http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
بهمن ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۱ ص‌ص ۸۸-۹۸

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۲/۹
تاریخ پذیرش ۹۲/۳/۱۳
ارائه در سایت ۹۲/۹/۳۰

شبیه‌سازی عددی حرکت و تغییر شکل گلبول قرمز در جریان ویسکوز

عبدالرحمان دادوند[۱*]، مهدی نوید بخش[۲]، سهیلا قریشی[۳]، مسعود بقال نژاد[۴]

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
۲- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۳- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۴- کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه
* ارومیه، صندوق پستی ۴۱۹-۵۷۱۵۵، a.dadvand@mee.uut.ac.ir

چکیده- در این تحقیق، حرکت و تغییر شکل همراه با چرخش یک گلبول قرمز در جریان تراکم‌ناپذیر و لزج با استفاده از ترکیب روش شبکه بولتزمن و روش مرز غوطه‌ور شبیه‌سازی می‌شود. گلبول قرمز به صورت یک مرز ارتجاعی غوطه‌ور در جریان سیال در نظر گرفته می‌شود. مزیت بارز روش شبکه بولتزمن این است که در آن برخلاف روش‌های متداول دینامیک سیالات محاسباتی که در آنها معادلات دیفرانسیلی حل می‌شوند فقط یک معادله جبری حل می‌شود. همچنین در روش مرز غوطه‌ور میدان جریان سیال با یک شبکه‌بندی اویلری منظم گسسته می‌شود در حالی که جسم غوطه‌ور و حرکت آن در مختصات لاگرانژی نشان داده می‌شود. بر هم کنش بین سیال و مرز غوطه‌ور با استفاده از یک شکل مناسب تابع دلتای دیراک مدل می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی حاضر توافق خوبی با نتایج تجربی و عددی موجود دارد.

کلیدواژگان: شبکه بولتزمن، مرز غوطه‌ور، جسم ارتجاعی، اندرکنش، حرکت چرخشی.

Numerical simulation of the motion and deformation of red blood cell in viscous flow

A. Dadvand[1*], M. Navidbakhsh[2], S. Ghoreishi[3], M. Baghalnezhad[4]

1- Assist. Prof., Mech. Eng., Urmia Univ. of Tech., Urmia, Iran
2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
3- MSc., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
4- MSc., Mech. Eng., Urmia Univ. of Tech., Urmia, Iran
* P.O.B. 57155-419, Urmia, Iran. a.dadvand@mee.uut.ac.ir

Abstract- In the present study, the tank-treading motion of a red blood cell in the incompressible viscous flow is simulated using the lattice Boltzmann method combined with the immersed boundary method. Thered blood cell is considered as an elastic boundary immersed in the fluid domain. The salient advantage of the lattice Boltzmann method is that unlike the conventional CFD methods itsolves only an algebraic equation. Inthe immersed boundary method the fluid domain is discretized using a regular Eulerian grid, while the immersed boundary and its motion are represented in the Lagrangian coordinates.The fluid-immersed boundary interaction is modeled using an appropriate form of delta function.The results are found to be in good agreement with the available experimental and numerical ones.

Keywords: Lattice Boltzmann, Immersed Boundary, Elasticbody, Interaction, Tank-Treading Motion.

۱- مقدمه

مطالعه جریان خون در مقیاس میکرو (مقیاس گلبول‌های خون) یک مسأله مهم است. خون عبارت است از یک محلول آبی که در آن ذراتی به صورت معلق یافت می‌شوند. این محلول آبی پلاسما نامیده می‌شود که اغلب مشابه یک سیال‌نیوتنی عمل می‌کند [۱] و ذرات معلق موجود در آن گلبول‌های قرمز

خون می‌باشند. روش‌های پیوسته کلاسیک برای مطالعه جریان خون که به دست کم یک قرن پیش بر می‌گردند بر چندین فرض و تقریب استوار هستند که مشکلاتی چون توجیه و اعتبارسنجی دارند. به عنوان مثال در میکرو رگها که در آن بیشترین مقاومت جریان خون اتفاق می‌افتد گلبول‌های قرمز که مهمترین اجزای خون هستند اندازه‌ای به بزرگی قطر مجرای خون دارند. بنابراین انتظار می‌رود که ماهیت گسستهٔ خون نقش تعیین کننده‌ای در میکروسیرکولاسیون ایفاء کند. حرکت گلبول‌های قرمز به سمت مرکز عروق باعث کاهش چشمگیری در لزجت خون در نتیجه کاهش مقاومت جریان خون در مویرگ‌ها می‌شود [۲].

شبیه‌سازی جریان خون هنوز هم یک کار چالش برانگیز است، زیرا نیاز به حل هم‌زمان دینامیک اجزای خون (گلبول‌های قرمز) و سیال پلاسما دارد. روش‌های عددی که برای شبیه‌سازی جریان خون توسعه داده می‌شوند بایستی به طور صریح اجزای خون را در نظر بگیرند. روش‌های مختلفی برای مطالعه گلبول‌های قرمز خون توسعه یافته‌اند که هر کدام دارای مزایا و معایبی هستند. روشی که به طور وسیع برای این منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد روش انتگرال مرزی است که اساس آن استفاده از تکنیک‌های تابع گرین است. از این روش به طور موفقیت‌آمیزی در مطالعهٔ غشاها استفاده شده است. این روش دقت بالایی دارد. با این حال به جز برای هندسه‌های خاص (دامنه سیال نامحدود و دامنه نیمه بی‌نهایت) تابع گرین مناسب در دسترس نیست. این به آن معنی است که بایستی انتگرال‌گیری‌های اضافی انجام شود که زمان محاسبات را به طور چشمگیری افزایش می‌دهد. به علاوه، این روش فقط برای جریان استوکس (جریان بدون اینرسی) معتبر است. البته روش‌های دیگری نیز مانند روش میدان فاز[1] [۳-۵] و روش سطح-مجموعه[2] وجود دارند که می‌توانند هم به رژیم‌های استوکس و هم به رژیم‌های ناویر- استوکس اعمال شوند. مزایای این روش‌ها، توانایی آنها برای شبیه‌سازی تعداد ذرات زیاد در یک سیال است. با این حال، این روش‌ها یک ضخامت محدود برای غشاء تعریف می‌کنند که تا به امروز محدودیت زیادی را برای استخراج داده‌های کمّی دقیق ایجاد کرده‌اند. حل این مشکل نیازمند استفاده از روش المان محدود به همراه ریز کردن شبکه است. انواع دیگر روش‌ها شامل حل معادلات سیال با اتخاذ یک روش مزوسکوپی هستند که از جمله می‌توان به روش‌های دینامیک برخورد چند ذره‌ای (MPCD) یا دینامیک چرخش تصادفی (SRD) اشاره کرد. از مزایای این روش‌ها راحتی اعمال آنها می‌باشد. در این مقاله از یک روش مزوسکوپی جایگزین تحت عنوان روش شبکه بولتزمن استفاده می‌شود. در روش شبکه بولتزمن سیال به عنوان خوشه‌ای از ذرات در نظر گرفته می‌شود که می‌توانند با همدیگر برخورد کنند. از مزیت‌های این روش، سادگی نسبی در پیاده‌سازی و سازگاری با هندسه‌های کاملاً دلخواه است. اخیراً از ترکیب روش شبکه بولتزمن با روش مرز غوطه‌ور برای شبیه‌سازی حرکت و تغییر شکل گلبول‌های قرمز خون استفاده می‌شود. روش مرز غوطه‌ور یکی از روش‌هایی است که در چند دهه اخیر برای شبیه‌سازی دینامیک اجسام ارتجاعی و انعطاف‌پذیر غوطه‌ور در داخل جریان سیال با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است. این روش برای اولین بار توسط پسکین در سال ۱۹۷۲ برای مطالعه جریان اطراف دریچه‌های قلب معرفی شد [۶] و سپس به یک روش کارامد برای حل مسائل شامل اندرکنش سیال-جامد گسترش یافت. این روش ترکیبی از یک فرمولاسیون ریاضی و یک روش عددی است [۷-۹].

فرمولاسیون ریاضی روش مرز غوطه‌ور شامل متغیرهای اویلری و لاگرانژی است که توسط تابع دلتای دیراک به هم مربوط می‌شوند. در گسسته‌سازی مکانی معادلات مربوط به روش مرز غوطه‌ور از یک شبکه کارتزی برای متغیرهای اویلری و یک شبکه منحنی‌الخط برای متغیرهای لاگرانژی استفاده می‌شود. شبکه منحنی‌الخط می‌تواند آزادانه در داخل شبکه کارتزی حرکت کند و هیچ نیازی به انطباق بر شبکه اویلری ندارد. اگرچه مطالعات زیادی روی حرکت چرخشی گلبول‌های قرمز انجام گرفته است، ولی این مطالعات بیشتر روی جریان‌های نامحدود (دامنه بی‌نهایت) متمرکز شده‌اند. در کارهای محدودی هم که روی شبیه‌سازی حرکت و تغییر شکل گلبول‌های قرمز در جریان برشی انجام گرفته از روش‌های عددی غیر از روش شبکه بولتزمن استفاده شده است. بنابراین، در مقاله حاضر حرکت چرخشی گلبول قرمز تحت جریان برشی در داخل یک لوله با استفاده از ترکیب روش‌های شبکه بولتزمن و مرز غوطه‌ور مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج حاصل با یافته‌های تجربی [۱۰] و نتایج عددی حاصل از بکارگیری ترکیب روش المان محدود و روش مرز

1. Phase-field
2. Level-set

غوطه‌ور [۱۱] مقایسه می‌شود.

۲- روش شبکه بولتزمن

در دهه‌های اخیر، روش شبکه بولتزمن (LBM) بسیار مورد توجه بوده است. این روش یک روش جایگزین و قابل اعتماد برای روش‌های مرسوم CFD جهت حل مسایل پیچیده جریان سیال است که تا به حال در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله حل جریان‌های غیر قابل تراکم، جریان داخل سطوح متخلخل، جریان‌های چند فازی و نیز شبیه‌سازی جریان خون با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]. بر خلاف روش‌های متداول که سیال را به صورت یکپارچه در نظر می‌گیرند، در این روش سیال متشکل از ذرات فرضی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین روش شبکه بولتزمن قادر به مدلسازی روابط بین ذرات که اساس جریان‌های چند فازی است می‌باشد. وقتی اعداد ماخ (نسبت سرعت متوسط سیال به سرعت صوت) و نادسن (نسبت مسیر آزاد میانگین به طول مشخصه جریان) به اندازه کافی کوچک باشند معادلات بولتزمن تقریب مناسبی برای معادلات ناویر-استوکس خواهند بود. از آنجا که در روش مرز غوطه‌ور یک جمله نیرویی به معادلات ناویر-استوکس برای در نظر گرفتن اثرات مرز اضافه می‌شود، شکل نهایی معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس به صورت روابط (۱) و (۲) در می‌آیند.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{۱}$$

$$\rho(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \vec{F} \tag{۲}$$

در دو معادله بالا، ρ و η به ترتیب دانسیته جرمی و ویسکوزیته دینامیکی سیال مورد مطالعه می‌باشند. همچنین $\vec{u} = (u,v)$ و p به ترتیب میدان سرعت و فشار بوده و t زمان را نشان می‌دهد. $\vec{F}$ در سمت راست معادله (۲)، نیروهای غشایی (کششی و خمشی) ناشی از وجود اجسام ارتجاعی غوطه‌ور در سیال را نشان می‌دهد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد در روش LBM سیال متشکل از ذرات فرضی است که می‌توانند با هم برخورد کنند. در روش فوق علاوه بر موقعیت فضایی، سرعت نیز گسسته می‌شود. این عمل دلالت بر این دارد که ذرات فقط در امتداد جهت‌هایی که با سرعت‌های گسسته مشخص می‌شوند حرکت می‌کنند. شکل گسسته معادلات شبکه بولتزمن که با استفاده از بسط چاپمن-انسکوگ همان معادلات ناویر-استوکس (معادلات ۱ و ۲) را نتیجه می‌دهد به صورت رابطه (۳) نوشته می‌شود.

$$g_i\left(\vec{x}+\hat{e}_i \Delta t, t+\Delta t\right) - g_i\left(\vec{x},t\right) = -\frac{g_i\left(\vec{x},t\right) - g_i^{eq}\left(\vec{x},t\right)}{\tau} + \Delta t G_i \tag{۳}$$

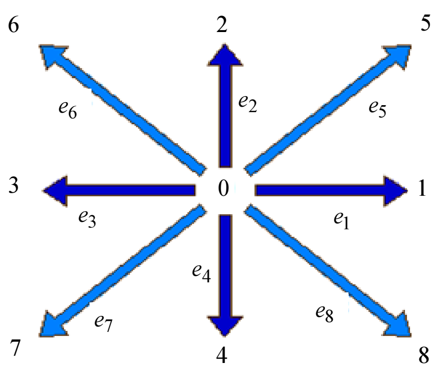
که در آن $g_i(\vec{x},t)$ تابع توزیع ذراتی با سرعت $\hat{e}_i$ است که در زمان t در موقعیت $\vec{x}$ قرار دارند. Δt گام زمانی، $g_i^{eq}(\vec{x},t)$ تابع توزیع تعادلی، τ نشان دهنده زمان بی‌بعد آرامش و G_i جمله نیروی حجمی مربوط به جسم غوطه‌ور در معادله بولتزمن است. در کار حاضر، از روش LBM با مدل دو بعدی D2Q9 استفاده شده است که همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود ۸ ذره متحرک و یک ذره ساکن در این مدل وجود دارد. سرعت‌های این ذرات را می‌توان به صورت رابطه (۴) نوشت [۱۲]:

$$\hat{e}_i = \begin{cases} (i,i) \quad ; \quad i=0 \\ (\cos\frac{\pi(i-1)}{2}, \sin\frac{\pi(i-1)}{2})c \quad ; \quad i=1-4 \\ \sqrt{2}(\cos\frac{\pi(i-9/2)}{2}, \sin\frac{\pi(i-9/2)}{2})c \; ; \quad i=5-8 \end{cases} \tag{۴}$$

در این رابطه $c = \Delta x / \Delta t$ و Δx فاصله دو گره متوالی در شبکه اویلری می‌باشد. تابع توزیع تعادلی به شکل رابطه (۵) نوشته می‌شود.

$$g_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + 3\frac{(\hat{e}_i \cdot \vec{u})}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\hat{e}_i \cdot \vec{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{|\vec{u}|^2}{c^2} \right] \tag{۵}$$

که در آن w_i ضریب‌های وزنی با مقادیر رابطه (۶) می‌باشد.



شکل ۱ سرعت‌ها در مدل شبکه D2Q9

$$\begin{cases} w_0 = 4/9 \\ w_i = 1/9 \quad \text{اگر} \; i = 1-4 \\ w_i = 1/36 \quad \text{اگر} \; i = 5-8 \end{cases} \qquad (۶)$$

از طرفی جمله نیروی ارتجاعی در معادله شبکه بولتزمن به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود:

$$G_i = (1-\frac{1}{2\tau})w_i[\frac{3(\hat{e}_i-\vec{u})}{c^2}+\frac{9(\hat{e}_i\cdot\vec{u})}{c^4}\hat{e}_i]\cdot\vec{F} \qquad (۷)$$

ویسکوزیته سینماتیکی شبکه ν در مدل D2Q9 به صورت زیر با زمان بی‌بعد آرامش τ مرتبط است.

$$\nu = c_s^2(\tau-\frac{1}{2}). \qquad (۸)$$

اگر $\tau > 1$ انتخاب شود، نتایج غیر قابل اعتماد خواهند بود. در حالت کلی بهتر است که $0.5 < \tau \le 1$ انتخاب شود. در کار حاضر $\tau = 1$ انتخاب شده است.

چگالی ماکروسکوپی سیال از رابطه (۹) بدست می‌آید:

$$\rho = \sum_{i=0}^{8} g_i \qquad (۹)$$

همچنین سرعت‌های ماکروسکوپی $\vec{u}$ برابر خواهند بود با:

$$\vec{u} = \frac{1}{\rho}[\sum_{i=0}^{8} g_i\hat{e}_i + \frac{1}{2}\vec{F}\Delta t] \qquad (۱۰)$$

شایان ذکر است که اگر چه در روش LBM جریان تراکم‌ناپذیر هم‌دما شبیه‌سازی می‌شود، اما دانسیته در آن ثابت نیست. به علاوه، فشار به طور صریح در هیچ یک از معادلات بالا ظاهر نشده است. در این روش، از یک معادله حالت به صورت زیر برای به دست آوردن فشار استفاده می‌شود،

$$p = \rho c_s^2 \qquad (۱۱)$$

که در آن p فشار در واحد شبکه، $c_s = c/\sqrt{3}$ سرعت صوت شبکه و ρ چگالی شبکه می‌باشد. در روش شبکه بولتزمن $\Delta x = \Delta t = 1$ و بنابراین $c_s = 1/\sqrt{3}$.همچنین‌رابطه بین فشار فیزیکی p_p و فشار شبکه p به صورت رابطه (۱۲) به دست می‌آید [۱۳]:

$$p_p = \rho_p c_{s,p}^2 = \rho_p\left[c_s^2\left(\frac{\Delta x_p}{\Delta t_p}\right)\right]^2 = \rho_p\left(\frac{\Delta x_p}{\Delta t_p}\right)^2\frac{p}{\rho} \qquad (۱۲)$$

که در آن اندیس p معرف کمیت (متغیر) فیزیکی می‌باشد.

۳- روش مرز غوطه‌ور

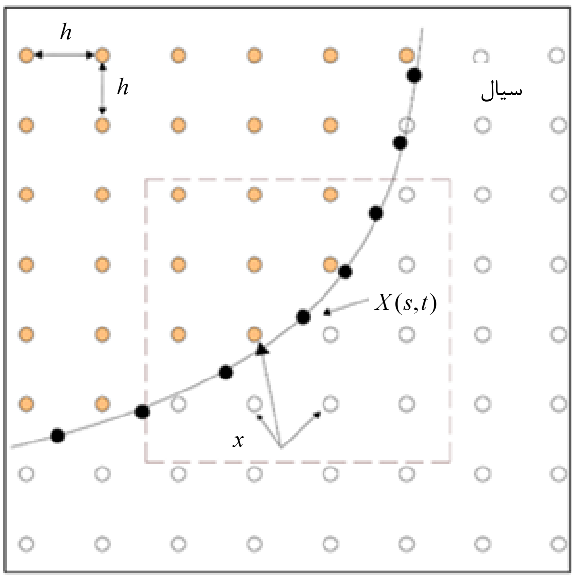
روش مرز غوطه‌ور بر این اصل استوار است که تغییر شکل و حرکت یک مرز ارتجاعی نامتعادل در داخل یک سیال نیرویی ایجاد می‌کند که تمایل دارد مرز را به شکل یا مکان اولیه‌اش (حالت تعادلی) برگرداند. در روش مرز غوطه‌ور برخلاف روش‌های متداول CFD، شرایط مرزی به طور صریح اعمال نمی‌شود بلکه اثرات مرز روی سیال با اضافه کردن یک جمله نیرویی به عنوان چشمه به سمت راست معادله ناویر-استوکس یا معادله شبکه بولتزمن حاکم بر دینامیک سیال در نظر گرفته می‌شود. سپس ساختار مرز غوطه‌ور بر اساس سرعت سیال در مرز به روز رسانی می‌شود. شکل ۲ نشانگر بخشی از یک مرز غوطه‌ور در سیال است. ساختار منحنی به شکل پارامتری $\vec{X}(s,t)$ بیان می‌شود که در آن s مختصات لاگرانژی در امتداد منحنی می‌باشد.

۳-۱- مدل گلبول قرمز

بدون اعمال نیروی خارجی، گلبول قرمز به شکل یک دیسک مقعرالطرفین است تا نسبت سطح به حجمش تا حد قابل توجهی بیش از این نسبت برای کره باشد و به این ترتیب امکان عبور از مویرگ ها را داشته باشد [۱۴].

شکل ایستایی پروفیل سطح مقطع یک گلبول قرمز عادی در صفحه $x-y$ با رابطه (۱۳) بیان می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} & x = \sin\theta \\ & y = \cos\theta\left[0.207 + 2.002\sin\theta - 1.122\sin^2\theta\right] \\ & 0 < \theta < 2\pi \end{aligned} \qquad (۱۳)$$



شکل ۲ طرحواره مرز غوطه‌ور در سیال

ولی در کار حاضر جهت مقایسه نتایج با نمونه تجربی و نتایج عددی [۱۱] شکل اولیه مرز غوطه‌ور دایره در نظر گرفته شده است که به صورت رابطه (۱۴) می‌باشد.

$$\vec{X}(\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 0<\theta<2\pi \tag{۱۴}$$

۳-۲- نیروی لاگرانژی مرز

آزمایش نشان داده است که غشاء گلبول قرمز یک ماده بسیار تغییر شکل‌پذیر، نو-هوکی، لزج و ارتجاعی است [۱۶]. به علاوه، این غشا دارای مقاومت خمشی نیز می‌باشد که با افزایش انحنای غشاء افزایش پیدا می‌کند [۱۷]. در مطالعه حاضر، مؤلفه‌های تنش غشا بر اساس کار جانگ و همکاران [۱۸] انتخاب شده است. مؤلفه‌های کششی- فشاری تنش به صورت رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود:

$$\vec{T}_s=\frac{E_s}{\varepsilon^{3/2}}(\varepsilon^3-1) \tag{۱۵}$$

که در آن E_s مدول ارتجاعی (ثابت کششی/فشاری) و ε نسبت کشش می‌باشد که برابر $|\partial\vec{X}/\partial s|$ است. مؤلفه خمشی تنش نیز از رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

$$\vec{T}_b=\frac{d}{ds}\left[E_b(\kappa-\kappa_0)\right] \tag{۱۶}$$

که در آن E_b مدول خمشی بوده و κ و κ_0 انحناهای لحظه‌ای و اولیه غشا هستند که به ترتیب برابر با $|\partial^2\vec{X}/\partial s^2|$ و $|\partial^2\vec{X}_0/\partial s^2|$ هستند. بنابراین تنش کلی ناشی از تغییر شکل غشا را می‌توان به صورت رابطه (۱۷) نوشت:

$$\vec{T}=\vec{T}_s+\vec{T}_b=T_s\hat{t}+T_b\hat{n} \tag{۱۷}$$

که در آن $\hat{t}$ و $\hat{n}$ به ترتیب بردارهای یکه مماس و عمود بر غشاء می‌باشند.

چگالی نیروی لاگرانژی $\vec{f}$ از دو قسمت کششی- فشاری و خمشی به صورت زیر تشکیل شده است:

$$\vec{f}(s,t)=\vec{f}_s(s,t)+\vec{f}_b(s,t) \tag{۱۸}$$

این نیرو با چگالی انرژی ارتجاعی Ξ به صورت رابطه (۱۹) مربوط می‌شود (با استفاده از قضیه کار مجازی):

$$\vec{f}(s,t)=-\frac{\partial\Xi}{\partial\vec{X}}=-\frac{\partial(\Xi_s+\Xi_b)}{\partial\vec{X}}. \tag{۱۹}$$

چگالی انرژی پتانسیل ارتجاعی شامل یک قسمت کششی- فشاری (Ξ_s) و یک قسمت خمشی (Ξ_b) می‌باشد که به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) تقریب زده می‌شوند:

$$\Xi_s=\frac{1}{2}E_s\int\left(\left|\frac{\partial\vec{X}(s,t)}{\partial s}-1\right|\right)^2 ds \tag{۲۰}$$

$$\Xi_b=\frac{1}{2}E_b\int\left(\frac{\partial^2\vec{X}(s,t)}{\partial s^2}\right)^2 ds \tag{۲۱}$$

شکل گسسته چگالی انرژی پتانسیل ارتجاعی کششی- فشاری و خمشی و نیز چگالی نیروی لاگرانژی $\vec{f}$ به صورت روابط (۲۲) تا (۲۷) می‌باشد.

$$\Xi_s=\frac{1}{2}E_s\sum_{m=1}^{n_f-1}\left(\frac{|\vec{X}_{m+1}-\vec{X}_m|}{\Delta s}-1\right)^2\Delta s \tag{۲۲}$$

$$(\vec{T}_s)_l=\frac{E_s}{\Delta s}\sum_{m=1}^{n_f-1}\left(\frac{\varepsilon^3-1}{\varepsilon^{3/2}}\right)\frac{\vec{X}_{m+1}-\vec{X}_m}{|\vec{X}_{m+1}-\vec{X}_m|}\times(\delta_{m+1,l}-\delta_{m,l}) \tag{۲۳}$$

$$(\vec{f}_s)_l=\frac{E_s}{(\Delta s)^2}\sum_{m=1}^{n_f-1}\Big\{(|\vec{X}_{m+1}-\vec{X}_m|-\Delta s)\times \frac{\vec{X}_{m+1}-\vec{X}_m}{|\vec{X}_{m+1}-\vec{X}_m|}(\delta_{m,l}-\delta_{m+1,l})\Big\} \tag{۲۴}$$

$$\Xi_b=\frac{1}{2}E_b\sum_{m=2}^{n_f-1}\left(\frac{|\vec{X}_{m+1}+\vec{X}_{m-1}-2\vec{X}_m|^2}{(\Delta s)^4}\right)\Delta s \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}(\vec{T}_b)_l=\frac{E_b}{(\Delta s)^4}\Big[&\sum_{m=2}^{n_f-1}(\vec{X}_{m+1}+\vec{X}_{m-1}-2\vec{X}_m)(2\delta_{m,l}-\delta_{m+1,l}-\delta_{m-1,l})\\&-\sum_{m=2}^{n_f-1}(\vec{X}^0_{m+1}+\vec{X}^0_{m-1}-2\vec{X}^0_m)(2\delta_{m,l}-\delta_{m+1,l}-\delta_{m-1,l})\Big]\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$(\vec{f}_b)_l=\frac{E_b}{(\Delta s)^4}\sum_{m=2}^{n_f-1}\Big\{(\vec{X}_{m+1}+\vec{X}_{m-1}-2\vec{X}_m)(2\delta_{m,l}-\delta_{m+1,l}-\delta_{m-1,l})\Big\} \tag{۲۷}$$

در معادلات (۱۹) تا (۲۴) $l=1,2,...,n_f$ (n_f تعداد کل گره‌های لاگرانژی روی غشا است)، $(\vec{T}_s)_l$ و $(\vec{T}_b)_l$ به ترتیب مؤلفه‌های کششی- فشاری و خمشی تنش و $(\vec{f}_s)_l$ و $(\vec{f}_b)_l$ نیروهای لاگرانژی ارتجاعی در گره lام غشا و δ_{kl} تابع دلتای کرونکر است.

۴- اندرکنش بین سیال- جامد

اندرکنش بین سیال- جامد را می‌توان از ارتباط بین کمیت‌های لاگرانژی و اویلری به دست آورد. در این قسمت چگونگی انتقال

نیروهای لاگرانژی غشای مربوط به قسمت روش مرز غوطه‌ور به میدان سیال مربوط به قسمت روش شبکه بولتزمن مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین سرعت مرز غوطه‌ور از سرعت سیال درون‌یابی می‌شود. قابل ذکر است که در کار حاضر برای درون‌یابی نیرو و سرعت از روش مورد استفاده در [۱۹] که یک روش صریح است استفاده شده است. ارتباط بین نیروی لاگرانژی مرز غوطه‌ور $\vec{f}(s,t)$ و نیروی اویلری میدان جریان سیال $\vec{F}(\vec{x},t)$ توسط رابطه (۲۸) بیان می‌شود:

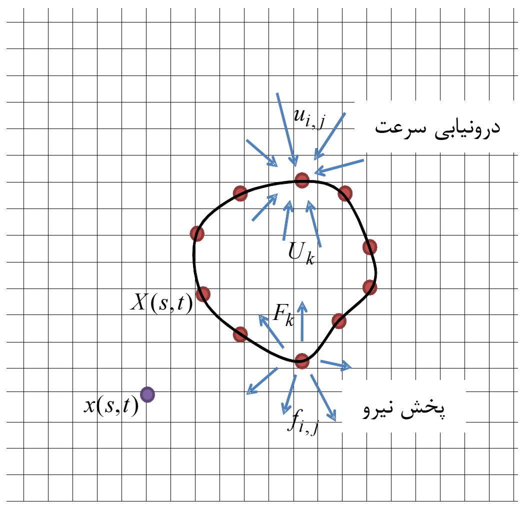
$$\vec{F}(\vec{x},t)=\int_{\Gamma}\vec{f}(s,t)\delta(\vec{x}-\vec{X}(s,t))ds \tag{۲۸}$$

که در آن Γ معرف مرز غوطه‌ور است. به طور مشابه سرعت نقاط لاگرانژی غشاء را می‌توان بر اساس سرعت سیال به روز رسانی کرد.

$$\vec{U}(s,t)=\vec{u}(\vec{X}(s,t),t)=\frac{\partial\vec{X}(s,t)}{\partial t}=\int_{\Gamma}\vec{u}(\vec{x},t)\delta(\vec{x}-\vec{X}(s,t))d\vec{x} \tag{۲۹}$$

شایان ذکر است که در کار حاضر سرعت سیال $\vec{u}(\vec{x},t)$ با استفاده از روش شبکه بولتزمن به دست می‌آید. در واقع در اینجا از این واقعیت استفاده شده است که مرز غوطه‌ور ارتجاعی با سرعت محلی سیال حرکت می‌کند.

شکل گسسته معادلات (۲۸) و (۲۹) به صورت روابط (۳۰) و (۳۱) می‌باشد [۱۹].



شکل ۳ نمایش متغیرهای لاگرانژی و اویلری در یک میدان نمونه

$$\vec{F}^n(\vec{x})=\sum_{s}\vec{f}^n(s)\delta_h(\vec{x}-\vec{X}^n(s))\Delta s \tag{۳۰}$$

$$\vec{U}^{n+1}(s)=\sum_{x}\vec{u}^{n+1}(\vec{x})\delta_h(\vec{x}-\vec{X}^n(s))h^2 \tag{۳۱}$$

روش‌های مختلفی برای ساده‌سازی و هموارسازی تابع دلتای دیراک وجود دارد که معروف‌ترین آنها توسط پسکین پیشنهاد شده است [۲۰].

$$\delta(\vec{x})=\frac{1}{h^2}\phi(\frac{x}{h})\phi(\frac{y}{h}) \tag{۳۲}$$

$$\phi(r)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+\cos\frac{\pi r}{2}) & ; \quad |r|\le 2\\ 0 & ; \quad |r|>2\end{cases} \tag{۳۳}$$

در رابطه (۳۲)، h فاصله گره‌ها در شبکه و r فاصله بین گره‌های اویلری و لاگرانژی می‌باشد.

۵- الگوریتم حل مسأله [۱۹]

۱) محاسبه نیروهای لاگرانژی مرز غوطه‌ور $\vec{f}^{n+1}$ در نقاط لاگرانژی $\vec{X}^n$ با استفاده از معادلات (۲۴) و (۲۷)؛

۲) پخش و توزیع نیروهای لاگرانژی $\vec{f}^{n+1}$ به نقاط اویلری شبکه $\vec{x}^n$ با استفاده از معادله (۳۰) و بدست آوردن نیروهای اویلری $\vec{F}^n$؛

۳) به روز رسانی تابع توزیع سرعت با استفاده از معادلات (۱) و (۷)؛

۴) محاسبه سرعت جدید اویلری سیال $\vec{u}^{n+1}$ با استفاده از معادلات (۹) و (۱۰)؛

۵) درون‌یابی سرعت لاگرانژی مرز غوطه‌ور $\vec{U}^{n+1}$ از سرعت اویلری سیال $\vec{u}^{n+1}$ با استفاده از معادله (۳۱)؛

۶) به روز رسانی موقعیت نقاط مرز غوطه‌وربا استفاده از سرعت‌های لاگرانژی $\vec{U}^{n+1}$؛

۷) تکرار مراحل ۱ تا ۶؛

۶ - نتایج و بحث

یکی از پدیده‌های متداول مربوط به حرکت ذرات لزج و ارتجاعی مانند گلبول‌های قرمز در جریان برشی خون در رگ‌ها، اثرات چرخشی می‌باشد. این اثر همان جابجایی رو به بالا همراه با چرخش گلبول قرمز خون در داخل جریان برشی است. چرخش گلبول قرمز در اثر نیروی برشی سیال اطراف آن به

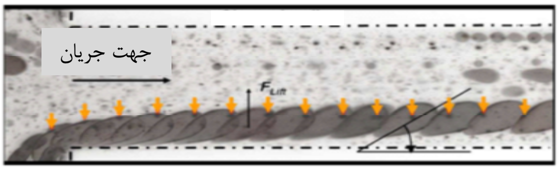
وجود می‌آید. در اثر پدیده چرخشی یک نیروی بالابر روی گلبول قرمز تغییر شکل یافته اعمال شده و در صورت عدم وجود سایر نیروها از قبیل نیروی گرانش (مانند کار حاضر) آن را به سمت مرکز کانال هدایت می‌کند. شایان ذکر است که در حرکت چرخشی بعد از یک تغییر شکل اولیه، شکل گلبول قرمز در حین حرکت ثابت باقی می‌ماند. در این تحقیق پدیده چرخشی یک گلبول قرمز در یک جریان برشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول ۱ تعداد نقاط لاگرانژی، تعداد نقاط اویلری، عدد رینولدز و گام زمانی به کار رفته را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که تعداد نقاط اویلری ذکر شده در یک فرایند بررسی استقلال نتایج از شبکه به دست آمده‌اند. در حالی که در روش‌های لاگرانژی از روش متداول ریز کردن شبکه برای بررسی دقت یک روش عددی استفاده نمی‌شود. در ابتدا برای مقایسه نتایج کار حاضر با نتایج تجربی و عددی موجود شکل اولیه مرز غوطه‌ور به صورت دایره (معادله ۱۴) در نظر گرفته شده است.

نتایج حاصل با نتایج تجربی فیشر و اشمید-شونبین [۱۰] و نتایج عددی فرانک و همکاران [۱۱] مقایسه می‌شود (شکل ۴). همان‌طور که از شکل ۴ پیداست مرز ارتجاعی ضمن حرکت چرخشی در جریان برشی به سمت مرکز کانال حرکت می‌کند. نقاط پررنگ روی مرز این چرخش را به خوبی نشان می‌دهد. همچنین تطابق خوبی بین نتایج عددی حاضر (شکل ۴- ب) و نتایج تجربی [۱۰] (شکل ۴- الف) وجود دارد.

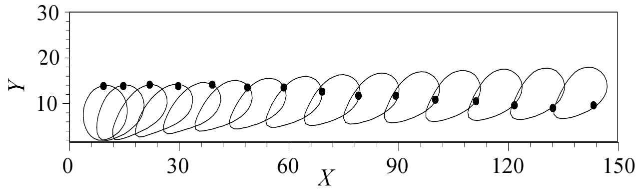
مقایسه نتایج عددی حاضر (شکل ۴- ب) با نتایج عددی [۱۱] (شکل ۴- ج) که با استفاده از روش ترکیبی المان محدود- مرز غوطه‌ور به دست آمده است، نشان می‌دهد که نتایج کار حاضر دقیق‌تر است (تغییر شکل گلبول قرمز در کار حاضر به نتایج تجربی [۱۰] نزدیک‌تر است). دلیل این امر می‌تواند مربوط به این حقیقت باشد که در مطالعه حاضر از یک شبکه‌بندی لاگرانژی غیریکنواخت برای گسسته‌سازی مرز غوطه‌ور استفاده شده است.

جدول ۱ مقادیر ثابت‌های حل

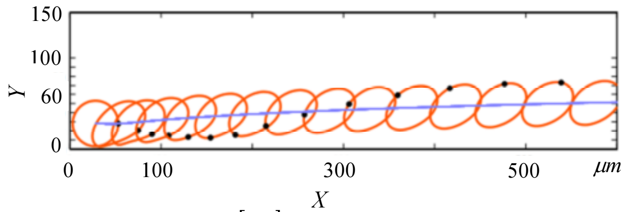
تعداد نقاط لاگرانژی	۳۲
تعداد نقاط اویلری در جهت x	۱۵۰
تعداد نقاط اویلری در جهت y	۳۰
Re	۰/۹۷۲
Δt	۰/۰۰۰۱



الف- نتایج تجربی [۱۰]



ب- نتایج عددی حاضر



ج- نتایج عددی [۱۱]

شکل ۴ حرکت رو به مرکز کانال یک مرز ارتجاعی تغییر شکل یافته همراه با چرخش

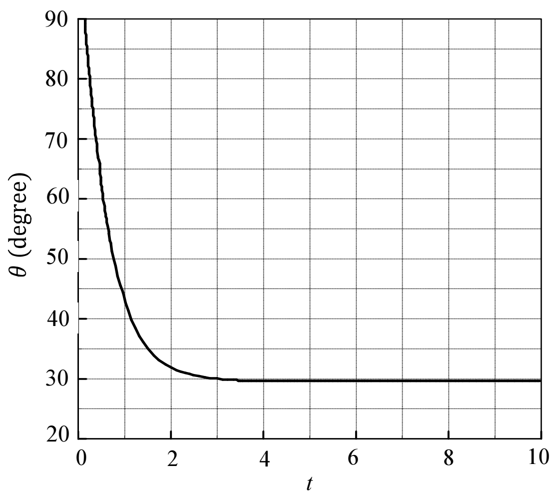
به این ترتیب که چگالی نقاط لاگرانژی روی قسمت‌هایی از مرز غوطه‌ور که در نزدیکی دیوارهٔ کانال واقع شده‌اند بیشتر است. از آنجا که این قسمت‌ها دچار تغییر شکل بیشتری به واسطه نیروی برشی بیشتر می‌شوند، بایستی از یک شبکه‌بندی لاگرانژی ریزتر در آن‌ها استفاده کرد.

همان‌طور که گفته شد حرکت TT همان جابجایی رو به بالا همراه با چرخش گلبول قرمز خون در یک جریان برشی می‌باشد که در طول حرکت رو به جلو باعث تغییر شکل گلبول قرمز می‌شود. چون جریان در داخل کانال لزج است بنابرین دارای لایه های برشی در داخل لایه مرزی می‌باشد. در حالت جریان کاملاً فراگیر هر دو لایه مرزی بالا و پایین کانال به هم رسیده و جریان در کل سطح مقطع کانال برشی است. در این صورت بخش بالایی مرز غوطه‌ور تحت تأثیر سرعت انتقالی بیشتری نسبت به بخش پایینی آن قرار می‌گیرد که باعث چرخش گلبول گلبول قرمز می‌شود. از طرفی طبق رابطه $\tau = \mu du/dy$ بخش پایینی مرز غوطه‌ور تحت تأثیر نیروی برشی بیشتری نسبت به بخش بالایی آن قرار می‌گیرد. این امر باعث می‌شود یک نیروی بالابر از سیال به مرز وارد شود و مرز را به مرکز کانال هدایت کند. بعد از یک مدت زمان مشخص که

گلبول قرمز به مرکز کانال رسید نیروهای بالابر عمل کننده روی گلبول از سمت بالا و پایین به تعادل می‌رسند. در نتیجه از یک زمان معین به بعد حرکت چرخشی گلبول را نخواهیم داشت. شکل ۵ به طور واضح این موضوع را نشان می‌دهد.

در ادامه اندرکنش سیال-جامد شامل روند تغییرات ایجاد شده در جریان سیال در نتیجه حرکت مرز غوطه‌ور در آن و اثراتی که این مرز روی سیال می‌گذارد، بررسی شده است. چون در نخستین گام زمانی مرز غوطه‌ور هیچ گونه تغییر شکلی ندارد و چون هنوز هیچ نیروی کششی و خمشی در مرز ایجاد نشده است، بنابراین معادلات معمولی حرکت سیال حل شده و پروفیل‌های عادی سرعت به دست می‌آیند که در اینجا از نمایش آن صرف‌نظر شده است و نتایج از گام‌های زمانی بالاتر (به دلیل تغییر شکل مرز و پدیدار شدن نیروهای لاگرانژی در مرز) نشان داده شده است.

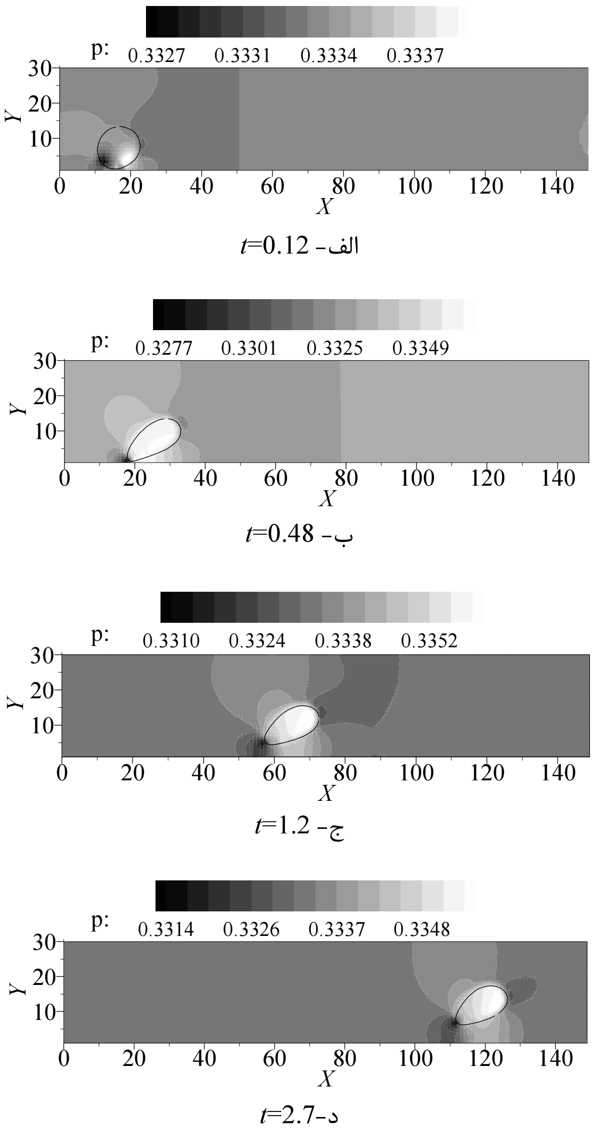
کانتورهای فشار برای گلبول قرمز نشان داده شده در شکل ۴ در چهار گام زمانی مختلف ۰/۱۲، ۰/۴۸، ۱/۲ و ۲/۷ در شکل ۶ نشان داده شده است. با توجه به این که مرز غوطه‌ور بدون جرم فرض شده است فقط تأثیر جزئی روی جریان سیال می‌گذارد. بنابراین تقریباً تمام اندرکنش‌ها در ناحیه بسیار کوچکی حول مرز غوطه‌ور اتفاق می‌افتد. مطابق شکل ۶ یک پرش در مقدار فشار داخل گلبول و بیرون آن دیده می‌شود به طوری که مقدار فشار در داخل گلبول قرمز بیشتر از خارج آن است. ولی برخلاف این اختلاف فشار هیچ نوع ناپیوستگی بین جریان داخل و خارج گلبول دیده نمی‌شود.



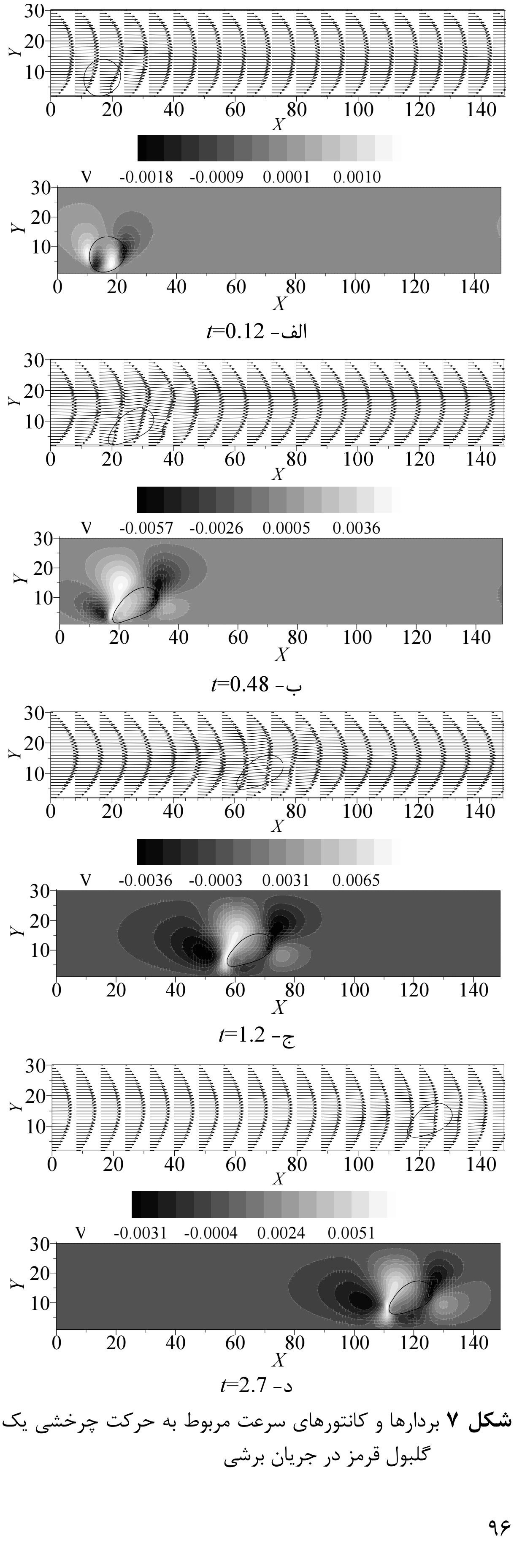
شکل ۵ نمودار تغییرات زاویه‌ای برحسب زمان برای گلبول قرمز نشان داده شده در شکل ۴

این بدان معنی است که انتقال اثر سیال بیرونی به داخلی از طریق مرز غوطه‌ور بدون ناپیوستگی انجام می‌شود. همچنین دیده می‌شود که همچنان که گلبول به سمت مرکز کانال حرکت می‌کند، از شدت ناحیه پر فشار بین دیواره پایینی کانال و سطح پایینی گلبول کاسته می‌شود. این ناحیه پر فشار در واقع عامل اصلی ایجاد نیروی بالابر اعمال شده از طرف سیال به گلبول و هدایت آن به سمت وسط کانال است.

بردارهای سرعت به همراه کانتورهای مؤلفه y سرعت در چهار گام زمانی مختلف ۰/۱۲، ۰/۴۸، ۱/۲ و ۲/۷ در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۶ کانتورهای فشار مربوط به حرکت چرخشی یک گلبول قرمز در جریان برشی



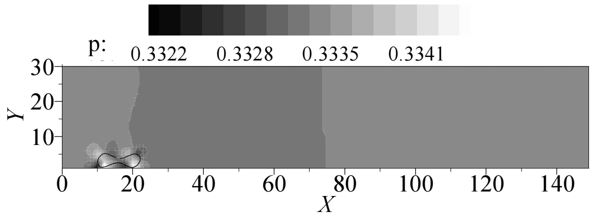
شکل ۷ بردارها و کانتورهای سرعت مربوط به حرکت چرخشی یک گلبول قرمز در جریان برشی

دوباره با توجه به این که مرز غوطه‌ور بدون جرم فرض شده است فقط تأثیر جزئی روی جریان سیال می‌گذارد. بنابراین تقریباً تمام اندرکنش‌ها در ناحیه بسیار کوچکی حول مرز غوطه‌ور اتفاق می‌افتد. این موضوع را می‌توان از شکل پروفیل‌های سرعت نیز دریافت. همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات خاصی در مؤلفه افقی سرعت u ایجاد نمی‌شود، اما مؤلفه عمودی سرعت v در کل دامنه محاسباتی دستخوش تغییر شده است و در حول مرز غوطه‌ور این تغییر به بیشترین مقدار خود رسیده است. دلیل این اتفاق حضور مرز غوطه‌ور است که باعث می‌شود خطوط موازی جریان سیال حالت نوسانی پیدا کرده و مؤلفه y سرعت پدیدار شود. دقت شود که همه زمان‌های داده شده در کار حاضر فیزیکی هستند. برای تبدیل این زمان‌های فیزیکی به زمان در واحد شبکه می‌توان از رابطه $\Delta t_p = \nu_p \Delta t \big/ (c_{s,p}^2(\tau - \frac{1}{2}))$ استفاده کرد [۱۳].

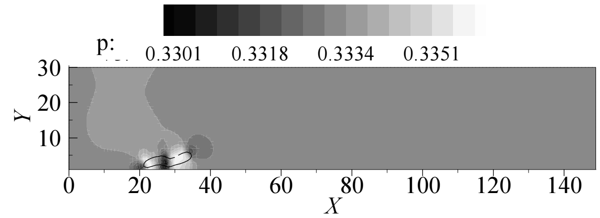
در شکل ۸ کانتورهای فشار برای گلبول قرمز واقعی (معادله ۱۳) در چهار گام زمانی مختلف ۰/۱۲، ۰/۴۸، ۱/۲ و ۲/۷ نشان داده شده است. دوباره دیده می‌شود که تمام اندرکنش‌ها در ناحیه بسیار کوچکی حول مرز غوطه‌ور اتفاق می‌افتد.

مطابق شکل ۸ در اطراف نقاطی از مرز غوطه‌ورکه در نزدیکی دیواره کانال قرار گرفته‌اند دو ناحیه پر فشار به وجود می‌آیند. تعداد این ناحیه‌های پر فشار با دور شدن گلبول از دیواره کانال و تغییر شکل آن به یک ناحیه پر فشار کاهش می‌یابد. این ناحیه پر فشار در واقع عامل اصلی ایجاد نیروی بالابر اعمال شده از طرف سیال به گلبول و هدایت آن به سمت وسط کانال است. در نواحی نزدیک دم گلبول که به دیواره نزدیک‌تر است مقدار فشار بین گلبول و دیواره پایینی کانال بیشتر از مقدار آن در نواحی نزدیک نوک گلبول می‌باشد. همچنین دیده می‌شود که همچنان که گلبول به سمت مرکز کانال حرکت می‌کند، از شدت ناحیه پر فشار بین سطح زیرین آن و دیواره پایینی کانال کاسته می‌شود.

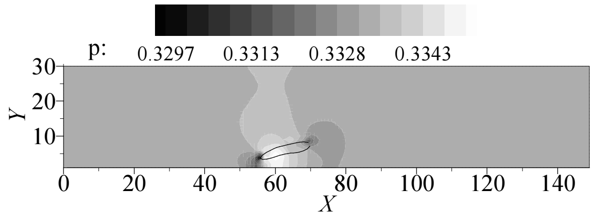
در شکل ۹ کانتورهای مؤلفه y سرعت برای حرکت گلبول قرمز نشان داده شده در شکل ۸ نمایش داده شده است. از آنجا که رفتار کلی گلبول قرمز و اثر آن روی جریان در این حالت بسیار شبیه نتایج مربوط به شکل ۷ است و تنها شکل گلبول و مقدارهای عددی بزرگی سرعت متفاوت است، از توضیحات مربوط به شکل ۹ صرف‌نظر شده است.



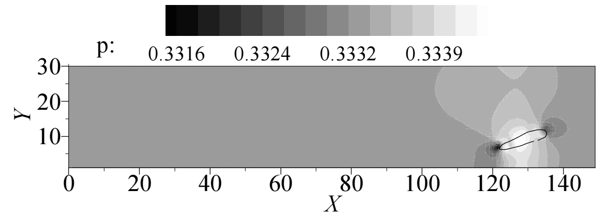
الف- t=0.12



ب- t=0.48

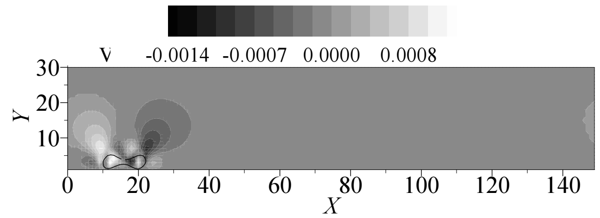


ج- t=1.2

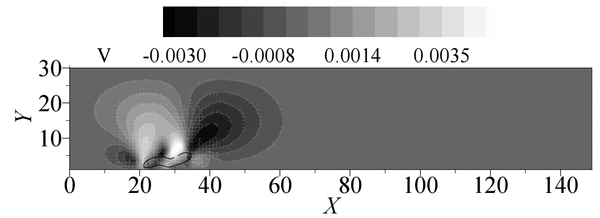


د- t=2.7

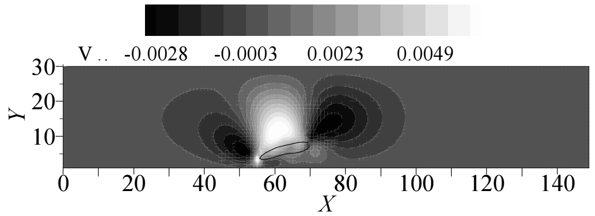
شکل ۸ کانتورهای فشار مربوط به حرکت چرخشی یک گلبول قرمز واقعی در جریان برشی



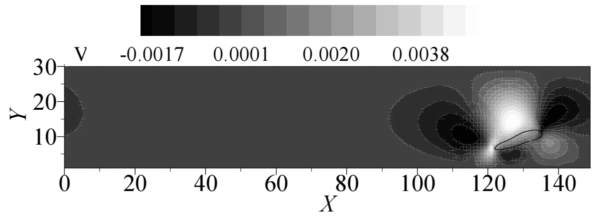
الف- t=0.12



ب- t=0.48



ج- t=1.2



د- t=2.7

شکل ۹ کانتورهای سرعت و کانتورهای فشار مربوط به حرکت چرخشی یک گلبول قرمز واقعی در جریان برشی

۷- نتیجه‌گیری

با توجه به این که در روش شبکه بولتزمن برخلاف روش‌های متداول CFD (مانند روش‌های المان محدود، اختلاف محدود و حجم محدود) که در آنها معادلات دیفرانسیلی حل می‌شوند، فقط یک معادله جبری حل می‌گردد، ترکیب آن با روش مرز غوطه‌ور به خصوص برای حل مسائل اندرکنش سیال-جامد بسیار کارا و سریع و اعمال آن بسیار آسان می‌باشد. در کار حاضر از ترکیب روش شبکه بولتزمن و روش مرز غوطه‌ور برای شبیه‌سازی دینامیک (حرکت و تغییر شکل) یک مرز ارتجاعی غوطه‌ور در جریان لزج غیرقابل تراکم استفاده شده است. در روش مرز غوطه‌ور از یک شبکه یکنواخت اویلری برای حل میدان جریان و از یک شبکه لاگرانژی برای حل معادلات حاکم بر جسم ارتجاعی غوطه‌ور در سیال استفاده می‌شود. برای حل معادلات حاکم بر میدان سیال می‌توان هم از روش‌های متداول CFD و هم از روش شبکه بولتزمن استفاده کرد که در این مطالعه به دلیل سادگی از روش دوم استفاده شده است. به عنوان مطالعه موردی در مقاله حاضر حرکت و تغییر شکل یک گلبول قرمز غوطه‌ور در جریان برشی که منجر به حرکت چرخشی می‌شود مورد مطالعه قرار گرفته است. دیده شد که با توجه به اینکه مرز غوطه‌ور بدون جرم فرض شده است فقط تأثیر جزئی روی جریان سیال می‌گذارد. بنابراین تقریباً تمام اندرکنش‌ها در ناحیه بسیار کوچکی حول مرز غوطه‌ور اتفاق

می‌افتد. همچنین دیده شد که همچنان که گلبول به سمت مرکز کانال حرکت می‌کند، از شدت ناحیه پر فشار بین دیواره پایینی کانال و سطح زیرین گلبول کاسته می‌شود. این ناحیه پر فشار در واقع عامل اصلی ایجاد نیروی بالابر اعمال شده از طرف سیال به گلبول و هدایت آن به سمت وسط کانال است. از طرفی چرخش گلبول قرمز بعد از طی یک مدت زمان معین که به مرکز کانال رسید، ثابت می‌ماند و این به‌دلیل به تعادل رسیدن نیروی بالابر عمل کننده از بالا و پایین بر روی گلبول می‌باشد.

نتایج حاصل از کار حاضر با نتایج تجربی و عددی موجود مقایسه نیز گردید که توافق خوبی بین نتایج مشاهده شد. همچنین مقایسه نتایج عددی حاضر با نتایج عددی [۱۱] که با استفاده از روش ترکیبی المان محدود-مرز غوطه‌ور به دست آمده است، نشان می‌دهد که نتایج کار حاضر دقیق‌تر است. دلیل این امر می‌تواند مربوط به این حقیقت باشد که در مطالعه حاضر از یک شبکه‌بندی لاگرانژی غیر یکنواخت برای گسسته‌سازی مرز غوطه‌ور استفاده شده است.

۸- مراجع

[1] Brust, M., Schaefer, C., Doerr, R., Pan, L., Grcia, M., Arratia, P.E., Wagner, C., "Rheology of Human Blood Plasma: Viscoelastic versus Newtonian Behavior", *Physical Review Letters*, Vol. 110, No.7, 2013, 078305.

[2] Fung, Y.C., *Biomechanics: Motion, Flow, Stress and Growth*, Springer, New York, 1990.

[3] Du, Q., Liu, C., Wang, X., "Simulating the Deformation of Vesicle Membranes under Elastic Bending Energy in Three Dimensions", *J. Comput. Phys,* Vol. 212, No. 2, 2006, pp. 757-777.

[4] Biben, T., and Misbah, C., "Tumbling of Vesicles under Shear Flow within anAdvected-Field Approach", *Phys. Rev. E,* Vol. 67, 2003, 031908.

[5] Maitre, E., Misbah, C., Peyla, P., Raoult, A., "ComparisonbetweenAdvected-Field and Level-Set Methods in the Study of VesicleDynamics", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 241, No. 13, 2012, pp. 1146-1157.

[6] Peskin, C.S., *Flow Patterns aroundHeart Valves: A Digital Computer Method for Solving the Equationsof Motion*, PhD Thesis, Physiology, Albert Einstein College of Medicine. Univ. Microfilms, Vol. 378,1972, pp. 72-80.

[7] Kim, J., Kim, D., Choi, H., "An Immersed-Boundary Finite-Volume Method for Simulations of Flow in Complex Geometries", *J. Comput. Phys,* Vol. 171, No.1, 2001, pp. 132-150.

[8] Taira, K., Colonius, T., "TheImmersed Boundary Method: A Projection Approach, *J. Comput. Phys.,* Vol. 225, 2007, pp. 2118-2137.

[9] Pinelli, A. Naqavi, I.Z., Piomelli, U., Favier, J., "Immersed-Boundary Methods for General Finite-Differenceand Finite-Volume Navier–Stokes Solvers", *J. Comput. Phys.,* Vol. 229, No. 24, 2010, pp. 9073-9091.

[10] Fischer, T., Schmid-Schönbein, H., "Tank-Trading Motion of Red Blood Cell Membranes in Viscometric Flow: Behavior of Intracellular and Extracellular Markers", *Blood cells*, Vol. 3, 1977, pp. 351-365.

[11] Franke, T., Hoppe, R.H.W., Linsenmann, C., Schmid, L., Willbold, C., Wixforth, A., "Numerical Simulation of the Motion and Deformation of Red Blood Cells and Vesicles in Microfluidic Flows", *Computing and Visualization in Science*, Vol. 14, No. 4, 2011, pp. 167-180.

[12] Wu J., Shu C., "An Improved Immersed Boundary-LatticeBoltzmann Method for Simulating Three-Dimensional Incompressible Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, 2010, pp. 5022–5042.

[13] Viggen, E.M., "The Lattice Boltzmann Method with Applications in Acoustics", *Master's Thesis,* NTNU Trondheim, Norway, 2009.

[14] He, X., Luo, L.S., "Theory of the Lattice Boltzmann Method: from the Boltzmann Equationto the Lattice Boltzmann Equation", *Phys. Rev. E*, Vol. 56,1997, pp. 6811-6817.

[15] Sui, Y., Chen, X.B., Chew, Y.T., Roy, P., Low, H.T.,"Numerical Simulation of Capsule Deformation in Simple Shear Flow", *Computers and Fluids*, Vol. 39, No. 2, 2010, pp. 242-250.

[16] Hochmuth, R.M.,and Waugh, R.E., "Erythrocyte Membrane Elasticity and Viscosity", *Annual Review of Psychology,* Vol. 49, 1987, pp. 209-219.

[17] Evans, E.A., "Bending Elastic Modulus of Red Blood Cell Membrane Derived from Buckling in Micropipette Aspiration Tests", *Biophys. J.*, Vol. 43, No. 1, 1983, pp. 27-30.

[18] Zhang, J., Johnson, P.C., Popel, A.S., "An Immersed Boundary Lattice Boltzmann Approach to Simulate Deformable Liquid Capsules and Its Application to Microscopic Blood Flows", *Phys. Biol.*, Vol. 4, No. 4, 2007, pp. 285-295.

[19] Zhu, L., He, G., Wang, S., Miller, L., Zhang, X., You, Q., Fang, S., An Immersed Boundary Method Based on the Lattice Boltzmann Approach in Three Dimensions with Application", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, No. 12, 2011, pp. 3506-3518.

[20] Peskin, C.S., "The Immersed Boundary Method", *ActaNumerica,* Vol. 11, 2002, pp. 479-517.