http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

بهمن ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۱ ص ۱-۱۴

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۲/۲/۲۴
تاریخ پذیرش ۹۲/۳/۲۴
ارائه در سایت ۹۲/۹/۳۰

تحلیل غیرخطی خمش و کمانش صفحات حلقوی از جنس مواد تابعی

محمد اسماعیل گلمکانی[۱*]، مصطفی امامی[۲]

۱- استادیار گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد
* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

چکیده- هدف اصلی از این تحقیق تحلیل غیر خطی خمش و کمانش صفحات حلقوی از جنس مواد تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی به کمک روش رهایی پویا می باشد. خواص مکانیکی صفحهٔ تابعی در جهت شعاع با استفاده از مدل موری- تاناکا تعیین شده است. معادلات غیر خطی با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول و فرضیهٔ تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن ارائه می‌شود. برای حل معادلات غیرخطی از روش رهایی پویا و روش تفاوت‌های محدود استفاده شده است. با توجه به عدم وجود تحقیقی مشابه برای خمش و کمانش صفحات گرد تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بارهای مکانیکی، برخی از نتایج با پاسخ‌های بدست آمده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس برای صفحات تابعی مقایسه شده است. همچنین به مقایسه پاسخ‌های روش حل حاضر با برخی گزارش‌های موجود در مقالات برای صفحات حلقوی همسان‌گرد پرداخته شده است و مطابقت خوب بدست آمده حاکی از صحت و دقت روش عددی بکار رفته است. در انتها اثرات پارامترهای مختلفی همچون شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی برای خمش و کمانش صفحات مورد بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژگان: خمش، کمانش، روش رهایی پویا، مواد تابعی، تئوری برشی مرتبه اول.

Nonlinear bending and buckling analysis of functionally graded annular plates

M.E. Golmakani[1*], M. Emami[2]

1- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Mashhad branch, Mashhad, Iran
2- MSc. student, Dept. of Mech. Eng., Islamic Azad University., Mashhad branch, Mashhad, Iran
* P.O.B. 9187144123, Mashhad, Iran. m.e.golmakani@mshdiau.ac.ir

Abstract- The main purpose of this study is to investigate nonlinear bending and buckling analysis of radially functionally graded annular plates subjected to uniform in-plane compressive loads by Dynamic Relaxation method. The mechanical properties of plates assumed to vary continuously along the radial direction by the Mori–Tanaka distribution. The nonlinear formulations are based on first order shear deformation theory (FSDT) and large deflection von Karman equations. The dynamic relaxation (DR) method combined with the finite difference discretization technique is employed to solve the equilibrium equations. Due to the lack of similar research for the bending and buckling of functionally graded annular plates with material variation in the radial direction, some results are compared with the ones reported by the ABAQUS finite element software. Furthermore, some comparison study is carried out to compare the current solution with the results reported in the literature for annular isotropic plates. The achieved good agreements between the results indicate the accuracy of the present numerical method. Finally, numerical results for the maximum displacement and critical buckling load for various boundary conditions, effects of grading index, thickness-to-radius ratio and inner radius -to-outer radius ratio are presented.

Keywords: Bending, Buckling, Dynamic Relaxation, Functionally Graded Material, First Order Shear Deformation Theory.

۱- مقدمه

با توجه به اینکه ورق‌ها با شکل‌های هندسی گوناگون به طور گسترده‌ای در صنایع مختلف استفاده می‌شوند از اهمیت زیادی برخوردار هستند. ورق‌ها بر حسب نوع کاربرد ممکن است تحت بارگذاری صفحه‌ای قرار گیرند که اعمال غیر مجاز این بارها می‌تواند به ناپایداری و تخریب ورق نیز منجر شود، بنابراین بررسی رفتار ورق‌ها یکی از مسائل مهم در مهندسی به شمار می‌آید. میزان حداکثر خیز صفحه و حداقل بار کمانش در طراحی و محاسبات مهندسی اهمیت بسزایی دارد. به‌علاوه با توجه به این که سیستم‌های واقعی فیزیکی یا مسائل مهندسی که به واسطه این پدیده ایجاد می‌شوند به کمک معادلات پاره‌ای توصیف می‌شوند، در بیشتر حالت‌ها، حل بسته آنها فوق‌العاده سخت است. به این سبب، روش‌های تقریبی عددی بصورت گسترده‌ای برای حل این معادلات، استفاده می‌شوند.

مواد تابعی[1] مواد کامپوزیتی جدیدی هستند که از دو یا چند فاز با ترکیبی پیوسته ساخته می‌شوند. خواص مکانیکی مواد تابعی به صورت پیوسته در یک یا چند جهت تغییر می‌کند از این رو اثر مخرب لایه لایه شدن ورق‌های لایه‌ای در این حالت از بین می‌رود [۱]. به‌علاوه با استفاده از مواد تابعی در ساختار ورق‌ها می‌توان تنش‌های صفحه‌ای و عرضی در امتداد ضخامت را کاهش داد و همچنین توزیع تنش‌های باقی‌مانده در ورق را بهبود بخشد و بر خواص حرارتی ورق افزود. امروزه مواد تابعی به دلیل امکان ترکیب خواص مواد مختلف، کاربردهای زیادی در صنایع هوا فضا، صنایع دفاعی، کارخانه‌های مواد شیمیایی و راکتورهای هسته‌ای یافته‌اند [۱].

تحلیل پایداری و مطالعه رفتار کمانش صفحات، همواره به عنوان یکی از مهمترین موضوعات در تحلیل سازه‌ها مورد توجه بوده است. تیموشنکو و گیر [۲] و سپس آلمروث و بروش [۳] مسأله پایداری انواع سازه‌های مهندسی شامل ستون‌ها، صفحات و پوسته‌ها را مورد بحث قرار داده‌اند. یاماکی [۴] کمانش صفحات حلقوی با بارگذاری بر روی لبهٔ داخلی و خارجی را مورد بررسی قرار داد. ونگ و همکارانش [۵] حل کمانش اشکال مختلف صفحات مانند بیضوی، مربع، مثلث، پنج ضلعی، شش ضلعی و همچنین حلقوی را بر اساس تئوری میندلین[2] و با روش ریلی ریتز[3] ارائه داده‌اند. کدخدایان و همکارانش [۶] تحلیل کمانش صفحات دایره‌ای و حلقوی و همچنین صفحهٔ مستطیلی را بر اساس تئوری کلاسیک و با روش رهایی پویا[4] بررسی کرده‌اند. صالحی و صافی [۷] حل کمانش مکانیکی صفحات مستطیلی ویسکوالاستیک[5] براساس تئوری تغییر شکل های برشی مرتبه سوم[6] و با استفاده از روش رهایی پویا انجام داده‌اند. آنها نتایج بدست آمده با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه سوم را با نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک[7] و تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول[8] مقایسه کرده‌اند. اسلامی و شریعت [۸] تحلیل کمانش صفحات مستطیلی تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ سوم مورد بررسی قرار داده‌اند. معارفدوست و کدخدایان [۹] تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی را به وسیله تئوری‌های تغییر شکل (DT) و نموی (IT)، با استفاده از روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته و تحت بارها و شرایط مرزی متنوع مورد بررسی و مقایسه قرار داده‌اند. جبارزاده و همکارانش [۱۰] رفتار کمانش حرارتی صفحات دایره‌ای ضخامت متغییر از جنس مواد تابعی دوطرفه تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت را بر اساس تئوری برشی مرتبهٔ اول مورد مطالعه قرار داده‌اند. نجفی زاده و اسلامی [۱۱] پایداری مکانیکی صفحهٔ دایره‌ای تابعی را بر اساس تئوری کلاسیک صفحات و فرضیات ساندرز مورد مطالعه قرار دادند. کمانش مکانیکی صفحهٔ دایره‌ای تابعی با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبهٔ اول صفحات توسط نجفی زاده و حیدری [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. جبارزاده و باغدار دلگشا [۱۳] تحلیل کمانش حرارتی قطاع ساخته شده از مواد تابعی را بر اساس تئوری برشی مرتبهٔ اول و روش مربعات دیفرانسیل بررسی کرده‌اند.

همچنین محققان زیادی تحلیل غیر خطی صفحات دایره‌ای تحت بارهای گوناگون و شرایط مرزی مختلف را بررسی کرده‌اند. ردی و همکارانش [۱۴] تحلیل خمش صفحات دایره‌ای و حلقوی مواد تابعی را بر اساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ اول بررسی کردند. فلاح و همکارانش [۱۵] حل تحلیلی صفحات دایره‌ای مواد تابعی را با شرایط مرزی گیردار و ساده تحت بار مکانیکی و حرارتی ارائه دادند. گلمکانی و

1. Functionally Graded Materials
2. Mindlin Plate
3. Rayleigh-Ritz
4. Dynamic Relaxation
5. Viscoelastic
6. Third order Shear Deformation Theory
7. Classic Plates Theory
8. First order Shear Deformation Theory

کدخدایان [۱۶] تحلیل خمش غیرخطی صفحات حلقوی بر اساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ اول و سوم صفحات تحت بار مکانیکی را با استفاده از روش رهایی پویا بررسی کردند. ونگ و همکارانش [۱۷] تحلیل غیر خطی خمش و پس کمانش صفحات دایره‌ای مواد تابعی را بر اساس تئوری کلاسیک غیر خطی و تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن بررسی کردند. ما و ونگ [۱۸] خمش غیر خطی و کمانش صفحهٔ دایره‌ای تابعی را تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی مورد بررسی قرار دادند. سعیدی و همکارانش [۱۹] حل تحلیلی خمش و کمانش صفحات دایره‌ای مواد تابعی را بر اساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ سوم ارائه دادند.

در تمام تحقیقات ذکر شده قبلی [۱۰-۱۹] تغییرات خواص ماده تابعی در راستای ضخامت می‌باشند. اما در زمینه تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی تحقیقات بسیار کمی صورت گرفته است. از تحقیقات انجام شده در زمینه تغییرات خواص مواد تابعی در راستای شعاعی می‌توان به خمش قطاع مواد تابعی [۲۰]، ارتعاشات قطاع [۲۱] و خمش دیسک‌های دوار [۲۲] و [۲۳] اشاره نمود. حسینی هاشمی و همکارانش [۲۴] تحلیل کمانش و ارتعاشات قطاع دایره‌ای و حلقوی صفحات مواد تابعی را با تغییرات خواص در راستای شعاعی بر اساس تئوری کلاسیک صفحات و تحت بار فشاری یکنواخت درون صفحه‌ای و ساکن بر روی فونداسیون الاستیک بررسی کرده‌اند. سپهی و همکارانش [۲۵] تحلیل کمانش و پس کمانش حرارتی صفحات حلقوی ساخته شده از مواد تابعی با توزیع خواص در راستای شعاعی در انواع شرایط تکیه‌گاهی مورد مطالعه قرار داده‌اند. حل عددی بر پایهٔ روش مربعات دیفرانسیلی[1] بوده و نتایج برای تئوری برشی مرتبهٔ اول و توزیع خواص وابسته به دما و در راستای شعاعی ارائه شده است.

تحقیقات صورت گرفته در زمینه کمانش صفحات حلقوی مواد تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی مربوط به آنالیز حرارتی می‌باشد. اما تاکنون تحلیل خمش و کمانش صفحات حلقوی مواد تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی صورت نگرفته است. در این تحقیق تحلیل غیر خطی خمش و کمانش صفحات حلقوی مواد تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی به کمک روش رهایی پویا انجام گرفته است. خواص مکانیکی مواد بر اساس مدل موری-تاناکا[2] فرض شده است. معادلات غیر خطی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول و به فرم نموی[3] استخراج شده است و به منظور حل معادلات غیر خطی از روش رهایی پویا استفاده شده است. در این روش برخلاف روش تعادل همسایه، برای بدست آوردن بار بحرانی کمانش نیاز به خطی سازی معادلات نمی‌باشد. در مطالعه پارامتریک انجام شده، خیز و بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

۲-۱- هندسه مسأله

هندسه مورد بررسی برای کمانش صفحه حلقوی با شعاع داخلی a، شعاع خارجی b و ضخامت h، تحت اثر نیروی فشاری N در لبه‌های داخلی و خارجی، در شکل ۱ دیده می شود.

همچنین هندسه مورد بررسی برای خمش صفحه حلقوی با شعاع داخلی R_i، شعاع خارجی R_o و نیروی گسترده q در شکل ۲ آورده شده است.

۲-۲- روابط حاکم بر مواد تابعی

تأثیر مدول بالک[4]، B و مدول برشی، G ماده تابعی بر اساس مدل پیوسته موری-تاناکا بصورت رابطه (۱) بیان می‌شوند [۲۳].

$$\frac{B-B_c}{B_m-B_c}=\frac{V_m}{1+\left(1-V_m\right)\dfrac{3\left(B_m-B_c\right)}{3B_c+4G_c}}$$

$$\frac{G-G_c}{G_m-G_c}=\frac{V_m}{1+\left(1-V_m\right)\dfrac{G_m-G_c}{G_c+f_c}}$$

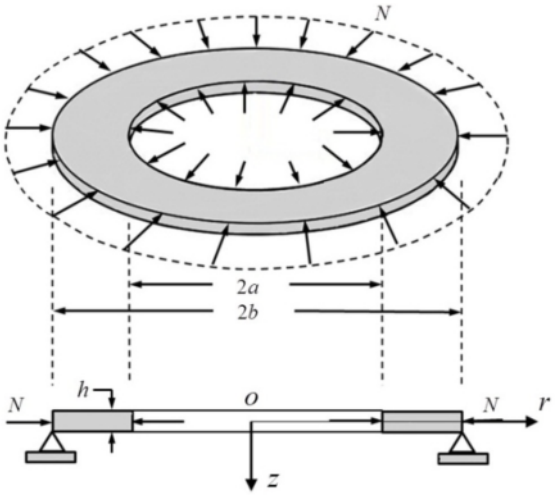
$$f_c=\frac{G_c\left(9B_c+8G_c\right)}{6\left(B_c+2G_c\right)} \qquad (۱)$$

زیر نویس‌های m و c به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می‌کنند. کسر حجمی مواد تشکیل دهنده بر اساس قانون توانی ساده بصورت رابطه (۲) بیان می‌شود [۲۳].

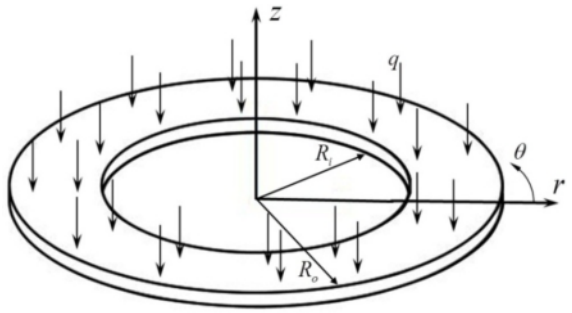
$$V_c=\left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i}\right)^n \quad , \quad V_m=1-V_c \qquad (۲)$$

1. Differential Quadrature Method

2. Mori-Tanaka
3. Incremental
4. Bulk Modulus



شکل ۱ هندسه مورد بررسی برای کمانش صفحهٔ حلقوی [۲۶]



شکل ۲ هندسه مورد بررسی برای خمش صفحهٔ حلقوی

V_c و V_m به ترتیب نشان دهنده کسر حجمی سرامیک و فلز و همچنین n نشان دهنده توان ماده تابعی می‌باشد. بر این اساس سطح داخلی صفحه حلقوی ($r=r_i$) فلز خالص و سطح خارجی صفحه حلقوی ($r=r_o$) سرامیک خالص می‌باشد. بر اساس این روش، مدول یانگ و ضریب پواسون بصورت رابطه (۳) در امتداد شعاعی تغییر می‌کنند.

$$E=\frac{9BG}{3B+G} \quad , \quad \upsilon=\frac{3B-2G}{2(3B+G)} \tag{۳}$$

۲-۳- میدان تغییر مکان

میدان جابجایی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول و به فرم نموی بصورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$U(r,z)=u(r)+z\psi(r)$$
$$W(r,z)=w(r) \tag{۴}$$

در اینجا u و w جابجایی صفحه میانی به ترتیب در جهت r و z و ψ نیز چرخش در راستای θ می‌باشند. روابط کرنش- جابجایی بر اساس تئوری تغییر شکل‌های بزرگ فون کارمن[1] و به شکل نموی بصورت رابطه (۵) بیان می شوند [۶].

$$\delta\varepsilon_r=\frac{\partial\delta u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial\delta w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right)^2+z\frac{\partial\delta\psi}{\partial r}$$
$$\delta\varepsilon_\theta=\frac{\delta u}{r}+z\frac{\delta\psi}{r}$$
$$\delta\gamma_{rz}=\delta\psi+\frac{\partial\delta w}{\partial r} \tag{۵}$$

روابط تنش-کرنش بر اساس قانون هوک بصورت رابطه (۶) بیان می‌شود.

$$\delta\sigma_r=\frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\delta\varepsilon_r+\upsilon\delta\varepsilon_\theta\right]$$
$$\delta\sigma_\theta=\frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\delta\varepsilon_\theta+\upsilon\delta\varepsilon_r\right]$$
$$\delta\sigma_{rz}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left[\delta\gamma_{rz}\right] \tag{۶}$$

منتجه‌های نیرو و گشتاور و نیروی برشی بصورت رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$\left(\delta N_r,\delta N_\theta,\delta Q_r\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\delta\sigma_r,\delta\sigma_\theta,\delta\sigma_{rz}\right)dz$$
$$\left(\delta M_r,\delta M_\theta\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\delta\sigma_r,\delta\sigma_\theta\right)zdz \tag{۷}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۷)- (۵) منتجه‌های نیرو و گشتاور بر اساس جابجایی به شکل رابطه (۸) بدست می‌آیند.

$$\delta N_r=A\left[\frac{\partial\delta u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial\delta w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right)^2+\upsilon\frac{\delta u}{r}\right]$$
$$\delta N_\theta=A\left[\frac{\delta u}{r}+\upsilon\left(\frac{\partial\delta u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial\delta w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right)^2\right)\right]$$
$$\delta M_r=D\left[\frac{\partial\delta\psi}{\partial r}+\upsilon\frac{\delta\psi}{r}\right] \quad \delta M_\theta=D\left[\frac{\delta\psi}{r}+\upsilon\frac{\partial\delta\psi}{\partial r}\right]$$
$$\delta Q_r=C\left[\delta\psi+\frac{\partial\delta w}{\partial r}\right]$$
$$A=\frac{Eh}{1-\upsilon^2} \;,\; D=\frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)} \;,\; C=\frac{k_sEh}{2(1+\upsilon)} \tag{۸}$$

در روابط بالا k_s ضریب اصلاح برشی است که مقدار آن $k_s=5/6$ می‌باشد.

۲-۴- معادلات تعادل

بر اساس اصل حداقل انرژی پتانسیل معادلات تعادل به شکل

1. Von Karman

رابطه (۹) استخراج می‌شوند [۶].

$$\frac{\partial \delta N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\delta N_r-\delta N_\theta\right)=0$$
$$\frac{\partial \delta M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\delta M_r-\delta M_\theta\right)-\delta Q_r=0$$
$$\frac{\partial \delta Q_r}{\partial r}+\frac{\delta Q_r}{r}+\left(\delta N_r+N_r\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2}+\delta N_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\delta N_\theta+N_\theta\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}+\delta N_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\delta q=0 \qquad (۹)$$

در رابطهٔ (۹) برای مسأله کمانش δq از معادله سوم حذف شده و به معادله اول اضافه می‌شود. با جایگذاری روابط (۸) در روابط (۹) معادلات تعادل غیر خطی بر حسب میدان جابجایی بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&A\frac{\partial^2 \delta u}{\partial r^2}+\left[\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{A}{r}\right]\frac{\partial \delta u}{\partial r}+\left[\frac{A}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial A}{\partial r}\right]\delta u\\
&\quad-\left[\frac{A}{r^2}\right]\delta u+\left[A\frac{\partial w}{\partial r}+A\frac{\partial \delta w}{\partial r}\right]\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2}\\
&\quad+\left[A\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{A(1-\upsilon)}{r}\right)\frac{\partial w}{\partial r}\right]\frac{\partial \delta w}{\partial r}\\
&\quad+\left[\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{A(1-\upsilon)}{2r}\right]\left(\frac{\partial \delta w}{\partial r}\right)^2+\delta q=0\\
&D\frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial r^2}+\left[\frac{\partial D}{\partial r}+\frac{D}{r}\right]\frac{\partial \delta \psi}{\partial r}-C\frac{\partial \delta w}{\partial r}\\
&\quad+\left[\frac{D}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial D}{\partial r}-\frac{D}{r^2}-C\right]\delta\psi=0\\
&A\left[\frac{\partial \delta u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w}{\partial r}\right)^2+\upsilon\frac{\delta u}{r}\right]\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)+A\left[\frac{\delta u}{r}+\upsilon\left(\frac{\partial \delta u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta w}{\partial r}\right)^2\right)\right]\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\
&\quad+\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\upsilon\frac{u}{r}\right)+C\right]\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2}\\
&\quad+\left[A\left(\frac{u}{r}+\upsilon\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right)\right)+C\right]\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}\right)\\
&\quad+C\frac{\partial \delta \psi}{\partial r}+\left[\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{C}{r}\right]\delta\psi+\frac{\partial C}{\partial r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}=0 \qquad (۱۰)
\end{aligned}$$

۲-۵- شرایط مرزی حاکم

در این تحقیق شرایط مختلف مرزی مورد استفاده عبارتند از:

تکیه‌گاه گیردار:

$$u=w=\varphi_r=0 \qquad (۱-۱۱)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$u=w=M_r=0 \qquad (۲-۱۱)$$

۳- روش رهایی پویا

روش رهایی پویا، فرایند تکراری حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان می‌باشد. این روش از قانون دوم ریچاردسون به دست می‌آید. بار خارجی در تکرارهای همگرایی ثابت در نظر گرفته می‌شود. در تحلیل‌های نموی، یک نمو بار خارجی به سازه وارد می‌شود و در هنگام اجرای تکرارهای رهایی پویا، مقدار بار ثابت نگه داشته می‌شود. پس از همگرایی در این نمو، یک نمو بار دیگر به سازه وارد می‌شود و فرایند مزبور تا کامل شدن تمام بار خارجی تکرار می‌شود. به عبارت دیگر، رابطه‌سازی روش رهایی پویا با فرض ثابت بودن بار خارجی انجام می‌پذیرد و در تکرارهای رهایی پویا، بار خارجی سازه تغییر نمی‌کند. دستگاه معادله‌های ایستایی در روش رهایی پویا به فضای دینامیکی ساختگی منتقل می شود. رابطه‌سازی این فرایند، به شیوه‌های گوناگون قابل انجام خواهد بود. از آن میان، می‌توان به دو فن تفاوتهای محدود[1] و اجزای محدود[2] اشاره کرد. خاطر نشان می‌کند، متداول‌ترین و اثرگذارترین راهکار وابسته، استفاده از شیوه تفاوت‌های محدود می‌باشد. این کار با افزودن نیروهای جرمی و میرایی ساختگی به رابطهٔ ایستایی سازه، همانند رابطه (۱۲) انجام می‌شود [۲۳].

$$[\mathrm{M}]^n\{\ddot{\mathrm{D}}\}^n+[\mathrm{C}]^n\{\dot{\mathrm{D}}\}^n+\{\mathrm{F}\}^n=\{\mathrm{P}\}^n \qquad (۱۲)$$

در این رابطه، $[\mathrm{M}]^n$، $[\mathrm{C}]^n$، $\{\ddot{\mathrm{D}}\}^n$ و $\{\dot{\mathrm{D}}\}^n$، به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی و بردارهای شتاب و سرعت ساختگی در تکرار nام می‌باشند. همچنین، $\{\mathrm{F}\}^n$ و $\{\mathrm{P}\}^n$ به ترتیب، بردارهای نیروی داخلی و بار خارجی سازه را در گام nام مشخص می‌کنند. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای سرعت و شتاب می‌توانند به صورت روابط (۱۳) تا (۱۵) نوشته شوند.

1. Finite Difference
2. Finite Element

$$\{\ddot{D}\}^{n}=\frac{\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}}-\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}}}{\tau} \quad (۱۳)$$

$$\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}}=\frac{\{D\}^{n}-\{D\}^{n-1}}{\tau} \quad (۱۴)$$

$$\{\dot{D}\}^{n}=\frac{\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}}+\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \quad (۱۵)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۱۳) و (۱۵) در رابطه (۱۲) یک معادله تکرار برای سرعت در ($n+1/2$)امین گام به شکل رابطه (۱۶) بدست می‌آید.

$$\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{([M]/\tau-[C]/2)}{([M]/\tau+[C]/2)}\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}}+\frac{\{P\}-\{F\}}{([M]/\tau+[C]/2)}$$

$$\{D\}^{n+1}=\{D\}^{n}+\tau\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (۱۶)$$

در عبارت معادلات تکرار صریح جرم ساختگی می‌بایست یک ماتریس قطری بدست آید. بنابراین ماتریس میرایی وابسته به ماتریس جرم خواهد بود و به شکل رابطه (۱۷) می‌باشد.

$$[C]=c[M] \quad (۱۷)$$

c ضریب میرایی است. با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۶) معادله به شکل رابطه (۱۸) بدست می‌آید.

$$\{\dot{D}\}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{2-\tau^{n}c^{n}}{2+\tau^{n}c^{n}}\{\dot{D}\}^{n-\frac{1}{2}}+\frac{2\tau^{n}}{2+\tau^{n}c^{n}}\left\{\frac{r_i}{m_{ii}}\right\}^{n}$$

$$\{r\}^{n}=\{P\}^{n}-\{F\}^{n} \quad (۱۸)$$

در رابطه‌های کنونی، τ^n، r_i^n و m_{ii}^n، به ترتیب، گام زمانی در مرحلهٔ n ام، نیروی باقی‌مانده درجه آزادی iام و درایهٔ قطری iام از ماتریس جرم می‌باشند. در روابط بالا ماتریس جرم، ضریب میرایی و گام زمانی مجهول می‌باشند.

معمول‌ترین راهکار برای تعیین درایه‌های قطری جرم، استفاده از تئوری گرشگورین[1] است. این تئوری، مقدارهای جرم را برای تضمین پایداری عددی روش رهایی پویا به صورت رابطه (۱۹) ارائه می‌دهد.

$$m_{ii}\geq 0.25(\tau^{n})^{2}\sum_{j=1}^{N}|k_{ij}| \quad (۱۹)$$

تعداد درجه‌های آزادی سازه را با N نشان می دهند. k_{ij} مؤلفهٔ K می باشد که به صورت رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود.

$$K=\frac{\partial P}{\partial D} \quad (۲۰)$$

اینجا $D=u,w,\psi$ بردار حل تقریبی، و P طرف چپ معادله تعادل (۹) است. بر اساس تئوری دینامیک سازه‌ها، اگر میرایی سازه بحرانی باشد، سرعت همگرایی به پاسخ پایدار بیشینه می‌شود. بنابراین، برای تخمین میرایی بحرانی، اصل ژانگ به کار می‌رود.

$$c^{n}=2\left\{\frac{(\{D\}^{n})^{T}\{F(D)^{n}\}}{(\{D\}^{n})^{T}[M]\{D\}^{n}}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (۲۱)$$

در این رابطه، $\{D\}^{n}$ بردار تغییر مکان در گام nام می‌باشد. در بسیاری از راهبردهای رهایی پویا، گام زمانی ثابت و برابر ۱ یا ۱.۱ فرض می‌شود. روش رهایی پویا یک روش قوی برای حل مسائل مقدار اولیه و از درجه غیرخطی بالا می‌باشد. این در حالی است که معادلات حاکم (۹) بیانگر مسأله‌ای با مقدار مرزی مشخص می‌باشند. بنابراین به منظور بکارگیری الگوریتم روش رهایی پویا، این معادلات باید به فرمت مسائلی با مقدار اولیه مشخص درآیند. برای تبدیل فرمت معادلات به صورت گفته شده باید ترم‌های اینرسی و میرایی به صورت رابطه (۲۲) به سمت راست معادلات تعادل اضافه شوند.

$$\frac{\partial\delta N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}(\delta N_r-\delta N_\theta)=m_u\frac{d^2u}{dt^2}+c_u\frac{du}{dt}$$

$$\frac{\partial\delta M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}(\delta M_r-\delta M_\theta)-\delta Q_r=m_\psi\frac{d^2\psi}{dt^2}+c_\psi\frac{d\psi}{dt}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\delta Q_r}{\partial r}+\frac{\delta Q_r}{r}+(\delta N_r+N_r)\frac{\partial^2\delta w}{\partial r^2}+\delta N_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\\&+(\delta N_\theta+N_\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial\delta w}{\partial r}+\delta N_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\delta q\\&=m_w\frac{d^2w}{dt^2}+c_w\frac{dw}{dt}\end{aligned} \quad (۲۲)$$

حال با جایگذاری روابط (۱۳) و (۱۵) بجای مشتقات اول و دوم زمانی در رابطه (۲۲)، سه معادلهٔ سرعت به شکل رابطه (۲۳) بدست می‌آیند.

$$\dot{u}_i^{n+1/2}=\frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n}(m_{ii}^n)^{-1}\left(\frac{\partial\delta N_r}{\partial r}+\frac{1}{r}(\delta N_r-\delta N_\theta)\right)_i^n+\frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n}\dot{u}_i^{n-1/2}$$

$$\dot{\psi}_i^{n+1/2}=\frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n}(m_{ii}^n)^{-1}\left(\frac{1}{r}(\delta M_r-\delta M_\theta)-\delta Q_r\right.$$

1. Gershgorin's Theorem

$$+\frac{\partial \delta M_r}{\partial r}\Bigg)_i^n+\frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n}\dot{\psi}_i^{n-1/2}$$

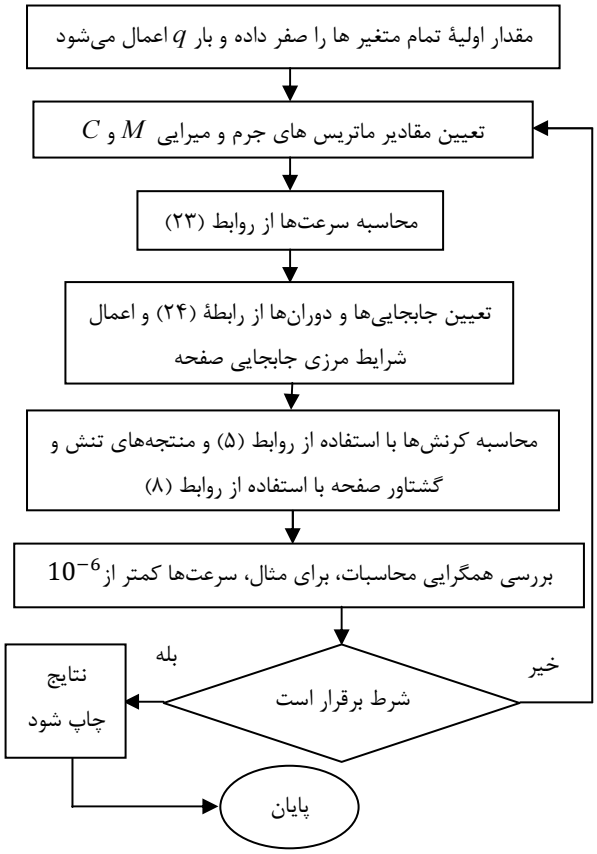
$$\dot{w}_i^{n+1/2}=\frac{2\tau^n}{2+\tau^n c_i^n}\left(m_{ii}^n\right)^{-1}\Bigg(\frac{\partial \delta Q_r}{\partial r}+\frac{\delta Q_r}{r}+\left(\delta N_r+N_r\right)\frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2}+\delta N_r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\left(\delta N_\theta+N_\theta\right)\frac{1}{r}\frac{\partial \delta w}{\partial r}+\delta N_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\Bigg)_i^n+\frac{2-\tau^n c_i^n}{2+\tau^n c_i^n}\dot{w}_i^{n-1/2} \qquad (۲۳)$$

جابجایی‌ها در پایان هر گام زمانی با استفاده از رابطه (۲۴) محاسبه می‌شوند.

$$x^{n+1}=x^n+\tau^{n+1}\dot{x}^{n+1/2} \qquad (۲۴)$$

در رابطهٔ (۲۴)، $x=u,w,\psi$ می‌باشد.

ترتیب مراحل بیان شده برای حل مسأله به کمک روش رهایی پویا مطابق فلوچارت شکل ۳ می‌باشد.



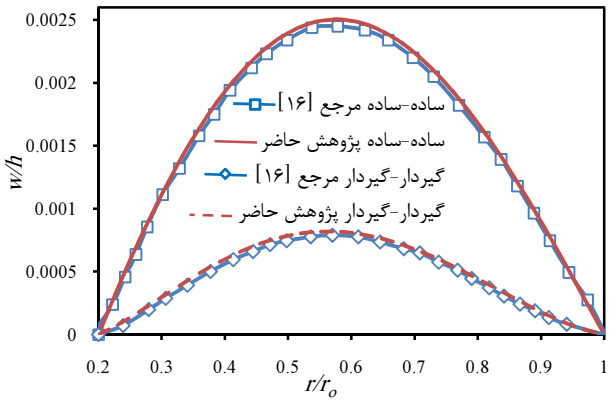
شکل ۳ فلوچارت مراحل حل مسأله به کمک روش رهایی پویا

۴- بحث و نتایج

۴-۱- خمش صفحه حلقوی تابعی

با توجه به اینکه در پژوهش‌های پیشین نتایجی به منظور مقایسه برای خمش صفحات حلقوی تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی وجود ندارد، بنابراین در ابتدا به منظور اعتبار بخشیدن به روش و نتایج حاضر، مقایسه برای صفحات حلقوی همسانگرد صورت گرفته است. به همین منظور برای صفحه حلقوی مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج گلمکانی و کدخدایان [۱۶] برای صفحه حلقوی همسان‌گرد در شکل ۴ آورده شده است. خواص مواد در این تحقیق بر اساس رابطه (۲۵) در نظر گرفته شده است. به منظور مقایسه نتایج بدست آمده برای خمش صفحات حلقوی تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی، هندسه مورد بررسی در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی شده و نتایج در جدول ۱ آورده شده است.

$$E_m=70\text{GPa} \quad , \quad \upsilon_m=0.3$$
$$E_c=427\text{GPa} \quad , \quad \upsilon_c=0.17 \qquad (۲۵)$$



شکل ۴ جابجایی عمودی بی بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز

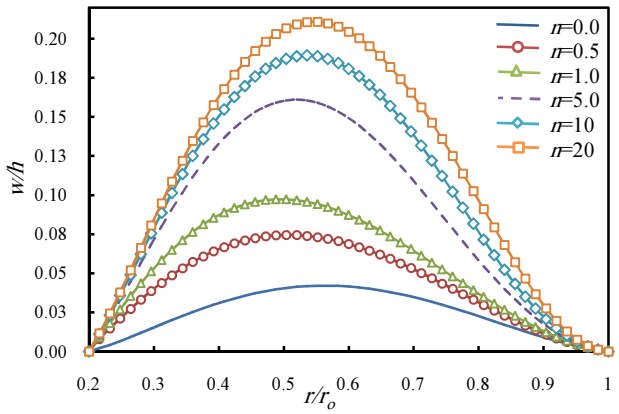
لازم به ذکر است که برای مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس صفحه در فضای سه بعدی بصورت پوسته/صفحه‌ای فرض می‌شود. برای مدل‌سازی بصورت ماده تابعی، صفحه به صد قسمت در راستای شعاعی تقسیم‌بندی می‌شود. به طوری که مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در راستای شعاعی برای هر قسمت یکسان بوده و به‌طور تدریجی از یک قسمت به قسمت دیگر تغییر می‌کند. بدیهی است که با افزایش تعداد قسمت‌ها دقت در مدل‌سازی ماده تابعی افزایش می‌یابد. برای مش‌بندی صفحه نیز از المان S8R استفاده شده است.

در شکل ۴ مقدار بار فشاری $q=10\text{MPa}$ و مقایسه برای توان ماده تابعی $n=0$، نسبت ضخامت به شعاع $h/r_o=0.15$ و همچنین نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $r_i/r_o=0.2$ و برای شرایط مرزی ساده-ساده (SS) و گیردار-گیردار (CC) صورت گرفته است.

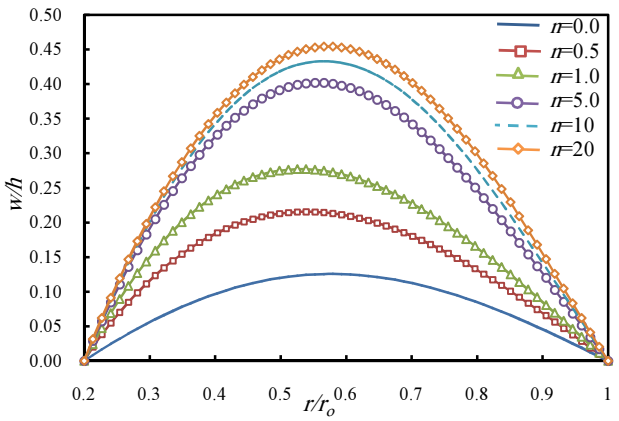
جدول ۱ مقایسه ماکزیمم بار بی بعد ($\bar{w}_{\max} = w_{\max}/h$) صفحه حلقوی تابعی برای نسبت $r_i/r_o = 0.2$

نوع تکیه‌گاه	کسر حجمی سرامیک و فلز (n)	نسبت ضخامت به شعاع خارجی ۰/۰۵		۰/۱		۰/۱۵	
		آباکوس	پژوهش حاضر	آباکوس	پژوهش حاضر	آباکوس	پژوهش حاضر
ساده- ساده	۰/۵	۱/۹۶۸	۱/۸۷۸	۰/۶۵۵	۰/۶۰۳	۰/۲۴۸	۰/۲۱۷
	۱	۲/۲۱	۲/۰۹۹	۰/۷۶۹	۰/۷۰۶	۰/۳۲۱	۰/۲۷۹
	۲	۲/۴۲۴	۲/۳۳۱	۰/۸۷۰	۰/۸۱۱	۰/۳۸۷	۰/۳۴۲
	۵	۲/۶۲۶	۲/۵۵۶	۰/۹۶۱	۰/۹۰۹	۰/۴۴۸	۰/۴۰۳
گیردار-گیردار	۰/۵	۱/۶۹۲	۱/۶۰۲	۰/۳۲۴	۰/۲۸۸	۰/۰۸۵	۰/۰۷۵
	۱	۱/۹۱۶	۱/۸۱۳	۰/۴۰۶	۰/۳۶۴	۰/۱۲۱	۰/۰۹۸
	۲	۲/۱۱۴	۲/۰۲۹	۰/۴۴۷	۰/۴۸۳	۰/۱۳۶	۰/۱۲۴
	۵	۲/۳۱۶	۲/۲۵۰	۰/۵۷۵	۰/۵۴۹	۰/۱۷۰	۰/۱۶۲

با توجه به دقت نتایج بدست آمده و اطمینان از صحت نتایج برای صفحه حلقوی همسانگرد، در ادامه نتایج برای صفحات حلقوی تابعی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی ارائه می‌گردد. خواص مواد برای تمام موارد، طبق رابطه (۲۵) در نظر گرفته شده و مقدار بار نیز $q = 500\text{MPa}$ می‌باشد. شکل‌های ۵ تا ۷ نمودار جابجایی عمودی بی بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز، برای شرایط مرزی گوناگون، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $r_i/r_o = 0.2$، نسبت‌های مختلف توان ماده تابعی و نسبت ضخامت به شعاع $h/r_o = 0.15$ برای شکل‌های ۵ و ۷، همچنین نسبت های ضخامت به شعاع $h/r_o = 0.10, 0.15, 20$ برای شکل ۶ ارائه شده است. با توجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود که درصد اختلاف ماکزیمم خیز بی بعد بین دو نسبت توان ماده تابعی در شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده- ساده در نسبت های $n = 0$ تا $n = 5$ اختلاف کمی وجود دارد. اما با افزایش توان ماده تابعی این اختلاف بیشتر می شود. در شکل ۶ درصد اختلاف ماکزیمم خیز بی بعد بین نسبت توان ماده تابعی $n = 1$ و $n = 5$ در شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار با افزایش نسبت h/r_o افزایش می‌یابد. اما درصد اختلاف ماکزیمم خیز بی بعد بین شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار در نسبت‌های توان ماده تابعی $n = 1$ و $n = 5$ با افزایش نسبت h/r_o کاهش می‌یابد. با توجه به شکل ۷ تکیه‌گاه گیردار-ساده دارای خیز بیشتر نسبت به تکیه‌گاه ساده-گیردار می‌باشد. در شکل ۸ نمودار خیز عمودی بی بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار و ساده-ساده برای توان ماده تابعی $n = 1$ و نسبت‌های مختلف r_i/r_o و نسبت ضخامت به شعاع $h/r_o = 0.15$ رسم شده است.



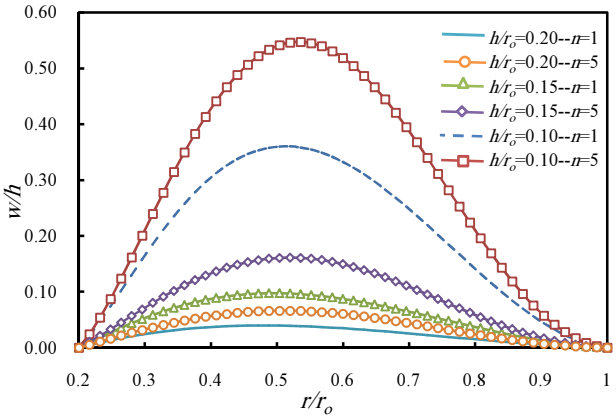
الف- تکیه‌گاه گیردار-گیردار



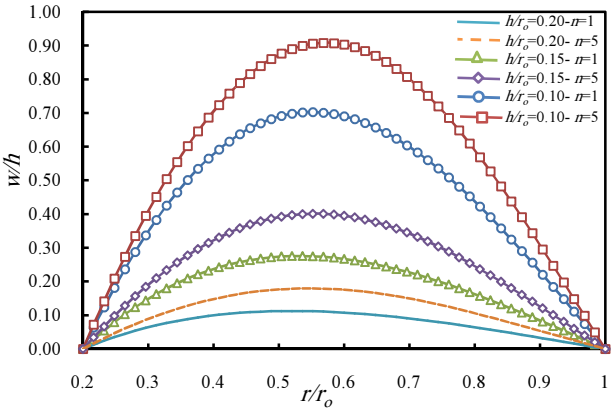
ب- تکیه‌گاه ساده- ساده

شکل ۵ جابجایی عمودی بی بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز

در شکل ۸ درصد اختلاف بین ماکزیمم خیز بی بعد بین شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده برای نسبت‌های $r_i/r_o = 0.3,0.5$ یکسان بوده اما برای نسبت $r_i/r_o = 0.1$ این اختلاف ۸ درصد کمتر از نسبت‌های $r_i/r_o = 0.3,0.5$ می‌باشد.

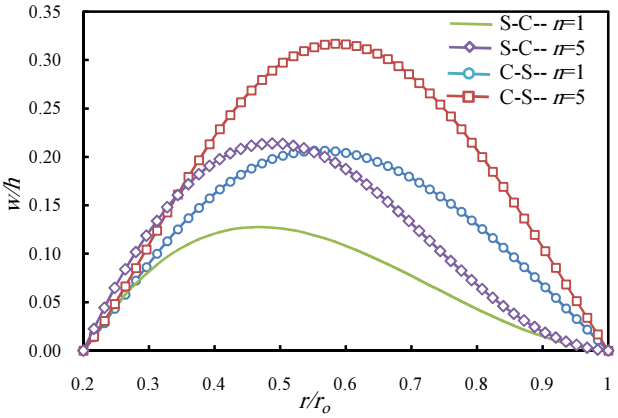


الف- تکیه‌گاه گیردار-گیردار

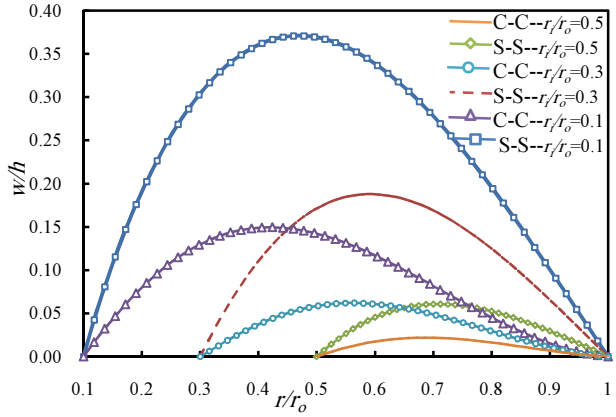


ب- تکیه‌گاه ساده- ساده

شکل ۶ خیز عمودی بی بعد برای نسبت‌های مختلف h/r_o

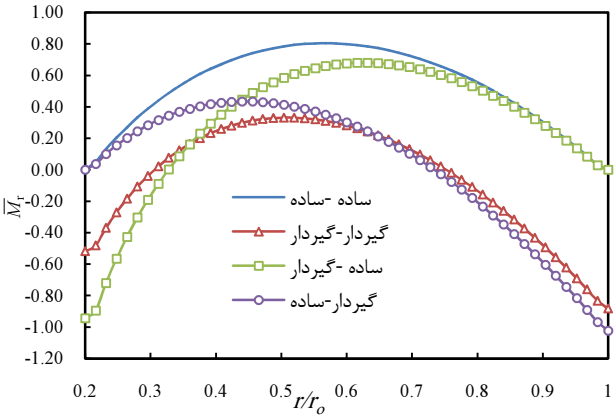


شکل ۷ جابجایی عمودی بی بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز

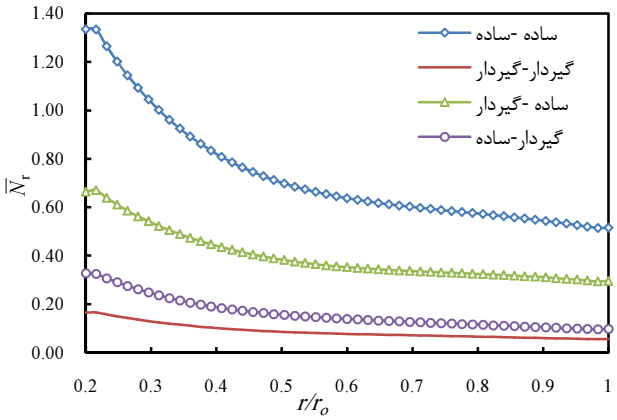


شکل ۸ خیز عمودی بی بعد برای نسبت های مختلف r_i/r_o

در شکل‌های ۹ و ۱۰ $\overline{M}_r = M_r r_o^2 / E_m h^4$ منتجه گشتاور بی‌بعد و $\overline{N}_r = N_r r_o^2 / E_m h^3$ منتجه تنش بی‌بعد هستند.



شکل ۹ گشتاور بی بعد برای شرایط مرزی مختلف



شکل ۱۰ منتجه تنش بی بعد برای شرایط مرزی مختلف

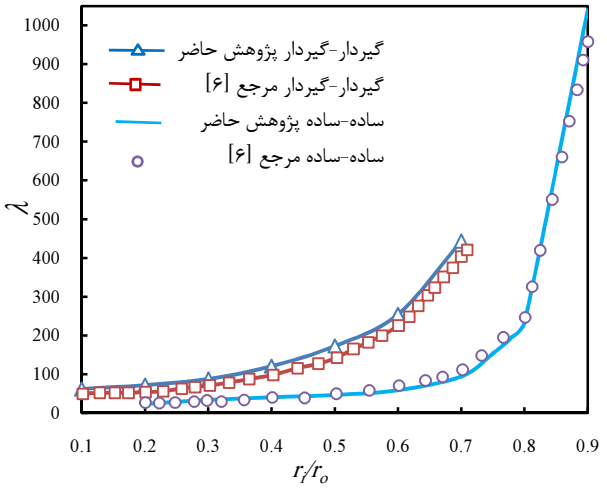
منتجه گشتاور بی‌بعد و منتجه تنش بی‌بعد بر حسب فاصله شعاعی از مرکز برای شرایط مرزی مختلف، توان ماده تابعی

$n=1$ نسبت ضخامت به شعاع $h/r_o=0.15$ همچنین نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $r_i/r_o=0.2$ رسم شده است. شرایط تکیه‌گاهی لبهٔ ساده کمترین گشتاور بی‌بعد و لبهٔ گیردار بیشترین گشتاور بی‌بعد را دارا می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که شرایط مرزی ساده-ساده دارای بیشترین منتجه تنش بی‌بعد و گیردار-گیردار دارای کمترین مقدار است.

۴-۲- کمانش صفحه حلقوی تابعی

به منظور اعتبار بخشیدن به روش و نتایج حاضر و به دلیل عدم وجود نتایجی به منظور مقایسه برای کمانش صفحات حلقوی تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی ، مقایسه برای کمانش صفحات حلقوی همسان‌گرد صورت گرفته است. به همین منظور مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج کدخدایان و همکارانش [۶] برای صفحه حلقوی همسان‌گرد در شکل ۱۱ آورده شده است. در شکل ۱۱ مدول یانگ $E=206\text{GPa}$ و ضریب پواسون $\upsilon=0.3$ و نسبت ضخامت به شعاع $h/r_o=0.01$ و شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار در نظر گرفته شده است. بار بی‌بعد کمانش $\lambda=qr_o^2/D$ و $D=Eh^3/12(1-\upsilon^2)$ می‌باشد. در جدول ۲ پارامتر کمانش برای صفحه حلقوی همسانگرد با نتایج ونگ و همکارانش [۵] برای شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار و نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع و شعاع داخلی به شعاع خارجی مقایسه صورت گرفته است. در جدول ۲ پارامتر بی‌بعد کمانش $\lambda=b(N/D)^{1/2}$ می‌باشد. همچنین به منظور مقایسه نتایج بدست آمده برای کمانش صفحات حلقوی تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی، هندسه مورد نظر در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی شده و نتایج بدست آمده در جدول ۳ آورده شده است.

پس از صحه‌گذاری بر نتایج برای صفحه همسان‌گرد، حال نتایج بدست آمده برای کمانش صفحهٔ حلقوی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی ارائه می‌شود. در ادامه خواص ماده در نظر گرفته شده برای نتایج بدست آمده طبق رابطه (۲۵) می باشد. در شکل ۱۲ نمودار بار بحرانی کمانش بر حسب توان ماده تابعی برای شرایط مرزی متفاوت و نسبت‌های مختلف شعاع داخلی به شعاع خارجی $a/b=0.2,0.4,0.6$ و نسبت ضخامت به شعاع خارجی $h/b=0.15$ ارائه شده است. در شکل ۱۲ درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین $n=0$ و $n=0.5$ در شرایط مرزی مختلف و نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $a/b=0.2$ حدود ۵۰ درصد بوده که این اختلاف با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی در شرایط مرزی مختلف به غیر از شرایط مرزی گیردار-گیردار حدود ۱۰ درصد افزایش می‌یابد که این افزایش در شرایط گیردار-گیردار حدود ۲۰ درصد می‌باشد.



شکل ۱۱ بار بی‌بعد کمانش برحسب نسبت‌های مختلف r_i/r_o

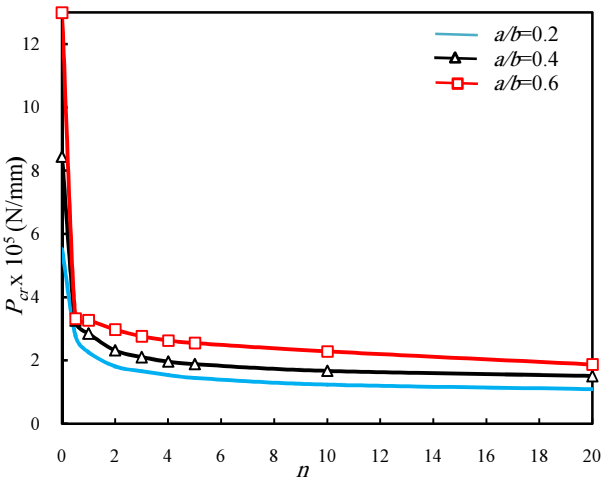
جدول ۲ مقایسه پارامتر بی بعد کمانش λ برای صفحه حلقوی همسانگرد

نوع تکیه‌گاه	نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی	نسبت ضخامت به شعاع خارجی					
		۰/۱۰		۰/۱۵		۰/۲۰	
		مرجع [۵]	پژوهش حاضر	مرجع [۵]	پژوهش حاضر	مرجع [۵]	پژوهش حاضر
ساده-ساده	۰/۲	۴/۲۱۰	۴/۲۴۱	۴/۰۶۳	۴/۰۸۶	۳/۸۸۲	۳/۹۱۴
	۰/۴	۵/۱۸۸	۵/۲۴۸	۴/۹۴۶	۴/۹۹۳	۴/۶۵۹	۴/۶۹۱
	۰/۶	۷/۲۹۷	۷/۳۸۸	۶/۶۸۳	۶/۷۴۶	۶/۰۳۶	۶/۰۲۷
گیردار-گیردار	۰/۲	۶/۸۰۴	۷/۳۱۰	۶/۲۰۹	۶/۶۶۲	۵/۶۱۷	۶/۰۰۰
	۰/۴	۸/۶۶۶	۹/۱۴۷	۷/۵۶۷	۸/۰۰۳	۶/۵۸۵	۶/۸۷۶
	۰/۶	۱۱/۴۰۰	۱۲/۰۵۰	۹/۲۶۳	۹/۷۷۸	۷/۶۶۵	۷/۹۹۳

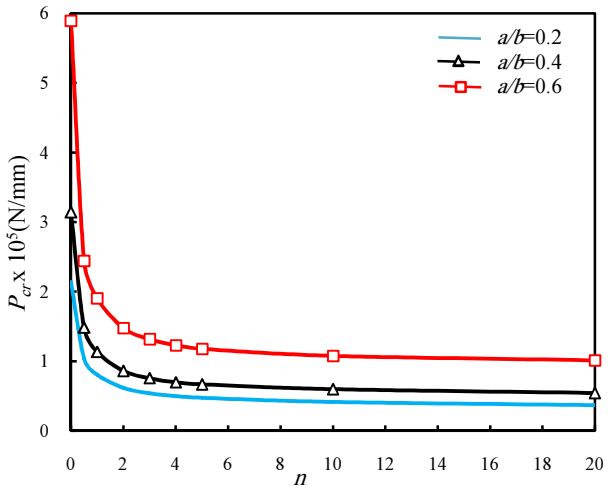
جدول ۳ مقایسه بار بحرانی کمانش P_{cr} (N/mm)، صفحه حلقوی تابعی برای نسبت $a/b = 0.2$

نوع تکیه‌گاه	کسر حجمی سرامیک و فلز (n)	نسبت ضخامت به شعاع خارجی					
		۰/۰۵		۰/۱		۰/۱۵	
		آباکوس	پژوهش حاضر	آباکوس	پژوهش حاضر	آباکوس	پژوهش حاضر
ساده- ساده	۰/۵	۴۷۰۳.۵	۴۵۱۲	۳۵۶۰۵	۳۳۸۳۲	۱۱۰۰۷۰	۱۰۴۲۱۰
	۱	۳۴۲۷	۳۳۵۰	۲۵۹۸۴	۲۵۷۹۲	۷۹۶۳۳	۸۰۴۹۸
	۲	۲۵۸۴	۲۵۲۰	۱۹۷۱۹	۱۹۶۰۲	۶۱۷۹۱	۶۱۴۹۱
	۵	۱۹۴۹	۱۹۳۰	۱۴۹۶۴	۱۴۸۲۸	۴۷۳۲۵	۴۷۳۱۰
گیردار-گیردار	۰/۵	۱۴۸۴۶	۱۵۹۰۰	۱۰۲۵۹۰	۱۰۵۳۲۱	۲۸۳۹۶۰	۲۷۸۹۳۰
	۱	۱۱۶۴۲	۱۲۸۶۰	۷۹۷۰۹	۸۵۷۵۴	۲۰۹۰۱۰	۲۲۶۴۱۹
	۲	۹۲۱۳	۱۰۱۰۰	۶۲۸۶۱	۶۵۵۷۵	۱۷۲۱۷۰	۱۸۱۳۵۲
	۵	۶۸۱۸	۷۴۲۵	۴۶۵۸۳	۴۸۵۰۰	۱۲۸۰۷۰	۱۳۳۸۵۰

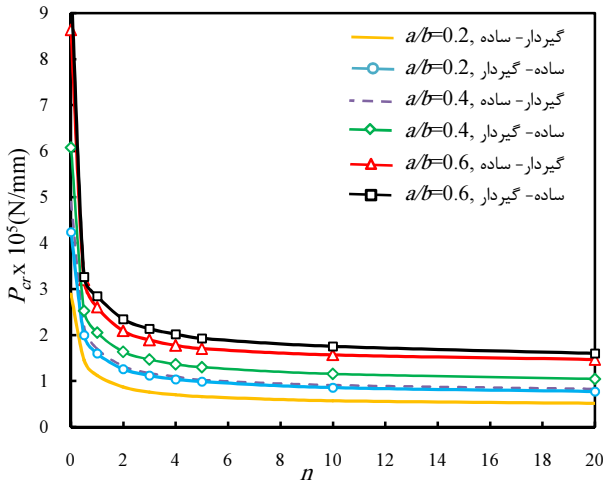
درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین نسبت‌های مختلف توان ماده تابعی با افزایش توان ماده تابعی در شرایط مرزی مختلف کاهش می‌یابد. شکل ۱۳ نمودار بار بحرانی کمانش برحسب نسبت شعاع داخل به شعاع خارج برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع برای $n=1$ و شرایط مرزی ساده- ساده و گیردار-گیردار رسم شده است. مشاهده می‌شود که درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین دو نسبت متوالی ضخامت به شعاع خارجی برای نسبت‌های شعاع داخلی به شعاع خارجی در شرایط مرزی مختلف با افزایش نسبت ضخامت به شعاع کاهش می‌یابد. در شکل ۱۴ نمودار بار بحرانی کمانش بر حسب نسبت ضخامت به شعاع خارجی برای توان های متفاوت ماده تابعی، شرایط تکیه‌گاهی مختلف و نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $a/b = 0.2$ رسم شده است.



الف- تکیه‌گاه گیردار-گیردار

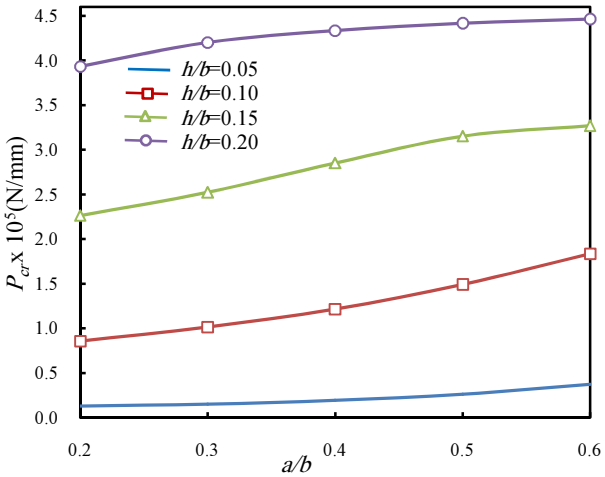


ب- تکیه‌گاه ساده- ساده

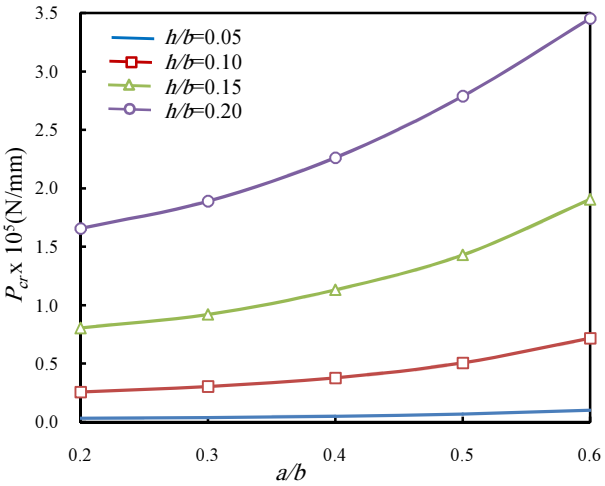


ج- تکیه‌گاه گیردار- ساده و ساده-گیردار

شکل ۱۲ بار بحرانی کمانش بر حسب توان ماده تابعی برای شرایط مرزی مختلف

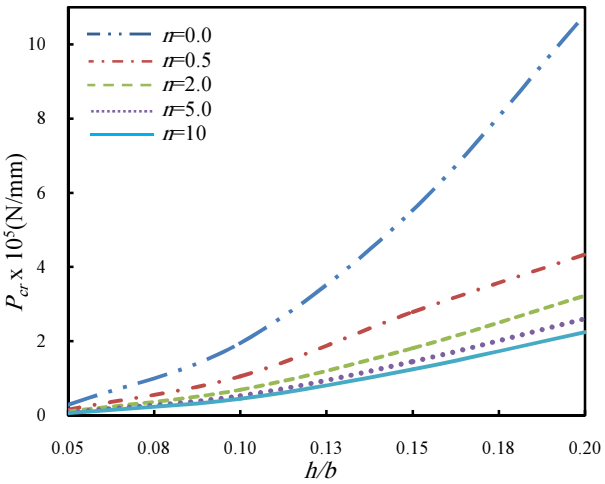


الف- تکیه‌گاه گیردار-گیردار

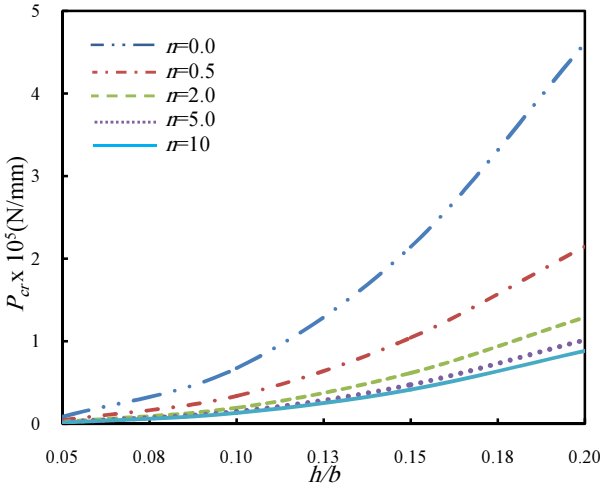


ب- تکیه‌گاه ساده-ساده

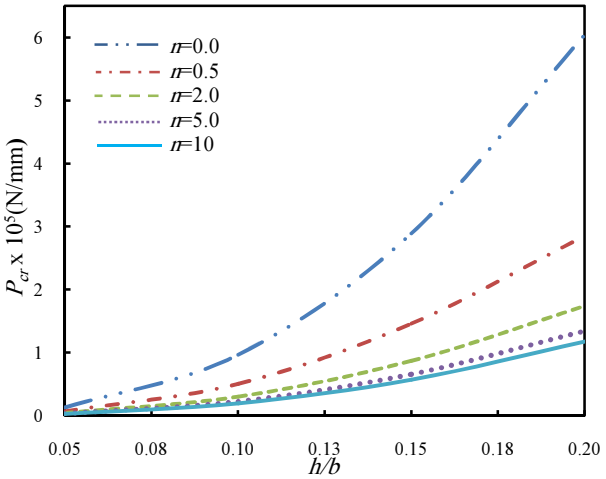
شکل ۱۳ بار بحرانی کمانش بر حسب نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع خارجی



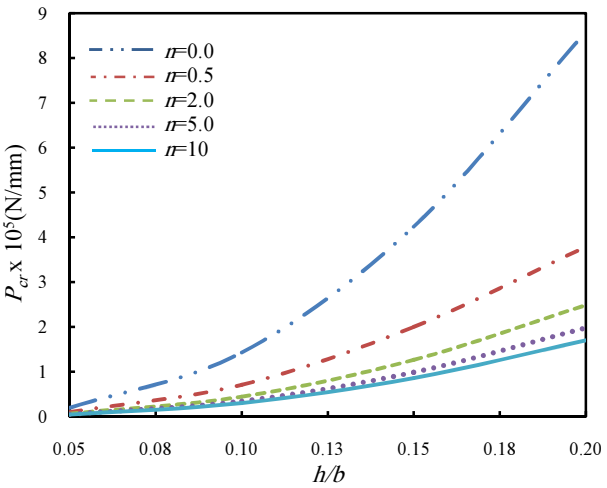
الف- تکیه‌گاه گیردار-گیردار



ب- تکیه‌گاه ساده- ساده



ج- تکیه‌گاه گیردار- ساده

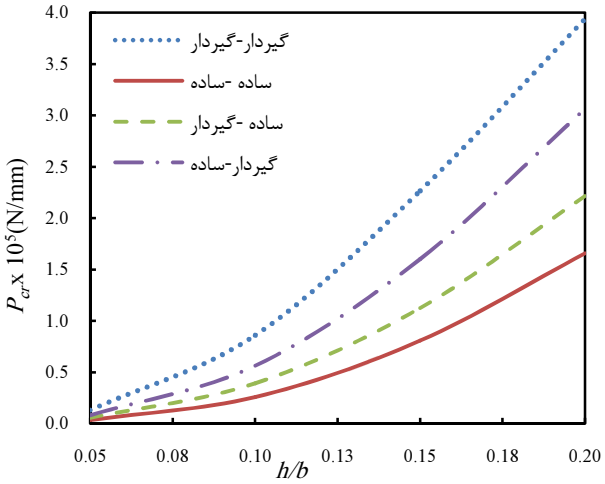


د- تکیه‌گاه ساده- گیردار

شکل ۱۴ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت به شعاع برای توان‌های مختلف ماده تابعی

با توجه به شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که درصد اختلاف بار بحرانی کمانش در شرایط مرزی متفاوت و توان ماده تابعی مختلف بین نسبت ضخامت به شعاع $h/b=0.05$ و $h/b=0.10$ برابر با ۸۶ درصد و برای نسبت $h/b=0.10$ و $h/b=0.15$ برابر با ۶۵ درصد و برای نسبت $h/b=0.15$ و $h/b=0.20$ برابر با ۵۰ درصد می‌باشد.

همچنین مشاهده می‌شود که درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین توان‌های ماده تابعی با افزایش توان کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین توان‌های ماده تابعی افزایش می‌یابد. شکل ۱۵ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت به شعاع برای شرایط مرزی مختلف، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $a/b=0.2$ و توان ماده تابعی $n=1$ رسم شده است. شرایط مرزی گیردار-گیردار دارای بیشترین بار بحرانی کمانش و شرایط مرزی ساده-ساده کمترین بار بحرانی کمانش می‌باشد. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به شعاع درصد اختلاف بار بحرانی کمانش بین شرایط مرزی مختلف کاهش می‌یابد.



شکل ۱۵ بار بحرانی کمانش برحسب نسبت ضخامت به شعاع برای شرایط مرزی مختلف

۵- نتیجه‌گیری

از اهداف کلی این تحقیق، تحلیل خمش و کمانش صفحات حلقوی تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی تحت بار مکانیکی و مشاهده رفتار و پاسخ‌های آن برای اولین بار می‌باشد. همچنین بکارگیری روش عددی رهایی پویا برای تحلیل خمش غیر خطی و کمانش صفحات تابعی است. خواص مکانیکی مواد بر اساس مدل موری-تاناکا فرض شده است. معادلات غیر خطی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبهٔ اول و به فرم نموی استخراج شده است. و به منظور حل معادلات غیر خطی از روش رهایی پویا استفاده شده است. در این روش برای بدست آوردن بار بحرانی کمانش نیاز به خطی سازی معادلات نمی‌باشد. به منظور مقایسه نتایج بدست آمده برای صفحات تابعی با تغییرات خواص در راستای شعاعی، هندسه مورد بررسی در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی شده و نتایج برای خمش و کمانش صفحات تابعی مورد نظر مقایسه شده است. همچنین خیز و بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی گوناگون، تأثیر توان ماده تابعی، نسبت ضخامت به شعاع خارجی، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی مورد بررسی قرار گرفته است. برخی از نتایج بدست آمده عبارتند از:

۱- با بررسی نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی خیز بی بعد در شرایط مرزی گوناکون کاهش می‌یابد.

۲- نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که درصد کاهش بیشینه خیز بر اثر افزایش نسبت h/r_o از ۰/۱ به ۰/۱۵ نسبت به افزایش از ۰/۱۵ به ۰/۲، بیشتر بوده است.

۳- با افزایش توان ماده تابعی درصد کسر حجمی سرامیک کاهش و درصد کسر حجمی فلز افزایش می‌یابد و چون سفتی فلز کمتر از سرامیک می‌باشد در اثر افزایش توان ماده تابعی در خمش خیز صفحه افزایش و در کمانش بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

۴- مشاهده می‌شود که شرایط تکیه‌گاهی ساده-گیردار نسبت به شرایط مرزی گیردار- ساده برای خمش صفحه دارای کمترین خیز و برای کمانش صفحه دارای بیشتر بار بحرانی کمانش می‌باشد.

۵- با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که شرایط تکیه‌گاهی لبهٔ ساده کمترین گشتاور بی بعد و لبهٔ گیردار بیشترین گشتاور بی بعد را دارا می‌باشد. همچنین ملاحظه می‌شود که شرایط مرزی ساده- ساده دارای بیشترین منتجه تنش بی بعد و گیردار-گیردار دارای کمترین مقدار می‌باشد.

۶- مشاهده می‌شود که افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی و همچنین افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می شوند.

۶- مراجع

[1] A. Naderi, Presented response for buckling analysis

of moderately thicksector plates made of functionally graded materials, *Annual International Conference on Mechanical Engineering*, Tehran, Iran,Vol. 18, 2010. (In Persian)

[2] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., New York, McGraw-Hill,1961.

[3] Brush D.O., Almroth B.O., *Buckling of Bars, Plates and Shells*, New York, McGraw-Hill, 1975.

[4] Yamaki N., "Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression", *J. Applied Mechanics*, Vol. 25, 1958, pp. 267-273.

[5] Wang C.M., Xiang Y., Kitipornchai S., Liew K. M., "Buckling solutions for Mindlin plates of various shapes", *J. Eng Struct*, Vol. 16, No. 2, 1994, pp. 119-127.

[6] Kadkhodayan M., Zhang L.C., Sowerby R., "Analysis of wrinkling and buckling of elastic plates by DXDR method", *J. Computers & Structures*, Vol. 65, No. 4, 1997, pp. 561-574.

[7] Salehi M., Safi-Djahanshahi A., "Non-Linear Analysis of Viscoelastic Rectangular Plates Subjected to In-Plane Compression", *J. of Mechanical Research and Application*, Vol. 2, No. 1, 2010, pp. 11-21.

[8] Samsam Shariat B.A., Eslami M.R., "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads", *J. Composite Structures*, Vol. 78, 2007, pp. 433-439.

[9] M. Maarefdoust, M. Kadkhodayan, A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 11-26, 2012. (In Persian)

[10] M. Jabbarzadeh, J. Eskandari Jam, M. Khosravi, The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 59-73, 2012. (In Persian)

[11] Najafizadeh M.M., Eslami M.R., "Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression", *J. of Mechanical Sciences,* Vol. 44, 2002, pp. 2479-2493.

[12] Najafizadeh M.M., Heydari H.R., "An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression", *J. of Mechanical Sciences,* Vol. 50, No. 3, 2008, pp. 603-612.

[13] M. Jabbarzadeh, M. K. Baghdar Delgosha, Thermal buckling analysis of FGM sector plates using differantial quadrature method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 33-45, 2013. (In Persian)

[14] Reddy J.N., Wang C.M., Kitipornchi S., "Ax-symmetric bending of functionally graded circular and annular plates", *Journal Mech. A/Solids,* Vol. 18, 1999, pp. 185-199.

[15] Nosier A., Fallah F., "Reformulation of Mindlin–Reissner governing equations of functionally graded circular plates", *J. Acta Mech*, Vol. 198, 2008, pp. 209-233.

[16] Golmakani M.E., Kadkhodayan M., "Non-Linear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate theories", *J. Composite Structures*, Vol. 93, 2011, pp. 973-982.

[17] Wang T.J., Ma L.S., "Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings", *J. Solids Struct*, Vol. 40, 2003, pp. 3311-3330.

[18] Wang T.J., Ma L.S., "Relationships between ax-symmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory", *J. Solids Struct*, Vol. 41, 2004, pp. 85-101.

[19] Saidi AR., Rasouli A., Sahraee S., " Ax- symmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate theory", *J. Compos Struct*, Vol. 89, 2009, pp. 110-119.

[20] Mousavi S.M., Tahani M., " Analytical solution for bending of moderately thick radially functionally graded sector plates with general boundary conditions using multi-term extended Kantorovich method", *Journal Composites: Part B*, Vol. 43, 2012, pp. 1405-1416.

[21] Hosseini-Hashemi Sh., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., "Vibration analysis of radially FGM sectorial plates of variable thickness on elastic foundations", *J. Compos Struct*, Vol. 92, 2010, pp. 1734-1743.

[22] Bayat M., Saleem M., Sahari B.B., Hamouda A.M.S., Mahdi E., "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads", *J. of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, 2009, pp. 357-372.

[23] Golmakani M.E., "Large deflection thermo elastic analysis of shear deformable functionally graded variable thickness rotating disk", *J. Composites: Part B*, Vol. 45, 2013, pp. 1143-1155.

[24] Hosseini-Hashemi Sh., Rokni Damavandi Taher H., Akhavan H., Daemi N., Alibeigloo A., "Large Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation", *Journal Materials and Design*, Vol. 31, 2010, pp. 1871-1880.

[25] Sepahi O., Forouzan MR., Malekzadeh P., "Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded annular plates with temperature-dependent material properties", *Journal Materials and Design*, Vol. 32, 2011, pp. 4030-4041.

[26] Seifi R., Khoda-yari N., Hosseini H., "Study of critical buckling loads and modes of cross-ply laminated annular plates", *Journal Composites: Part B*, Vol. 43, 2011, pp. 422-430.