http://mjmec.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
فروردین ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱ ص ص ۱۰۷-۱۱۷

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۳/۱۷
تاریخ پذیرش ۹۱/۷/۱۸
ارائه در سایت ۹۱/۱۰/۳۰

کاربرد ماتریس‌های تبدیل ۳×۳ در استخراج معادلات حرکت ربات با لینک الاستیک و مفاصل دورانی-کشویی

محرم حبیب نژاد کورایم[۱*]، علی محمد شافعی[۲]، سیاوش فتح الهی دهکردی[۳]

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶۱۳۱۱۴، hkorayem@iust.ac.ir

چکیده- هدف اصلی این مقاله ارائه مدلی ریاضی برای معادلات دینامیک معکوس ربات با بازوهای الاستیک و مفاصل دورانی–کشویی می‌باشد. با توجه به عدم وجود محدودیت در تعداد بازوهای مکانیکی، مدل پیشنهادی باید بر اساس الگوریتمی سیستماتیک و خودکار استخراج شود. همچنین با توجه به حجم بالای محاسبات، معادلات باید به فرم بازگشتی ارائه شوند. لذا در این مقاله یک روش سیستماتیک و بازگشت‌پذیر برای استخراج معادلات حرکت ربات با n لینک الاستیک که دارای مفاصل دورانی-کشویی می‌باشند، ارائه شده است. معادلات دینامیک معکوس برای این سیستم رباتیکی بر اساس فرمولاسیون گیبس- اپل استخراج شده است. تمام عبارات دینامیکی هر بازو در سیستم مختصات مرجع محلی همان بازو بیان شده است. در پایان به منظور نشان دادن توانایی این الگوریتم در استخراج و حل معادلات این گونه از سیستم‌های رباتیکی، یک ربات تک لینکی که دارای یک مفصل دورانی–کشویی می باشد، با این فرمولاسیون مورد تحلیل دینامیکی قرار گرفته است.

کلیدواژگان: گیبس- اپل، بازگشتی، دورانی-کشویی، الاستیک.

Application of 3×3 rotational matrices in deriving the equation of motion of elastic robotic arm with revolute-prismatic joints

M. H. Korayem[1*], A. M. Shafei[2], S. F. Dehkordi[3]

1- Prof. of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
2- PhD. Student of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
3- MSc. Student of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
* P. O. B. 1684613114 Tehran, Iran. hkorayem@iust.ac.ir

Abstract- The main goal of this paper is to present a mathematical model for inverse dynamic equation of elastic robotic manipulator with revolute-prismatic joints. Due to the fact that there is no limitation on the number of mechanical arms, the proposed model must be extracted based on a systematic and automotive algorithm. Also according to the high computational complexity, the equations should be formed by a recursive formulation. Hence, a recursive and systematic methodology for deriving the equation of motion of n elastic robotic arm with revolute-prismatic joints is presented. The inverse dynamic equations for this robotic system are obtained based on Gibbs-Appllle formulation. All dynamic expressions of a link are expressed in the same link local coordinate system. Finally, in order to show the ability of this formulation in deriving and solving the equation of motion of such systems, a computational simulation for a flexible single robotic arm with revolute-prismatic joint is presented.

Keywords: Gibbs-Appllle, Recursive, Revolute-Prismatic, Elastic.

۱- مقدمه

سازه‌های انعطاف پذیر رباتیکی زمینه مهمی در تحقیقات مهندسی می‌باشند. با افزایش نیاز به ربات‌های مدرن و پیشرفته، طراحان توجه ویژه‌ای به ربات‌های انعطاف‌پذیر با توجه به مزایای بسیار آنها در قیاس با نمونه صلب خود داشته‌اند. فعالیت‌های تحقیقی گسترده‌ای برای مدل‌سازی و آنالیز رفتار دینامیکی این دسته از ربات‌ها صورت گرفته است. در حقیقت وجود یک مدل دینامیکی دقیق به منظور کنترل رفتار دینامیکی اینگونه از سیستم‌ها امری اجتناب‌ناپذیر است.

امروزه الگوریتم‌های سیستماتیک بسیاری برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی منیپولاتورها وجود دارد. این الگوریتم‌ها به فرم بسته یا بازگشتی و با استفاده از شکل‌های گوناگون بیان متغیرهای فیزیکی (سیمبولیک، برداری، تانسوری، ماتریسی و عددی) شکل گرفته‌اند. در این مقاله تمرکز بر روی مدل‌سازی ریاضی معادلات دینامیک معکوس ربات بصورت سیستماتیک و بازگشتی می‌باشد.

الگوریتم‌های بسیاری در چهل سال گذشته برای بهبود و افزایش کارایی محاسبات به منظور حل معادلات دینامیک معکوس ارائه شده است. این الگوریتم‌ها بر پایه اصول گوناگون دینامیکی استوار است که می‌توان به معادلات لاگرانژ- اویلر، نیوتون—اویلر و کین اشاره کرد. فیتراستون [۱] مطالعه کاملی بر روی این مدل‌ها و الگوریتم‌های استخراج شده انجام داده است و بر لزوم وجود فرمولاسیونی در جهت کاهش پیچیدگی محاسبات با افزایش مفاصل و لینک‌ها تأکید کرده است. از این رو گیبس و اپل جداگانه معادلاتی را استخراج کردند که به گفتهٔ آنها ساده‌ترین و جامع‌ترین فرم بیان معادلات حرکت می‌باشد. این معادلات که کمتر در دینامیک مدرن مورد استفاده قرار گرفته‌اند، بعدها به فرمولاسیون گیبس-اپل معروف شدند. این فرمولاسیون را پوپوف برای اولین بار در مدل‌سازی دینامیک ربات‌ها مورد استفاده قرار داد. پوتکنجاک [۲] فرمولاسیون بدست آمده را گسترش داد. دزویر و لاگنر [۳] از فرمولاسیون بدست آمده برای مدل‌سازی دینامیک معکوس با استفاده از ماتریس جاکوبین استفاده کردند. فرم بازگشتی این فرمولاسیون در سیستم‌ها با پیچیدگی محاسباتی بالا استفاده شد.

در زمینه الگوریتم‌های بازگشت‌پذیر لو و همکارانش [۴] جزء پایه‌گذاران این دسته از الگوریتم‌ها با بازده بالا به منظور حل مسأله دینامیک حرکت ربات‌های چند بازویی بوده‌اند. این الگوریتم بر اساس فرمولاسیون نیوتن-اویلر و به صورت ماتریسی شکل گرفته بود. در ادامه محققان دیگری نیز بدنبال استخراج الگوریتم‌های بازگشتی بر پایه سایر اصول دینامیکی و انطباق آن بر روی مسأله دینامیک حرکت ربات‌ها بودند. به عنوان مثال هولرباخ [۵] با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ-اویلر، کین و لوینسون [۶] و آنجلس [۷] با استفاده از فرمولاسیون کین، پاتل و بلافوتیس [۸] فرمولاسیون بازگشتی نیوتون اویلر را به صورت تانسوری ارائه کردند. لی و چانگ [۹] این فرمولاسیون را به صورت برداری گسترش دادند و در نهایت حبیب نژاد کورایم و شافعی با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل [۱۰-۱۳] مسأله استخراج معادلات دینامیک مستقیم و معکوس منیپولاتورها[1] را با استفاده از الگوریتم‌های بازگشتی ارائه کردند. در تمامی حالتهای فوق، مفاصل ربات تنها قابلیت حرکت دورانی داشتند. لذا در این تحقیق علاوه بر حرکت دورانی در هر مفصل حرکت کشویی نیز در نظر گرفته شده است. با مرور تحقیقات صورت گرفته در زمینه مدل‌سازی دینامیکی ربات‌ها با مفاصل کشویی می‌توان به کار تحقیقاتی تبرک [۱۴] اشاره کرد که به مدل‌سازی یک تیر با طول متغیر نسبت به زمان پرداخت. کین [۱۵] با استفاده از قانون دوم نیوتن یک ربات با مفصل کشویی را مدل‌سازی کرد. وی سپس با استفاده از روش گالرکین به بررسی ارتعاشات حاکم بر این تیر پرداخت. در ادامه یانگ [۱۶] حرکت دورانی را به همراه حرکت انتقالی بررسی کرد. بدرر [۱۷] مدل دینامیکی را برای ربات با لینک الاستیک و مفاصل دورانی—کشویی به روش اجزای محدود گسترش داد. باشر [۱۸] مدل دینامیکی ربات الاستیک با مفصل کشویی که در آن از بی‌نهایت شکل مود برای توصیف رفتار تیر استفاده شده بود را ارائه کرد. فرید و سلیمی [۱۹] روش دینامیک معکوسی را پیشنهاد کردند که به وسیله آن میزان نیرو و گشتاور مورد نیاز برای حرکت پنجه در مسیری مشخص برای یک ربات با بازوهای الاستیک و مفاصل دورانی—کشویی محاسبه شده بود. خادم و پیرمحمدی [۲۱،۲۰] یک مدل ریاضی برای ربات با مفاصل دورانی—کشویی

1. Manipulator

که لینک‌های آن الاستیک و قابلیت حرکت فضایی داشتند را مورد تحلیل دینامیکی قرار دادند. کلیونکو [۲۲] یک مدل ریاضی برای توصیف حرکت ربات با بازوهای الاستیک و مفاصل دورانی-کشویی ارائه کرد که در آن شرایط مرزی متفاوتی برای بازو در نظر گرفته شده بود.

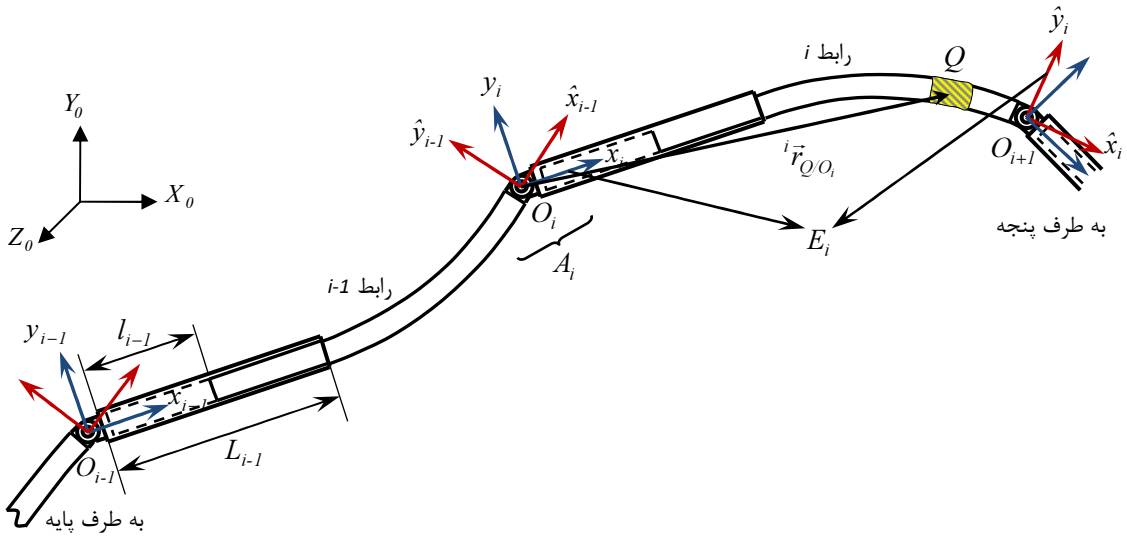
با توجه به مطالب بیان شده هدف از این مقاله، ارائه یک روش سیستماتیک و بازگشتی برای استخراج معادلات حرکت یک زنجیره از بازوهای انعطاف پذیر که دارای حرکت همزمان دورانی-کشویی می باشند، است. تحقیقات صورت گرفته در این زمینه منحصراً به سیستم‌هایی با تنها یک لینک محدود شده است. ولی در این مقاله هیچ محدودیتی در تعداد بازوها نمی‌باشد. همچنین روش بکار گرفته شده در این تحقیق روش گیبس-اپل می باشد که با توجه به مزایای بسیار آن نسبت به دیگر روش‌های استخراج معادلات حرکت همچون نیوتن-اویلر و یا اویلر-لاگرانژ خیلی کمتر در زمینه استخراج معادلات حرکت ربات‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. بدین ترتیب در ابتدا سینماتیک مسأله در بخش دوم بیان می‌شود. بخش سوم و چهارم به‌ترتیب به استخراج تابع گیبس و پتانسیل و مشتقات آن می‌پردازد. معادلات دینامیک معکوس به‌فرم بسته و بازگشتی در بخش‌های پنجم و ششم ارائه می‌شوند. بخش هفتم نتایج شبیه‌سازی انجام شده و در پایان در بخش هشتم نتیجه‌گیری و مزایای این روش ارائه می‌شود.

۲- سینماتیک ربات الاستیک با مفاصل دورانی-کشویی

۲-۱- مشخصات سیستم

در این بخش سینماتیک یک ربات که متشکل از n بازوی الاستیک که دارای مفاصل دورانی–کشویی می‌باشد، بررسی می‌شود. شکل ۱ قسمتی از سیستم مورد نظر را نشان می‌دهد که هر عضو آن متشکل از یک غلاف صلب و یک بازو الاستیک که طول هرکدام L_i می‌باشد.

در بررسی حرکت دینامیکی ربات، بازوهای انعطاف پذیر ربات ممکن است تحت تأثیر سه نوع ارتعاش (طولی، پیچشی و خمشی) قرار بگیرند. در این ارتعاشات فرکانس طبیعی ارتعاشات طولی دارای بیشترین مقدار و فرکانس طبیعی ارتعاشات خمشی دارای کمترین مقدار می‌باشد. جرم واحد طول، خواص الاستیک بازو و سطح مقطع در طول بازو به صورت یکنواخت فرض می‌شود. مفصل کشویی متشکل از غلاف صلبی می‌باشد که بازوی الاستیک تحت تأثیر نیروی محوری F_i در درون غلاف دارای حرکت رفت و برگشتی بدون اصطکاک می‌باشد. همچنین گشتاور τ_i وارد شده به مفصل دورانی باعث حرکت دورانی بازوی الاستیک می‌شود.



شکل ۱ منیپولاتور با لینک الاستیک و مفاصل دورانی-کشویی

بازوی الاستیک در درون غلاف به صورت صلب در نظر گرفته می‌شود و تنها قسمتی از بازو که در خارج از غلاف قرار دارد، قابلیت ارتعاش آزادانه را دارد و با افزایش طول بازو، طول قسمتی از بازو که آزادانه ارتعاش می‌کند، افزایش یافته و طول قسمتی که در داخل غلاف قرار دارد کاهش می‌یابد. طول قسمت الاستیک بازو با l_i نشان داده شده است. بازوی مکانیکی ربات هنگامی که خارج از غلاف قرار دارد به صورت تیر یک‌سر گیرداری که تئوری حاکم بر آن اویلر- برنولی می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود که در آن از اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی صرف‌نظر شده است.

۲-۲- معادلات سینماتیک سیستم

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، برای هر بازو دو دستگاه مختصات و همچنین یک دستگاه مختصات متصل به پایه ربات به‌عنوان دستگاه مختصات مرجع در نظر گرفته شده است. $X_0Y_0Z_0$ چارچوب متصل به پایه ربات (چارچوب مرجع) است. $x_iy_iz_i$ دستگاه مختصات متصل به لینک iام که مبدأ آن چسبیده بر روی غلاف iامین مفصل دورانی– کشویی، محور x_i در امتداد طول غلاف iام به سمت مبدأ مختصات O_{i+1} و محور z_i آن به‌عنوان محور دوران iامین مفصل دورانی-کشویی در نظر گرفته می‌شود. حرکت صلب بازو و جهت‌گیری غلاف به وسیله این دستگاه مختصات بیان می‌شود. $\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$ دستگاه مختصات متصل به لینک iام که مبدأ آن چسبیده بر روی انتهای بازوی iام، محور $\hat{x}_i$ نیز همانند محور x_i بوده با این تفاوت که در امتداد طول تغییر فرم یافتهٔ بازوی iام می‌باشد. حرکت الاستیک بازو به وسیله این دستگاه مختصات بیان می‌شود؛ تغییر فرم الاستیک در بازو، باعث ایجاد اختلاف بین دو راستای دستگاه مختصات $x_iy_iz_i$ و $\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$ می‌شود.

المان دیفرانسیلی Q را بر روی iامین بازوی الاستیک در شکل ۱ در نظر بگیرید. ${}^i\vec{r}_{Q/O_i}$ برداری است که موقعیت المان دیفرانسیلی Q را نسبت به مبدأ دستگاه مختصات متصل به مفصل iام (O_i) نشان می‌دهد. بسته به این که این المان در داخل غلاف قرار گرفته باشد یا در خارج آن بردار ${}^i\vec{r}_{Q/O_i}$ به صورت رابطهٔ (۱) ارائه می‌شود.

$$ {}^i\vec{r}_{Q/O_i} = \begin{cases} \eta_i\ {}^i\vec{\mathrm{x}}_\mathrm{i} + \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^\mathrm{T} & \text{for } \eta_i \geq L_i \\ \eta_i\ {}^i\vec{\mathrm{x}}_\mathrm{i} & \text{for } \eta_i \leq L_i \end{cases} \qquad (۱) $$

که در آن ${}^i\vec{x}_i = \{1 \quad 0 \quad 0\}^T$ و η_i فاصله میان مبدأ O_i و المان دیفرانسیلی Q در حالتی که بازوی iام فاقد هرگونه تغییر فرمی باشد و $\{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T$ بیانگر تغییر فرم الاستیک المان دیفرانسیلی Q می‌باشد. u_i، v_i و w_i به ترتیب تغییر فرم‌های دیفرانسیلی در راستاهای O_ix_i، O_iy_i و O_iz_i را نشان می‌دهد. برای بازوی الاستیک این تغییر فرم‌ها با استفاده از بسط مودال برش یافته به طریق ذیل بیان می‌شوند.

$$ \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T = \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij}(t)\vec{r}_{ij}(\eta) \qquad (۲) $$

که در آن $\vec{r}_{ij} = \{x_{ij} \quad y_{ij} \quad z_{ij}\}^T$ بردار مربوط به شکل مودها می‌باشد که اجزاء آن یعنی x_{ij}، y_{ij} و z_{ij}، jامین شکل مود مربوط به تغییر فرم‌های طولی و جانبی رابط iام را نشان می‌دهد. همچنین δ_{ij}، jامین مختصات مودال تعمیم یافته از لینک iام و m_i تعداد مودهایی است که برای بیان تغییر فرم لینک iام استفاده شده است.

از آنجا که تئوری حاکم بر تیرها اویلر-برنولی فرض شده است، المان دیفرانسیلی Q تنها تحت اثر خمش و پیچش دچار دوران می‌شود. دوران این المان دیفرانسیلی حول جهت‌های O_ix_i، O_iy_i و O_iz_i به ترتیب θ_{xi}، θ_{yi} و θ_{zi} نامگذاری می‌شوند. این زوایای کوچک تحت بسط مودال برش یافته به صورت رابطه (۳) ارائه می‌شوند.

$$ {}^i\vec{\theta}_i = \{\theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T = \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij}(t)\vec{\theta}_{ij}(\eta) \qquad (۳) $$

که در آن $\vec{\theta}_{ij} = \{\theta_{xij} \quad \theta_{yij} \quad \theta_{zij}\}^T$ بردار مربوط به شکل مودهای می‌باشد که اجزاء آن یعنی θ_{xij}، θ_{yij} و θ_{zij} به ترتیب jامین شکل مود دورانی رابط iام را در جهت‌های O_ix_i، O_iy_i و O_iz_i نشان می‌دهد.

۳- انرژی شتاب سیستم و مشتقات آن

در این بخش انرژی شتاب سیستم به منظور به کارگیری در معادلات گیبس- اپل بسط داده می‌شود. انرژی شتاب المان دیفرانسیلی Q بر روی iامین لینک از دو منبع ناشی می‌شود. ۱- انرژی شتاب به دلیل حرکت بزرگ المان و ۲- انرژی شتاب به دلیل حرکت ارتعاشی المان. بنابراین تابع انرژی شتاب

سیستم (تابع گیبس) برای این المان دیفرانسیلی به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$ds_i = \frac{1}{2} m_i (h) \left({}^i\ddot{\vec{r}}_Q^T \times {}^i\ddot{\vec{r}}_Q \right) dh \qquad (۴)$$

که در آن $\mu_i(\eta)$ جرم واحد طول iامین لینک است. همچنین ${}^i\ddot{\vec{r}}_Q$ شتاب خطی المان دیفرانسیلی Q می‌باشد که در دستگاه مختصات مرجع محلی جسم iام بیان شده است.

$$\begin{aligned} {}^i\ddot{\vec{r}}_Q &= {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i} + 2\,{}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i} \\ &\quad + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{r}_{Q/O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \times \left({}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{r}_{Q/O_i} \right) \end{aligned} \qquad (۵)$$

در عبارت بالا، ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ شتاب مطلق مبدأ مختصات مرجع محلی رابط iام، ${}^i\vec{\omega}_i$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای لینک iام و ${}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i}$ و ${}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i}$ به ترتیب سرعت و شتاب المان دیفرانسیلی Q نسبت به مبدأ مختصات دستگاه متصل به مفصل iام می‌باشند که به ترتیب با یک‌بار و دوبار مشتق‌گیری از رابطه (۱) نسبت به زمان بدست می‌آیند.

$${}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i} = \begin{cases} \dot{\eta}_i\, {}^i\vec{x}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_{ij}(t)\, \vec{r}_{ij}(\eta) & \text{for } \eta_i \geq L_i \\ \dot{\eta}_i\, {}^i\vec{x}_i & \text{for } \eta_i \leq L_i \end{cases} \qquad (۶)$$

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i} = \begin{cases} \ddot{\eta}_i\, {}^i\vec{\mathrm{x}}_\mathrm{i} + \sum_{j=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ij}(t)\, \vec{\mathrm{r}}_{\mathrm{ij}}(\eta) & \text{for } \eta_i \geq L_i \\ \ddot{\eta}_i\, {}^i\vec{\mathrm{x}}_\mathrm{i} & \text{for } \eta_i \leq L_i \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $\dot{\eta}_i$ و $\ddot{\eta}_i$ به ترتیب سرعت و شتاب خطی بازوی iام می‌باشند. با وارد کردن معادله (۵) در معادله (۴) و با انتگرال‌گیری از معادله حاصله از l_i تا $L_i + l_i$ انرژی شتاب رابط iام بدست خواهد آمد. با جمع کردن انرژی تک‌تک رابط‌ها، انرژی شتاب کل سیستم بدست خواهد آمد.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i}^{L_i + l_i} ds_i$$

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{n} & \frac{1}{2} B_{0i}\, {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot {}^i\vec{B}_{1i} - 2\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot B_{2i}\, {}^i\vec{\omega}_i \\ & - {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot B_{3i}\, {}^i\dot{\vec{\omega}}_i - {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T \cdot {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i}\, {}^i\vec{\omega}_i + \frac{1}{2} B_{4i} \\ & - 2\,{}^i\vec{\omega}_i^T \cdot {}^i\vec{B}_{5i} + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot {}^i\vec{B}_{6i} - {}^i\vec{\omega}_i^T \cdot B_{7i}\, {}^i\vec{\omega}_i \\ & + 2\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot B_{8i}\, {}^i\vec{\omega}_i + \frac{1}{2}\, {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot B_{9i}\, {}^i\dot{\vec{\omega}}_i + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T \cdot {}^i\tilde{\omega}_i B_{9i}\, {}^i\vec{\omega}_i \\ & + \text{جملات غیر مرتبط} \end{aligned} \qquad (۸)$$

که در آن ${}^i\tilde{\omega}_i$ ماتریس پاد متقارن مربوط به بردار ${}^i\vec{\omega}_i$ می‌باشد. همچنین، دیگر متغیرهایی که در معادله (۸) ظاهر شده‌اند به طریق زیر قابل ارائه می‌باشد.

$$B_{0i} = \int_{l_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, d\eta \qquad (۹)$$

$${}^i\vec{B}_{1i} = B_{0i} \ddot{\eta}_i\, {}^i\vec{x}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ij} \vec{C}_{1ij} \qquad (۱۰)$$

$$B_{2i} = B_{0i} \dot{\eta}_i\, {}^i\tilde{x}_i + \sum_{j=1}^{m_i} \dot{\delta}_{ij} \tilde{C}_{1ij} \qquad (۱۱)$$

$$B_{3i} = C_{2i} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} \tilde{C}_{1ij} \qquad (۱۲)$$

$$B_{4i} = B_{0i} \ddot{\eta}_i^2 + \sum_{j=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ij} \left(2\ddot{\eta}_i C_{3ij} + \sum_{k=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ik} C_{4ijk} \right) \qquad (۱۳)$$

$${}^i\vec{B}_{5i} = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\left(\dot{\delta}_{ij} \ddot{\eta}_i - \ddot{\delta}_{ij} \dot{\eta}_i \right) \vec{C}_{5ij} + \sum_{k=1}^{m_i} \ddot{\delta}_{ij} \dot{\delta}_{ik} \vec{C}_{6ijk} \right) \qquad (۱۴)$$

$${}^i\vec{B}_{6i} = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\ddot{\delta}_{ij} \vec{\alpha}_{ij} - \ddot{\eta}_i \delta_{ij} \vec{C}_{5ij} \right) \qquad (۱۵)$$

$$B_{7i} = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\ddot{\eta}_i \left(\delta_{ij} C_{8ij}^T + C_{7i} \right) + \ddot{\delta}_{ij} \beta_{ij} \right) \qquad (۱۶)$$

$$B_{8i} = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\dot{\eta}_i \left(\delta_{ij} C_{8ij}^T + C_{7i} \right) + \dot{\delta}_{ij} \beta_{ij} \right) \qquad (۱۷)$$

$$B_{9i} = C'_{7i} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_{ij} \left(C'^T_{8ij} + \beta_{ij} \right) \qquad (۱۸)$$

در معادله (۱۳)، ترمی تحت عنوان "جملات نامربوط" وجود دارد. از آنجا که برای استخراج معادلات حرکت ربات به مشتق تابع گیبس نسبت شبه شتاب‌ها احتیاج داریم؛ لذا در تابع گیبس می‌توان از تمامی ترم‌هایی که فاقد $\ddot{q}_j$، $\ddot{\delta}_{jf}$ و $\ddot{\eta}_j$ به عنوان شبه‌شتاب هستند، صرف‌نظر کرد. در معادلات بالا، $\tilde{C}_{1ij}$ ماتریس پادمتقارن مربوط به بردار $\vec{C}_{1ij}$ می‌باشد. این بردار و دیگر متغیرهایی که در معادلات (۲۴-۱۴) ظاهر شده‌اند، به‌طریق زیر قابل ارائه می‌باشند.

$$\vec{C}_{1ij} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, \vec{r}_{ij} \, d\eta_i \qquad (۱۹)$$

$$\tilde{C}_{1ij} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, \tilde{r}_{ij} \, d\eta_i \qquad (۲۰)$$

$$C_{2i} = \int_{l_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, \eta_i \, {}^i\tilde{x}_i \, d\eta_i \qquad (۲۱)$$

$$C_{3ij} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, {}^i\vec{x}_i^T \cdot \vec{r}_{ij} \, d\eta_i \qquad (۲۲)$$

$$C_{4ijk} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, \vec{r}_{ij}^T \cdot \vec{r}_{ik} \, d\eta_i \qquad (۲۳)$$

$$\vec{C}_{5ij} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, {}^i\tilde{x}_i \, \vec{r}_{ij} \, d\eta_i \qquad (۲۴)$$

$$\vec{C}'_{5ij} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \eta_i \, {}^i\tilde{x}_i \, \vec{r}_{ij} \, d\eta_i \qquad (۲۵)$$

$$\vec{C}_{6ijk} = \int_{L_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, \tilde{r}_{ij} \vec{r}_{ik} \, d\eta_i \qquad (۲۶)$$

$$C_{7i} = \int_{l_i}^{L_i + l_i} \mu_i \, \eta_i \, {}^i\tilde{x}_i^T \, {}^i\tilde{x}_i \, d\eta_i \qquad (۲۷)$$

$$C'_{7i} = \int_{l_i}^{L_i+l_i} \mu_i \eta_i^2 \, {}^i\tilde{x}_i^T \, {}^i\tilde{x}_i \, d\eta_i \quad (۲۸)$$

$$C_{8ij} = \int_{L_i}^{L_i+l_i} \mu_i \, {}^i\tilde{x}_i^T \, \tilde{r}_{ij} \, d\eta_i \quad (۲۹)$$

$$C'_{8ij} = \int_{L_i}^{L_i+l_i} \mu_i \eta_i \, {}^i\tilde{x}_i^T \, \tilde{r}_{ij} \, d\eta_i \quad (۳۰)$$

$$C_{9ijk} = \int_{L_i}^{L_i+l_i} \mu_i \, \tilde{r}_{ij}^T \tilde{r}_{ik} \, d\eta_i \quad (۳۱)$$

$$\vec{\alpha}_{ij} = \vec{C}'_{5ij} + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik}(t) \vec{C}_{4ikj} \quad (۳۲)$$

$$\beta_{ij} = C'_{8ij} + \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ik}(t) C_{9ikj} \quad (۳۳)$$

که در آن ${}^i\tilde{x}_i$، $\tilde{\eta}$ و $\tilde{r}_{ij}$ به ترتیب ماتریس‌های پادمتقارن مربوط به بردارهای ${}^i\vec{x}_i$، $\vec{\eta}$ و $\vec{r}_{ij}$ می‌باشند.

یک بخش از معادلات دینامیکی سیستم با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل با مشتق‌گیری از تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها بدست می‌آید. لذا می‌بایست شبه سرعت‌های مستقلی را در سیستم مورد بررسی انتخاب کرد. در اینجا سرعت زاویه‌ای مفاصل یعنی $\dot{q}_j$، سرعت مودال تعمیم یافته لینک‌ها یعنی $\dot{\delta}_{jf}$ و سرعت رفت و برگشتی بازوها یعنی $\dot{\eta}_j$ به عنوان شبه سرعت‌های مستقل انتخاب می‌شوند.

در تابع گیبس، تنها ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ تابعی از $\ddot{q}_j$ می‌باشند، بنابراین مشتق تابع گیبس نسبت به $\ddot{q}_j$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{q}_j} \cdot {}^i\vec{S}_i + \sum_{i=j}^{n} \frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T}{\partial \ddot{q}_j} \cdot {}^i\vec{T}_i \quad (۳۴)$$

که در آن ${}^i\vec{S}_i$ و ${}^i\vec{T}_i$ به طریق زیر ارائه می‌شوند.

$${}^i\vec{S}_i = B_{0i} \, {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{B}_{1i} - 2B_{2i} \, {}^i\vec{\omega}_i - B_{3i} \, {}^i\dot{\vec{\omega}}_i - {}^i\tilde{\omega}_i B_{3i} \, {}^i\vec{\omega}_i \quad (۳۵)$$

$${}^i\vec{T}_i = B_{3i} \, {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\vec{B}_{6i} + 2B_{8i} \, {}^i\vec{\omega}_i + B_{9i} \, {}^i\dot{\vec{\omega}}_i + {}^i\tilde{\omega}_i B_{9i} \, {}^i\vec{\omega}_i \quad (۳۶)$$

مشتق تابع گیبس نسبت به $\ddot{\delta}_{jf}$ علاوه بر ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ مشتق‌گیری نسبت به ${}^i\vec{B}_{1i}$، B_{4i}، ${}^i\vec{B}_{5i}$، ${}^i\vec{B}_{6i}$ و B_{7i} را نیز در بر می‌گیرد. لذا:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} \cdot {}^i\vec{S}_i + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^T}{\partial \ddot{\delta}_{jf}} \cdot {}^i\vec{T}_i + Q_{jf} \quad (۳۷)$$

که در آن:

$$Q_{jf} = {}^j\ddot{\vec{r}}_{O_j}^T \cdot \vec{C}_{1jf} + \ddot{\eta}_j C_{3jf} + \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk} C_{4jfk} + {}^j\dot{\vec{\omega}}_j^T \cdot \vec{\alpha}_{jf} + 2 \, {}^j\vec{\omega}_j^T \cdot \left(\dot{\eta}_j \vec{C}_{5jf} - \sum_{k=1}^{m_j} \dot{\delta}_{jk} \vec{C}_{6jfk} \right) - {}^j\vec{\omega}_j^T \cdot \beta_{jf} \, {}^j\vec{\omega}_j \quad (۳۸)$$

در انتها مشتق‌گیری جزئی تابع گیبس نسبت به شبه شتاب $\ddot{\eta}_j$ ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_j} = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^T}{\partial \ddot{\eta}_j} \cdot {}^i\vec{S}_i + Q'_j \quad (۳۹)$$

که در آن:

$$Q'_j = {}^j\ddot{\vec{r}}_{O_j}^T \cdot B_{0j} \, {}^j\vec{x}_j + B_{0j} \, \ddot{\eta}_j + \sum_{k=1}^{m_j} \ddot{\delta}_{jk} C_{3jk} - 2 \, {}^j\vec{\omega}_j^T \cdot \left(\sum_{k=1}^{m_j} \dot{\delta}_{jk} \vec{C}_{5jk} \right) - {}^j\dot{\vec{\omega}}_j^T \cdot \left(\sum_{k=1}^{m_j} \delta_{jk} \vec{C}_{5jk} \right) - {}^j\vec{\omega}_j^T \cdot \left(\sum_{k=1}^{m_j} \delta_{jk} C_{8jk}^T + C_{7j} \right) {}^j\vec{\omega}_j \quad (۴۰)$$

۴- انرژی پتانسیل سیستم و مشتقات آن

انرژی پتانسیل سیستم از دو منبع ناشی می‌شود. ۱- انرژی پتانسیل به واسطه جاذبه زمین و ۲- انرژی پتانسیل به واسطه تغییر فرم‌های الاستیک. تأثیر بارگذاری گرانی بر رابطها را می‌توان به سادگی با قرار دادن ${}^0\ddot{\vec{r}}_{O_0} = \vec{g}$ در نظر گرفت. که در آن $\vec{g}$ بردار گرانی است. در این صورت می‌توان فرض کرد که پایه ربات با شتاب $1g$ به سوی بالا حرکت می‌کند. این شتاب فرضی به سوی بالا، اثری دقیقاً همانند تأثیر گرانی بر رابطها دارد.

انرژی پتانسیل کرنشی ذخیره شده در iامین بازو، با برقراری فرض تیر اویلر-برنولی به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$V_{ei} = \frac{1}{2} \int_{L_i}^{L_i+l_i} \left[E_i I_{yi} \left(\frac{\partial \theta_{yi}}{\partial \eta} \right)^2 + E_i I_{zi} \left(\frac{\partial \theta_{zi}}{\partial \eta} \right)^2 + G_i I_{xi} \left(\frac{\partial \theta_{xi}}{\partial \eta} \right)^2 + E_i \mathrm{A}_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\eta \quad (۴۱)$$

که در آن E_i و G_i به ترتیب مدول الاستیسیته و مدول برشی، I_{xi} ممان اینرسی قطبی حول محور $O_i x_i$؛ I_{yi} و I_{zi} ممان اینرسی حول محورهای $O_i y_i$ و $O_i z_i$ و A_i سطح مقطع iامین بازو می‌باشد. همان گونه که قبلاً نیز اشاره شد، زوایای کوچک θ_{xi}، θ_{yi} و θ_{zi} و تغییر مکان کوچک u_i با استفاده از بسط مودال برش یافته قابل ارائه می‌باشد. با جایگذاری این روابط در معادله (۴۱)، انرژی پتانسیل کرنشی برای کل سیستم به شکل زیر ارائه می‌شود.

$$V_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{k=1}^{m_i} \delta_{ij}(t) \delta_{ik}(t) K_{ijk} \quad (۴۲)$$

که در آن:

$$K_{ijk}=\int_{L_i}^{L_i+l_i}\left[E_iI_{yi}\frac{\partial\theta_{yij}}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{yik}}{\partial\eta}+E_iI_{zi}\frac{\partial\theta_{zij}}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{zik}}{\partial\eta}+G_iI_{xi}\frac{\partial\theta_{xij}}{\partial\eta}\frac{\partial\theta_{xik}}{\partial\eta}+E_iA_i\frac{\partial x_{ij}}{\partial\eta}\frac{\partial x_{ik}}{\partial\eta}\right]d\eta \quad (۴۳)$$

برای استخراج معادلات حرکت ربات با لینک الاستیک و مفاصل دورانی-کشویی، به مشتق جزئی انرژی پتانسیل نسبت به شبه مختصات‌ها احتیاج داریم. مشتق جزئی انرژی پتانسیل کرنشی نسبت به q_j، η_j و δ_{jf} به طریق زیر ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial V_e}{\partial q_j}=0 \quad (۴۴)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}}=\sum_{k=1}^{m_j}\delta_{jk}(t)K_{jkf} \quad (۴۵)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial \eta_j}=0 \quad (۴۶)$$

۵- معادلات دینامیک معکوس به فرم بسته

معادلات سیستم رباتیکی مذکور با در نظر گرفتن نیروهای تعمیم یافته مربوط به نیروهای خارجی که به سیستم وارد می‌شود، کامل خواهد شد. در این مقاله فرض بر آن است که هیچگونه باری بر روی لینک‌ها اعمال نمی‌شود. بنابراین تنها نیروهای خارجی اعمالی به این سیستم دینامیکی گشتاور τ_j و نیروی F_j می‌باشند که به ترتیب به j امین مفصل دورانی و j امین مفصل کشویی اعمال می‌شوند. با این فرض، معادلات دینامیک معکوس بر اساس فرمولاسیون گیبس- اپل به شکل زیر بدست می‌آیند:

- معادله حرکت مربوط به j امین مفصل دورانی:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}+\frac{\partial V_e}{\partial q_j}=\tau_j \quad (۴۷)$$

- معادله حرکت مربوط به تغییر فرم بازوی j ام:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\delta}_{jf}}+\frac{\partial V_e}{\partial \delta_{jf}}=0 \quad (۴۸)$$

- معادله حرکت مربوط به j امین مفصل کشویی:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_j}+\frac{\partial V_e}{\partial \eta_j}=F_j \quad (۴۹)$$

معادلات استخراج شده به فرم دینامیک معکوس می‌باشند.

بدین مفهوم که با مشخص بودن موقعیت مفاصل (بردارهای مکان، سرعت و شتاب) گشتاور و نیروهای وارده به مفاصل محاسبه می‌شوند.

۶- معادلات دینامیک معکوس به فرم بازگشتی

برای استخراج معادلات دینامیک معکوس به فرم بازگشتی، روابط (۴۷) تا (۴۹) می‌بایست به صورت بازگشتی بیان شوند. به منظور تحقق هدف این بخش، در ابتدا فرم مجموع عبارات ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ بایستی ارائه شود. با در اختیار داشتن این جملات به صورت مجموع، امکان محاسبه مشتقات جزئی ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ نسبت به $\ddot{q}_j$، $\ddot{\delta}_{jf}$ و $\ddot{\eta}_j$ که در معادلات (۳۴)، (۳۷) و (۳۹) ظاهر گشته‌اند، میسر می‌شود.

شتاب مطلق مبدأ مختصات متصل به هر بازو و شتاب زاویه‌ای هر رابط به فرم بازگشتی به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}={}^iR_{i-1}\left({}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}}+{}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_i/O_{i-1}}+2{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times{}^{i-1}\dot{\vec{r}}_{O_i/O_{i-1}}+{}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}\times{}^{i-1}\vec{r}_{O_i/O_{i-1}}+{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times\left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times{}^{i-1}\vec{r}_{O_i/O_{i-1}}\right)\right) \quad (۵۰)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i={}^iR_{i-1}\left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}+{}^{i-1}\dot{\vec{\theta}}_{i-1}\right)\times{}^i\vec{z}_i\dot{q}_i+{}^i\vec{z}_i\ddot{q}_i+{}^iR_{i-1}\left({}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}+{}^{i-1}\ddot{\vec{\theta}}_{i-1}+{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times{}^{i-1}\dot{\vec{\theta}}_{i-1}\right) \quad (۵۱)$$

که در آن ${}^i\vec{z}_i=\{0\ \ 0\ \ 1\}^T$ می‌باشد. همچنین ${}^jR_i$ ماتریس دوران ۳×۳ می‌باشد که جهت‌گیری دستگاه مختصات i ام را نسبت بدستگاه مختصات j ام بیان می‌کند. در واقع برای بیان هر بردار دلخواه از دستگاه مختصات $x_iy_iz_i$ در دستگاه مختصات $x_jy_jz_j$ از این ماتریس دوران استفاده می‌شود. به دلیل ماهیت انعطاف پذیر بازوها بهتر است تا ماتریس دوران مربوط به مفاصل از ماتریس دوران مربوط به بازوها جدا شود. لذا ماتریس دوران ${}^jR_i$ به فرم بازگشتی به صورت رابطه (۵۲) ارائه می‌شود.

$${}^jR_i={}^jR_{i-1}E_{i-1}A_i \quad (۵۲)$$

که در آن A_i ماتریس دوران مفصل i ام می‌باشد که جهت‌گیری دستگاه مختصات $x_iy_iz_i$ را نسبت بدستگاه مختصات $\hat{x}_{i-1}\hat{y}_{i-1}\hat{z}_{i-1}$ نشان می‌دهد. درایه‌های این ماتریس تنها تابعی از مختصات تعمیم یافته مربوط به مفصل i ام (q_i) می‌باشند. E_i ماتریس دورانی است که جهت‌گیری دستگاه

مختصات $\hat{x}_i\hat{y}_i\hat{z}_i$ را نسبت بدستگاه مختصات $x_iy_iz_i$ که ناشی از تغییر فرم بازوی iام می‌باشد، بیان می‌کند.

$$E_i=\begin{bmatrix}1 & -\theta_{zi} & \theta_{yi}\\ \theta_{zi} & 1 & -\theta_{xi}\\ -\theta_{yi} & \theta_{xi} & 1\end{bmatrix} \quad (۵۳)$$

در اینجا باید به این نکته اشاره شود که تمامی زوایا در ماتریس E_i در $\eta=L_i+l_i$ محاسبه شده‌اند.

معادله (۵۰) و (۵۱) فرم بازگشتی عبارات مربوط به ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ را نشان می‌دهند. تبدیل این معادلات به صورت مجموع روابط زیر را در پی دارد.

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}=\sum_{k=1}^{i-1}{}^iR_k\left({}^k\ddot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}+{}^k\dot{\vec{\omega}}_k\times{}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}+{}^k\vec{\omega}_k\times\left(2{}^k\dot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}+{}^k\vec{\omega}_k\times{}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}\right)\right) \quad (۵۴)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i=\sum_{k=1}^{i}{}^iR_k\,{}^k\vec{z}_k\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{i-1}{}^iR_k\left({}^k\ddot{\vec{\theta}}_k\left(L_k+l_k\right)+{}^k\vec{\omega}_k\times{}^k\dot{\vec{\theta}}_k\left(L_k+l_k\right)+\left({}^k\vec{\omega}_k+{}^k\dot{\vec{\theta}}_k\left(L_k+l_k\right)\right)\times{}^iR_{k+1}{}^{k+1}\vec{z}_{k+1}\dot{q}_{k+1}\right) \quad (۵۵)$$

که در آن:

$${}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}=\left(L_k+l_k\right){}^k\vec{x}_k+\sum_{t=1}^{m_k}\delta_{kt}\vec{r}_{kt}\left(L_k+l_k\right) \quad (۵۶)$$

$${}^k\dot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}=\dot{\eta}_k\,{}^k\vec{x}_k+\sum_{t=1}^{m_k}\dot{\delta}_{kt}\left(t\right)\vec{r}_{kt}\left(L_k+l_k\right) \quad (۵۷)$$

$${}^k\ddot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}=\ddot{\eta}_k\,{}^k\vec{x}_k+\sum_{t=1}^{m_k}\ddot{\delta}_{kt}\left(t\right)\vec{r}_{kt}\left(L_k+l_k\right) \quad (۵۸)$$

اکنون به کمک روابط (۵۴) و (۵۵)، مشتقات جزئی ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ نسبت به شبه شتاب‌ها به طریق زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial{}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial\ddot{q}_j}={}^iR_j\,{}^j\vec{z}_j \quad (۵۹)$$

$$\frac{\partial{}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial\ddot{\delta}_{jf}}={}^iR_j\vec{\theta}_{jf}\left(L_j+l_j\right) \quad (۶۰)$$

$$\frac{\partial{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial\ddot{q}_j}={}^iR_j\,{}^j\vec{z}_j\times{}^i\vec{r}_{O_i/O_j} \quad (۶۱)$$

$$\frac{\partial{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial\ddot{\delta}_{jf}}={}^iR_j\vec{r}_{jf}\left(L_j+l_j\right)+{}^iR_j\vec{\theta}_{jf}\left(L_j+l_j\right)\times{}^i\vec{r}_{O_i/O_{j+1}} \quad (۶۲)$$

$$\frac{\partial{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial\ddot{\eta}_j}={}^iR_j\,{}^j\vec{x}_j \quad (۶۳)$$

برای ارائه فرمولاسیون بازگشتی برای معادلات دینامیک معکوس کافی است تا از روابط بدست آمده در معادلات (۵۹) تا (۶۳) استفاده شود.

در معادله مربوط به مفاصل دورانی، با جایگذاری روابط (۵۹) و (۶۱) در معادله (۴۷) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی، رابطه (۶۴) حاصل می‌شود.

$${}^j\vec{z}_j^T\cdot{}^j\vec{\chi}_j=\tau_j \quad (۶۴)$$

که در آن:

$${}^j\vec{\chi}_j={}^j\vec{T}_j+{}^j\tilde{r}_{O_{j+1}/O_j}\,{}^j\vec{\varphi}_j+{}^jR_{j+1}\,{}^{j+1}\vec{\chi}_{j+1} \quad (۶۵)$$

$${}^j\vec{\varphi}_j={}^jR_{j+1}\left({}^{j+1}\vec{S}_{j+1}+{}^{j+1}\vec{\varphi}_{j+1}\right) \quad (۶۶)$$

همانند مرحله قبل، با وارد کردن معادلات (۶۰) و (۶۲) در معادله مربوط به تغییر فرم لینک‌ها یعنی معادله (۴۸) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی، عبارت معادل زیر برای تغییر فرم لینک‌ها بدست خواهد آمد.

$$\vec{r}_{jf}^T\cdot{}^j\vec{\varphi}_j+\vec{\theta}_{jf}^T\cdot{}^jR_{j+1}\,{}^{j+1}\vec{\chi}_{j+1}+Q_{jf}+\sum_{k=1}^{m_j}\delta_{jk}\left(t\right)K_{jkf}=0 \quad (۶۷)$$

در پایان برای تبدیل معادله مربوط به حرکت رفت و برگشتی رابطها به یک رابطه بازگشتی، رابطه (۶۳) را در معادله (۴۹) جایگذاری کرده که در اینصورت عبارت معادل زیر برای حرکت رفت و برگشتی رابطها حاصل خواهد گشت.

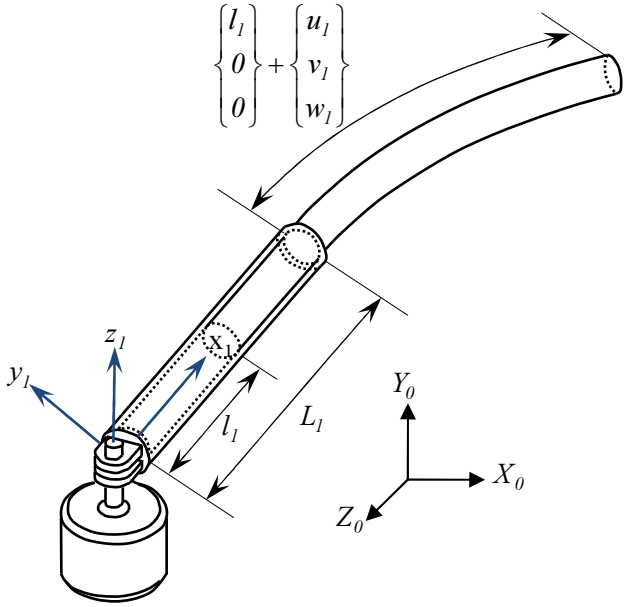
$${}^j\vec{x}_j^T\cdot{}^j\vec{\varphi}_j+Q_j'=F_j \quad (۶۸)$$

معادلات (۶۴)، (۶۷) و (۶۸) فرم بازگشتی معادلات دینامیک معکوس سیستم مورد بررسی را نشان می‌دهد. از این معادلات در بخش بعد به منظور شبیه‌سازی یک ربات تک لینکی الاستیک با مفاصل دورانی-کشویی استفاده می‌شود.

۷- نتایج عددی

در این بخش جهت بررسی مدل ریاضی ارائه شده، نتایج شبیه‌سازی برای یک ربات تک لینکی صفحه‌ای با لینک الاستیک که دارای مفصل دورانی–کشویی می‌باشد، ارائه می‌شود. شکل ۲ ربات مورد نظر را نشان می‌دهد.

تمامی پارامتر های فرضی مورد نیاز برای شبیه سازی در جدول ۱ ارائه شده است.



شکل ۲ ربات تک لینکی الاستیک با مفصل دورانی-کشویی

جدول ۱ پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار	واحد
طول بازوها	$L=1$	m
سطح مقطع	$A=3.6482\times10^{-4}$	m^2
ممان اینرسی	$I_y=I_z=1.1772\times10^{-8}$	m^4
جرم واحد طول	$\mu=2$	$kg.m^{-1}$
مدول الاستیسیته	$E=2\times10^{11}$	$N.m^{-2}$
مدول برشی	$G=77\times10^{9}$	$N.m^{-2}$
شتاب گرانش	$g=10$	$m.s^{-2}$

نیرو و گشتاور اعمالی به مفصل نیز به صورت زیر ارائه می‌شوند.

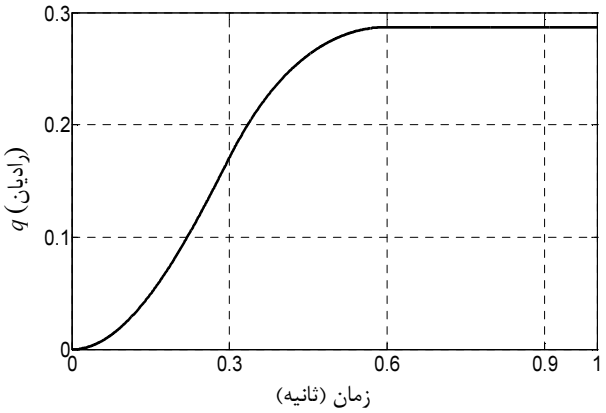
$$\begin{cases} \text{if } t\geq 0 \,\&\, t<0.3 & \tau=10\text{N.m},\ F=10\text{N} \\ \text{if } t\geq 0.3 \,\&\, t<0.6 & \tau=-10\text{N.m},\ F=-10\text{N} \\ \text{else if } t\geq 0.6 \,\&\, t\leq 1 & \tau=0\text{N.m},\ F=0\text{N} \end{cases}$$

همچنین شرایط اولیه به صورت زیر فرض می‌شود.

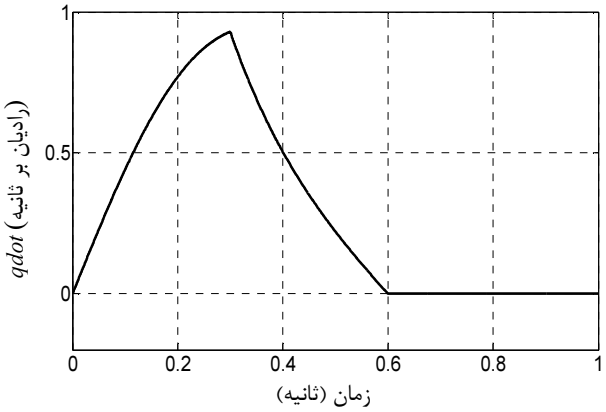
$$q_1=\dot{q}_1=\delta_{11}=\dot{\delta}_{11}=\dot{\eta}_1\big|_{t=0}=0,\ l_1=0.5 \qquad (۶۹)$$

انجام شبیه‌سازی در نرم‌افزار متلب پاسخ زمانی سیستم را که در شکلهای ۳ تا ۸ آورده شده است، در پی دارد.

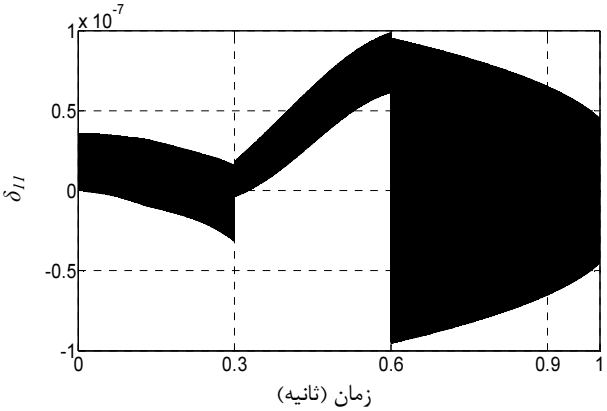
به‌منظور بررسی کارآیی الگوریتم بازگشتی پیشنهادی، زمان مورد نیاز برای استخراج معادلات حرکت و حل آنها برای سیستم نشان داده شده، بایستی ارائه شود. زمان مورد نیاز برای مدت زمان شبیه سازی $1s$ که توسط کامپیوتری با مشخصات (Intel® Core™ 2 Duo Processor E7500 @ 3GHz) انجام پذیرفته است، $550.38\,s$ می‌باشد.



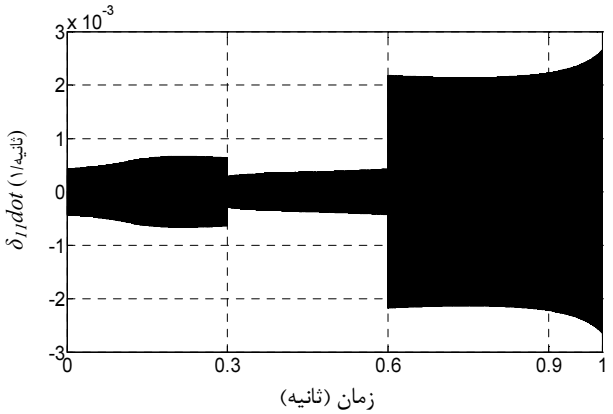
شکل ۳ موقعیت زاویه‌ای بازوها



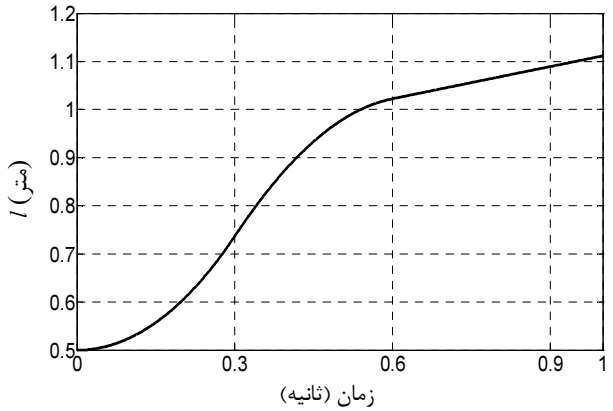
شکل ۴ سرعت زاویه‌ای بازوها



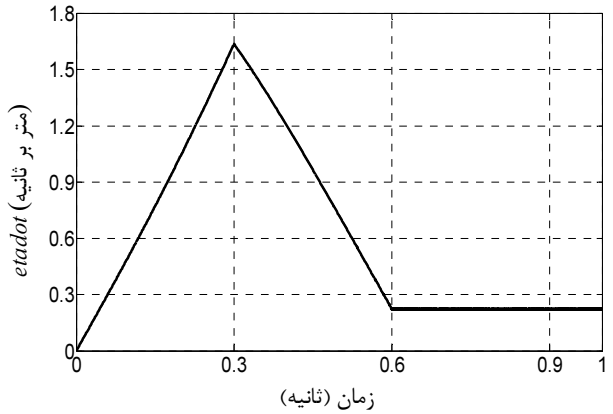
شکل ۵ مختصات تعمیم یافته بازو



شکل ۶ مشتق مختصات تعمیم یافته بازو نسبت به زمان



شکل ۷ موقعیت طولی بازو



شکل ۸ سرعت طولی بازو

همچنین به منظور بررسی تأثیر انعطاف‌پذیری بازو بر روی نتایج، شبیه‌سازی مذکور با استفاده از حلگرهای مختلف نرم‌افزار متلب مانند ode 23، ode 45 انجام شد. به عنوان مثال ode 23 در مواجهه با مسائل با سختی بالا به عنوان یک ابزار مناسب شناخته می‌شود. ولی هیچ تفاوتی در نتایج دیده نشد.

همچنین به منظور بررسی اندازه گام بر روی پایداری سیستم، اندازه گام‌های متفاوت مورد استفاده قرار گرفت که در این حالت نیز تغییری در نتایج مشاهده نشد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی سیستماتیک و خودکار جهت حل معادلات دینامیک معکوس سیستم های رباتیکی با n لینک الاستیک و مفاصل دورانی–کشویی بر پایه فرمولاسیون گیبس- اپل ارائه شده است. از جمله مزایای استفاده از این فرمولاسیون می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- کاهش حجم و پیچیدگی محاسبات نسبت به سایر الگوریتم‌های پیشنهادی (نیوتون اویلر، لاگرانژ و کین).
- کاهش تعداد عملیات های محاسباتی (مشتقات جزئی) نسبت به فرمولاسیون لاگرانژ.
- استفاده از نوتاسیون تانسوری به همراه نوتاسیون برداری.
- استفاده از ماتریس‌های ۳×۳ و ۳×۱ به جای استفاده از ماتریس‌های ۴×۴ و ۴×۱.

به منظور ادامه تحقیقات در زمینه به کارگیری فرمولاسیون گیبس-اپل می‌توان به مدل‌سازی دینامیک مستقیم، ربات‌های متحرک و سیستم‌هایی با قیود غیرهولونومیک[1] اشاره کرد.

۹- مراجع

[1] Featherstone R., Orin D.E., "Robot Dynamics: Equations and Algorithms" *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco*, 2000, pp. 826–834.

[2] Vukobratovic M., Potkonjak V., "Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots", *Springer-Verlag, Berlin,* 1985.

[3] Desoyer K., Lugner P., "Recursive Formulation for the Analytical or Numerical Application of the Gibbs-Appell Method to the Dynamics of Robots", *Robotica*, Vol. 7, No. 4, 1989, pp. 343-347.

[4] Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.P., "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, Vol. 102, No. 2, 1980, pp. 69-79.

[5] Hollerbach J.M., "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics Formulation and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity", *IEEE*

1. Non-Holonomic

Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 10, No.11, 1980, pp. 730-736.

[6] Kane T., Levinson D., "The use of Kane's Dynamical Equations in Robotics" *International Journal of Robotics Research*, Vol. 2, No. 3, 1983, pp. 3-21.

[7] Angeles J., Ma O., Rojas A., "An Algorithm for the Inverse Dynamics of N-Axis General Manipulators using Kane's Equations", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 17, No. 2, 1989, pp. 1545-1561.

[8] Balafoutis C.A., Patel R.V., "Dynamic Analysis of Robot Manipulators: A Cartesian Tensor Approach", *Kluwer Academic Press, Boston*, 1991.

[9] Lee C.S.G., Chang P.R., "Efficient Parallel Algorithm for Robot Inverse Dynamics Computation", *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* Vol. 16, No. 4, 1986, pp. 532-542.

[10] Korayem M. H., Shafei A. M., "Inverse Dynamic Equation of Motion for Flexible Link Manipulators using Recursive Gibbs-Appell Formulation", *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*; December 15-18, 2007, pp. 2160-2165.

[11] M.H. Korayem, A.M. Shafei; "Motion Equations Proper for Forward Dynamic of Robotic Manipulators with Flexible Links by using Recursive Gibbs-Appell Formulation", ScientiaIranica Transaction B-mechanical eng, Vol. 16, No. 6, 2009, pp479-495.

[12] Korayem M.H., A.M. Shafei., "Dynamic Modeling of Nonholonomic Wheeled Mobile Manipulators with Elastic Joints using Recursive Gibbs-Appell Formulation", *Paper accepted for publication in Scientia Iranica*, 2012.

[13] Korayem M.H., Shafei A.M., Kadkhodaei B., Absalan F., Azimi A., Dehkordi S.F., "Theoretical and Experimental Investigation of a Single-Link Elastic Manipulator System", *1st Conference on Experimental Solid Mechanics and Dynamics, Xmech*, 2012.

[14] Tabarok B., Leeh C. M., Kim Y. I., "On the Dynamics of Axially Moving Beams", *Journal of Franklin Institute*, Vol. 297, No. 3, 1974, pp. 201-220.

[15] Wang P.C.K., Wei J.D., "Vibration in a Moving flexible Robot Arm", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 116, No. 1, 1987, pp.149–160.

[16] Kane T.R., Ryan R.R., Banarjee A.K., "Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base", *J. Guidance Control Dyn* Vol. 10, No. 2, 1987, pp. 139-151.

[17] Al-Bedoor B.O., Khulief Y.A., "General Planar Dynamics of a Sliding flexible Link", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 206, No. 5, 1997, pp. 641-661.

[18] Basher A.M.H., "Modeling and Simulation of Flexible Robot Manipulator with a Prismatic Joint", *Conf. Proc.-IEEE Southeast*, 2007, pp. 31–38.

[19] Farid M., Salimi I., "Inverse Dynamics of a Planar flexible-Link Manipulator with Revolute-Prismatic Joints", *American Society of Mechanical Engineers, Des. Eng. Division (Publication) DE 111*, 2001, pp. 345–350.

[20] Khadem S.E., Pirmohammadi A.A., "Analytical Development of Dynamic Equations of Motion for a Three-Dimensional flexible Link Manipulator with Revolute and Prismatic Joints", *IEEE Trans. Syst. Man Cybernet*, Vol. 33, No. 2, 2003, pp. 237–249.

[۲۱] اسلامی‌زاده س.، پیرمحمدی ع.ا.، "تحلیل ارتعاشات خمشی و پیچشی بازوی ربات انعطاف پذیر با مفاصل کشویی و لولایی"، مجله بین المللی علوم مهندسی، جلد سیزدهم، شماره ۵، سال ۱۳۸۱، ص‌ص ۱۰۹-۱۲۸.

[22] Kalyoncu M., "Mathematical Modeling and Dynamic Response of a Multi-Straight-line Path Tracing Flexible Robot Manipulator with Rotating-Prismatic Joint", *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 32, No. 5, 2008, pp. 1087-1098.