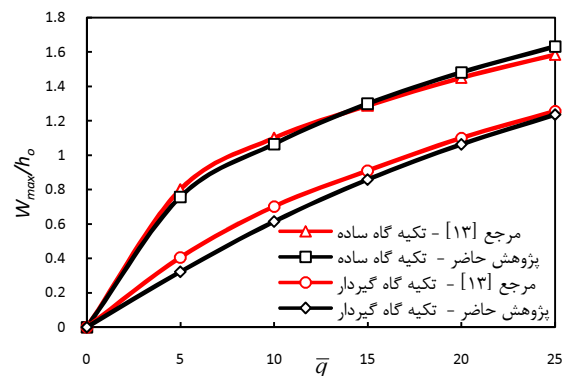
$$E_1 = 141 \text{ GPa}, E_2 = E_3 = 9 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 6 \text{ GPa}, G_{23} = 3 \text{ GPa}, G_{13} = 5 \text{ GPa}$$

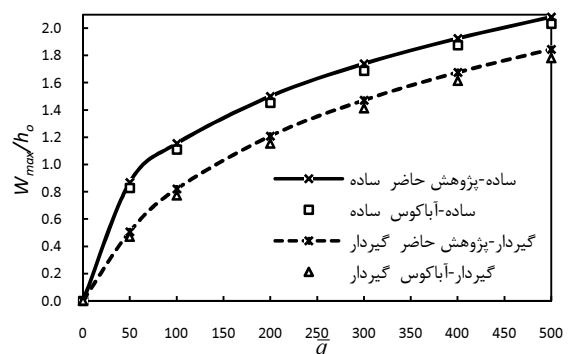
$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.3, \nu_{23} = 0.52 \quad (32)$$

در شکل ۱ پارامترهای هندسی بطور کامل نشان داده شده‌اند و برای نتایج ارائه شده، نسبت‌های مختلفی از این مؤلفه‌ها مورد استفاده قرار گرفته که در هر بخش به آنها اشاره خواهد شد. چیدمان‌های متعامد متقارن^۱ [0/90/0/90/0]، متقارن^۲ [30/60/30/60/30]، ضربدری پادمتقارن^۳ [60/-60/60/-60] و چیدمان کلی [10/-30/45/-60/-20] که ترکیبی از لایه‌هایی با جهت‌گیری اختیاری برای فایبرها^۴ می‌باشد، استفاده شده است.

شکل‌های ۶ تا ۱۳ تغییرات جابجایی عمودی بی بعد W/h_0 بر حسب فاصله شعاعی از مرکز r/r_0 برای چیدمان‌های مختلف در حالت تقویت شده و بدون تقویت کننده، با در نظر گرفتن هندسه $h_0/r_0 = 0.15$ ، $r_0 = 50 \text{ mm}$ ، $b_s/h_0 = 1$ ، $h_s/h_0 = 4$ و برای نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به خارجی $r_i/r_0 = 0.1, 0.15, 0.2$ ، تحت بارگذاری گسترده مکانیکی $q = 0.14 \text{ GPa}$ رسم شده‌اند (این مقدار بار، برای تمامی مثال‌ها یکسان است). در شکل‌های ۶ تا ۹ شرایط مرزی گیردار-گیردار و ۱۰ تا ۱۳ ساده-ساده برای لبه‌های داخلی و خارجی در نظر گرفته شده‌اند. همان طور که ذکر شد، به علت متقارن محوری بودن صفحه، کرنش‌ها و انحنای در راستای $r\theta$ صفر می‌باشند. لذا با وجود این که A_6 ، A_{26} و D_{26} در برخی چیدمان‌ها دارای مقدار می‌باشند، اتصال کشش-برش و خمش-پیچش هیچ گونه تأثیری در این چیدمان‌ها نخواهند داشت.



شکل ۴ خیز بیشینه بی‌بعد بر حسب افزایش بار



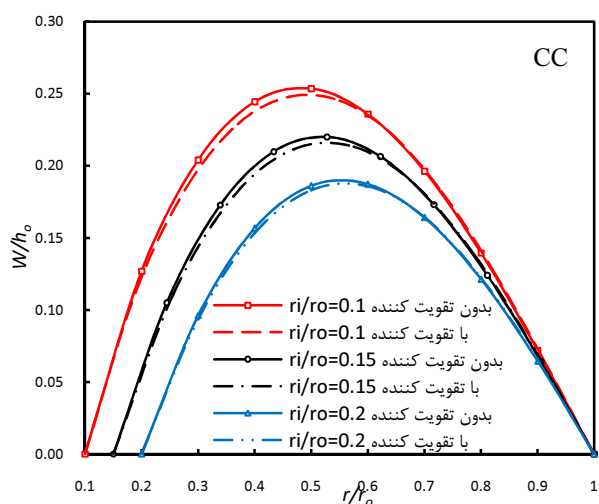
شکل ۵ مقایسه بین خیز بیشینه بی‌بعد بر حسب افزایش بار برای صفحه گرد توخالی همسانگرد توسط تحقیق حاضر و آباکوس

جدول ۲ مقایسه بیشینه خیز بی‌بعد W_{max}/h_0 برای صفحه حلقوی چند لایه توسط حل‌رهای پویا و آباکوس

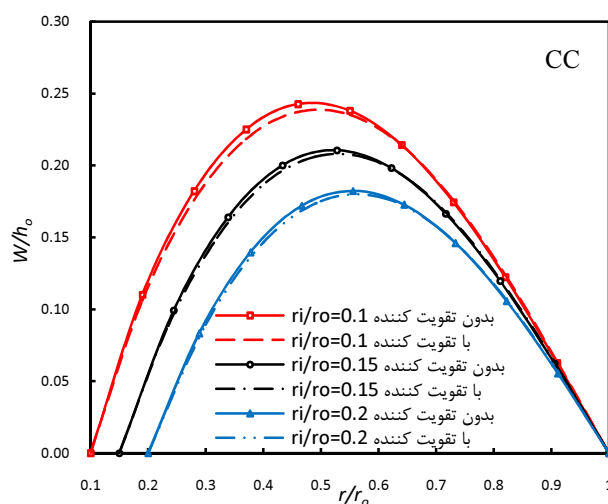
بار بی بعد $\bar{q} = \frac{Qr_0^4}{E_2 h_0^4}$	پژوهش حاضر		آباکوس	
	گیردار-گیردار	ساده-ساده	گیردار-گیردار	ساده-ساده
۵۰۰	۱/۲۲۸۰	۱/۵۹۵۴	۱/۴۳۷۳	۱/۶۰۲۶
۶۰۰	۱/۴۵۳۰	۱/۷۰۹۹	۱/۵۵۴۶	۱/۷۰۹۳
۷۰۰	۱/۵۶۴۲	۱/۸۱۱۶	۱/۶۵۷۳	۱/۸۰۵۳
۸۰۰	۱/۶۶۴۳	۱/۹۰۳۸	۱/۷۵۰۶	۱/۸۹۲۰
۹۰۰	۱/۷۵۵۷	۱/۹۸۸۲	۱/۸۳۶۰	۱/۹۷۰۶
۱۰۰۰	۱/۸۳۹۹	۲/۰۶۶۴	۱/۹۱۴۶	۲/۰۴۴۰

شبیه‌سازی در فضای سه‌بعدی و توسط المان صفحه/پوسته انجام می‌شود. همچنین در بخش خواص مواد حالت چندلایه و در بخش کنترل فرایند تحلیل، برای تحلیل غیرخطی، گزینه استاتیکی انتخاب شده است. نوع المان برای مش‌بندی نیز S8R می‌باشد.

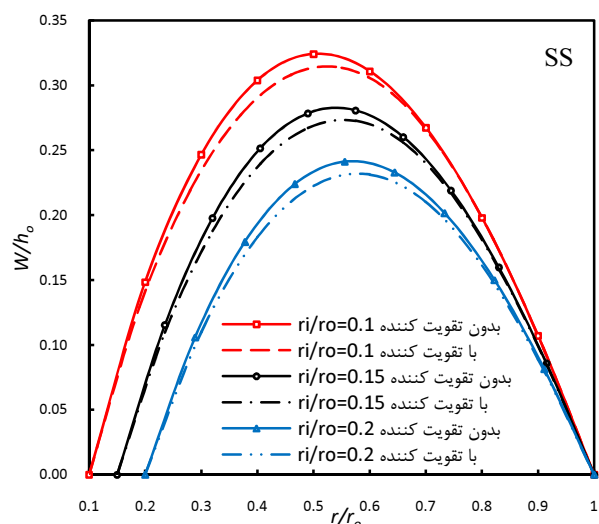
1. Symmetric Cross-Ply
2. Symmetric Ply
3. Antisymmetric Angle-Ply
4. General Theta-Ply



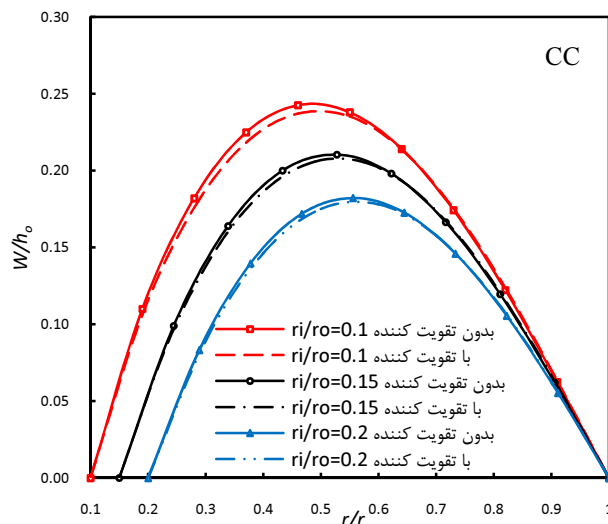
شکل ۹ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [10/-30/45/-60/-20]



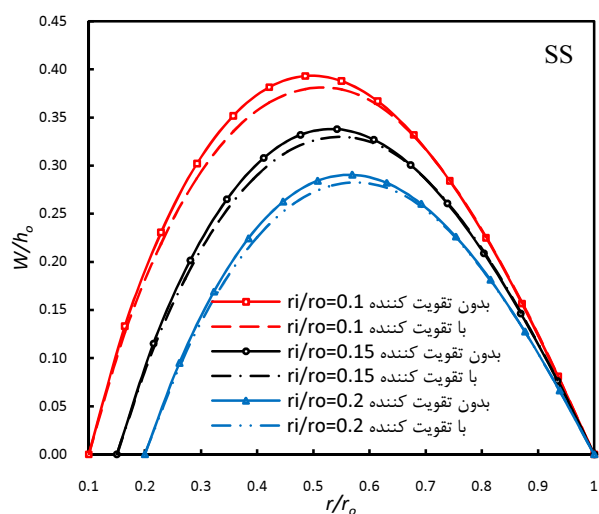
شکل ۶ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [0/90/0/90/0]



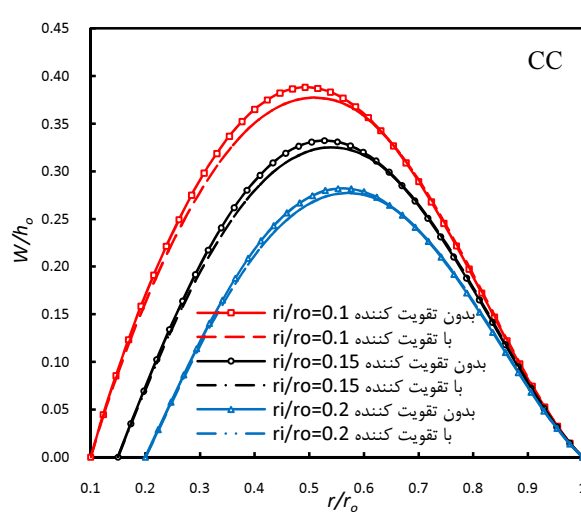
شکل ۱۰ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [0/90/0/90/0]



شکل ۷ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [30/60/30/60/30]



شکل ۱۱ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [30/60/30/60/30]

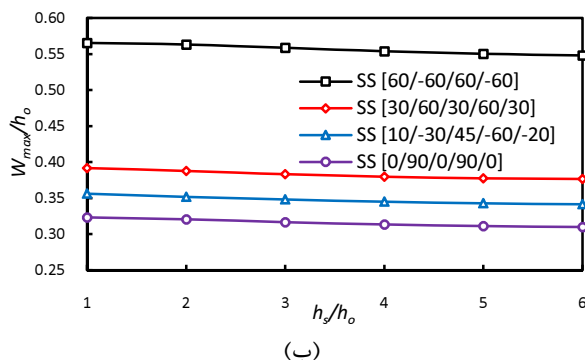
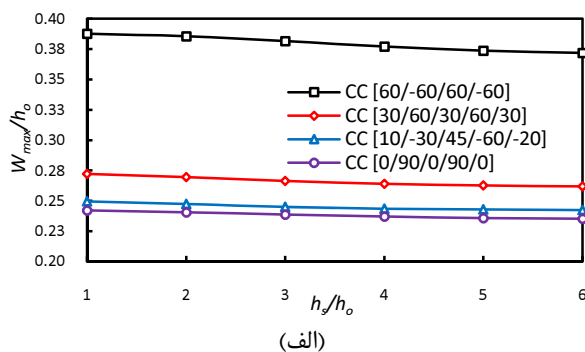


شکل ۸ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [60/-60/60/-60]

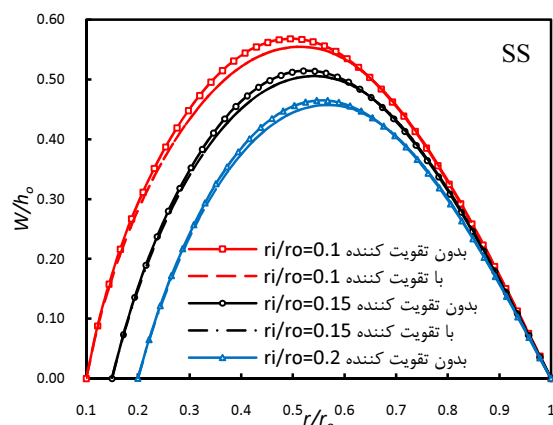
ماتریس سفتی خمشی در چیدمان متعامد متقارن نسبت به ضربدری پادمتقارن باشد. همچنین تأثیر تقویت کننده در کاهش خیز کاملاً قابل مشاهده بوده و در شرایط مرزی مختلف، متفاوت است. چون در شرط مرزی SS نسبت به CC صفحه قابلیت تغییر شکل بیشتری دارد، تأثیر تقویت کننده می‌تواند در حالت اول بهتر دیده شود. در چیدمان متعامد متقارن اختلاف خیز ایجاد شده بین صفحه تقویت شده و بدون تقویت کننده در حالت SS نسبت به CC بیشتر است و همین رفتار در چیدمان کلی که رفتاری مشابه به متعامد متقارن دارد، نیز دیده می‌شود. این در در حالی است که در دو چیدمان دیگر اختلاف چندانی مشاهده نمی‌شود. بطور کلی و با توجه به اشکال، با افزایش نسبت r_i/r_0 اختلاف خیز ذکر شده در هر دو حالت شرایط مرزی، کاهش می‌یابد.

در شکل ۱۴ تغییرات بیشینه خیز بی‌بعد W_{max}/h_0 بر حسب افزایش نسبت h_s/h_0 برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده، بررسی شده است.

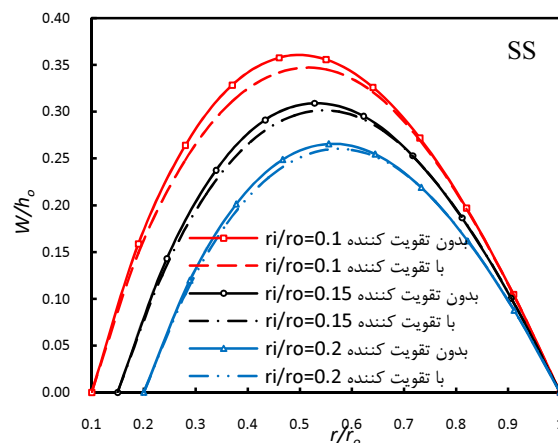
هندسده مورد استفاده در این بخش $h_0/r_0 = 0.15$ ، $r_0 = 50\text{mm}$ ، $b_s/h_0 = 1$ ، $r_i/r_0 = 0.1$ می‌باشد.



شکل ۱۴ تأثیر عمق تقویت کننده در بیشینه تغییر شکل عمودی صفحه برای چیدمان‌های مختلف: الف- CC - ب- SS



شکل ۱۲ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان $[60/-60/60/-60]$



شکل ۱۳ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان $[10/-30/45/-60/-20]$

در چند لایه‌های متقارن به دلیل صفر شدن تمام مؤلفه‌های ماتریس B_{ij} ، اتصال بین کشش و خمش ایجاد نمی‌شود. در چیدمان ضربدری پادمتقارن، به علت قرارگیری فایبرها در زوایای $+\theta$ ، $-\theta$ و همچنین لایه‌ها در فواصل برابر و متقارن نسبت به صفحه میانی، B_{11} ، B_{12} ، B_{22} صفر بوده و فقط B_{16} ، B_{26} دارای مقدار می‌باشند. اما به دلیل تقارن محوری که پیش‌تر ذکر شد، این دو مؤلفه نیز وارد معادلات نشده و چیدمان ضربدری پادمتقارن رفتاری همچون صفحات متقارن دارد. تنها حالتی که در آن اتصال بین کشش و خمش ایجاد می‌شود، چیدمان کلی می‌باشد. در این مورد تمام مؤلفه‌های B_{ij} دارای مقدار بوده که این امر باعث سفتی بیشتر صفحه می‌شود. با توجه به شکل‌های ۶ تا ۱۳، مشاهده می‌شود که چیدمان متعامد متقارن کمترین و ضربدری پادمتقارن بیشترین خیز را دارا بوده که این می‌تواند به علت بزرگ‌تر بودن مقادیر

از جداول گفته شده پیداست که با افزایش نسبت h_0/r_0 ، به علت ضخیم‌تر شدن صفحه، خیز به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد و همان‌طور که انتظار می‌رود، بیشترین خیز برای شرط مرزی ساده-ساده و کمترین در شرط گیردار-گیردار اتفاق افتاده است. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده، برای تمامی چیدمان‌ها، بیشینه خیز در شرط مرزی گیردار-ساده بیشتر از ساده-گیردار می‌باشد. این امر کاملاً بدیهی است، چرا که طول لبه خارجی از داخلی بیشتر بوده و لذا در حالت اول (گیردار-ساده)، صفحه مقاومت کمتری در مقابل بار اعمالی نسبت به حالت دوم (ساده-گیردار) داشته و خیز بزرگ‌تری باید حاصل شود. همان‌طور که از نتایج پیداست، در تمام چیدمان‌ها و با افزایش نسبت h_0/r_0 از ۰/۱ به ۰/۱۵، برای شرایط مرزی CC، SC، CS و SS به ترتیب، بطور میانگین حدود ۵۴/۵۸٪، ۴۷/۵۷٪، ۲۳/۵۵٪ و ۳۴/۵۴٪ کاهش خیز مشاهده شده است. این مقادیر در اثر افزایش نسبت h_0/r_0 از ۰/۱۵ به ۰/۲، به ترتیب ۴۸/۲٪، ۴۷/۳٪، ۴۹/۰۱٪ و ۴۸/۰۳٪ می‌باشند. لذا با افزایش بیشتر ضخامت صفحه از شیب روند کاهشی خیز ناشی از سفتی صفحه، کاسته می‌شود. از نکات حائز اهمیت دیگر اثرات چیدمان‌های لایه‌ها بر روی پاسخ‌های بدست آمده در جداول مذکور است. بطوری که در مقایسه با دیگر چیدمان‌ها، با افزایش نسبت h_0/r_0 ، چیدمان ضربدری پادمتقارن دارای بیشترین اختلاف خیز بین شرایط مرزی گیردار-گیردار نسبت به ساده-ساده بوده و چیدمان متعامد متقارن دارای کمترین مقدار می‌باشد.

در شکل‌های ۱۵ تا ۱۷ تأثیر تقویت کننده در روند تغییرات گشتاور شعاعی بی‌بعد $\bar{M}_r = M_r r_0^2 / E_2 h_0^4$ در راستای شعاعی برای صفحه تقویت شده، نسبت به صفحه فاقد تقویت کننده، برای چیدمان‌ها و شرایط مرزی متفاوت، بررسی شده است. مشخصات هندسی مورد نظر در این بررسی $h_0/r_0 = 0.15$ ، $r_i/r_0 = 0.2$ ، $b_s/h_0 = 1$ و $h_s/h_0 = 4$ می‌باشند. بطور کلی، در محل اتصال تقویت کننده به صفحه مقدار گشتاور شعاعی افزایش می‌یابد که با توجه به شرایط مرزی و چیدمان‌های متفاوت، این افزایش می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد. این تأثیر به خوبی در شکل‌ها دیده می‌شود و در تمام موارد باعث شکستگی نمودار به سمت پایین شده است.

همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش عمق تقویت کننده، خیز صفحه کاهش یافته که برای شرایط مرزی مختلف، متفاوت است. در شرط مرزی گیردار-گیردار، شیب تغییرات، به ترتیب قرارگیری چیدمان‌ها در شکل، از چیدمان ضربدری پادمتقارن به سمت متعامد متقارن، کاهش یافته در حالی که همین روند برای شرط مرزی ساده-ساده برعکس می‌باشد و شیب تغییرات افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه لبه‌های تقویت کننده امکان مفید شدن را ندارند، در نسبت‌های بالای h_s/h_0 ، از تأثیر تقویت کننده در کاهش خیز، کاسته شده که به خوبی در نمودارها مشاهده می‌شود.

تأثیر افزایش نسبت h_0/r_0 در بیشینه خیز بی‌بعد W_{max}/h_0 صفحه دایره‌ای توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی برای چیدمان‌های مختلف، در جدول‌های ۳ و ۴، بررسی شده است. هندسه‌ای که در این قسمت مورد استفاده قرار گرفته $h_0 = 7.5\text{mm}$ ، $b_s/h_0 = 1$ ، $r_i/r_0 = 0.1$ ، $h_s/h_0 = 4$ و $h_0/r_0 = 0.1, 0.15, 0.2$ می‌باشد. شرط مرزی ساده-گیردار SC بیانگر شرایط مرزی ساده برای لبه داخلی و گیردار برای لبه خارجی می‌باشد و این ترتیب برای حالت گیردار-ساده بصورت CS نیز برقرار است.

جدول ۳ بیشینه خیز بی بعد بر حسب افزایش نسبت ضخامت به شعاع صفحه برای چیدمان‌های [60/-60/60/-60] و [30/60/30/60/30]

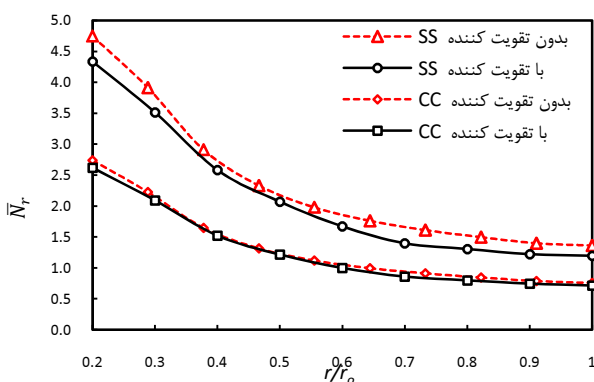
h_0/r_0	[60/-60/60/-60]						[30/60/30/60/30]					
	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
گیردار-گیردار	۰/۹۹۲۱	۰/۳۷۷۱	۰/۱۷۴۱	۰/۶۳۸۵	۰/۲۶۴۰	۰/۱۳۸۷	۰/۹۹۲۱	۰/۳۷۷۱	۰/۱۷۴۱	۰/۶۳۸۵	۰/۲۶۴۰	۰/۱۳۸۷
ساده-گیردار	۱/۰۷۳۵	۰/۴۴۳۶	۰/۲۲۷۹	۰/۶۸۹۰	۰/۲۹۳۸	۰/۱۵۳۷	۱/۰۷۳۵	۰/۴۴۳۶	۰/۲۲۷۹	۰/۶۸۹۰	۰/۲۹۳۸	۰/۱۵۳۷
گیردار-ساده	۱/۱۰۶۶	۰/۴۹۲۴	۰/۲۴۱۴	۰/۷۷۱۲	۰/۳۴۶۴	۰/۱۷۷۹	۱/۱۰۶۶	۰/۴۹۲۴	۰/۲۴۱۴	۰/۷۷۱۲	۰/۳۴۶۴	۰/۱۷۷۹
ساده-ساده	۱/۱۸۶۳	۰/۵۵۴۰	۰/۲۹۷۶	۰/۸۱۹۰	۰/۳۷۹۵	۰/۱۹۶۳	۱/۱۸۶۳	۰/۵۵۴۰	۰/۲۹۷۶	۰/۸۱۹۰	۰/۳۷۹۵	۰/۱۹۶۳

جدول ۴ بیشینه خیز بی بعد بر حسب افزایش نسبت ضخامت به شعاع صفحه برای چیدمان‌های [10/-30/45/-60/-20] و [0/90/0/90/0]

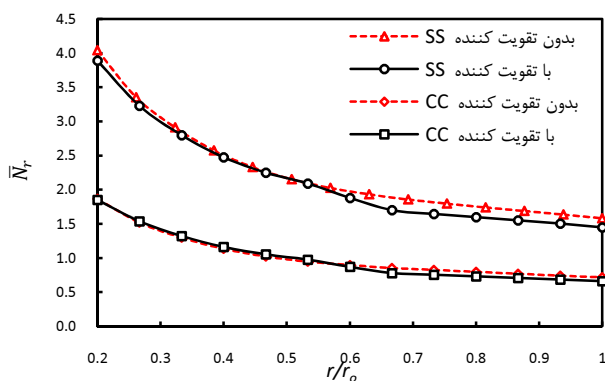
h_0/r_0	[10/-30/45/-60/-20]						[0/90/0/90/0]					
	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
گیردار-گیردار	۰/۵۶۹۸	۰/۲۴۷۶	۰/۱۳۴۲	۰/۵۵۱۲	۰/۲۳۷۰	۰/۱۲۸۶	۰/۵۶۹۸	۰/۲۴۷۶	۰/۱۳۴۲	۰/۵۵۱۲	۰/۲۳۷۰	۰/۱۲۸۶
ساده-گیردار	۰/۶۲۲۱	۰/۲۶۸۶	۰/۱۴۳۲	۰/۵۷۴۵	۰/۲۴۶۷	۰/۱۳۲۶	۰/۶۲۲۱	۰/۲۶۸۶	۰/۱۴۳۲	۰/۵۷۴۵	۰/۲۴۶۷	۰/۱۳۲۶
گیردار-ساده	۰/۷۱۶۳	۰/۳۲۱۰	۰/۱۶۶۰	۰/۶۷۸۵	۰/۳۰۳۸	۰/۱۵۷۵	۰/۷۱۶۳	۰/۳۲۱۰	۰/۱۶۶۰	۰/۶۷۸۵	۰/۳۰۳۸	۰/۱۵۷۵
ساده-ساده	۰/۷۶۵۸	۰/۳۴۵۰	۰/۱۷۵۷	۰/۷۰۴۰	۰/۳۱۳۴	۰/۱۶۱۳	۰/۷۶۵۸	۰/۳۴۵۰	۰/۱۷۵۷	۰/۷۰۴۰	۰/۳۱۳۴	۰/۱۶۱۳

در شکل ۱۶ نیز تأثیر شرایط مرزی بر روی پاسخ‌های چیدمان متقارن به خوبی قابل مشاهده می‌باشد. بطوری که در حالت گیردار-گیردار نسبت به ساده-ساده، تقویت کننده تأثیر کمتری دارد. در شرایط مرزی ساده-ساده بیشترین اندازه گشتاور شعاعی در محل تقویت کننده ایجاد شده است. همچنین از شکل ۱۷ پیداست که در چیدمان ضربدری پاد متقارن بر خلاف چیدمان‌های دیگر در شرایط مرزی CC اثر بکارگیری تقویت کننده بر روی منته‌ج گشتاور شعاعی بخوبی مشاهده می‌شود.

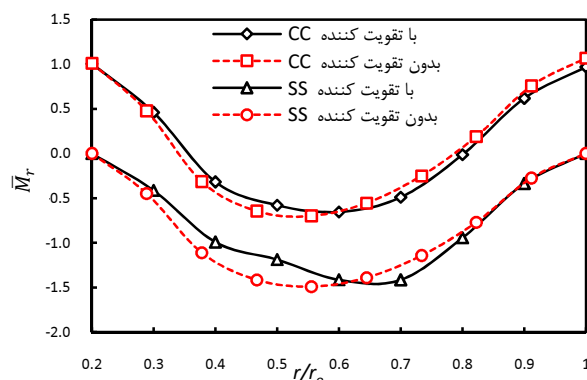
این رویداد می‌تواند به این دلیل باشد که در این چیدمان و شرط مرزی CC، اختلاف خیز بین حالت تقویت شده و بدون تقویت کننده بیشتر است. در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ تأثیر تقویت کننده بر روند تغییرات منته‌ج نیروی شعاعی غشایی بی بعد $\bar{N}_r = N_r r_0^2 / E_2 h_0^3$ بر حسب فاصله شعاعی از مرکز r/r_0 برای صفحه تقویت شده، نسبت به صفحه فاقد تقویت کننده، به ترتیب برای چیدمان‌های متعامد متقارن و متقارن و شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده، بررسی شده است.



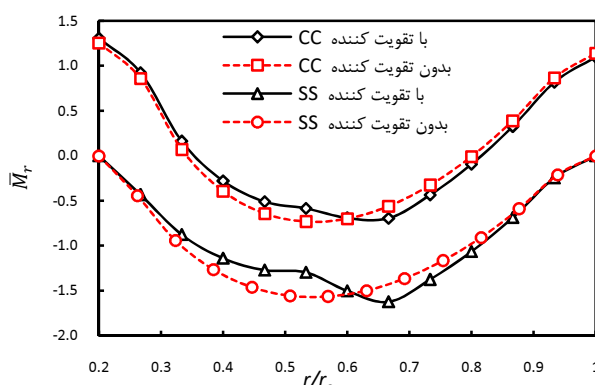
شکل ۱۸ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [0/90/0/90/0]



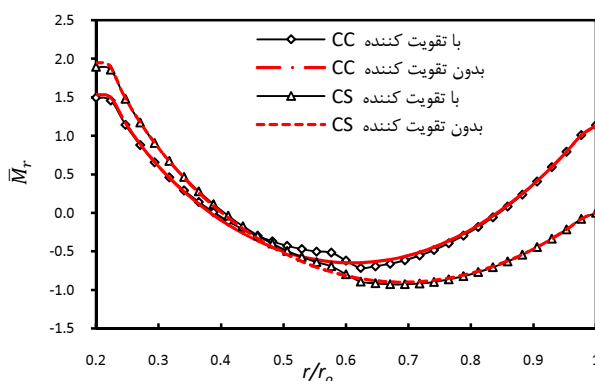
شکل ۱۹ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [30/60/30/60/30]



شکل ۱۵ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [0/90/0/90/0]



شکل ۱۶ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [30/60/30/60/30]



شکل ۱۷ صفحه حلقوی چند لایه با چیدمان [60/-60/60/-60]

با این حال در چیدمان متعامد متقارن با شرایط مرزی گیردار-گیردار، تقویت کننده تأثیر زیادی در کاهش خیز نداشته و می‌توان صحت این ادعا را در شکل ۱۵ مشاهده کرد. بطوری که، گشتاور شعاعی در محل تقویت کننده تغییرات محسوسی ندارد. در حالی که در شرایط مرزی ساده-ساده، تقویت کننده تأثیر مناسبی در کاهش خیز داشته و می‌توان این اثر را با افزایش مقدار گشتاور شعاعی در محل تقویت کننده به خوبی مشاهده کرد.

چیدمان کلی با اختلاف اندکی، از آن بیشتر است. این در حالی است که چیدمان ضربدری پادمتقارن در مقایسه با دیگر چیدمان‌ها مقاومت کمتری در مقابل تغییر شکل از خود نشان می‌دهد.

- با توجه به نتایج حاصل، حضور تقویت کننده به منظور کاهش خیز، در چیدمان متعامد متقارن کمترین و ضربدری پادمتقارن، بترتیب کمترین و بیشترین تأثیر خود را دارند.

- با افزایش عمق تقویت کننده، خیز صفحه در ابتدا بصورت قابل توجهی کم می‌شود. این در حالی است که از حدود نسبت ۵ به بعد، سیر حرکتی نمودار به سمت مجانب افقی طی می‌شود که نشان دهنده عدم تأثیر عمق تقویت کننده در کاهش خیز برای نسبت‌های بالا، می‌باشد.

- برای تمام چیدمان‌ها، بیشینه خیز حاصل برای شرط مرزی گیردار-ساده بیشتر از مقدار بدست آمده در حالت ساده-گیردار می‌باشد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که درصد کاهش بیشینه خیز بر اثر افزایش نسبت h_0/r_0 از ۰/۱ به ۰/۱۵ نسبت به افزایش از ۰/۱۵ به ۰/۲، بیشتر بوده است.

- تأثیر تقویت کننده بر روند گشتاور شعاعی با ایجاد شکستگی به سمت پایین نمایانگر می‌شود. با توجه به نتایج، بترتیب کمترین و بیشترین اثر تقویت کننده در شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار و ساده-ساده مشاهده می‌شود. صفحه تقویت شده با شرایط مرزی ساده-ساده در مقایسه با صفحه بدون تقویت کننده، در محل تقویت کننده، بیشترین گشتاور شعاعی را دارد به استثناء چیدمان متعامد متقارن که مقادیری تقریباً برابر برای صفحه در دو حالت، حاصل شده است.

- تأثیر تقویت کننده بر نیروی شعاعی غشایی نیز با ایجاد شکستگی به سمت پایین نمایان می‌شود.

۶- مراجع

- [1] Naserian A., Tahani M., "Static analysis of laminated composite plates with piezoelectric layers", *Journal of engineering faculty of Ferdowsi University*, Vol. 43, No. 4, pp. 582-566, 2009. (In Persian)
- [2] Darvizeh M., Darvizeh A., Arab Zadeh V., Rajabi H., "Nonlinear analysis of multi-layered beams with piezoelectric layers considering large defprmtions", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 2, pp. 57-67, 2010. (In Persian)

هندسه مورد استفاده در این بخش مشابه قسمت قبل است. بطور کلی در صفحات دایروی توپر و توخالی (فاقد تقویت کننده)، مقدار نیروی شعاعی غشایی از لبه خارجی به سمت مرکز دایره یا لبه داخلی، بطور یکنواخت افزایش می‌یابد. این در حالی است که با افزودن تقویت کننده مقدار این منتهجه کاهش یافته و در محل اتصال آن به صفحه، تأثیر خود را با کاهش ناگهانی در روند تغییرات این نیرو، نشان می‌دهد. در شکل ۱۸ رفتاری مشابه به آنچه در گشتاور شعاعی برای چیدمان متعامد متقارن دیده شد، اتفاق افتاده است. بطوری که در شرایط مرزی گیردار-گیردار، تقویت کننده اثر چندانی نداشته ولی در حالت ساده-ساده شکستگی محسوسی ایجاد کرده که باعث کاهش نیروی شعاعی غشایی وارده، شده است. تقویت کننده تأثیر قابل توجهی بر کاهش خیز در چیدمان متقارن داشته و آن را می‌توان با ایجاد شکستگی محسوسی به سمت پایین در شکل ۱۹ مشاهده کرد. تأثیر حضور تقویت کننده در این چیدمان نسبت به چیدمان متعامد متقارن در شرط مرزی گیردار-گیردار، با ایجاد شکستگی قابل توجهی، بخوبی قابل مشاهده است. برای هر دو چیدمان و شرایط مرزی مورد نظر، بیشترین نیروی شعاعی غشایی در مرز داخلی ایجاد شده است. همچنین نیروی شعاعی غشایی در چیدمان متعامد متقارن در مقایسه با چیدمان متقارن برای هر دو شرط مرزی CC و SS مقادیر بیشتری را داراست.

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این تحقیق، تحلیل غیر خطی خمش صفحات گرد توخالی چند لایه با تقویت کننده حلقوی تحت بارگذاری مکانیکی انجام شده است. معادلات تعادل با استفاده از معادلات غیرخطی فون کارمن و بر اساس تئوری تغییر فرم برشی مرتبه اول استخراج شده‌اند. روش‌های پویا در ترکیب با تفاضل محدود مرکزی برای حل معادلات استفاده شده است. تأثیرات نسبت ضخامت به شعاع، شرایط مرزی، چیدمان لایه‌ها، عمق تقویت کننده و همچنین نسبت شعاع داخلی به خارجی، بر روی نتایج مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل به صورت موردی در ادامه بررسی شده‌اند:

- با بررسی نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که چیدمان متعامد متقارن کمترین خیز را در مقابل بار اعمالی داشته و

- shear deformation and rotary inertia: spline method", *J. Forsch Ingenieurwes*, Vol. 73, 2009, pp. 205-217.
- [13] Turvey G.J., Avanesian N.G.V.DER, "Elastic large deflection analysis of ring-stiffened circular plates using graded finite-differences", *Proceedings of NUMETA 85 Conference*, Swansea, 1985.
- [14] Turvey G.J., Salehi M., "Circular plates with one diametral stiffener- an elastic large deflection analysis", *Computers & Structures*, Vol. 63, 1997, pp. 775-783.
- [15] Golmakani M.E., Kadkhodayan M., "Large deflection analysis of circular and annular FGM plates under thermo-mechanical loadings with temperature-dependent properties", *J. Composites: Part B*, Vol. 42, 2011, pp. 614-625.
- [16] Golmakani M.E., "Large deflection thermoelastic analysis of shear deformable functionally graded variable thickness rotating disk", *J. Composites: Part B*, Vol. 45, 2013, pp. 1143-1155.
- [17] Kadkhodayan M., Alamatian J., Turvey G.J., "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method", *Int J Numer Methods Eng*, Vol. 74, 2008, pp. 996-1018.
- [18] Zhang L.G., Yu T.X., "Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates", *Computers & Structures*, Vol. 33, 1989, pp. 609-614.
- [19] Salehi M., Sobhani A.R., "Elastic linear and non-linear analysis of fiber-reinforced symmetrically laminated sector Mindlin plate", *Composite Structure*, Vol. 65, 2004, pp. 65-79.
- [20] Underwood P., *Dynamic Relaxation*, North-Holland, Amsterdam, 1983, Chapter 5 in Computational Methods for Transient Analysis.
- [3] Jabbarzadeh M., Eskandari Jam J., Khosravi M., "The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 59-73, 2012. (In Persian)
- [4] Jabbarzadeh M., Baghdar Delgosha M. K., "Thermal buckling analysis of FGM sector plates using differantial quadrature method", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 33-45, 2013. (In Persian)
- [5] Djahani P., *Large-deflection elasto-plastic analysis of discretely stiffened plates*, PhD Thesis, London, Imperial College, 1977.
- [6] Kolli M., Chandrashekhara K., "Non-Linear Static and Dynamic Analysis of Stiffened Laminated Plates", *J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, No. 1, 1997, pp. 89-101.
- [7] Qing G., Qiu J. Liu Y., "Free vibration analysis of stiffened laminated plates", *InternationalJ. of SOLIDS and STURCTURES*, Vol. 43, 2006, pp. 1357-1371.
- [8] Li L., Xiaohui R., "Stiffened plate bending analysis in terms of refined triangular laminated plateelement", *J. Composite Structures*, Vol. 92, 2010, pp. 2936-2945.
- [9] Jianqiao Ye, "Axisymmetric buckling analysis of homogeneous and laminated annular plates", *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 62, 1995, pp. 153-159.
- [10] Dumir P.C., Joshi S., Dube G.P., "Geometrically nonlinear axisymmetric analysis of thick laminated annular plate using FSDT", *J. Composites: Part B*, Vol. 32, 2001, pp. 1-10.
- [11] Ding H.J., Xu R.Q., Hangzhou P.R., "Exact solution for axisymmetric deformation of laminated transversely isotropic annular plates", *J. Acta Mechanica*, Vol. 153, 2002, pp. 153-169.
- [12] Viswanathan K.K., Kim K.S., Lee J.H., "Asymmetric free vibrations of laminated annular cross-ply circular plates including the effects of