



تحلیل پایداری جانبی خودروی ریلی سرعت بالا در قوس

مهدی رنجبر^۱، محمد رضا قضاوی^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۴۱۱۵/۱۱۱، ghazavim@modares.ac.ir

چکیده - حفظ پایداری خودروی ریلی سرعت بالا، برای جلوگیری از حوادث ناخوشایند اهمیت حیاتی دارد. به همین منظور، دینامیک خودروی ریلی با ۳۸ درجه آزادی شامل جابجایی‌های طولی، عرضی، قائم و دوران حول محورهای مذکور مدل شده است. در شبیه‌سازی تماس چرخ-ریل، از ریل الاستیک و مدل خزش غیرخطی استفاده شده است. ارتعاشات پایدار و رفتار حلقه محدود متناظر با آن بررسی شده است. به منظور مطالعه پایداری، تحلیل پدیده انشعاب انجام شده است. این تحلیل دربرگیرنده محدوده‌ای از شعاع قوس ریل و ضریب مخروطیت چرخ است. نشان داده شده که جابجایی طولی در پایداری جانبی تأثیری ندارد. همچنین با افزایش ضریب مخروطیت چرخ یا با کاهش شعاع قوس ریل، سرعت بحرانی ناپایداری جانبی کاهش پیدا می‌کند.

کلیدواژه‌ها: دینامیک خودروهای ریلی، مدل خزش غیرخطی، سرعت بحرانی هانتینگ، شبیه‌سازی عددی، تحلیل انشعاب.

High-speed railway vehicle lateral stability analysis in curve

M. Ranjbar¹, M. R. Ghazavi^{2*}

1- MSc. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran.

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Tarbiat Modares Univ., Tehran, Iran.

* P. O. B. 14115/111 Tehran, Iran. ghazavim@modares.ac.ir

Abstract- To prevent unpleasant incidents, preservation high-speed railway vehicle stability has vital importance. For this purpose, the railway vehicle dynamic is modeled using a 38-DOF includes the longitudinal, lateral, vertical displacements and rotation around the mentioned axes. A heuristic nonlinear creep model and the elastic rail are used for simulation of the wheel-rail contact. Stable vibrations and corresponding limit cycle behavior are investigated. In order to study stability, bifurcation analyses are performed. These analyses are carried out for different wheel conicity and radius of the curved track. It is revealed that the longitudinal displacement does not affect on the lateral stability. Also the critical hunting speed decreases by increasing the wheel conicity or decreasing the radius of the curved track.

Keywords: Railway Vehicle Dynamics, Nonlinear Creep Model, Critical Hunting Speed, Numerical Simulation, Bifurcation Analysis.

۱- مقدمه

با دنبال کردن انقلاب صنعتی، خودروهای ریلی به عنوان وسیله‌ای مهم جهت حمل و نقل مسافر و بار محسوب می‌شوند. در چند دهه قبل سرعت خودروی ریلی کم بود و مطالعه پایداری حرکت به اندازه فعلی اهمیت حیاتی نداشت. با ظهور قطارهای پرسرعت، سرعت بحرانی هانتینگ^۱ شاخصی بسیار مهم در تحلیل خودروهای ریلی شده است.

مطالعات زیادی توسط محققان بر روی پایداری و پدیده انشعاب^۲ خودروهای ریلی انجام شده است از جمله: ویکنس [۱]، هوگل [۲]، پترسن [۳]، کنادسن و همکاران [۴]، ژنگ و همکاران [۵]، احمدیان و یانگ [۶] و ترو [۷]. درسال‌های اخیر جین و همکارانش [۸]، به بررسی نامنظمی‌های ریل در یک قوس بر روی خودروی ریلی سرعت بالا پرداختند. لی و چنگ [۹]، به بررسی تأثیر حرکت قائم و غلتشی بر روی سرعت بحرانی سیستم پرداختند.

جانبی بررسی شده است. سرعت به عنوان پارامتر انشعاب در نظر گرفته شده و تحلیل پدیده انشعاب، به منظور مطالعه پایداری انجام شده است. این تحلیل دربرگیرنده محدوده‌ای از مخروطیت چرخ و شعاع قوس ریل می‌باشد.

۲- فرمول بندی خودروی ریلی

۲-۱- مدل خودروی ریلی

شماتیک خودروی ریلی در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شکل سیستم تعلیق اولیه به منظور اتصال بین مجموعه چرخ-محور و بدنه بوژی استفاده می‌شود. سیستم تعلیق ثانویه به منظور اتصال بین بدنه بوژی و بدنه خودروی ریلی استفاده می‌شود. ثابت‌های L_{c1} ، L_{c2} و L_{c3} به ترتیب نشان‌دهنده فاصله بین مرکز جرم بدنه خودروی ریلی و بدنه بوژی، فاصله طولی بین مرکز جرم بدنه بوژی جلویی و مجموعه چرخ-محور و فاصله طولی بین مرکز جرم بدنه بوژی عقبی و مجموعه چرخ-محور می‌باشند. فاصله قائم بین مرکز جرم مجموعه چرخ-محور با مرکز جرم بدنه خودروی ریلی h نشان داده شده است. ثابت‌های h_{c1} و h_{c3} نشان‌دهنده نصف بازوی فنرهای طولی و قائم سیستم تعلیق اولیه می‌باشند. ضرائب h_{c2} و h_{c4} نشان‌دهنده نصف بازوهای دمپرهای طولی و قائم سیستم تعلیق ثانویه هستند. ضرائب h_{c1} و h_{c3} نشان‌دهنده نصف بازوهای فنرهای طولی و قائم سیستم تعلیق ثانویه هستند. ضرائب h_{c2} و h_{c4} نشان‌دهنده نصف بازوهای دمپرهای طولی و قائم سیستم تعلیق ثانویه هستند.

با در نظر گرفتن سرعت چرخشی ثابت، می‌توان از مؤلفه چرخش حول محور y برای مجموعه چرخ-محور صرف‌نظر کرد. در نتیجه برای بدنه خودروی ریلی ۶ درجه آزادی، برای بدنه هر کدام از بوژی‌ها ۶ درجه آزادی و برای هر کدام از مجموعه چرخ-محور ۵ درجه آزادی تعریف شده است. در مجموع ۳۸ درجه آزادی برای کل سیستم تعریف شده است (شکل ۲). در این شکل زیرنویس i نشانگر مکان بوژی در خودروی ریلی است ($i=1$ نشان‌دهنده بوژی جلویی و $i=2$ نشان‌دهنده بوژی عقبی). زیرنویس j نشانگر مکان مجموعه چرخ-محور در بدنه بوژی است ($j=1$ نشان‌دهنده مجموعه چرخ-محور کشنده و $j=2$ نشان‌دهنده مجموعه چرخ-محور کشیده شده).

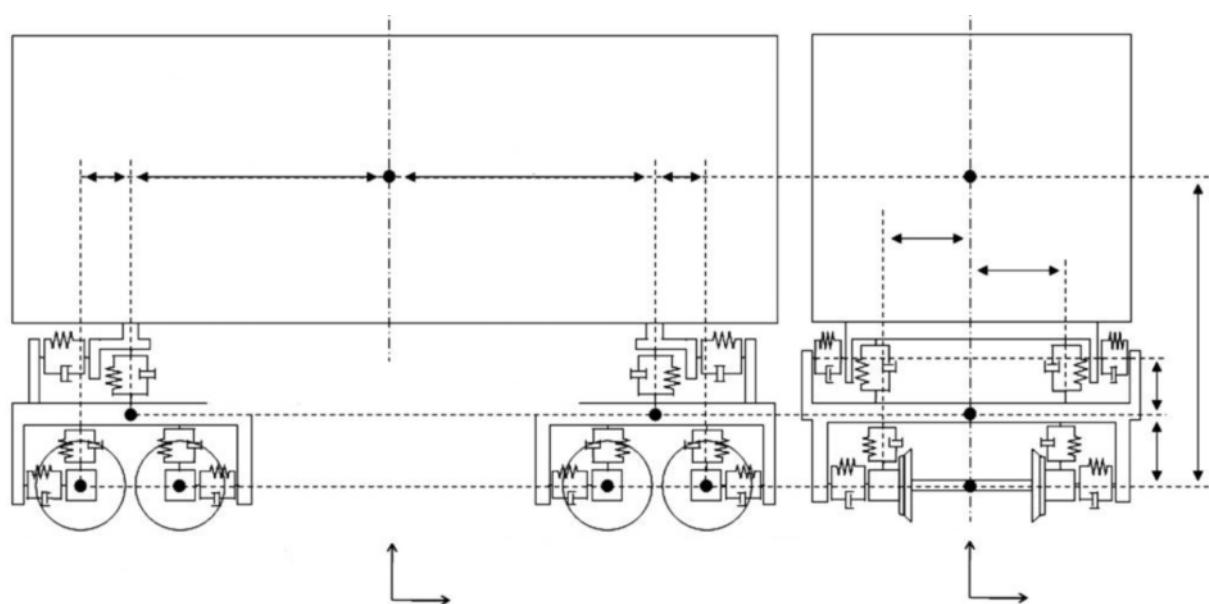
فان و همکارانش [۱۰]، رفتار دینامیکی خودروی ریلی با ۲۸ درجه آزادی را مورد بررسی قرار دادند. مطالعات آنها برای ریل‌های مستقیم بود. چنگ و همکارانش [۱۱]، از مدل ابتکاری غیر خطی خزشی برای تحلیل رفتار خودروی ریلی سرعت بالا با ۲۰ درجه آزادی در یک قوس، استفاده کردند. آنها تأثیر پارامترهای سیستم تعلیق نوع اول و دوم را بر سرعت بحرانی تحقیق کردند.

زیبونسکی و دوسا [۱۲]، یک ایده اساسی برای تخمین پایداری خودروهای ریلی ارائه دادند. آنها منحنی‌های انشعاب را برای یک قوس به شعاع ۶۰۰ متر و یک مسیر مستقیم رسم کردند. همچنین تأثیر شرایط اولیه مختلف را بر روی حلقه‌های بسته مورد بررسی قرار دادند. کیم و سئوک [۱۳]، با استفاده از روش ضرائب چندگانه به بررسی منحنی انشعاب خودروی ریلی پرداختند. آنها تحلیل فرکانسی مدل خزشی خطی و مدل خزشی غیرخطی را مقایسه کردند. آنها در مدل خود از ۳۱ درجه آزادی استفاده کرده بودند و نمودارهای جابجایی جانبی چرخ-محور کشنده در بوژی پیشرو را برحسب فرکانس رسم کردند.

کیم و همکارانش [۱۴]، با مدل کردن خودروی ریلی سرعت بالا با ۳۱ درجه آزادی به بررسی پایداری پرداختند. آنها از روش غیرمستقیم لیپانوف^۱ برای بررسی پایداری استفاده کردند. آنها تأثیر پارامترهای سیستم تعلیق اولیه و ثانویه را بر سرعت بحرانی مورد بررسی قرار دادند و دریافتند که سرعت بحرانی به سفتی طولی و جانبی سیستم تعلیق اولیه حساس است.

با بررسی تحقیقات ذکر شده مشاهده می‌شود که مختصات طولی در این تحقیقات در نظر گرفته نشده است. در این تحقیق، با در نظر گرفتن تمام حرکت‌های موجود (طولی، عرضی، قائم و دوران حول این محورها)، معادلات حرکت برای خودروی ریلی بدست آمده است. در شبیه‌سازی تماس چرخ-ریل، از ریل الاستیک و مدل خزش غیرخطی استفاده شده است. برای حل معادلات حرکت، روش رانج کاتای^۲ مرتبه چهار استفاده شده است. به منظور بررسی ارتعاشات پایدار و رفتار حلقه محدود متناظر، نمودارهای تحلیل زمانی، تصویر فازی و ارائه اربیتال بدست آمده است. تأثیر جابجایی طولی بر روی پایداری

1. Lyapunov indirect method
2. Runge kutta



شکل ۱ مدل خودروی ریلی [۱۳]

۲-۲- تماس چرخ و ریل

در این تحقیق، ریل به صورت الاستیک خطی مدل سازی شده است (شکل ۳). در این شکل ضرائب K_{ry} و K_{rz} نشان دهنده سفتی قائم و جانبی ریل هستند. ثابت های λ ، a ، φ_{se} به ترتیب شیب ریل، نصف فاصله بین لبه های داخلی ریل ها و ضریب مخروطیت و شعاع قوس ریل را نشان می دهند.

در این تحقیق، از مدل خزشی ابتکاری غیرخطی استفاده می شود. این مدل از ترکیب تئوری خطی کالکر و ضریب اشباع بدست می آید. بنابراین نیروها و ممان های خزشی غیرخطی به صورت زیر ارائه می شوند [۱۵]:

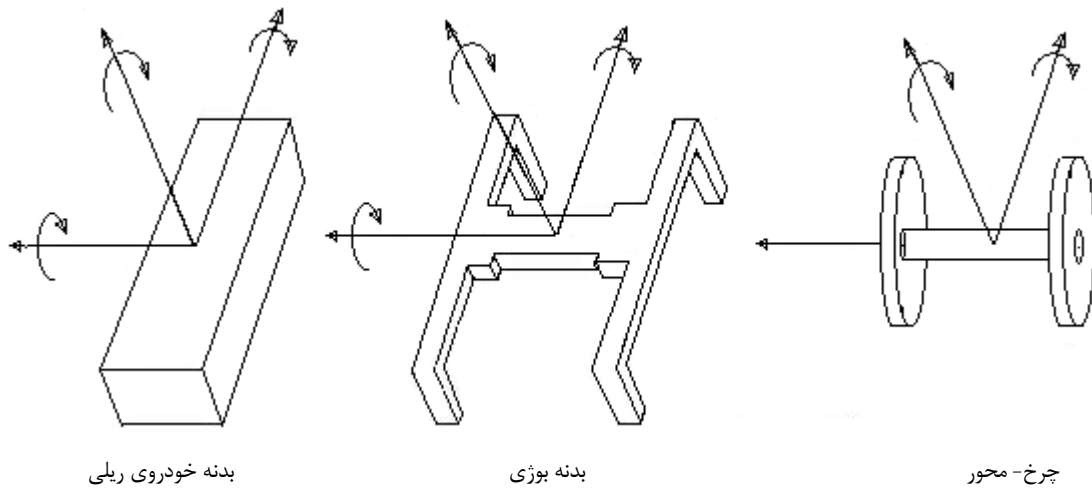
$$\begin{aligned} F_{pxij}^n &= \alpha_{ij} F_{pxij} \\ F_{pyij}^n &= \alpha_{ij} F_{pyij} \\ M_{pzij}^n &= \alpha_{ij} M_{pzij} \end{aligned} \quad (1)$$

با استفاده از تئوری خطی کالکر، نیروها و ممان های خزشی به صورت زیر نوشته می شوند [۱۵]:

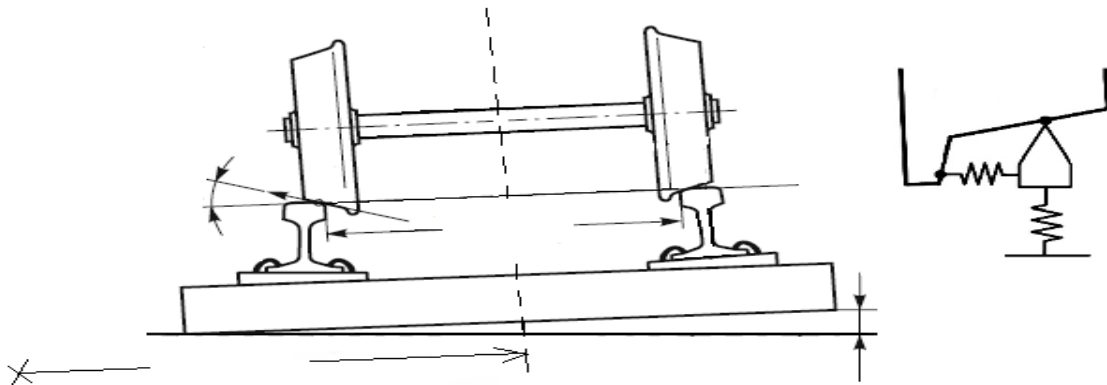
$$\begin{aligned} F_{Lxij}^* &= -\frac{f_{33}}{V} \left(V \left(1 + \frac{a}{R_y} - \frac{r_L}{r_0} \right) - a\dot{\psi}_{wij} \right) \\ F_{Lyij}^* &= -\frac{f_{11}}{V} (\dot{y}_{wij} + r_L \dot{\phi}_{wij} - V \psi_{wij}) \\ &\quad - \frac{f_{12}}{V} \left(\dot{\psi}_{wij} - \frac{V}{R_y} - \frac{V}{r_0} \delta_L \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Lziz}^* &= \frac{f_{12}}{V} (\dot{y}_{wij} + r_L \dot{\phi}_{wij} - V \psi_{wij}) \\ &\quad - \frac{f_{22}}{V} \left(\dot{\psi}_{wij} - \frac{V}{R_y} - \frac{V}{r_0} \delta_L \right) \\ F_{Rxi}^* &= -\frac{f_{33}}{V} \left(V \left(1 - \frac{a}{R_y} - \frac{r_R}{r_0} \right) + a\dot{\psi}_{wij} \right) \\ F_{Ryij}^* &= -\frac{f_{11}}{V} (\dot{y}_{wij} + r_R \dot{\phi}_{wij} - V \psi_{wij}) \\ &\quad - \frac{f_{12}}{V} \left(\dot{\psi}_{wij} - \frac{V}{R_y} + \frac{V}{r_0} \delta_R \right) \\ M_{Rziz}^* &= \frac{f_{12}}{V} (\dot{y}_{wij} + r_R \dot{\phi}_{wij} - V \psi_{wij}) \\ &\quad - \frac{f_{22}}{V} \left(\dot{\psi}_{wij} - \frac{V}{R_y} + \frac{V}{r_0} \delta_R \right) \end{aligned} \quad (2)$$

ضرائب r_0 و V شعاع غلتش اسمی چرخ-محور و سرعت خودروی ریلی را نشان می دهند. پارامترهای r_L و r_R نشان دهنده شعاع غلتش چرخ سمت راست و چپ هستند. ضرائب δ_L و δ_R زاویه تماس چرخ سمت راست و چپ را نشان می دهند. ثابت های f_{11} ، f_{12} ، f_{22} و f_{33} به ترتیب ضریب های خزشی جانبی، جانبی-چرخشی، چرخشی و طولی را نشان می دهند.



شکل ۲ درجات آزادی سیستم



شکل ۳ مدل تماس چرخ و ریل [۱۴]

ضریب اشباع α در فرمول بندی خزش غیرخطی معادله (۱)، به صورت زیر تعریف می شود [۱۴]:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\beta_{ij}} \left(\beta_{ij} - \frac{1}{3}\beta_{ij}^2 + \frac{1}{27}\beta_{ij}^3 \right) \times \left(\tanh(10^4(3 - \beta_{ij})) + 1 \right) + \frac{1}{2\beta_{ij}} \left(\tanh(10^4(\beta_{ij} - 3)) + 1 \right) \quad (4)$$

β ثابت غیرخطی بودن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_{Rij} + \beta_{Lij}}{2}$$

$$\beta_{pij} = \frac{\sqrt{(F_{pxij}^*)^2 + (F_{pyij}^*)^2}}{\mu \sqrt{(N_{pyij})^2 + (N_{pzij})^2}}, \quad P = L, R \quad (5)$$

نیرو و ممان های خطی خزشی با انتقال نیرو و ممان های خزشی کالکر بدست می آیند [۱۵].

$$\begin{aligned} F_{Lxij} &= F_{Lxij}^* - F_{Lyij}^* \psi_{wij} \\ F_{Rxij} &= F_{Rxij}^* - F_{Ryij}^* \psi_{wij} \\ F_{Lyij} &= F_{Lxij}^* \psi_{wij} + F_{Lyij}^* \\ F_{Ryij} &= F_{Rxij}^* \psi_{wij} + F_{Ryij}^* \\ F_{Lzij} &= F_{Lyij}^* (\delta_L + \phi_{wij}) \\ F_{Rzij} &= -F_{Ryij}^* (\delta_R - \phi_{wij}) \\ M_{Lxij} &= M_{Lzij}^* (\delta_L + \phi_{wij}) \psi_{wij} \\ M_{Rxij} &= -M_{Rzij}^* (\delta_R - \phi_{wij}) \psi_{wij} \\ M_{Lzij} &= M_{Lzij}^* \\ M_{Rzij} &= M_{Rzij}^* \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I_{cy} \ddot{\gamma}_c &= M_{sy} \\ I_{cz} \ddot{\psi}_c &= M_{sz} \end{aligned} \quad (9)$$

در این معادلات زیرنویس c بر بدنه خودروی ریلی دلالت دارد. x_c ، y_c و z_c به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی‌های طولی، عرضی و قائم هستند. φ_c ، γ_c و ψ_c به ترتیب نشان‌دهنده دوران حول محورهای x ، y و z می‌باشند. جرم بدنه خودروی ریلی و شتاب ناشی از گرانش زمین با m_c و g نشان داده شده‌اند. ممان اینرسی جرم حول محورهای x ، y و z به ترتیب با I_{cx} ، I_{cy} و I_{cz} مشخص شده‌اند. نیروهای سیستم تعلیق در جهت محورهای x ، y و z به ترتیب با F_{sxc} ، F_{syc} و F_{szc} نشان داده شده‌اند. ممان‌های سیستم تعلیق حول محورهای x ، y و z به ترتیب با M_{sxc} ، M_{syc} و M_{szc} نمایان شده‌اند. جزئیات دقیق نیروها و ممان‌های سیستم تعلیق در پیوست الف ارائه شده است.

۳-۲- بدنه بوژی

معادلات حرکت بدنه بوژی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} m_{ti} \ddot{x}_{ti} &= F_{sxti} \\ m_{ti} \left(\ddot{y}_{ti} - \frac{V^2}{R_y} \right) &= -m_c g \varphi_{se} + F_{syti} \\ m_{ti} \left(\ddot{z}_{ti} + \frac{V^2 \varphi_{se}}{R_y} \right) &= -m_c g + F_{szti} \\ I_{tix} \ddot{\phi}_{ti} &= M_{sxti} \\ I_{tiy} \ddot{\gamma}_{ti} &= M_{syti} \\ I_{tiz} \ddot{\psi}_{ti} &= M_{szti} \end{aligned} \quad (10)$$

در این معادلات زیرنویس t بر بدنه بوژی دلالت دارد. x_{ti} و y_{ti} به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی‌های طولی، عرضی و قائم می‌باشند. φ_{ti} ، γ_{ti} و ψ_{ti} به ترتیب نشان‌دهنده دوران حول محورهای x ، y و z هستند. ممان اینرسی جرم حول محورهای x ، y و z به ترتیب با I_{tix} ، I_{tiy} و I_{tiz} مشخص شده‌اند. نیروهای سیستم تعلیق در جهت محورهای x ، y و z به ترتیب با F_{sxti} ، F_{syti} و F_{szti} نشان داده شده‌اند. ممان‌های سیستم تعلیق حول محورهای x ، y و z به ترتیب با M_{sxti} ، M_{syti} و M_{szti} نمایان شده‌اند (پیوست الف).

۳-۳- چرخ-محور

معادلات حرکت چرخ-محور به صورت رابطه (۱۱) نوشته می‌شود:

در این رابطه μ نشان‌دهنده ضریب اصطکاک است. N_{pxij} و N_{pyij} به ترتیب بر نیروهای نرمال طولی، جانبی، و قائم دلالت دارند:

$$\begin{aligned} N_{Lzij} &= -K_{rz} (z_{wij} - \lambda y_{wij} + a \varphi_{wij}) \\ N_{Rzij} &= -K_{rz} (z_{wij} + \lambda y_{wij} - a \varphi_{wij}) \\ N_{Lyij} &= -N_{Lzij} \tan(\delta_L + \varphi_{wij}) \cos \psi_{wij} \\ N_{Ryij} &= N_{Rzij} \tan(\delta_R - \varphi_{wij}) \cos \psi_{wij} \\ N_{Lxij} &= -N_{Lzij} \tan(\delta_L + \varphi_{wij}) \sin \psi_{wij} \\ N_{Rxij} &= N_{Rzij} \tan(\delta_R - \varphi_{wij}) \sin \psi_{wij} \end{aligned} \quad (6)$$

نیروی تماس لبه چرخ به صورت رابطه (۷) خود را نشان می‌دهد [۱۴]:

$$\begin{aligned} F_{tij} &= \frac{K_{ry} (y_{wij} - \delta)^n}{2} \left(\tanh(10^4 (y_{wij} - \delta)) + 1 \right) \\ &+ \frac{K_{ry} (y_{wij} + \delta)^n}{2} \left(\tanh(10^4 (-y_{wij} - \delta)) + 1 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

جایی که δ لقی لبه چرخ را نشان می‌دهد.

بردار مکان با در نظر گرفتن ساختار هندسه چرخ و محور به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} R_{Rxij} &= a \psi_{wij} \\ R_{Ryij} &= -a + r_R \varphi_{wij} \\ R_{Rzij} &= -a \varphi_{wij} - r_R \\ R_{Lxij} &= -a \psi_{wij} \\ R_{Lyij} &= a + r_L \varphi_{wij} \\ R_{Lzij} &= a \varphi_{wij} - r_L \end{aligned} \quad (8)$$

۳- معادلات حرکت

۳-۱- بدنه خودروی ریلی

معادلات حرکت بدنه خودروی ریلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} m_c \ddot{x}_c &= F_{sxc} \\ m_c \left(\ddot{y}_c - \frac{V^2}{R_y} \right) &= -m_c g \varphi_{se} + F_{syc} \\ m_c \left(\ddot{z}_c + \frac{V^2 \varphi_{se}}{R_y} \right) &= -m_c g + F_{szc} \\ I_{cx} \ddot{\phi}_c &= M_{sxc} \end{aligned}$$

۰/۰۵ و شعاع قوس ۲۰۰۰ متر، جابجایی جانبی چرخ و محور کشنده از بوژی پیشرو بر حسب زمان در شکل ۴- الف نشان داده شده است. سرعت جانبی چرخ-محور کشنده از بوژی پیشرو بر حسب جابجایی آن و جابجایی جانبی چرخ-محور کشیده شده از بوژی پیشرو بر حسب جابجایی جانبی چرخ-محور کشنده از بوژی پیشرو در شکل های ۴- ب و ۴- ج نشان داده شده‌اند. به وضوح دیده می‌شود که با گذشت مدت زمان طولانی، ارتعاشات از بین رفته و به سمت نقطه تعادل میل می‌کند. به عبارتی در این سرعت حرکت میرا خواهد شد.

با افزایش سرعت همچنان حرکت میرا خواهد شد، تا اینکه به سرعت بحرانی برسیم. با رسیدن به سرعت بحرانی دامنه ارتعاشات به مقدار ثابتی خواهد رسید و حرکت هانتینگ (یا حلقه بسته) شروع خواهد شد. برای ضریب مخروطیت ۰/۰۵ و شعاع قوس ۲۰۰۰ متر، سرعت ۲۹۳ کیلومتر بر ساعت، سرعت بحرانی می‌باشد. برای سرعت بحرانی ۲۹۳ کیلومتر بر ساعت، نتایج نشان داده شده‌اند (شکل ۵).

همان‌طور در این نمودارها دیده می‌شود حلقه بسته یا حرکت هانتینگ برای بار اول رخ داده است. با سرعت‌های بیشتر از سرعت بحرانی نیز حلقه بسته رخ خواهد داد. نمودارهای مشابهی در مرجع [۱۲]، برای تحلیل پایداری جانبی خودروی ریلی بدست آمده است.

۵-۲- تأثیر جابجایی طولی بر روی پایداری جانبی

نمودارهای بخش قبل با در نظر گرفتن جابجایی طولی رسم شدند. با رسم نمودارهای مذکور بدون در نظر گرفتن جابجایی طولی [۱۴، ۱۳]، دیده می‌شود که تطابق کاملی بین آنها وجود دارد. به عبارتی اضافه کردن مختصات طولی در تحلیل پایداری جانبی تأثیری ندارد.

۵-۳- نمودار انشعاب

۵-۳-۱- نمودار انشعاب بر حسب تغییرات مخروطیت

در این قسمت شعاع قوس ریل ثابت و برابر ۲۰۰۰ متر فرض شده است. برای یک سرعت و مخروطیت مشخص، جابجایی جانبی چرخ و محور کشنده از بوژی پیشرو بر حسب زمان رسم می‌شود.

$$\begin{aligned} m_w \ddot{x}_{wij} &= F_{Lxij}^n + F_{Rxij}^n + N_{Lxij} + N_{Rxij} + F_{sxw} \\ m_w \left(\ddot{y}_{wij} - \frac{V^2}{R_y} \right) &= -m_w g \phi_{se} + F_{Lyij}^n + F_{Ryij}^n + N_{Lyij} \\ &\quad + N_{Ryij} + F_{syw} - F_{tij} \\ m_w \left(\ddot{z}_{wij} + \frac{V^2 \phi_{se}}{R_y} \right) &= -m_w g + F_{Lz} + F_{Rz} + N_{Lz} \\ &\quad + N_{Rz} + F_{szw} \\ I_{wz} \ddot{\psi}_{wij} + \frac{I_{wy} V \dot{\phi}_{wij}}{r_0} &= R_{Rxij} F_{Ryij}^n - R_{Ryij} F_{Rxij}^n \\ &\quad + R_{Lxij} F_{Lyij}^n - R_{Lyij} F_{Lxij}^n + R_{Rxij} N_{Ryij} \\ &\quad + R_{Lxij} N_{Lyij} + M_{Lz}^n + M_{Rz}^n + M_{szw} \\ I_{wx} \ddot{\phi}_{wij} + \frac{I_{wy} V}{r_0} \left(\frac{V}{R_y} - \dot{\psi}_{wij} \right) &= R_{Ryij} F_{Rz}^n \\ &\quad - R_{Rz} F_{Ryij}^n + R_{Lyij} \times F_{Lz} - R_{Lyij} F_{Lyij}^n \\ &\quad + R_{Lyij} N_{Lz} + R_{Ryij} \times N_{Rz} - R_{Rz} N_{Ryij} \\ &\quad - R_{Lz} N_{Lyij} + M_{Lx} + M_{Rx} + M_{sxw} \quad (11) \end{aligned}$$

در این معادلات زیرنویس w بر مجموعه چرخ-محور دلالت دارد. x_{wij} ، y_{wij} و z_{wij} به ترتیب نشان‌دهنده جابجایی‌های طولی، عرضی و قائم می‌باشند. ϕ_{wij} ، ψ_{wij} و γ_{wij} به ترتیب نشان‌دهنده دوران حول محورهای x ، y و z هستند. ممان اینرسی جرم حول محورهای x ، y و z به ترتیب با I_{wx} ، I_{wy} و I_{wz} مشخص شده‌اند. نیروهای سیستم تعلیق در جهت محورهای x ، y و z به ترتیب با F_{sxw} ، F_{syw} و F_{szw} نشان داده شده‌اند. ممان‌های سیستم تعلیق حول محورهای x و z به ترتیب با M_{sxw} و M_{szw} نمایان شده‌اند (پیوست الف).

۴- روش حل

معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۱) می‌توانند در فرم زیر ارائه شوند:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (12)$$

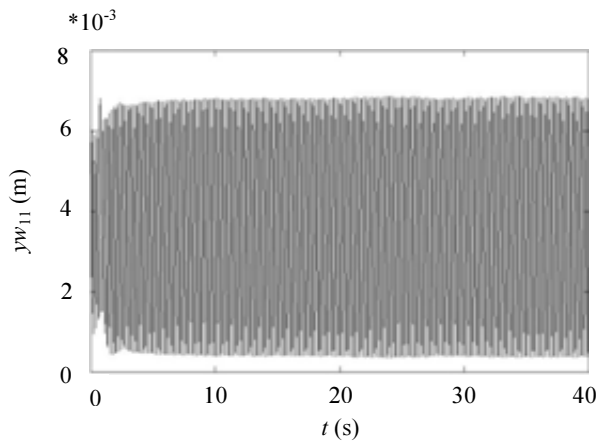
در این معادله $x(t)$ برداری شامل ۷۶ مؤلفه و $F(x(t))$ بردار غیرخطی دربرگیرنده ۷۶ مؤلفه است. برای حل معادلات (۱۲)، روش رانج کاتای مرتبه چهار با شرایط اولیه صفر و مقادیر عددی پارامترهای پیوست ب استفاده شده است.

۵- بررسی و تحلیل نتایج

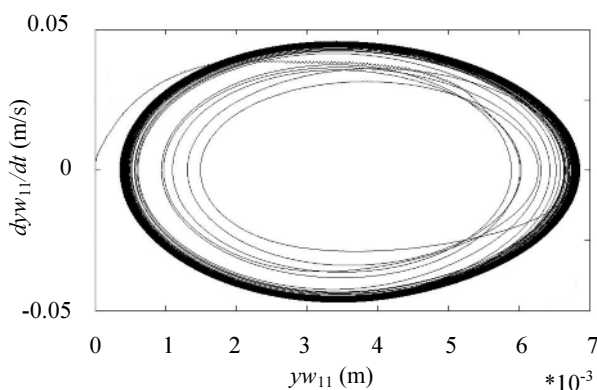
۵-۱- حرکت پایدار و رفتار حلقه محدود متناظر

برای شرایط سرعت ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت، ضریب مخروطیت

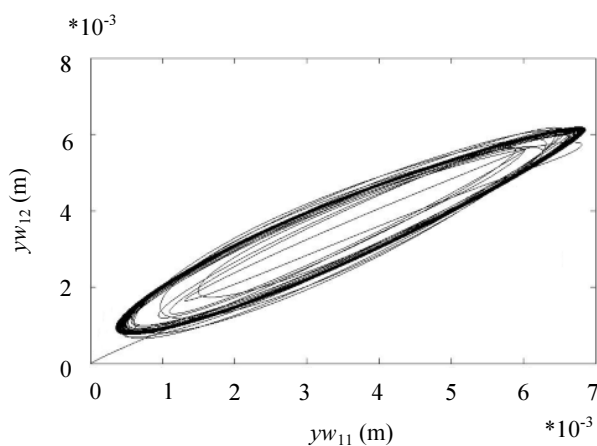
می‌شود تا اینکه هانتینگ رخ دهد، از روی این نمودار هم ماکزیمم جابجایی جانبی بعد از ثابت شدن دامنه ارتعاشات، خوانده می‌شود.



الف- تحلیل

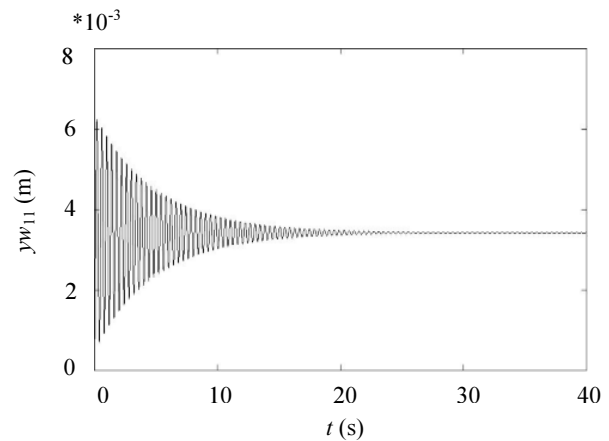


ب- تصویر فازی

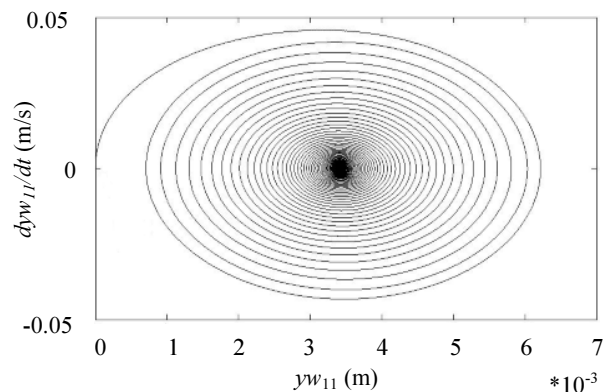


ج- ارائه اربیتالی

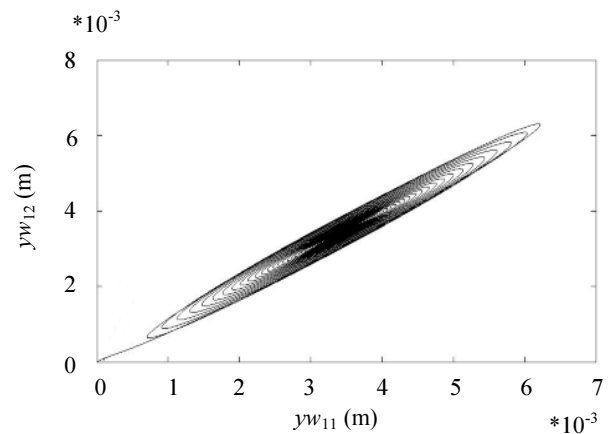
شکل ۵ برای سرعت ۲۹۳ کیلومتر بر ساعت، ضریب مخروطیت ۰/۰۵ و شعاع قوس ۲۰۰۰ متر



الف- تحلیل زمانی



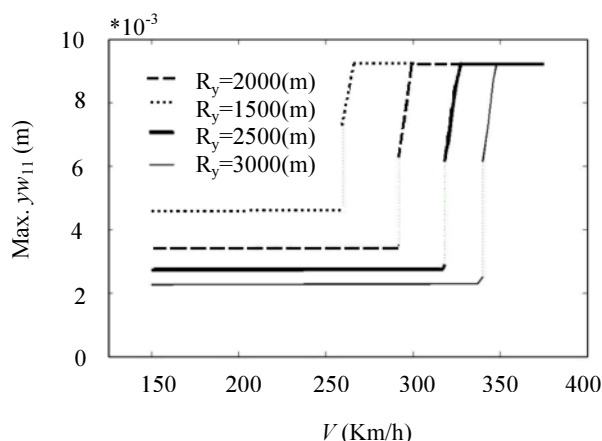
ب- تصویر فازی



ج- ارائه اربیتالی

شکل ۴ برای سرعت ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت، ضریب مخروطیت ۰/۰۵ و شعاع قوس ۲۰۰۰ متر

از روی این نمودار ماکزیمم جابجایی جانبی بعد از رسیدن به حالت پایدار، خوانده می‌شود. حال با ثابت نگاه داشتن مقادیر تمام متغیرها، سرعت افزایش می‌یابد و همین روند تکرار



شکل ۷ انشعاب بر حسب تغییرات شعاع قوس

با افزایش شعاع قوس، سرعت بحرانی هانتینگ افزایش می‌یابد. همچنین بدون توجه به مقدار شعاع قوس، در سرعت‌های بالا ماکزیمم جابجایی جانبی به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کند. بنابراین با توجه به شعاع قوس‌هایی که در مسیر حرکت وجود دارد باید کمترین مقدار سرعت بحرانی از بین سرعت‌های بحرانی قوس‌ها انتخاب شود تا در طول حرکت هانتینگ رخ ندهد.

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، دینامیک خودروی ریلی با ۳۸ درجه آزادی شامل جابجایی‌های طولی، جانبی، قائم و دوران حول محورهای مذکور مدل شد. در شبیه‌سازی تماس چرخ-ریل، از ریل الاستیک و مدل خزش غیرخطی استفاده شد. برای حل معادلات حرکت از روش رانج کاتای مرتبه چهار استفاده شد. نمودارهای حلقه بسته و انشعاب برای تحلیل پایداری بدست آمد. در نمودار انشعاب سرعت به عنوان پارامتر انشعاب در نظر گرفته شد و تحلیل انشعاب برای مقادیر متفاوت ضریب مخروطیت چرخ-محور و شعاع قوس ریل انجام شد. نتایج نشان داد که اضافه کردن مختصات طولی، تأثیری در تحلیل پایداری جانبی ندارد و با کاهش ضریب مخروطیت یا افزایش شعاع قوس ریل، سرعت بحرانی هانتینگ افزایش می‌یابد. زمانی که چرخ‌ها بر روی ریل‌های داخلی و خارجی حرکت می‌کنند باید دارای تعداد چرخش بر واحد زمان یکسان باشند، برای رسیدن به این مطلوب سطح غلتشی چرخ‌ها را مخروطی می‌سازند. به

باز هم سرعت افزایش داده شده و این روند تکرار می‌شود. این مقادیر تشکیل نمودار انشعاب را می‌دهند (شکل ۶).

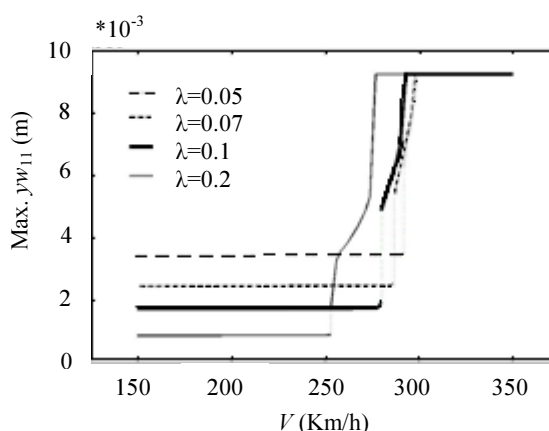
هر یک از خطوط تک رنگ نشان‌دهنده نمودار انشعاب برای یک مخروطیت خاص است. خطوط خط چین بیانگر پدیده هانتینگ می‌باشد که سرعت متناظر با این نقطه، سرعت بحرانی هانتینگ است. نقطه هانتینگ در نمودار انشعاب جداکننده قسمت پایدار نمودار و حرکت حلقه بسته است.

با مشاهده این نمودار می‌توان گفت که سرعت‌های هانتینگ ۲۵۳، ۲۸۰، ۲۸۷ و ۲۹۳ کیلومتر بر ساعت متناظر با مخروطیت‌های ۰/۲، ۰/۱، ۰/۰۷ و ۰/۰۵ بدست می‌آید. با افزایش ضریب مخروطیت سرعت بحرانی هانتینگ کاهش می‌یابد، بنابراین ۰/۰۵ مناسب‌ترین مقدار می‌باشد. همچنین بدون توجه به مقدار ضریب مخروطیت، در سرعت‌های بالا ماکزیمم جابجایی جانبی به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کند.

۵-۳-۲- نمودار انشعاب بر حسب تغییرات شعاع قوس

محاسبات قسمت قبل برای این بخش تکرار می‌شود با این تفاوت که در این قسمت ضریب مخروطیت ثابت و برابر ۰/۰۵ یعنی مقدار بهینه بخش قبل در نظر گرفته شده است. برای چهار شعاع مختلف، نمودار انشعاب نشان داده شده است (شکل ۷).

هر یک از خطوط تک‌رنگ نشان‌دهنده نمودار انشعاب برای یک شعاع قوس خاص است. با مشاهده این نمودار می‌توان گفت سرعت‌های هانتینگ ۲۶۰، ۲۹۲، ۳۱۸ و ۳۴۰ کیلومتر بر ساعت متناظر با شعاع‌های قوس ۱۵۰۰، ۲۰۰۰، ۲۵۰۰ و ۳۰۰۰ متر بدست می‌آید.



شکل ۸ انشعاب بر حسب تغییرات ضریب مخروطیت

$$\begin{aligned}
& + h_G \left(-2K_{py} (y_{ti} - y_{wi1}) - 4K_{py} h_G \phi_{ti} \right) \\
& + h_G \left(-2C_{py} (\dot{y}_{ti} - \dot{y}_{wi1}) - 4C_{py} h_G \dot{\phi}_{ti} \right) \\
& - 2h_G \left(K_{py} (y_{ti} - y_{wi2}) + C_{py} (\dot{y}_{ti} - \dot{y}_{wi2}) \right)
\end{aligned}$$

۷-۱-۲- در جهت عرضی

$$\begin{aligned}
F_{syc} &= -2K_{sy} (y_c - y_{t1}) - 2C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_{t1}) \\
& - 2K_{sy} \left((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t1} \right) \\
& - 2C_{sy} \left((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{t1} \right) \\
& - 2K_{sy} (y_c - y_{t2}) - 2C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_{t2}) \\
& - 2K_{sy} \left((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t2} \right) \\
& - 2C_{sy} \left((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{t2} \right) \\
F_{syti} &= 2K_{sy} (y_c - y_{ti}) + 2C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_{ti}) \\
& - 2(-1)^i K_{sy} L_c \psi_c - 2(-1)^i C_{sy} L_c \dot{\psi}_c \\
& + 2K_{sy} \left((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{ti} \right) \\
& + 2C_{sy} \left((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{ti} \right) \\
& - 2K_{py} (y_{ti} - y_{wi1}) - 4K_{py} h_G \phi_{ti} \\
& - 2K_{py} (y_{ti} - y_{wi2}) - 2C_{py} (\dot{y}_{ti} - \dot{y}_{wi1}) \\
& - 2C_{py} (\dot{y}_{ti} - \dot{y}_{wi2}) - 4C_{py} h_G \dot{\phi}_{ti} \\
F_{sywij} &= -2K_{py} y_{wij} - 2C_{py} \dot{y}_{wij} + 2K_{py} y_{ti} \\
& + 2C_{py} \dot{y}_{ti} - 2(-1)^j K_{py} L_{ti} \psi_{ti} \\
& - 2(-1)^j C_{py} L_{ti} \dot{\psi}_{ti} + 2K_{py} h_G \phi_{ti} \\
& + 2C_{py} h_G \dot{\phi}_{ti} \\
M_{syti} &= -2K_{sx} h_0 \left((h - h_G - h_0) \gamma_c + h_0 \gamma_{ti} \right) \\
& - 2C_{sx} h_0 \left((h - h_G - h_0) \dot{\gamma}_c + h_0 \dot{\gamma}_{ti} \right) \\
& + h_G \left(-4K_{px} h_G \gamma_{ti} - 4C_{px} h_G \dot{\gamma}_{ti} \right) \\
& + 2L_G \left(K_{px} (z_{ti} - z_{wi1}) + C_{px} (\dot{z}_{ti} - \dot{z}_{wi1}) \right) \\
& + L_G \left(-4K_{pz} L_G \gamma_{ti} - 4C_{pz} L_G \dot{\gamma}_{ti} \right) \\
& - 2L_G \left(K_{pz} (z_{ti} - z_{wi2}) - C_{pz} (\dot{z}_{ti} - \dot{z}_{wi2}) \right) \\
M_{syc} &= L_c \left(2K_{sz} (z_c - z_{t1}) + 2C_{sz} (\dot{z}_c - \dot{z}_{t1}) \right) \\
& + L_c \left(-4K_{sz} L_c \gamma_c - 4C_{sz} L_c \dot{\gamma}_c \right) \\
& + L_c \left(-2K_{sz} (z_c - z_{t2}) - 2C_{sz} L_c (\dot{z}_c - \dot{z}_{t2}) \right)
\end{aligned}$$

همین دلیل ضریب مخروطیت نمی‌تواند صفر انتخاب شود. بنابراین پیشنهاد می‌شود که برای رسیدن به سرعت‌های بحرانی بالاتر، از ضریب مخروطیت تا حد امکان کوچک و شعاع قوس ریل بزرگ استفاده شود.

۷- پیوست‌ها

۷-۱- پیوست الف

نیروها و ممان‌های سیستم تعلیق در این پیوست آورده شده است.

۷-۱-۱- در جهت طولی

$$\begin{aligned}
F_{sxc} &= -2K_{sx} (x_c - x_{t1}) - 2K_{sx} (x_c - x_{t2}) \\
& - 2C_{sx} (\dot{x}_c - \dot{x}_{t1}) - 2C_{sx} (\dot{x}_c - \dot{x}_{t2}) \\
F_{sxwij} &= -2K_{sx} (x_{wij} - x_{ti}) \\
F_{sxti} &= -2K_{sx} (x_{ti} - x_c) - 2K_{px} (x_{ti} - x_{wi1}) \\
& - 2K_{px} (x_{ti} - x_{wi2}) - 2C_{sx} (\dot{x}_{ti} - \dot{x}_c) \\
& - 2C_{px} (\dot{x}_{ti} - \dot{x}_{wi1}) - 2C_{px} (\dot{x}_{ti} - \dot{x}_{wi2}) \\
M_{sxc} &= (h - h_G - h_0) \\
& \times \left(-2K_{sy} (y_c - y_{t1}) - 2C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_{t1}) \right) \\
& - 2K_{sy} \left((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t1} \right) \\
& - 2C_{sy} \left((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{t1} \right) \\
& - 2K_{sy} \left((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t2} \right) \\
& - 2C_{sy} \left((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{t2} \right) \\
& - 2b_{c3}^2 (K_{sz} (\phi_c - \phi_{t1}) + K_{sz} (\phi_c - \phi_{t2})) \\
& - 2b_{c4}^2 (C_{sz} (\dot{\phi}_c - \dot{\phi}_{t1}) + C_{sz} (\dot{\phi}_c - \dot{\phi}_{t2})) \\
M_{sxwij} &= -2K_{pz} b_{t1}^2 (\phi_{wij} - \phi_{ti}) - 2C_{pz} b_{t2}^2 (\dot{\phi}_{wij} - \dot{\phi}_{ti}) \\
M_{sxti} &= 2b_{c3}^2 K_{sz} (\phi_c - \phi_{ti}) + 2b_{c4}^2 C_{sz} (\dot{\phi}_c - \dot{\phi}_{ti}) \\
& + h_0 \left(-2K_{sy} (y_c - y_{ti}) - 2C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_{ti}) \right) \\
& - 2(-1)^i K_{sy} L_c \psi_c - 2(-1)^i C_{sy} L_c \dot{\psi}_c \\
& - 2K_{sy} \left((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{ti} \right) \\
& - 2C_{sy} \left((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{ti} \right) \\
& - 2b_{t3}^2 (K_{pz} (\phi_{ti} - \phi_{wi1}) + K_{pz} (\phi_{ti} - \phi_{wi2})) \\
& - 2b_{t3}^2 (K_{pz} (\phi_{ti} - \phi_{wi1}) + K_{pz} (\phi_{ti} - \phi_{wi2})) \\
& - 2b_{t4}^2 (C_{pz} (\dot{\phi}_{ti} - \dot{\phi}_{wi1}) + C_{pz} (\dot{\phi}_{ti} - \dot{\phi}_{wi2}))
\end{aligned}$$

جدول ۱ مقادیر عددی پارامترها [۱۴، ۱۳، ۱۱، ۹]

پارامترها	مقادیر
نصف فاصله بین لبه های داخلی ریل ها	$\alpha=0.7465$ (m)
نصف بازوی فنرهای طولی و قائم سیستم تعلیق ثانویه	$b_{c1}=b_{c3}=1.21$ (m)
نصف بازوی دمپرها طولی و قائم سیستم تعلیق ثانویه	$b_{c2}=b_{c4}=1.21$ (m)
نصف بازوی فنرهای طولی و قائم سیستم تعلیق اولیه	$b_{t1}=b_{t3}=0.978$ (m)
نصف بازوی دمپرها طولی و قائم سیستم تعلیق اولیه	$b_{t2}=b_{t4}=0.978$ (m)
ضرایب دمپینگ طولی، جانبی و قائم سیستم تعلیق اولیه	$c_{px}=c_{py}=12$, $c_{pz}=15$ (KN.s/m)
ضرایب دمپینگ طولی، جانبی و قائم سیستم تعلیق ثانویه	$c_{sx}=200$, $c_{sy}=30$, $c_{sz}=80$ (KN.s/m)
ضرایب خزش جانبی، خزشی و طولی	$f_{11}=10.2 \times 10^6$, $f_{22}=16$, $f_{33}=15 \times 10^6$ (N)
ضریب خزش جانبی - چرخشی	$f_{12}=3120$ (N.m ²)
فاصله قائم بین مرکز جرم بدنه خودروی ریلی و مرکز جرم چرخ و محور	$h=1.4$ (m)
فاصله قائم بین سیستم تعلیق ثانویه و مرکز جرم بدنه بوژی	$h_0=0.03$ (m)
فاصله قائم بین مرکز جرم بدنه بوژی و مرکز جرم چرخ و محور	$h_G=0.44$ (m)
ممان اینرسی بدنه خودروی ریلی حول محورهای طولی، جانبی و قائم	$I_{cx}=7.506 \times 10^4$, $I_{cy}=I_{cz}=2.086 \times 10^6$ (Kg.m ²)
ممان اینرسی بدنه بوژی ها حول محورهای طولی، جانبی و قائم	$I_{t1x}=I_{t2x}=2.26 \times 10^3$, $I_{t1y}=I_{t2y}=2.71 \times 10^3$, $I_{t1z}=I_{t2z}=3.16 \times 10^3$ (Kg.m ²)
ممان اینرسی بدنه چرخ و محورها حول محورهای طولی، جانبی و قائم	$I_{wx}=I_{wz}=915$, $I_{wy}=140$ (Kg.m ²)
سفتی طولی، جانبی و قائم سیستم تعلیق اولیه	$K_{px}=10^4$, $K_{py}=5 \times 10^3$, $K_{pz}=750$ (KN/m)
سفتی قائم و جانبی ریل	$K_{rz}=62 \times 10^6$, $K_{rv}=16.7 \times 10^6$ (KN/m)
سفتی طولی، جانبی و قائم سیستم تعلیق ثانویه	$K_{sx}=K_{sy}=150$, $K_{sz}=400$ (KN/m)
نصف بازوی فنر و دمپر سیستم تعلیق اولیه	$L_{t1}=L_{t2}=1.2$ (m)
فاصله طولی بین مرکز جرم بدنه خودروی ریلی و بدنه بوژی	$L_c=9$ (m)
جرم های بدنه خودروی ریلی، بدنه بوژی ها و چرخ و محورها	$m_c=34000$, $m_{t1}=m_{t2}=3000$, $m_w=1400$ (Kg)
لقی لبه چرخ	$\delta=0.00923$ (m)
زاویه شیب ریل	$\phi_{se}=0.0873$ (rad)
ضریب اصطکاک	$\mu=0.2$

۸- مراجع

- [1] Wickens A H., "The Hunting Stability of Railway Vehicle Wheelsets and Bogies Having Profiled Wheels", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, No. 1965, pp. 319- 341.

$$\begin{aligned}
 &+ (h - h_G - h_0) \left(-2K_{sx} \left((h - h_G - h_0) \gamma_c + h_0 \gamma_{t1} \right) \right. \\
 &+ (h - h_G - h_0) \left(-2C_{sx} \left((h - h_G - h_0) \dot{\gamma}_c + h_0 \dot{\gamma}_{t1} \right) \right) \\
 &+ (h - h_G - h_0) \left(-2K_{sx} \left((h - h_G - h_0) \gamma_c + h_0 \gamma_{t2} \right) \right. \\
 &+ (h - h_G - h_0) \left(-2C_{sx} \left((h - h_G - h_0) \dot{\gamma}_c + h_0 \dot{\gamma}_{t2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

۷-۱-۳- در جهت قائم

$$\begin{aligned}
 F_{szc} &= -2K_{sz} (z_c - z_{t1}) - 2C_{sz} (\dot{z}_c - \dot{z}_{t1}) \\
 &\quad - 2K_{sz} (z_c - z_{t2}) - 2C_{sz} (\dot{z}_c - \dot{z}_{t2}) \\
 F_{szti} &= 2K_{sz} (z_c - z_{ti}) - 2(-1)^i K_{sz} L_c \gamma_c \\
 &\quad + 2C_{sz} (\dot{z}_c - \dot{z}_{ti}) - 2(-1)^i C_{sz} L_c \dot{\gamma}_c \\
 &\quad - 2K_{pz} (z_{ti} - z_{wi1}) - 2K_{pz} (z_{ti} - z_{wi2}) \\
 &\quad - 2C_{pz} (\dot{z}_{ti} - \dot{z}_{wi1}) - 2C_{pz} (\dot{z}_{ti} - \dot{z}_{wi2}) \\
 F_{szwij} &= 2K_{pz} (z_{ti} - z_{wij}) + 2C_{pz} (\dot{z}_{ti} - \dot{z}_{wij}) \\
 M_{szc} &= -2b_{c1}^2 (K_{sx} (\psi_c - \psi_{t1}) \\
 &\quad + K_{sx} (\psi_c - \psi_{t2})) \\
 &\quad - 4b_{c2}^2 (C_{sx} (\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{t1}) + C_{sx} (\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{t2})) \\
 &\quad + L_c (-2K_{sx} (y_c - y_{t1}) - 2C_{sx} (\dot{y}_c - \dot{y}_{t1})) \\
 &\quad + L_c (-4K_{sy} L_c \psi_c - 4C_{sy} L_c \dot{\psi}_c) \\
 &\quad - 2K_{sy} L_c ((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t1}) \\
 &\quad - 2K_{sy} L_c ((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t2}) \\
 &\quad + L_c (-2K_{sy} (y_c - y_{t2}) - 2C_{sy} (\dot{y}_c - \dot{y}_{t2})) \\
 &\quad - 2K_{sy} L_c ((h - h_G - h_0) \phi_c + h_0 \phi_{t2}) \\
 &\quad - 2C_{sy} L_c ((h - h_G - h_0) \dot{\phi}_c + h_0 \dot{\phi}_{t1}) \\
 M_{szti} &= 2b_{c1}^2 (K_{sx} (\psi_c - \psi_{ti}) + C_{sx} (\dot{\psi}_c - \dot{\psi}_{ti})) \\
 &\quad - 2b_{t1} (K_{px} (\psi_{ti} - \psi_{i1}) + K_{px} (\psi_{ti} - \psi_{i2})) \\
 &\quad - 2b_{t2} (C_{px} (\dot{\psi}_{ti} - \dot{\psi}_{i1}) + C_{px} (\dot{\psi}_{ti} - \dot{\psi}_{i2})) \\
 &\quad + L_{t1} (-2K_{py} (y_{ti} - y_{wi1}) - 4K_{py} L_{t1} \psi_{ti}) \\
 &\quad - 2L_{t1} (K_{py} (y_{ti} - y_{wi2}) + C_{py} (\dot{y}_{ti} - \dot{y}_{wi1})) \\
 &\quad + L_{t2} (-4C_{py} L_{t2} \dot{\psi}_{ti} - 2C_{py} (\dot{y}_{ti} - \dot{y}_{wi2})) \\
 M_{szwij} &= b_{t1}^2 (2K_{px} \psi_{ti} - 2K_{px} \psi_{wij}) \\
 &\quad + b_{t2}^2 (2C_{px} \dot{\psi}_{ti} - 2C_{px} \dot{\psi}_{wij})
 \end{aligned}$$

۷-۲- پیوست ب

مقادیر عددی پارامترهای محاسباتی در این پیوست (جدول ۱) آمده است.

- [9] Lee S Y., Cheng Y C., "Influences of the Vertical and the Roll Motions of Frames on the Hunting Stability of Trucks Moving on Curved Tracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, No. 3, 2006, pp. 441-453.
- [10] Fan Y T., Wu W F., "Stability Analysis and Derailment Evaluation of Rail Vehicles", *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, Vol. 13, No. 3, 2006, pp. 194-211.
- [11] Cheng Y C., Lee S Y., Chen H H., "Modeling and Nonlinear Hunting Stability Analysis of High-Speed Railway Vehicle Moving on Curved Tracks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 324, No. 1-2, 2009, pp. 139-160.
- [12] Zboinski K., Dusza M., "Self-Exciting Vibrations and Hopf's Bifurcation in Non-Linear Stability Analysis of Rail Vehicles in a Curved Track", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 29, No. 2, 2010, pp. 190-203.
- [13] Kim P., Seok J., "Bifurcation Analysis on the Hunting Behavior of a Dual-Bogie Railway Vehicle using the Method of Multiple Scales", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 19, 2010, pp. 4017-4039.
- [14] Kim P., Jung J., Seok J., "A Parametric Dynamic Study on Hunting Stability of Full Dual-Bogie Railway Vehicle", *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol. 12, No. 3, 2011, pp. 505-519.
- [15] R.Dukkipati. *Vehicle Dynamics*. CRC Press, 2000.
- [2] Huilgol R., "Hopf-Friedrichs Bifurcation and the Hunting of a Railway Axle", *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, Vol. 36, No. 1978, pp. 85-94.
- [3] Kaas-Petersen C., "Chaos in a Railway Bogie", *Acta mechanica*, Vol. 61, No. 1, 1986, pp. 89-107.
- [4] Knudsen C., Feldberg R., True H., "Bifurcations and Chaos in a Model of a Rolling Railway Wheelset", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences*, Vol. 338, No. 1651, 1992, pp. 455-469.
- [5] Zeng J., Zhang W., Dai H., Wu X., Shen Z., "Hunting Instability Analysis and H_{∞} Controlled Stabilizer Design for High Speed Railway Passenger Car", *Vehicle System Dynamics*, Vol. 29, No. S1, 1998, pp. 655-668.
- [6] Ahmadian M., Yang S., "Hopf Bifurcation and Hunting Behavior in a Rail Wheelset with Flange Contact", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 15, No. 1, 1998, pp. 15-30.
- [7] True H., "Railway Vehicle Chaos and Asymmetric Hunting", *Vehicle System Dynamics*, Vol. 20, No. sup1, 1992, pp. 625-637.
- [8] Jin X., Wen Z., Zhang W., Shen Z., "Numerical Simulation of Rail Corrugation on a Curved Track", *Computers & structures*, Vol. 83, No. 25, 2005, pp. 2052-2065.