



بررسی تأثیر زاویه بین جهت گرادیان خواص و راستای ترک بر ضریب شدت تنش مود ترکیبی در ورق‌های مدرج تابعی با روش MLPG

علی عبداللہی^۱، محمد رحیم نامی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

۲- استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

* شیراز، صندوق پستی ۵۱۱۵۴-۷۱۳۴۸، nami@shirazu.ac.ir

چکیده- در این مقاله از روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین برای تحلیل ترک ورق مدرج تابعی ایزوتروپیک استفاده شده و تأثیر طول ترک، مقدار گرادیان خواص و زاویه گرادیان خواص با راستای ترک بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است. در این روش از تخمین حداقل مربعات متحرک برای شبیه‌سازی تابع شکل و از روش مستقیم برای اعمال شرایط مرزی و از روش تابع وزن توسعه داده شده برای شبیه‌سازی میدان جابجایی و تنش در اطراف ترک استفاده شده است. ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال‌های مستقل از مسیر J^* که برای مواد ناهمگن فرمول‌بندی شده‌اند، محاسبه شده است. در این مقاله، دو مسأله ورق ترکدار لبه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های تنش و کرنش ثابت تحلیل شده است. به منظور اطمینان از روش مورد استفاده، در ابتدا مسأله همگن و مسأله مدرج تابعی با فرض گرادیان خواص در راستای ترک تحلیل شده و با حل دقیق مقایسه شده است. نتایج نشان دهنده تطابق مطلوب بین روش حاضر و روش دقیق است.

کلیدواژگان: روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین، مواد مدرج تابعی، ضریب شدت تنش مود اول، ضریب شدت تنش مود دوم، زاویه گرادیان خواص.

Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method

A. Abdollahifar¹, M. R. Nami^{2*}

1- PhD. Student, Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran

2- Assis. Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran

* P. O. B. 71348-51154, Shiraz, Iran. nami@shirazu.ac.ir

Abstract- In this paper, the MLPG method is used to analyze the fracture of an isotropic FGM plate. The stress intensity factor of Mode I and Mode II are determined under the influence of various non-homogeneity ratios, crack length and material gradation angle. Both the MLS and the direct method have been applied to estimate the shape function and to impose the essential boundary conditions. The enriched weight function method is used to simulate the displacement and stress field around the crack tip. Normalized stress intensity factors are calculated using the path independent integral, J^* , which is formulated for the non-homogeneous material. The Edge-Cracked FGM plate is considered here and analyzed under the uniform load and uniform fixed grip conditions. To validate results, at first, homogeneous and FGM plate with material gradation along crack length was analyzed and compared with exact solution. Results showed good agreement between MLPG and exact solution.

Keywords: Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), Functionally Graded Material (FGM), Mixed-Mode Stress Intensity Factor, Material Gradient Direction.

۱- مقدمه

بسیاری از سازه‌ها به علت شرایط خاص عملکرد باید در نقاط یا جهات مختلف، خواص متفاوت داشته باشند، به همین دلیل از دو ماده مختلف در ساختار آنها استفاده می‌شود. وقتی مواد غیر مشابه مانند فلزات و سرامیک‌ها با اتصال به هم، تشکیل یک سازه یا ماده مرکب را می‌دهند، به دلیل ضرایب انبساط حرارتی متفاوتشان، در اثر قرار گرفتن در معرض دما، دچار تنش‌های داخلی می‌شوند [۱]. برای بهبود این حالت می‌توان با انتقال تدریجی ساختار، از تمرکز تنش دو ماده و تخریب مرزها جلوگیری کرد. به این مواد، که به طور پیوسته با هم ترکیب می‌شوند، مواد مدرج تابعی^۱ می‌گویند. مفهوم مواد مدرج تابعی اولین بار در سال ۱۹۸۴ در آزمایشگاه ملی هوا و فضای ژاپن برای تولید عایق حرارتی در سازه‌های فضایی و راکتورها پیشنهاد شد [۲]. برای مدل‌سازی مواد مدرج تابعی می‌توان فرض کرد که خواص الاستیک در هر نقطه آن در تمام جهات یکسان است. پس در حالت پیوسته فرض می‌کنیم که این مواد، ایزوتروپیک غیر همگن هستند [۱]. این غیر همگنی حل تحلیلی آنها را نسبتاً مشکل می‌کند. در سال ۱۹۸۳ نشان داده شد که می‌توان نسبت پواسون را ثابت و مدول یانگ را تابعی از ضخامت فرض کرد [۱]. با توجه به گسترش روز افزون کاربرد این مواد، تحقیق روی آنها با هدف طراحی و ساخت ماده‌ای با گرادیان خواص مطلوب در دو بعد تحلیلی و تجربی به طور وسیع ادامه دارد. حل مسایل الاستیسیته برای مواد ناهمگن مانند مواد مدرج تابعی نیازمند روش‌های پیشرفته ریاضی است. اگر چه روش‌های تحلیلی، پاسخ به فرم بسته را نتیجه می‌دهند ولی محدود به هندسه ساده و حالت خاصی از ناهمگنی می‌باشد. لذا پاسخ بدست آمده، غالباً غیر کاربردی بوده و استفاده از روش‌های عددی اجتناب ناپذیر است. برای آنالیز عددی این مواد، روش‌های مختلفی مانند اختلاف محدود، المان محدود و بدون مش قابل استفاده هستند، اما روش‌های بدون مش به دلیل عدم نیاز به مش‌بندی دامنه برای حل مسایل مقدار مرزی در دو دهه اخیر، مورد توجه زیادی قرار گرفته است. این روش‌ها نسبت به روش المان محدود و اختلاف محدود دارای مزایای زیادی مانند دقت بالاتر، آسان‌تر بودن شبیه‌سازی رشد ترک و عدم اتلاف زمان برای ایجاد مش و

غیره می‌باشند [۳].

هر چند روش‌های بدون مش در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند، ولی قدیمی‌ترین روش بدون مش، روش هیدرودینامیک ذرات هموار^۲ است که اولین بار در سال ۱۹۷۷ [۴] معرفی شد. از این روش در مدل‌سازی مسائل نجومی با دامنه نامحدود از قبیل ستارگان در حال انفجار و ابرهای گرد و غبار استفاده شد. در سال ۱۹۹۳ در [۵] با کار بر روی روش فوق و افزودن جمله‌ای به تابع کرنل برای تصحیح عملکرد آن روی مرز، روش بازتولیدی ذرات هسته‌ای^۳ معرفی شد که نسبت به روش هیدرودینامیک ذرات هموار، بسیار دقیق‌تر بود. به موازات توسعه روش‌های فوق و چندین سال پس از آن، مسیر دیگری در توسعه تقریب‌های بدون مش گشوده شد که اساس آن بر استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک^۴ بود. در سال ۱۹۹۲ برای اولین بار از این تقریب در روش گالرکین استفاده شد [۶] و حاصل آن، روش المان پراکنده^۵ نامیده شد. سپس در سال ۱۹۹۴ با بررسی این ایده نوین و افزودن برخی جملات به فرمولاسیون روش المان پراکنده روشی بسیار دقیق‌تر به نام روش المان آزاد^۶ بدست آمد [۷]. این دسته از روش‌ها از پیوستگی و پایداری مناسبی برخوردار هستند ولی از نظر محاسباتی نسبت به روش هیدرودینامیک ذرات هموار پرهزینه‌تر هستند. معمولاً در این روش‌ها به سلول پس زمینه کلی برای انتگرال‌گیری ماتریس‌های بدست آمده از فرم ضعیف عمومی معادلات نیاز است به همین دلیل این روش‌ها، بدون مش واقعی نیستند. برای اجتناب از ایجاد سلول پس زمینه کلی از روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین^۷ استفاده می‌شود. در این روش برای درون‌یابی متغیرهای میدان و برای انتگرال‌گیری فرم ضعیف معادلات نیاز به ایجاد یک مش مشخص بر روی کل دامنه ندارد. لذا این روش بیش از سایر روش‌های فاقد مش مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. این روش بر اساس فرم ضعیف متقارن محلی بوده و از تخمین حداقل مربعات متحرک برای تقریب تابع میدان استفاده می‌کند. فرمول‌بندی ضعیف در این روش روی یک زیر ناحیه

2. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

3. Reproducing Kernel Particle (RKPM)

4. Moving Least Square (MLS)

5. Diffuse Element Method (DEM)

6. Element Free Galerkin (EFG)

7. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

1. Functionally Graded Material (FGM)

پاسخ دقیق مقایسه شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که پاسخ روش حاضر تطابق خوبی با حل دقیق دارد. در نهایت پس از اطمینان از کد تهیه شده، تأثیر زاویه گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است.

۲- فرمول‌بندی روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین

۲-۱- الگوریتم تخمین حداقل مربعات متحرک

در بیشتر روش‌های بدون مش از جمله روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین برای تقریب تابع میدان از مدل تخمین حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود [۳]. در این مدل، در هر نقطه دلخواه x بر اساس تعداد گره‌های اطراف آن، یک دامنه به نام دامنه تأثیر^۲ تعریف می‌شود. در این مقاله، دامنه تأثیر به شکل دایره فرض شده است. میدان $u(x)$ در نقطه x به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) u_i \quad (1)$$

N تعداد گره‌های اطراف نقطه x است که در داخل دامنه تأثیر قرار دارند و $\varphi_i(x)$ تابع شکل است:

$$\varphi_i(x) = \sum_j^m p_j(x) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} \quad (2)$$

در رابطه (۲) داریم:

$$A(x) = \sum_I^n W_I(x) p(x_I) p^T(x_I) \quad (3)$$

$$B_I = W_I(x) p(x_I) \quad (4)$$

$p^T(x)$ در حالت دوبعدی، یک مجموعه کامل از چند جمله‌ای‌های پایه تا درجه m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$p^T(x) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m\} \quad (5)$$

در این مقاله درجه چند جمله‌ای‌های پایه درجه دو فرض شده است. $W(x)$ تابع وزن است که روی دامنه تأثیر گره I به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W(x) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \text{برای } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{برای } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (6)$$

که در آن رابطه (۷) برقرار است:

با شکل منظم انجام می‌گیرد که غالباً در مسایل دو بعدی، دایره و یا مستطیل و در مسایل سه بعدی، کره و یا مکعب مستطیل در نظر گرفته می‌شود. این روش در سال ۱۹۹۸ پایه‌گذاری شده است [۸] و با موفقیت در حل مسائل بسیاری از جمله الاستواستاتیک [۹]، ارتعاشات آزاد و اجباری [۱۰]، تحلیل ترک [۱۱]، الاستودینامیک [۱۲] و غیره به کار گرفته شده است.

در سال ۲۰۰۲ تحقیقات و پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه این روش جمع‌آوری شد و کارایی و دقت انواع مختلف آن براساس توابع تست^۱ انتخابی، مقایسه و شش روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین بر اساس توابع تست مختلف معرفی شد [۱۳]. اما در [۱۴] روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین جدیدی با استفاده از تابع تست نمایی ارائه شد که دارای دقت بالاتری نسبت به روش‌های پیشین بود. روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین برای تحلیل ترک ورق‌های مدرج تابعی نیز به کار گرفته شده است [۱۵، ۱۶]. در [۱۷] اثر زاویه گرادیان خواص با راستای ترک بر ضریب شدت تنش مود اول در ورق ترک‌دار لبه‌ای تحت تنش ثابت بررسی شده است، اما در [۱۷] ورق ترک‌دار لبه‌ای تنها تحت اثر تنش ثابت بررسی شده و اثر ضریب شدت تنش مود دوم نیز بررسی نشده است.

در این مقاله با استفاده از روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین تحلیل ترک ورق مدرج تابعی ایزوتروپیک انجام شده و تأثیر طول ترک، مقدار گرادیان خواص و زاویه گرادیان خواص با راستای ترک بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است. در این روش برای شبیه‌سازی میدان جابجایی و تنش در اطراف ترک از روش تابع وزن توسعه داده شده به منظور عدم افزایش حجم محاسبات استفاده شده است. ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال‌های مستقل از مسیر J^* که برای مواد ناهمگن فرمول‌بندی شده‌اند محاسبه شده است.

در این مقاله، دو مسأله ورق ترک‌دار لبه‌ای از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری‌های تنش و کرنش ثابت تحلیل شده است. به منظور اطمینان از پاسخ بدست آمده در ابتدا ورق ترک‌دار همگن ($E_1/E_2 = 1$) تحلیل شده و پاسخ آن با پاسخ دقیق مقایسه شده است و سپس ورق ترک‌دار مدرج تابعی با فرض زاویه گرادیان صفر، تحلیل شده و پاسخ بدست آمده با

$$\widehat{W}_I = \begin{bmatrix} W_I & 0 \\ 0 & W_I \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$V_I = \begin{bmatrix} W_{I,x} & 0 \\ 0 & W_{I,y} \\ W_{I,y} & W_{I,x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

با استفاده از قانون هوک رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\sigma = c\varepsilon = c \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \sum_j^n \varphi_j u_j$$

$$= c \sum_j^n B_j u_j \quad (16)$$

که در آن رابطه (۱۷) برقرار است.

$$B_j = \begin{bmatrix} \varphi_{j,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{j,y} \\ \varphi_{j,y} & \varphi_{j,x} \end{bmatrix} \quad (17)$$

c ماتریس ثوابت ماده نام دارد و برای مواد همگن ایزوتروپیک به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

بردار تنش سطحی عبارت است از:

$$t = n\sigma = nc \sum_j^n B_j u_j \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، n بردار واحد عمود بر روی مرز به سمت بیرون است:

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (20)$$

با جایگذاری (۱۴) تا (۲۰) در (۱۳) معادلات خطی گسسته سیستم برای گرۀ I ام تولید می‌شود.

$$\int_{\Omega_Q} V_I \sum_j^n B_j u_j d\Omega - \int_{\Gamma_{Q_u}} \widehat{W}_I nc \sum_j^n B_j u_j d\Gamma = \int_{\Gamma_{Q_t}} \widehat{W}_I \bar{t} d\Gamma \quad (21)$$

$$\bar{d} = \frac{\|x - x_I\|}{r_I} \quad (7)$$

و r_I شعاع دامنه تأثیر است.

۲-۲- گسسته سازی فرم ضعیف معادله تعادل

برای مسائل الاستواستاتیک دو بعدی، معادله تعادل و معادله حاصل از جایگذاری کرنش جابجایی در هوک و شرایط مرزی روی دامنه Ω که با مرز Γ احاطه شده است به صورت روابط (۸) تا (۱۱) بیان می‌شوند [۱۴،۳].

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (9)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad \text{شرط مرزی اساسی} \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t \quad \text{شرط مرزی طبیعی} \quad (11)$$

در معادلات فوق، σ_{ij} بردار تنش $\bar{u}_i$ و $\bar{t}_i$ مقدار جابجایی و تنش معلوم روی مرز، n_j j امین مؤلفه بردار واحد عمود بر مرز به جهت بیرون، μ و λ ضرایب هستند.

فرم ضعیف معادله تعادل برای گرۀ I در غیاب نیروهای وزنی بر اساس روش باقیمانده وزنی عبارت است از [۳]:

$$\int_{\Omega_Q} (\sigma_{ij,j}) W_I d\Omega = 0 \quad (12)$$

Ω_Q ناحیه انتگرال گیری حول گرۀ I است. در رابطه فوق،

W_I تابع تست گرۀ I بوده، که با تغییر آن، نوع روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین تغییر می‌کند. تابع تست در نوع اول، مشابه تابع وزن در تخمین حداقل مربعات متحرک، در نوع دوم، تابع دلتای دیراک، در نوع سوم، مشابه تابع خطا در معادله دیفرانسیل حاکم، در نوع چهارم، حل اساسی^۱ بهبود یافته معادله دیفرانسیل حاکم، در نوع پنجم، تابع پله هویساید^۲ و در نوع ششم، مشابه تابع شکل (روش گالرکین) است.

معادله (۱۲) را پس از اعمال دیورژانس روی آن و ساده سازی در نهایت می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت [۳]:

$$\int_{\Omega_Q} V_I \sigma d\Omega \pm \int_{\Gamma_{Q_u}} \widehat{W}_I t d\Gamma = \int_{\Gamma_{Q_t}} \widehat{W}_I \bar{t} d\Gamma \quad (13)$$

$\widehat{W}_I$ ماتریس تابع وزن و V_I ماتریس مشتق توابع وزن است که عبارتند از:

1. Fundamental solution
2. Heaviside

معادله (۲۱) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} u_j = f_i \quad (22)$$

K_{ij} و f_i به صورت روابط (۲۳) و (۲۴) قابل محاسبه هستند:

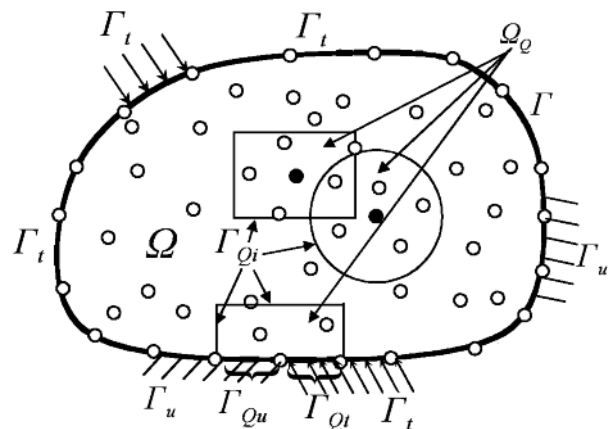
$$K_{ij} = \int_{\Omega_Q} V_I^T B_j d\Omega - \int_{\Gamma_{Qu}} \bar{W}_I n c B_j d\Gamma \quad (23)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_{Qt}} \bar{W}_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \bar{W}_I b d\Omega \quad (24)$$

لازم به ذکر است ماتریس سختی حاصل، به دلیل استفاده از فرمول بندی پتروف-گالرکین، غیر متقارن است. انواع دامنه‌های تعریف شده در روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. در این شکل Ω دامنهٔ مسأله، Γ_u مرز اساسی، Γ_t مرز طبیعی، Ω_Q دامنهٔ تربیع و محدود به مرز Γ_{Qu} ، Γ_Q قسمتی از مرز اساسی که با مرز Ω_Q تلاقی دارد، Γ_{Qt} قسمتی از مرز طبیعی که با دامنهٔ Ω_Q تلاقی دارد.

۲-۳- اعمال شرایط مرزی اساسی

غالباً برای اعمال شرایط مرزی اساسی در الگوریتم‌های بدون مش از روش پنالتی استفاده می‌شود. اما استفاده از این روش، مستلزم انتخاب مناسب ضریب پنالتی است. انتخاب نامناسب این ضریب ممکن است موجب ناپایداری روش یا نتایج غلط شود. یکی دیگر از روشهای اعمال شرایط مرزی اساسی، روش درونیابی مستقیم^۱ است که در [۱۸] برای اعمال شرایط مرزی در روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین پیشنهاد شده است.



شکل ۱ دامنه و مرزها در روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین

از آنجا که در این روش معادلات برای هر گره به طور مجزا بدست می‌آید امکان استفاده از معادلات متفاوت برای گره‌های داخلی و مرزی وجود دارد. در روش درونیابی مستقیم برای اعمال شرایط مرزی برای گره I که روی مرز اساسی قرار گرفته است از معادلهٔ تخمین حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود.

$$u_i^h(x) = \sum_i^N \begin{bmatrix} \varphi_i & 0 \\ 0 & \varphi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \bar{u}_i \quad (25)$$

بنابراین احتیاجی به نوشتن معادله (۲۲) برای گره‌های روی مرز اساسی نیست و شرط مرزی اساسی (۲۵) می‌تواند مستقیماً در دستگاه معادلات عمومی ادغام شود. اعمال شرایط مرزی در این روش آسان است و به طور دقیق صورت می‌گیرد. همچنین حجم محاسبات برای گره‌های روی مرز اساسی را کاهش می‌دهد.

۲-۴- حل مسائل مکانیک شکست به روش بدون مش

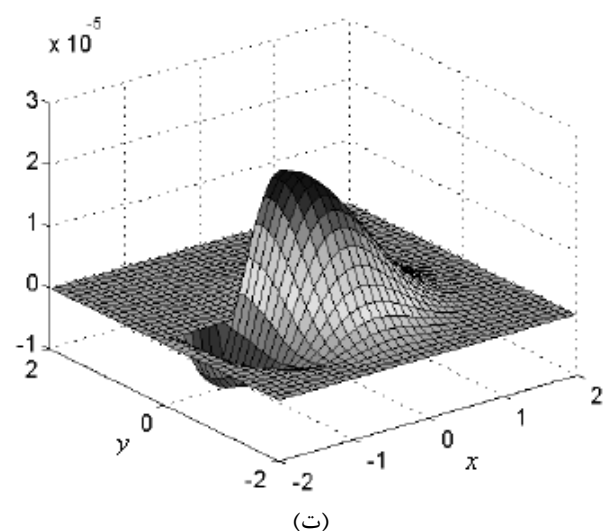
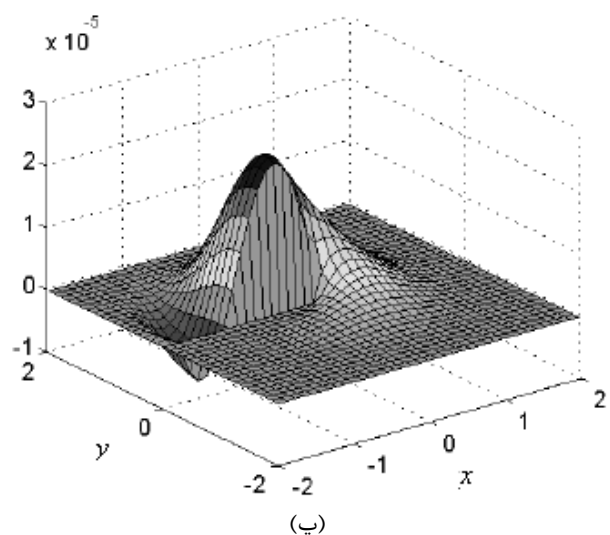
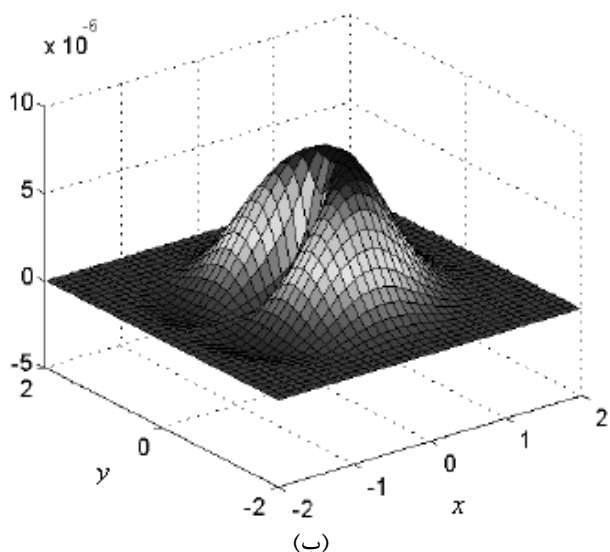
محلی پتروف-گالرکین

حل مسائل مکانیک شکست با استفاده از روشهای بدون مش، نیازمند اضافه کردن تعداد گره‌ها در این ناحیه است که باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود. یکی از روش‌های معمول برای رفع این مشکل، توسعهٔ توابع پایه است که در [۱۹] پیشنهاد شده است. در این روش توابع پایه زیر به توابع پایه چند جمله‌ای (۵) اضافه می‌شوند.

$$\left\{ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\theta) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (26)$$

r فاصله از نوک ترک و θ زاویه نسبت به امتداد ترک در جهت پادساعتگرد است. با وجود سادگی روش توسعهٔ توابع پایه، استفاده از آن باعث افزایش تعداد توابع پایه و در نتیجه افزایش مدت زمان لازم برای محاسبهٔ تابع شکل می‌شود.

از طرف دیگر، میدان جابجایی در طول ترک دارای ناپیوستگی است، در حالی که روش‌های بدون مش همواره تابع شکل و مشتقات آن را به طور پیوسته و هموار نتیجه می‌دهند. از این رو روش‌های متعددی برای ایجاد ناپیوستگی میدان جابجایی در طول ترک ابداع شده‌اند. بعضی از این روش‌ها عبارتند از روش مشاهده‌ای [۷] و روش انکسار [۲۰]. تحلیل



شکل ۲ توابع شکل بدست آمده از توابع وزن توسعه یافته درصفت ترکدار الف) دامنه مسأله ب) Φ_1 ، پ) Φ_2 ، ت) Φ_3

مسایل مکانیک شکست در این مقاله، با جایگزین کردن توابع زیر با تابع وزن اسپیلان درجه ۴ انجام شده است [۲۱].

$$w_1(x) = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) W_I(x)$$

$$w_2(x) = \sqrt{r} \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] W_I(x)$$

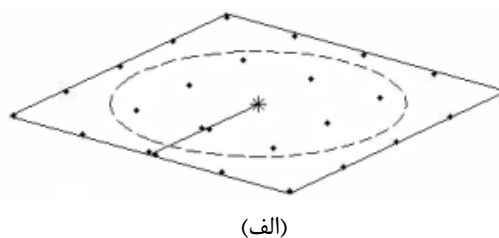
$$w_3(x) = \sqrt{r} \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] W_I(x) \quad (27)$$

توابع وزن بالا در نزدیکی نوک ترک رفتار مشابه $\sqrt{r}$ دارند و باعث منفرد شدن میدان تنش بدست آمده در نزدیکی نوک ترک می‌شوند. به علاوه توابع $w_2(x)$ و $w_3(x)$ در $\theta = \pm\pi$ دو مقداری بوده و ناپیوستگی تابع شکل و میدان جابجایی در طول ترک را نتیجه می‌دهند. با توجه به ویژگی‌های ذکر شده، تابع وزن $w_1(x)$ در نقاط جلویی ترک، تابع وزن $w_2(x)$ در نقاط بالایی ترک و تابع وزن $w_3(x)$ در نقاط پایینی ترک قابل استفاده هستند. همچنین با توجه به نامحدود بودن مشتق توابع فوق در محل دقیق نوک ترک، از سه گره در جلو، بالا و پایین ترک و در نزدیکی نوک ترک استفاده شده است.

بنابراین با استفاده از توابع وزن اصلاح شده، نیازی به توسعه توابع پایه و استفاده از روشهای اصلاح میدان جابجایی نمی‌باشد. توابع شکل بدست آمده از توابع وزن توسعه یافته با استفاده از تابع وزن اسپیلان درجه ۴ (۶) در شکل ۲ رسم شده است.

۳- شکست مواد مدرج تابعی

با اینکه ماده‌ی مدرج تابعی از نظر میکروسکوپی ناپیوسته است، برای سهولت تحلیل آن از فرض پیوستگی خواص در سراسر ماده استفاده می‌شود. لذا می‌توان از روابط الاستیسیته محیط‌های پیوسته در مواد ناهمگن استفاده کرد. برای بررسی ناحیه اطراف نوک ترک فرض می‌شود که مدول الاستیک به شکل رابطه (۲۸) تغییر کنند [۱].

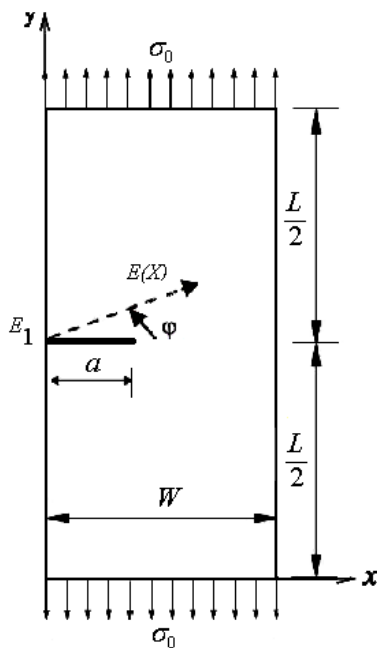


۴- مسائل حل شده

۴-۱- ورق مدرج تابعی شامل ترک لبه‌ای تحت تنش کششی ثابت در دو انتها

ورقی از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری تنش ثابت $(\sigma_0 = 1(\text{unit}))$ در دو انتها با عرض $W = 10(\text{unit})$ ، نسبت طول به عرض ۲ شامل یک ترک لبه‌ای افقی به طول a با مدول الاستیسته ناحیه اول $E_1 = 1(\text{unit})$ مفروض است. در شکل ۴ هندسه ورق فوق نشان داده شده است. در این شکل زاویه گرادیان خواص با راستای ترک می‌باشد. مشخصات ورق به منظور مقایسه، مطابق با [۲۳، ۲۲] فرض شده است.

در ابتدا به منظور اطمینان از کد تهیه شده ورق ترک‌دار لبه‌ای همگن $(E_2/E_1 = 1)$ تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول بی‌بعد شده $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ به ازای طول‌های مختلف ترک محاسبه و با حل دقیق [۲۴] مقایسه شده است (شکل ۵)، سپس ورق ترک‌دار لبه‌ای مدرج تابعی با فرض شیب گرادیان صفر تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول بی‌بعد شده به ازای طول‌های مختلف ترک و با نسبت‌های E_2/E_1 متفاوت، با روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین محاسبه شده و با حل دقیق [۲۳] مقایسه شده است (شکل ۵).



شکل ۴ نوار مدرج تابعی شامل ترک لبه‌ای تحت بارگذاری کرنش ثابت

$$E(X) = E_1 \exp(\beta X), \quad \beta = \frac{\ln(E_2/E_1)}{L},$$

$$E_1 = E(0), \quad E(x, y) = E_1 \exp(\alpha x + \gamma y),$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}}, \quad \gamma = \frac{\beta \tan(\varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} \quad (28)$$

که β ثابت ناهمگنی و φ زاویه گرادیان خواص با ترک و جهت گرادیان و X و Y مختصات ثابت روی ورق است (شکل ۳).

انتگرال J برای مواد ناهمگن مستقل از مسیر نیست و لذا نمی‌توان از آن استفاده کرد و به جای آن از انتگرال‌های مستقل از مسیر J^* ، که در واقع فرم توسعه یافته‌ی انتگرال J برای مواد ناهمگن هستند، استفاده می‌شود. با فرض عدم تنش سطحی بر روی ترک، رابطه بدست آمده انتگرال J^* برای موده‌های اول و دوم به فرم زیر تفکیک می‌شود.

$$J_1^* = \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,1}) d\Omega$$

$$J_2^* = \int_{\Gamma} (W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}) d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,2})_{\exp L} d\Omega$$

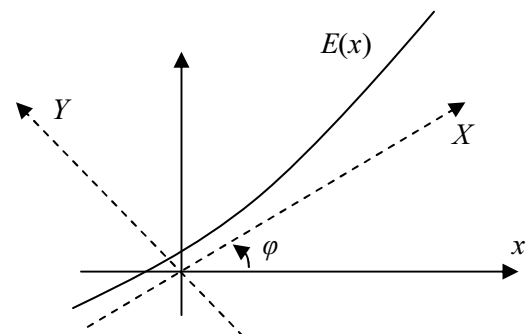
$$+ \int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma \quad (29)$$

ضرایب شدت تنش به صورت زیر به انتگرال‌های J^* وابسته می‌شود.

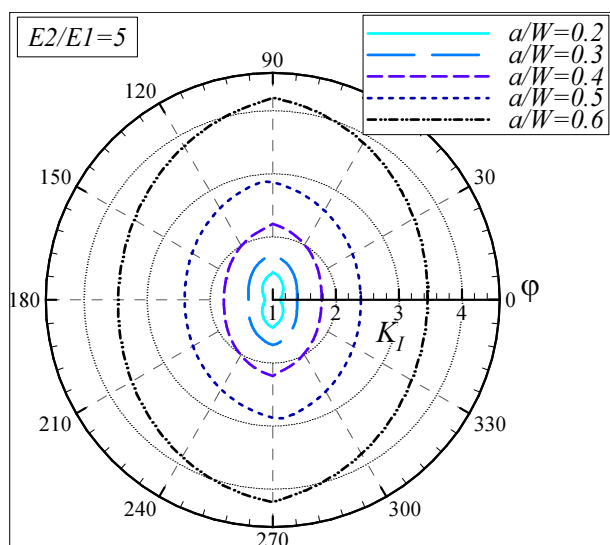
$$K_I = \left\{ \frac{E_{tip}^* J_1^*}{2} \left[1 \pm \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$K_{II} = \pm \left\{ \frac{E_{tip}^* J_1^*}{2} \left[1 \mp \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

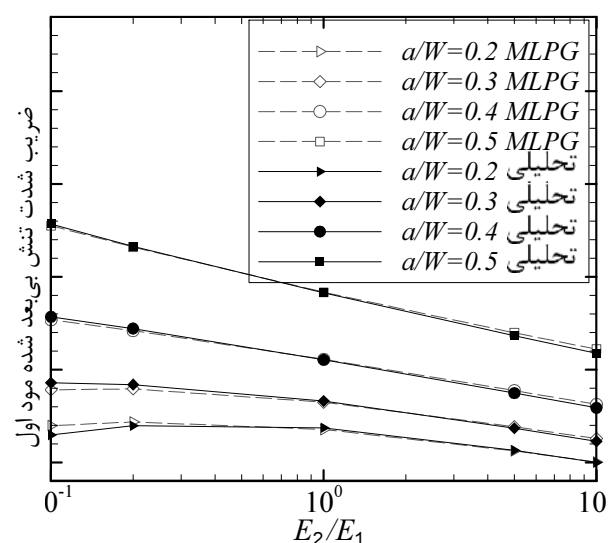
که در رابطه فوق، E_{tip}^* مقدار مدول یانگ در محل نوک ترک است.



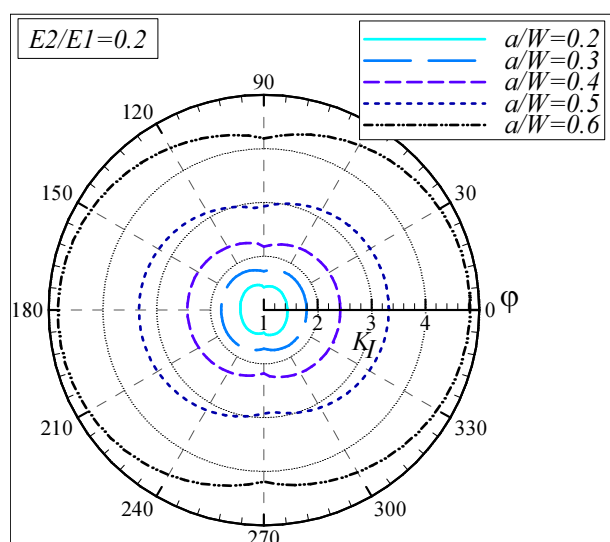
شکل ۳ نحوه تغییرات مدول الاستیسته



شکل ۵ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت طول ترک مختلف برای $E_2 / E_1 = 5$



شکل ۶ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ بر حسب E_2 / E_1 به ازای نسبت طول ترک مختلف



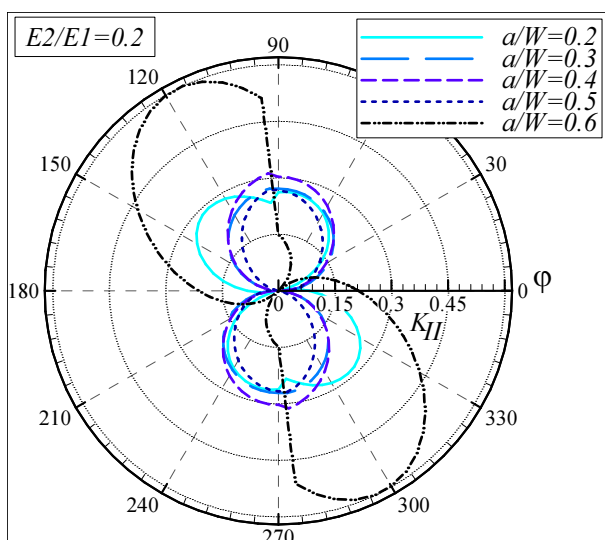
شکل ۷ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت طول ترک مختلف برای $E_2 / E_1 = 0.2$

نتایج نشان می‌دهد که تطابق مطلوبی بین حل دقیق و روش حاضر وجود دارد. پس می‌توان با اطمینان از این روش برای محاسبه ضریب شدت تنش زمانی که گرادیان خواص با ترک زاویه غیر صفر دارد، نیز استفاده کرد و تأثیر زاویه گرادیان خواص را بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی کرد.

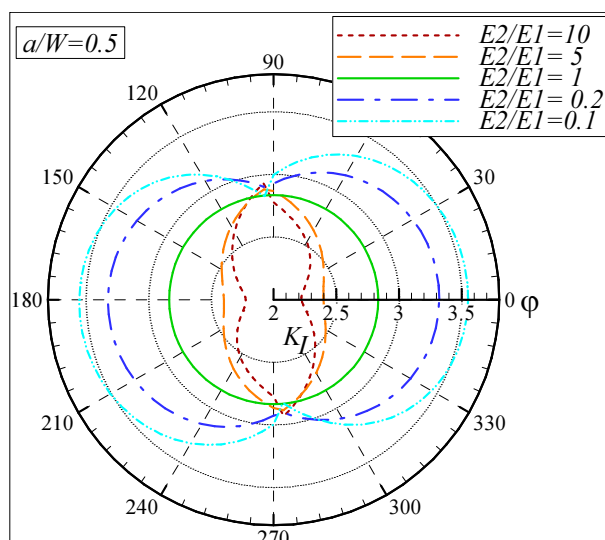
در شکل‌های ۶ و ۷ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده به ازای تغییر زاویه گرادیان از ۰ تا ۳۶۰ برای نسبت $E_2 / E_1 = 5, 0.2$ رسم شده، در شکل ۸ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ به ازای پارامتر E_2 / E_1 مختلف برای $a/W = 0.5$ رسم شده است. در اشکال ۶ تا ۸ مشاهده می‌شود که برای $E_2 / E_1 = 1$ ، تغییر زاویه تأثیری بر ضریب شدت تنش مود اول ندارد، برای $E_2 / E_1 > 1$ حداکثر $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ در زوایای (۹۰ تا ۹۵) و (۲۷۰ تا ۲۷۵) و حداقل آن در زوایای ۰، ۱۸۰ و ۳۶۰ رخ می‌دهد، برای $E_2 / E_1 < 1$ حداقل $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ در زوایای (۹۰ تا ۹۵) و حداکثر آن در زوایای ۰، ۱۸۰ و ۳۶۰ رخ می‌دهد. نمودارهای فوق دارای دوره تناوب π هستند.

در شکل ۸ مشاهده می‌شود که در دو نقطه بین در زوایای (۹۰ تا ۹۵) و (۲۷۰ تا ۲۷۵) تغییر نسبت E_2 / E_1 تأثیری بر ضریب شدت تنش ندارد، این نقاط، نقاط خنثی نامیده می‌شود. در این نقاط تمام نمودارها با یکدیگر و با دایره $E_2 / E_1 = 1$ تلاقی می‌یابند. پس در نقاط خنثی تغییر مقدار گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش تأثیر ندارد.

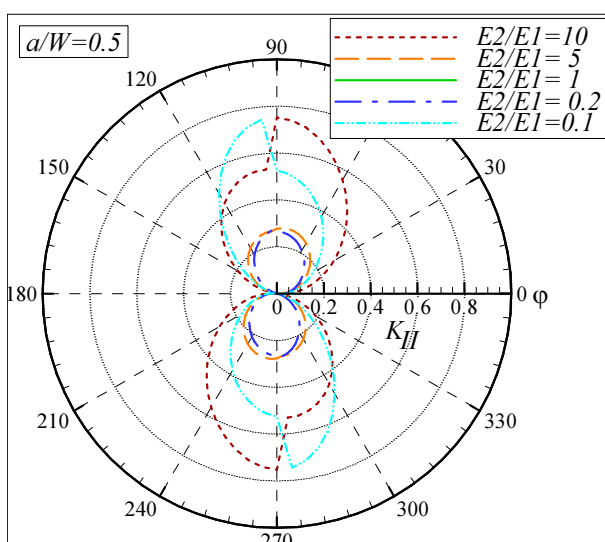
اگر چه این مسأله به ظاهر تحت مود اول شکست می‌باشد اما وقتی که گرادیان خواص، زاویه‌ای غیر از صفر ($\phi \neq 0$) به خود می‌گیرد علاوه بر مود اول، مود دوم شکست نیز نمایان می‌شود، به همین دلیل علاوه بر ضریب شدت تنش مود اول، ضریب شدت تنش مود دوم نیز محاسبه شده و در شکل‌های ۹ و ۱۰، $K_{II} / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ برای نسبت $E_2 / E_1 = 5, 0.2$ نشان داده شده و در شکل ۱۱ $K_{II} / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ به ازای پارامتر E_2 / E_1 مختلف برای $a/W = 0.5$ رسم شده است.



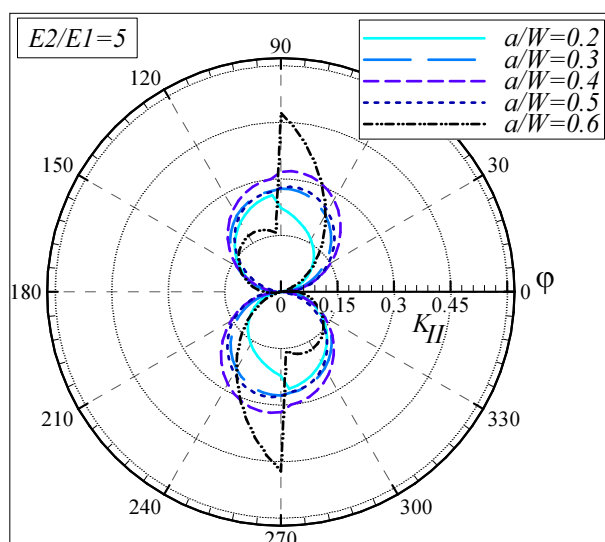
شکل ۱۰ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت طول ترک $E_2/E_1 = 0.2$ مختلف برای



شکل ۸ $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.5$



شکل ۱۱ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.5$

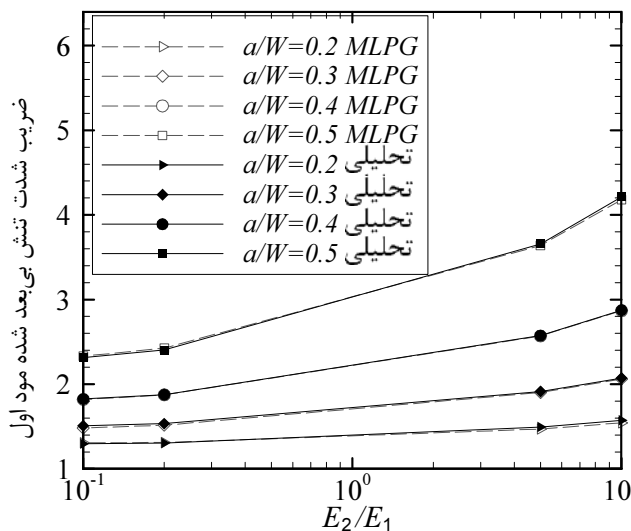


شکل ۹ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت طول ترک $E_2/E_1 = 5$ مختلف برای

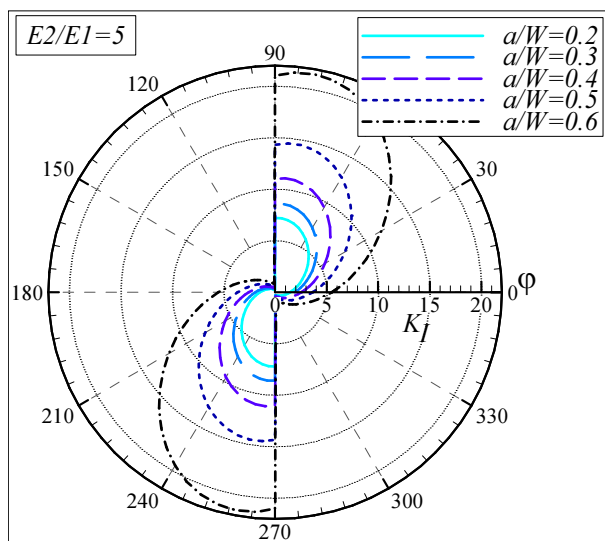
۴-۲- نوار مدرج تابعی شامل ترک لبه‌ای تحت کرنش ثابت در دو انتها

نواری از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری کرنش ثابت $\varepsilon_0 = 1(\text{unit})$ در دو انتها (در این حالت تنش برابر $\sigma = E_1 \varepsilon_0 / (1 - \nu^2)$ است) با عرض $W = 10(\text{unit})$ ، نسبت طول به عرض ۲ شامل یک ترک لبه‌ای افقی به طول a با مدول الاستیسته ناحیه اول $E_1 = 1(\text{unit})$ مفروض است. در شکل ۱۲ هندسه ورق فوق نشان داده شده است. در این شکل

همان‌گونه که در شکل‌های ۹ تا ۱۱ مشاهده می‌شود ضریب شدت تنش مود دوم در زوایای ۰، ۱۸۰ و ۳۶۰ برابر صفر هستند ولی در دیگر زوایا مقادیر غیر صفر دارد و حداکثر مقدار آن در زاویه ۹۰ درجه است. اما برای $E_2/E_1 < 1$ در نسبت طول ترک ۶ حداکثر مقدار بین زوایای (۱۱۵ تا ۱۲۰) و (۲۷۵ تا ۳۰۰) رخ می‌دهد. نقاط خنثی در این نمودارها در زاویه ۰ و ۱۸۰ می‌باشد. در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که تقارنی ما بین نمودارهای رسم شده برای نسبت های E_2/E_1 ۱۰ و ۰/۱ همچنین ۵ و ۰/۲ وجود دارد که این موضوع به لحاظ فیزیکی نیز تایید می‌شود و مورد انتظار است.



شکل ۱۳ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ بر حسب E_2 / E_1 به ازای نسبت طول ترک مختلف

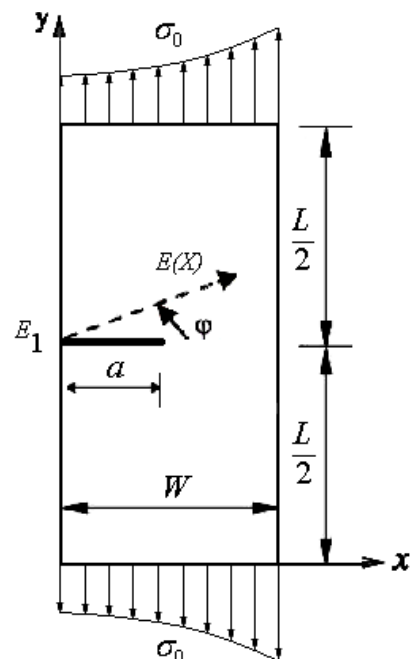


شکل ۱۴ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت طول ترک مختلف برای $E_2 / E_1 = 5$

در اشکال ۱۴ تا ۱۶ مشاهده می‌شود که برای $E_2 / E_1 = 1$ تغییر زاویه تأثیری بر ضریب شدت تنش مود اول ندارد، برای $E_2 / E_1 > 1$ حداکثر $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ در حدود زوایای ۸۵ و ۲۶۵ و حداقل آن در زوایای ۹۵ و ۲۷۵ رخ میدهد، برای $E_2 / E_1 < 1$ حداکثر $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ در زوایای ۹۵ و ۲۷۵ و حداقل آن در زوایای ۹۰ و ۲۷۰ رخ میدهد. نقاط خنثی در زوایای (۰ تا ۵) و (۱۷۵ تا ۱۸۰) رخ می‌دهد. نمودارهای فوق دارای دوره تناوب π هستند.

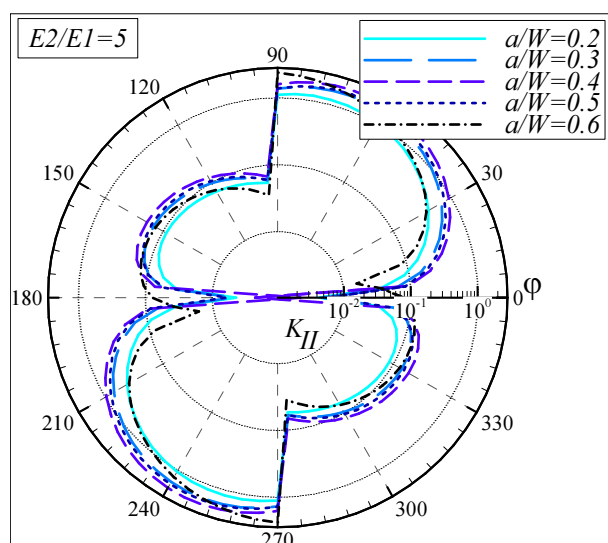
ϕ زاویه گرادیان خواص با راستای ترک می‌باشد. مشخصات ورق به منظور مقایسه، مطابق با [۲۳، ۲۲] فرض شده است. در ابتدا به منظور اطمینان از کد تهیه شده ورق ترک‌دار لبه‌ای همگن ($E_2 / E_1 = 1$) تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول با استفاده از $\sigma_0 = E_1 \varepsilon_0 / (1 - \nu^2)$ [۲۲] به صورت $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ بی‌بعد شده و به ازای طول‌های مختلف ترک محاسبه و با حل دقیق [۲۴] مقایسه شده است سپس ورق ترک‌دار لبه‌ای مدرج تابعی با فرض شیب گرادیان صفر تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول بی‌بعد شده به ازای طول‌های مختلف ترک و با نسبت‌های E_2 / E_1 متفاوت، با روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین محاسبه شده و با حل دقیق [۲۳] مقایسه شده است (شکل ۱۳). با مقایسه نتایج حاصل از روش حاضر و حل دقیق مشاهده می‌شود که تطابق مطلوبی بین آنها وجود دارد. پس می‌توان با اطمینان از این روش برای محاسبه ضریب شدت تنش زمانی که گرادیان خواص با ترک زاویه غیر صفر دارد، نیز استفاده کرد و تأثیر زاویه گرادیان را بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی کرد.

در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ برای نسبت $E_2 / E_1 = 5, 0.2$ نشان داده شده و در شکل ۱۶ $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ به ازای پارامتر E_2 / E_1 مختلف برای $a / W = 0.5$ رسم شده است.

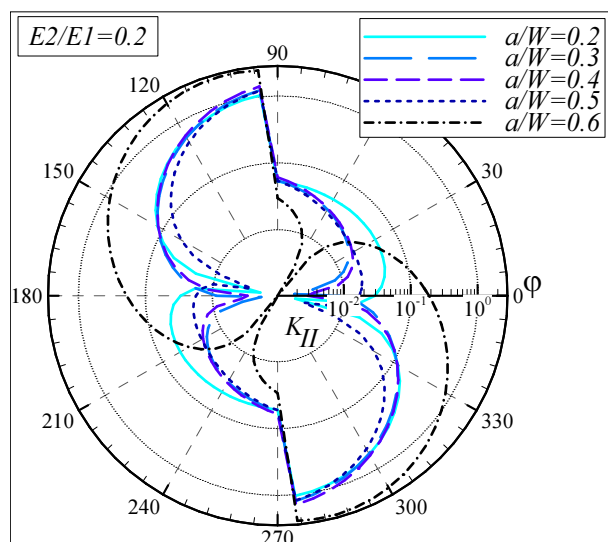


شکل ۱۲ نوار مدرج تابعی شامل ترک لبه‌ای تحت بارگذاری کرنش ثابت

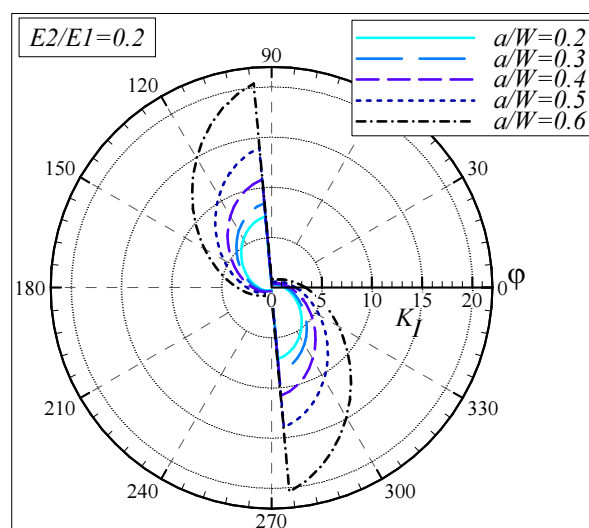
شکل ۱۹ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ به ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.5$ رسم شده است. همان گونه که در شکل های ۱۷ تا ۱۹ مشاهده می شود ضریب شدت تنش مود دوم در زوایای ۰، ۱۸۰ و ۳۶۰ برابر صفر هستند ولی در دیگر زوایا مقادیر غیر صفر دارد. برای $E_2/E_1 > 1$ حداکثر مقدار $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ در زوایای ۸۵ و ۲۶۵ درجه است. برای $E_2/E_1 < 1$ حداکثر مقدار در زوایای ۹۵ و ۲۷۵ است.



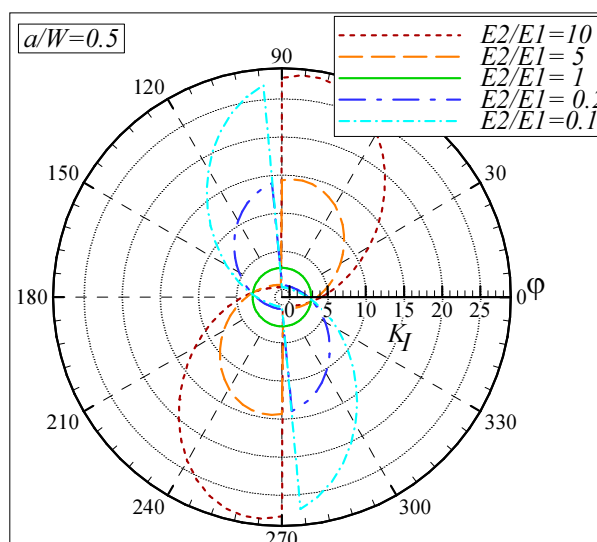
شکل ۱۷ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای a/W مختلف برای $E_2/E_1 = 5$



شکل ۱۸ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای a/W مختلف برای $E_2/E_1 = 0.2$



شکل ۱۵ $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت طول ترک مختلف برای $E_2/E_1 = 0.2$



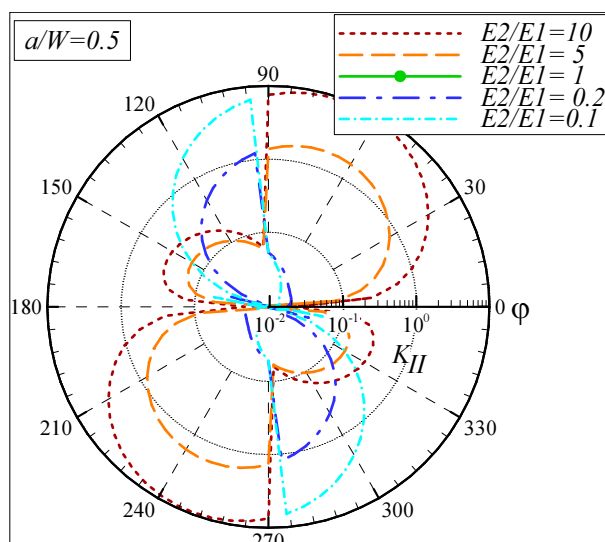
شکل ۱۶ $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای نسبت پارامتر $a/W = 0.5$ مختلف برای E_2/E_1

در این مسأله نیز با تغییر زاویه گرادیان نسبت به صفر، علاوه بر مود اول، مود دوم شکست نیز نمایان می شود، به همین دلیل علاوه بر ضریب شدت تنش مود اول، ضریب شدت تنش مود دوم نیز محاسبه شده و از آنجا که مقادیر ضریب شدت تنش مود دوم در این مسأله بسیار نزدیک به یکدیگر هستند به منظور نمایش بهتر از نمودار لگاریتمی استفاده شده است. در شکل های ۱۷ و ۱۸ نمودار لگاریتمی ضریب شدت تنش بی بعد شده مود دوم $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از ۰ تا ۳۶۰ برای نسبت $E_2/E_1 = 5, 0.2$ نشان داده شده و در

گرادیان خواص، ضرایب شدت تنش با تغییر E_2/E_1 تغییر نمی‌کنند. همچنین چنانکه به لحاظ فیزیکی نیز مورد انتظار می‌باشد، برای یک طول ترک مشخص در نسبت‌های (E_2/E_1) همانند، مثل نسبت‌های ۱۰ و ۰/۱ و یا نسبت‌های ۵ و ۰/۲ نوعی تقارن در نمودار آنها مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است دوره تناوب این نمودارها برابر (π) می‌باشد.

۶- مراجع

- [1] Shukla A., *Dynamic Fracture Mechanics*. World Scientific Publishing Co, 2006.
- [2] Niino M., Hirai T., Watanabe R., "Functionally Gradient Material as Barrier for Space Plane", *J. jpn. Son. Com. Mater.*, Vol. 13, 1987, pp. 257-264.
- [3] Liu G.R., *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC, 2002.
- [4] Lucy L., "A Numerical Approach to Testing the Fission Hypothesis", *Astron. J.*, Vol. 82, 1977, pp. 1013-1024.
- [5] Liu W.K., Adee J., Jun S., "Reproducing Kernel and Wavelet Particle Methods for Elastic and Plastic Problems", *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, Benson, D. J., Ed., 180/PVP 268 ASME, 1993, pp. 175-190.
- [6] Nayroles B., Touzot G., Villon P., "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements", *Comput. Mech.*, Vol. 10, 1992, pp. 307-318.
- [7] Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L., "Element Free Galerkin Methods", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 37, 1994b, pp. 229-256.
- [8] Atluri S.N., Zhu T., "A New Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Comp. Mech.*, Vol. 22, 1998, pp. 117-127.
- [9] Atluri S.N., Zhu T.L., "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach for Solving Problems in Elasto-statics", *Comp. Mech.*, Vol. 25, 2000, pp. 169-179.
- [10] Gu Y.T., Liu G.R., "A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Free and Forced Vibration Analysis for Solids", *Comp. Mech.*, 2001 pp. 188-198.
- [11] Ching H.K., Batra R.C., "Determination of Crack Tip Fields in Linear Elastostatics by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method", *Comp. Mode. in Eng. & Scie.*, No. 2, Vol. 2, 2001, pp. 273-289.
- [12] Abdollahifar A., Shafiei A.R., Mohyeddin A. Bozorg M., "Using State-space Models for Solving Elastodynamic Problems Discretized by the MLPG Method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, No. 34, Vol. 8, 2010, pp. 721-726.



شکل ۱۹ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب ϕ به ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.5$

نقاط خنثی در این نمودارها در زاویه ۰ و ۱۸۰ می‌باشد. در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود که تقارنی ما بین نسبت‌های E_2/E_1 ۱۰ و ۰/۱ و همچنین ۵ و ۰/۲ وجود دارد که این موضوع به لحاظ فیزیکی نیز تایید می‌شود و مورد انتظار است.

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله از روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین برای تحلیل ترک ورق مدرج تابعی ایزوتروپیک استفاده شده است. به این منظور در یک ورق ترک‌دار لبه‌ای از جنس مدرج تابعی تحت دو بارگذاری تنش ثابت و کرنش ثابت، ضریب شدت تنش مود اول و دوم با استفاده از انتگرال‌های مستقل از مسیر J^* که برای مواد ناهمگن فرمول‌بندی شده‌اند محاسبه شده است.

نمودارهای ارائه شده به خوبی نشان می‌دهد که زاویه بین گرادیان خواص و راستای طول ترک، تأثیر معناداری بر ضرایب شدت تنش مود اول و دوم دارد. با افزایش زاویه گرادیان ضریب شدت تنش مود اول برای $E_2/E_1 > 1$ ، زیاد می‌شود تا به مقدار حداکثر خود رسیده و سپس کاهش می‌یابد، برای $E_2/E_1 < 1$ ، به مقدار کمی کاهش می‌یابد تا به حداقل خود رسیده و سپس افزایش می‌یابد. با افزایش زاویه گرادیان ضریب شدت تنش مود دوم نیز از مقدار صفر شروع شده و در زاویه‌ای نزدیک به ۹۰ درجه به حداکثر مقدار خود رسیده و سپس کاهش می‌یابد. با افزایش طول ترک ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. در نمودارها نقاطی خنثی وجود دارند که در آن زاویه

- [19] Fleming M., Chu Y., Moran B., Belytschko T., "Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. 40, 1997, pp. 1483-1504.
- [20] Organ D.J., Fleming M., Belytschko T., "Continuous Meshless Approximations for Nonconvex Bodies by Diffraction and Transparency", *Comput. Mech.*, 18, 1996, pp. 225-235.
- [21] Duflo M., "A Meshless Method with Enriched Weight Functions for Three Dimensional Crack Propagation", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. 65, 2006, pp. 1970-2006.
- [22] Rao B.N., Rahman, S., "Mesh-free Analysis of Cracks in Isotropic Functionally Graded Materials", *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 70, 2003, pp. 1-27.
- [23] Erdogan F., Wu B.H., "Analysis of FGM Specimens for Fracture Toughness Testing", *Ceramic Transaction*, Vol. 34, 1993, pp. 2435-2441.
- [24] T.L. Anderson (1995), *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press.
- [13] Atluri S.N., Shen S.P., *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*, Tech. science press, 2002.
- [14] Abdollahifar A., Nami M.R., Shafiei A.R., "A New MLPG Method for Elastostatic Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 36, 2012, pp. 451-457.
- [15] Sladek J., Sladek V., Zhang C., "The MLPG Method for Crack Analysis in Anisotropic Functionally Graded Materials", *Structure Integrity Durability*, No. 2, Vol. 1, 2005, pp. 131-144
- [16] Qian L.F., Chang H.K., "Static and Dynamic Analysis of 2-D Functionally Graded Elasticity by Using Meshless Local Petrov-Galerkin Method", *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, No. 4, Vol. 27, 2006, pp. 491-503.
- [۱۷] نامی م. ر.، ع. ع.، "تعیین ضریب شدت تنش در ورق مدرج تابعی (FGM) با روش MLPG"، بیستمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران شیراز، ۱۳۹۱.
- [18] Liu G.R., Yan L., *A Modified Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Solid Mechanics*, Advances in Computational Engineering and Sciences, Tech Science Press, 2000, pp. 1374-1379.