



تحلیل تنش‌های لبه آزاد در یک ورق کامپوزیتی با استفاده از روش پرتابی

مجتبی یزدانی^{۱*}، منصور رزقی^۲، محمدرضا خلیلی لنجی^۳، بهزاد مومیوند^۳

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

۲- استادیار ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

* تبریز، صندوق پستی ۵۱۳۳۵/۱۹۹۶، m.yazdani@sut.ac.ir

چکیده- در این مقاله تنش‌های بین لایه‌ای ناشی از رفتار استاتیکی ورق چندلایه، از جنس مواد کامپوزیتی مورد ارزیابی قرار گرفته است. به این منظور جابجایی‌ها و تنش‌های برون صفحه‌ای به عنوان متغیر اولیه در نظر گرفته شده و برای تحلیل مسأله، با استفاده از گسترش روش مسأله مقدار مرزی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول که وابسته به ضخامت چند لایه می‌باشد، شکل گرفته است. این روش قادر به در نظرگرفتن تنش‌های عمودی و عرضی بوده و میدان تنش سه بعدی را در نزدیکی لبه آزاد لایه‌ها مورد بررسی قرار می‌دهد. در مدل ارائه شده، ورق چندلایه‌ای بر روی تکیه‌گاه ساده قرار داشته و تحت بارگذاری عرضی می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که جابجایی‌ها و تنش‌های عرضی بین لایه‌ای در فصل مشترک لایه‌ها پیوسته‌اند. دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از رهیافت ناویر و برای نخستین بار با استفاده از روش پرتابی حل شده و در نهایت، نتایج به دست آمده، با نتایج موجود در سایر مراجع مقایسه شده است. نتایج به دست آمده بیانگر، دقت خوب و سرعت بالای روش استفاده شده در تحلیل میدان تنش می‌باشد. همچنین صحت‌گذاری نتایج، نشان از کارایی بالای روش عددی مورد استفاده دارد.

کلیدواژگان: ورق چندلایه، حل الاستیسیته، لبه آزاد، تنش‌های برون صفحه‌ای، روش پرتابی.

Analysis of free edge stresses in a cross-ply composite plate by applying shooting method

M. Yazdani^{1*}, M. Rezghi², M.R. Khalili Lanji³, B. Moomivand³

1- Assist. Prof., Mech. Eng., Sahand Univ. of Tech., Tabriz, Iran

2- Assist. Prof., Applied Math., Sahand Univ. of Tech., Tabriz, Iran

3- MSc. Student, Mech. Eng., Sahand Univ. of Tech., Tabriz, Iran

* P.O.B. 51335/1996 Tabriz, Iran. m.yazdani@sut.ac.ir

Abstract- In this paper, interlaminar stresses resulting from static behavior of laminated plates, which were made from composite materials, were evaluated. To this end, out-of-plane stresses and displacements were considered as a primary variable. In addition, for the problem analysis, the boundary value problem method was expanded in order to form a first-order linear differential equations system which depended on the laminate thickness. This method could consider normal and transverse stresses and investigates a three-dimensional stress field near the free edge of the layers. In the proposed model, a laminated plate was placed on a simply supported boundary condition and under transverse loading. It was also assumed that the interlaminar transverse stresses, and displacements were continuous in layers' interfaces. The governing differential equations system was solved using Navier's approach and for the first time by applying shooting method and, finally, the obtained results were compared with the results of other references. The results indicated good accuracy and high speed of the method used in analyzing stress field.

Keywords: Laminated Plate, Elasticity Solution, Free Edge, Out-of-Plane Stresses, Shooting Method.

۱- مقدمه

مواد کامپوزیتی به علت داشتن خواصی چون نسبت استحکام به وزن بالا، عمر خستگی زیاد، مقاومت به خوردگی و واکنش‌های شیمیایی به طور وسیعی در صنایع هوایی، دریایی و خودروسازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با وجود مزایای ذکر شده برای مواد کامپوزیتی، استفاده از آنها مشکلات خاص خود را در پی دارد. از جمله مشکلات اساسی در استفاده از مواد کامپوزیتی لایه‌ای، وجود لایه مرزی در اطراف مرز سازه‌های کامپوزیتی است که در این نواحی میدان تنش به طور کلی سه بعدی بوده و رفتار بسیار پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهد. مطالعات انجام شده نشان دهنده این واقعیت است که تئوری‌های ساده نظیر تئوری کلاسیک لایه‌ای قادر به پیش‌بینی وضعیت پیچیده تنش در این نواحی نیستند و تحلیل تنش‌های برون صفحه‌ای در لایه مرزی نیازمند تئوری‌های کامل‌تری است.

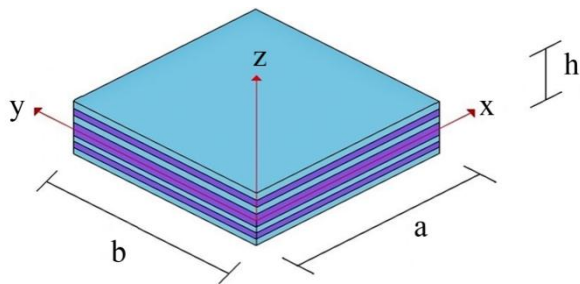
نخستین حل تقریبی برای تنش‌های بین لایه‌ای توسط هاباشی و برای محاسبه تنش‌های برشی بین لایه‌ای در ورق‌های سه لایه‌ای متعامد متقارن تحت کشش طولی ارائه شد، که در آن هر لایه به صورت یک المان ورق فرض شده است [۱]. سپس حل تقریبی برای ورق‌های کامپوزیتی که عرض محدود دارند توسط اونسون و پاپو ارائه شد. در این تحقیق، از فرض‌های ساده کننده مانند صفر بودن تنش بین لایه‌ای نرمال نیز استفاده شده است [۲]. پاپیس و پاگانو روش تحلیل سه بعدی را به منظور برآورد حوزه تنش گوشه‌های آزاد در نمونه‌های متقارن تحت کشش محوری را گسترش دادند [۳، ۴]. ویتنی و سان، تئوری صفحات گسترش یافته نامحدود را برای ثبت تنش‌های بین لایه‌ای به کار برده‌اند [۵]، در حالی که تانگ و لوی تئوری لایه مرزی را برای حل برگزیدند. در نهایت پاگانو گسترش یافته تئوری ویتنی و سان را با یکی کردن متغیرهای اصلی به کار برد [۶]. وانگ و کراسمن روش المان محدود سه بعدی را برای بحث بر روی مسایل گوشه‌های آزاد گسترش دادند که یک میدان دقیق سه بعدی تنش در یک نمونه لایه‌ای با به کارگیری مش‌بندی ریزشده و متمایل به گوشه آزاد به دست آمد [۷]. هسو و هراکوویچ ورق چندلایه‌ای را به دو ناحیه داخلی و لایه مرزی تقسیم کردند و با استفاده از روش اغتشاشات مرتبه صفر، اثر لبه آزاد در ورق‌های زاویه‌دار

مقارن را بررسی کردند [۸].

در تحقیقات دیگری نیز وانگ و چوی با استفاده از الاستیسیته ناهمسانگرد توانستند مرتبه تکینگی را در لبه‌های آزاد ورق‌های کامپوزیتی محاسبه نمایند. [۹]. کاساپوگلو و لاگیس بر پایه اصل انرژی متمم حداقل و روش توازن نیرویی روشی برای بررسی بارگذاری‌های محوری در ورق‌های متقارن ارائه دادند [۱۰]. در ادامه رز و هراکوویچ روش به کار گرفته شده توسط این محققان را با افزودن عباراتی به میدان تنش بهبود دادند [۱۱]. بین بر اساس توابع تنش لخنیتسکی، روش ساده و کارآمدی را برای محاسبه تنش‌های لبه‌ای در ورق‌های بلند با لایه چینی متقارن متوازن متعامد یا زاویه‌ای تحت بار حرارتی یا مکانیکی ارائه کرد [۱۲]. بکر یک تئوری مرتبه بالای جدید به منظور تخمین تنش‌های برون صفحه‌ای پیشنهاد کرد. او مؤلفه جابجایی در جهت پهنای صفحه را تابعی کسینوسی و جابجایی در جهت ضخامت را تابعی سینوسی در نظر گرفت [۱۳]. لین روشی را که کاساپوگلو برای ورق‌های متقارن به کار برده بود، گسترش داد و با استفاده از آن به تحلیل تنش‌های بین لایه‌ای در ورق‌های نامتقارن پرداخت. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که میدان تنش در ورق‌های نامتقارن به مراتب از ورق‌های متقارن پیچیده‌تر است [۱۴]. روبینز و ردی یک مدل کلی- موضعی برای محاسبه تنش‌های برون صفحه‌ای پیشنهاد دادند. در این مدل، به منظور کاهش حجم محاسبات از یک میدان جابجایی بر مبنای تئوریهای تک لایه معادل برای نواحی درونی صفحه و از یک میدان جابجایی لایه‌ای برای نواحی مرزی استفاده نمودند [۱۵].

چو و کیم با استفاده از یک روش تکرار شونده بر اساس توابع تنش لخنیتسکی و همچنین اصل کار مجازی و روش تعمیم یافته کانتروویچ به بررسی تنش نرمال بین لایه‌ای در مجاورت لبه‌های آزاد یک ورق کامپوزیتی متقارن متعامد تحت بارگذاری مکانیکی و یا حرارتی یکنواخت پرداختند [۱۶].

طهانی و نشیر در مجموعه تحقیقاتی، با استفاده از تئوری لایه‌گون ردی به تحلیل میدان تنش در نزدیکی لبه‌های ورق‌های مرکب پرداخته‌اند. این بررسی شامل ورق‌های متعامد عام تحت بارگذاری محوری یکنواخت، توزیع دمایی و همچنین بارگذاری جانبی می‌شود. [۱۷-۱۹]. نشیر و بهرامی در بررسی تنش‌های بین لایه‌ای ورق‌های زاویه‌دار پادمتقارن تحت



شکل ۱ هندسه صفحه مرکب و دستگاه مختصات واقع بر آن

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (1)$$

که u, v و w به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در جهات x, y و z می‌باشد. رفتار خطی مواد در محدوده کشسان براساس قانون هوک تعمیم یافته بیان می‌شود (رابطه (۲)):

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2)$$

رابطه (۲) برای تک لایه k ام از چندلایه کامپوزیتی در سیستم مختصات موضعی به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}^k \quad (3)$$

بنابراین ماتریس سفتی تبدیل یافته در سیستم مختصات سراسری برابر است با رابطه (۴) است [۲۳].

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

چنانچه چندلایه متعامد باشد آنگاه رابطه تنش - کرنش حاکم بر هر لایه از آن به صورت معادله (۵) ساده می‌شود.

بارگذاری محوری و یا پیچشی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش لایه‌گون ردی را به کار بردند. [۲۰]. در روش‌هایی که به روش حل عددی ارائه شده است، تعداد جملات و زمان همگرایی نتایج زیاد بوده است. زمان‌بر بودن حل‌های عددی ارائه شده و تعداد جملات زیاد برای همگرایی جواب‌ها، ایجاب می‌کند که از روش‌هایی که مدت زمان حل را تقلیل می‌دهند، استفاده شود. در حل به روش پرتابی که برای نخستین بار در این مقاله ارائه می‌شود سرعت همگرایی بسیار بالا و تعداد جملات مورد نیاز محدود می‌باشد.

۲- فرمول‌بندی تئوری

به منظور بسط یک نظریه لایه‌ای که قادر به تعیین نسبتاً دقیق تمامی مؤلفه‌های تنش باشد، لازم است میدان جابجایی توصیف درستی از مؤلفه‌های کرنش را فراهم آورد. به عبارتی در کل ضخامت، کرنش‌های درون صفحه‌ای پیوسته و کرنش‌های عرضی ناپیوسته باشد.

در مدل‌سازی اثر ناحیه مرزی، در نظر گرفتن کرنش عمودی عرضی به دو دلیل مهم است: نخست این که تنش عمودی عرضی در این ناحیه از اهمیت خاصی برخوردار است، زیرا مؤلفه‌ای از میدان تنش است که مستقیماً بر حذف لایه‌بندی اثر دارد. دوم این که مدل‌هایی که کرنش عمودی عرضی را در نظر نمی‌گیرند قادر به ارضای شرط مرزی سطح آزاد برای مؤلفه‌های تنش برشی عرضی نیستند. به همین علت در این نوشتار از نظریه الاستیسیته سه بعدی استفاده می‌شود. هدف از این پژوهش محاسبه تنش‌های بین لایه‌ای در یک صفحه مرکب و با چیدمان متقارن تحت بارگذاری جانبی است. طول صفحه مورد نظر a ، پهنای آن b و ضخامت آن h است. فرض بر این است جابجایی‌ها کوچک و در راستای ضخامت چندلایه پیوسته‌اند. همچنین تنش‌های برون صفحه‌ای در فصل مشترک لایه‌ها و در راستای ضخامت پیوسته‌اند (شکل ۱).

۲-۱- روابط پایه

توسعه معادلات میدانی الاستیسیته با سینماتیک نظریه تغییر شکل‌های کوچک آغاز می‌شود. این مفاهیم فیزیکی شامل شش رابطه کرنش-تغییر مکان است. روابط سینماتیک در سیستم مختصات دکارتی به شکل رابطه (۱) می‌باشد.

۲-۲- معادلات تعادل

معادلات تعادل را می‌توان با استفاده از یک زیربخش دلخواه محدود یا یک ناحیه دیفرانسیلی خاص با مرزهای منطبق بر صفحات مختصات، (رابطه (۶) به دست آورد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^k \quad (5)$$

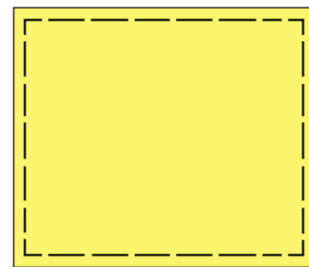
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

۳-۲- معادلات حاکم

در این قسمت معادلات دیفرانسیل، حاکم بر یک چندلایه متعادل ارایه می‌شود. روش مورد استفاده در تعیین معادلات، استفاده از جابجایی‌ها و تنش‌های برون صفحه‌ای به عنوان متغیرهای اولیه می‌باشد. در روش ذکر شده مؤلفه‌های جابجایی و تنش‌های برون صفحه‌ای با استفاده از روابط (۱) تا (۶) بر حسب معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نسبت به مختصه ضخامت بیان می‌شوند. پس از انجام محاسبات مربوط و ساده کردن، معادلات اولیه به معادلات (۷) تبدیل می‌شوند.

۴-۲- حل معادلات

برای حل معادلات فرض می‌شود شرایط تکیه‌گاهی برای تمامی چهار لبه تحتانی مانند شکل ۲ به صورت تکیه‌گاه ساده بوده و سطح فوقانی چندلایه تحت بارگذاری عرضی می‌باشد.



شکل ۲ شرایط تکیه‌گاهی

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{Q_{66}}{Q_{66}Q_{55}} \tau_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{Q_{55}}{Q_{66}Q_{55}} \tau_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{Q_{33}} \left[\sigma_z - Q_{31} \frac{\partial u}{\partial x} - Q_{32} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \left(-Q_{11} + \frac{Q_{13}Q_{31}}{Q_{33}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &\quad (-Q_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(-Q_{12} - Q_{44} + \frac{Q_{13}Q_{32}}{Q_{33}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \left(\frac{Q_{13}}{Q_{33}} \right) \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} - F_x \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \left(-Q_{21} - Q_{44} + \frac{Q_{23}Q_{31}}{Q_{33}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ &\quad (-Q_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(-Q_{22} + \frac{Q_{23}Q_{32}}{Q_{33}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ &\quad \left(\frac{Q_{23}}{Q_{33}} \right) \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} - F_y \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - F_z \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(z) \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ v(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(z) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ w(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(z) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \tau_{xz}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{xz mn}(z) \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \tau_{yz}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{yz mn}(z) \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_z(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{z mn}(z) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ m, n &= 1, 3, 5, 7, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

برای حل معادلات دیفرانسیل به دست آمده، از روش ناویر بهره گرفته و جابجایی‌ها و تنش‌های برون صفحه‌ای به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شوند که شرایط مرزی را ارضا نمایند.

با جایگذاری روابط (۸) در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (۷)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول بر حسب مختصه ضخامت به صورت معادلات (۹) حاصل می‌شود.

بهره‌گیری از شش شرط مرزی برای فقط سه معادله تنش، تمام معادلات تعادل، تنش و کرنش ارضا شود. بنابراین حل مسأله با فرض سه تنش خارج از صفحه از سطح خارجی لایه تحتانی که فاقد تنش است آغاز شده و قدم به قدم به مرز بالا ختم می‌شود؛ در صورتی که نتایج سه معادله تنش خارج از صفحه با شرایط اولیه اختلاف داشته باشد، مرحله بعدی با تصحیح فرض اولیه و انجام تمام مراحل قبل ادامه می‌یابد تا در نهایت تنش‌های به دست آمده از حل، به تنش‌های موجود در سطح فوقانی به اندازه مورد نظر نزدیک شود.

۲-۵- تنش‌های درون صفحه‌ای

با حل معادلات بخش قبل، مؤلفه‌های جابجایی تعیین می‌شوند. در ادامه با استفاده از روابط کرنش بر حسب جابجایی و همچنین تنش بر حسب کرنش می‌توان تنش‌های درون صفحه‌ای را به صورت روابط (۱۰) استخراج کرد.

۳- نتایج عددی و بحث

در این بخش نتایج عددی حاصل از حل تحلیلی، برای ورق نشان داده شده در شکل ۱ نمایش داده خواهد شد. نتایج تحلیلی حاصل از این مقاله در دو حالت ورق همسان‌گرد و ورق ناهمسان‌گرد بررسی شده و نتایج حاصل از آنها با مراجع مقایسه شده است.

نکته حائز اهمیت در این قسمت مطالعه همگرایی پاسخ‌ها می‌باشد. در مثال‌هایی که ارایه می‌شوند، ملاحظه می‌شود که همگرایی جواب‌ها به ازای تعداد محدودی از جملات صورت می‌پذیرد، که این امر دلالت بر دقت و کارایی روش عددی مورد استفاده دارد.

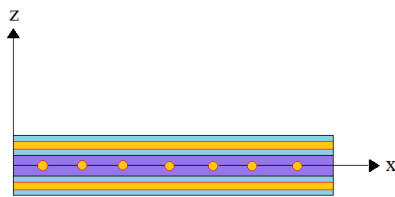
۳-۱- مسأله ۱

یک ورق همگن و همسان‌گرد با شرایط تکیه‌گاهی نشان داده شده در شکل ۲، تحت اثر بارگذاری یکنواخت بر روی سطح فوقانی قرار دارد. این ورق دارای مدول الاستیک $E=1 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون 0.2 تا 0.4 با گام 0.1 می‌باشد. جابجایی عرضی نرمال و تنش برشی عرضی نرمال برای این ورق با استفاده از حل روش پرتابی در جدول ۱ نمایش داده شده است و این نتایج با حل الاستیسیته رانو [۲۲] و حل نیمه تحلیلی کانت [۲۳] مقایسه شده است. همچنین همگرایی جواب‌ها برای این توزیع بار تنها به ازای ۲۵ جمله صورت پذیرفته است.

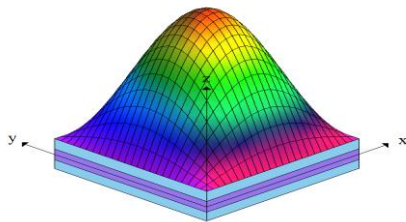
$$\begin{aligned} \frac{dU_{mn}(z)}{dz} &= \frac{Q_{66}}{Q_{66}Q_{55}}\tau_{xzm}(z) - \left(\frac{m\pi}{a}\right)W_{mn}(z) \\ \frac{dV_{mn}(z)}{dz} &= \frac{Q_{55}}{Q_{66}Q_{55}}\tau_{yzm}(z) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)W_{mn}(z) \\ \frac{dW_{mn}(z)}{dz} &= \frac{1}{Q_{33}}\left[\sigma_{zmn}(z) + Q_{31}\left(\frac{m\pi}{a}\right)U_{mn}(z) + Q_{32}\left(\frac{n\pi}{b}\right)V_{mn}(z)\right] \\ \frac{d\tau_{xzm}(z)}{dz} &= \left[\left(Q_{11} - \frac{Q_{13}Q_{31}}{Q_{33}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + Q_{44}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]U_{mn}(z) + \left(Q_{12} + Q_{44} - \frac{Q_{13}Q_{32}}{Q_{33}}\right) \\ &\quad \left(\frac{mn\pi^2}{ab}\right)V_{mn}(z) - \left(\frac{Q_{13}}{Q_{33}}\right)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sigma_{zmn}(z) - F_x \\ \frac{d\tau_{yzm}(z)}{dz} &= \left(Q_{21} + Q_{44} - \frac{Q_{23}Q_{31}}{Q_{33}}\right)\left(\frac{mn\pi^2}{ab}\right) \\ &\quad U_{mn}(z) + \left[\left(Q_{22} - \frac{Q_{23}Q_{32}}{Q_{33}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + Q_{44}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]V_{mn}(z) - \left(\frac{Q_{23}}{Q_{33}}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\sigma_{zmn}(z) - F_y \\ \frac{d\sigma_{zmn}(z)}{dz} &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)\tau_{xzm}(z) + \left(\frac{n\pi}{b}\right)\tau_{yzm}(z) - F_z \end{aligned} \quad (9)$$

چنانچه مشاهده شد به کمک روش ارایه شده، معادلات حاکم که ذاتاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول مبدل گشت. معادلات (۹) شامل مسایل مقدار مرزی دو نقطه‌ای بوده، که باید برای حل آنها از روش‌های مرسوم عددی کمک گرفت. اما با توجه به شرایط مرزی در راستای ضخامت، حل معادلات مربوطه نیازمند استفاده از روش‌هایی خاص می‌باشد. به این منظور برای حل این معادلات از روش پرتابی بهره گرفته می‌شود.

اساس کار این روش بر این اصل استوار است که مسأله از حالت مرزی خارج و به صورت اولیه در می‌آید. سپس پاسخ مسأله با استفاده از یکی روش‌های معمول، نظیر رانگ-کوتا به دست می‌آید. در این مسأله برای معادلات تنش‌های خارج از صفحه در راستای ضخامت شش شرط مرزی موجود است که با مراجعه به رابطه ۸ عبارتند از سطح بدون تنش در سطح تحتانی و فقط تنش نرمال فشاری در سطح فوقانی در حالی که برای سه معادله جابجایی هیچ شرط مرزی در راستای ضخامت ارائه نشده است. روش پرتابی باید به نحوی استفاده شود تا با



شکل ۳ چیدمان لایه در مثال ۲



شکل ۴ بارگذاری سینوسی روی سطح فوقانی

نتایج این مثال با مدلسازی صورت گرفته در نرم‌افزار انسیس نیز مورد بررسی قرار گرفت و همراه با دیگر نتایج مراجع در اشکال ۵-الف تا ۵-ث ارائه شده است. با بررسی این شکل‌ها می‌توان دریافت که نتایج عددی ارائه شده به نحو مطلوبی بر دیگر نتایج منطبق هستند.

۳-۳- مسئله ۳

طبق نتایج دو مثال قبل، می‌توان نسبت به صحت نتایج حاصل از روش پرتابی اطمینان حاصل کرد. این مثال به منظور بررسی یک ورق مرکب نازک، چند لایه در نظر گرفته می‌شود. کلیه خواص و پارامترها مشابه مثال ۲ می‌باشد و تنها $s=10$ فرض می‌شود. چهار لبه ورق بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارد و بارگذاری عرضی دوطرفه بر روی سطح فوقانی چندلایه اعمال می‌گردد.

شکل ۶ توزیع تنش برون صفحه‌ای σ_z را در راستای ضخامت و به ازای مقادیر مختلف y نشان می‌دهد. مطابق با شکل ۴ همان‌طور که انتظار می‌رود توزیع تنش σ_z در لبه ورق ($y=b$) برابر با صفر بوده و با پیش‌روی به درون صفحه مقدار این تنش در راستای ضخامت از صفر به بیشینه خود می‌گراید، چنان‌چه در وسط صفحه ($x=0/5a$ و $y=0/5b$) مقدار این تنش در قسمت فوقانی چند لایه با بیشینه توزیع بار نشان داده شده در شکل ۴ برابر می‌شود.

کمیت‌های بی بعد شده در این مثال به صورت رابطه (۱۱) می‌باشند.

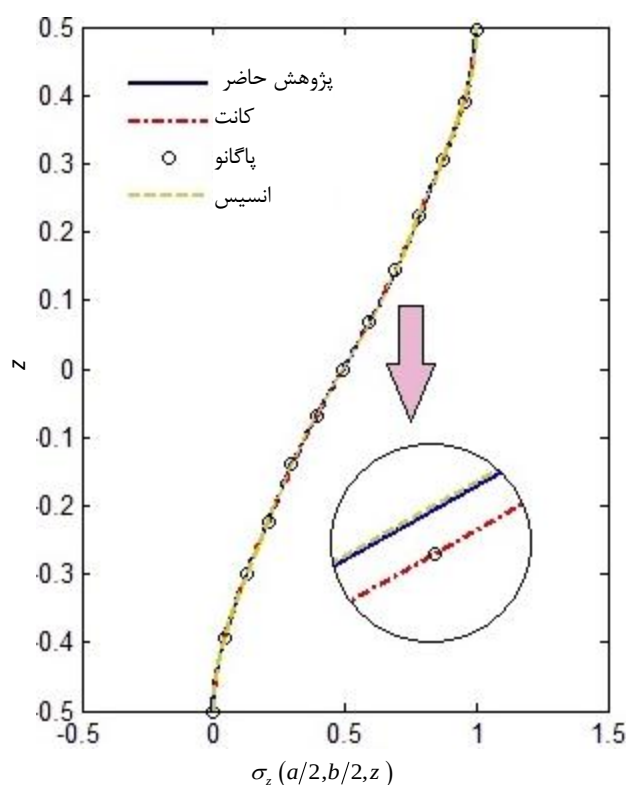
$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) &= \left(-Q_{11} + \frac{Q_{13}Q_{31}}{Q_{33}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(z) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &+ \left(-Q_{12} + \frac{Q_{13}Q_{32}}{Q_{33}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(z) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + \left(\frac{Q_{13}}{Q_{33}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zmn}(z) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \sigma_y(x, y, z) &= \left(-Q_{21} + \frac{Q_{23}Q_{31}}{Q_{33}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(z) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ &+ \left(-Q_{22} + \frac{Q_{23}Q_{32}}{Q_{33}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(z) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + \left(\frac{Q_{23}}{Q_{33}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zmn}(z) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \\ \tau_{xy}(x, y, z) &= Q_{44} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(z) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y + Q_{44} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(z) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (10) \\ \bar{w} &= \frac{wG}{hp_0} \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{p_0} \quad (11) \end{aligned}$$

۳-۲- مسئله ۲

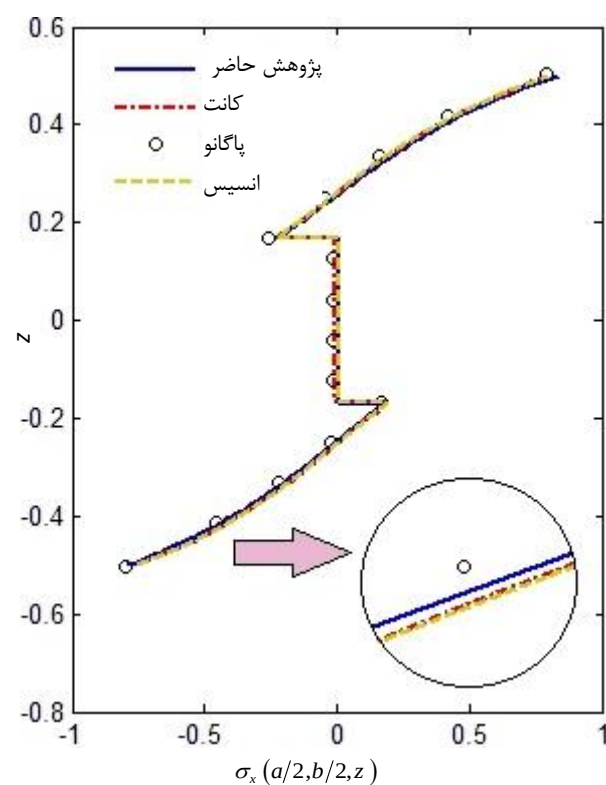
در این مثال یک چندلایه متعامد متشکل از سه لایه متقارن (۰/۹۰/۰) با شرایط تکیه‌گاهی نشان داده شده در شکل ۳ و با بارگذاری سینوسی دو طرفه بر روی سطح فوقانی نظیر شکل ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمام لایه‌ها دارای ضخامت یکسان بوده و به صورت همگن و ناهمسان‌گرد فرض شده است. در این مثال همگرایی پاسخ‌ها بسیار سریع بوده و تنها به ازای یک جمله نتایج همگرا شده‌اند. خواص مکانیکی و کمیت‌های نرمال شده به شرح جدول ۲ است و نتایج این مثال در جدول ۳ و همچنین شکل‌های ۵-الف تا ۵-ث نشان داده شده است.

جدول ۱ جابجایی عرضی و تنش برشی عرضی در ورق‌های همگن ایزوتروپ تحت بارگذاری یکنواخت

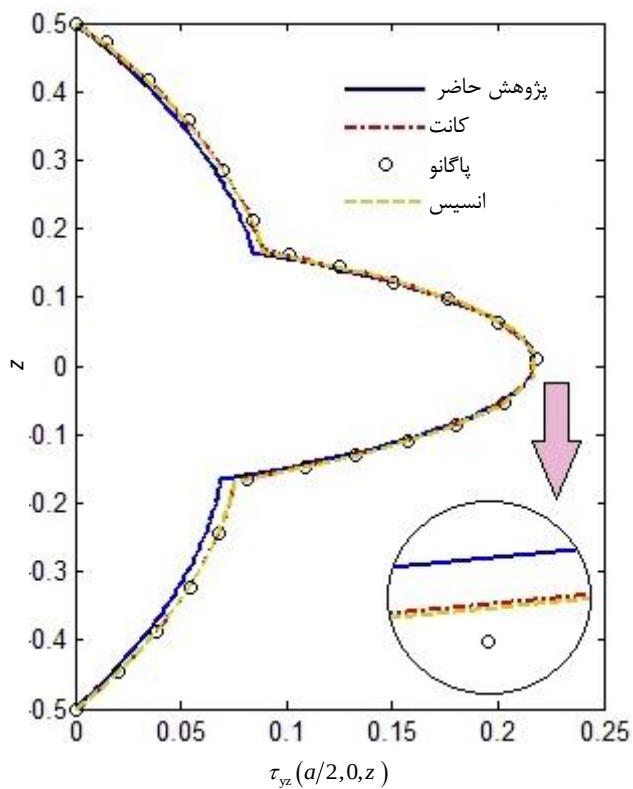
$\bar{w}(a/2, b/2, 0)$			$\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, 0)$			$s = \frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	ν
پژوهش حاضر	کانت [۲۳]	پاگانو [۲۳]	پژوهش حاضر	کانت [۲۳]	پاگانو [۲۳]			
۸۷۶۹/۱۰۰۰	۸۷۷۰/۷۲۰۰	۸۷۶۹/۶۰۰۰	۱۴/۷۳۵۴	۱۴/۷۱۰۰	۱۴/۷۹۶۰	۲۰	۰/۲	
۵۵۸/۱۰۶۷	۵۵۸/۱۷۵۰	۵۵۸/۰۶۰۰	۷/۳۱۶۷	۷/۳۱۳۰	۷/۳۱۲۰	۱۰		
۱۴۸/۳۷۲۸	۱۴۸/۳۹۰۰	۱۴۸/۵۸۰۰	۵/۱۸۱۴	۵/۱۸۳۰	۵/۱۷۰۰	۷/۱۴		
۶۸۵۴/۸۰۰۰	۶۸۵۵/۰۷۰۰	۶۸۵۵/۰۰۰۰	۱۳/۶۵۸۲	۱۳/۶۱۵۰	۱۳/۶۹۹۰	۲۰	۰/۵	
۴۳۷/۵۰۷۴	۴۳۷/۵۲۰۰	۴۳۷/۵۲۰۰	۶/۷۷۹۲	۶/۷۶۵۰	۶/۷۹۲۰	۱۰		
۱۱۶/۷۳۳۹	۱۱۶/۷۳۰۰	۱۱۶/۹۴۰۰	۴/۷۹۵۸	۴/۷۹۲۰	۴/۷۹۹۰	۷/۱۴		۰/۳
۲۷۶۱/۶۰۰۰	۲۷۶۱/۳۱۰۰	۲۷۶۱/۳۰۰۰	۹/۸۲۷۸	۹/۸۰۰۰	۹/۸۳۳۰	۲۰	۱/۰	
۱۷۸/۴۴۱۰	۱۷۸/۴۴۶۰	۱۷۸/۴۵۰۰	۴/۸۶۲۴	۴/۸۵۰۰	۴/۸۸۱۰	۱۰		
۴۸/۳۲۷۹	۴۸/۴۴۶۰	۴۸/۴۰۱۰	۳/۴۲۸۶	۳/۴۲۲۰	۳/۴۳۴۰	۷/۱۴		
۴۳۷/۶۲۴۱	۴۳۷/۵۲۰۰	۴۳۷/۵۲۰۰	۵/۲۴۱۲	۵/۱۹۰۰	۵/۳۶۰۰	۲۰	۲/۰	
۲۹/۶۰۳۹	۲۹/۶۰۴۰	۲۹/۶۰۴۰	۲/۵۶۹۸	۲/۵۲۲۰	۲/۵۸۹۰	۱۰		
۸/۴۳۹۶	۸/۴۴۰۰	۸/۴۵۱۸	۱/۷۹۱۸	۱/۷۸۵۰	۱/۷۹۷۰	۷/۱۴		
۲۰۳/۱۶۹۲	۲۰۳/۱۵۰۰	۲۰۳/۱۵۰۰	۴/۸۶۳۰	۴/۸۴۶۰	۴/۸۸۱۰	۱۰	۱/۰	۰/۲
۱۵۳/۷۴۵۰	۱۵۳/۷۶۰۰	۱۵۳/۷۵۰۰	۴/۸۶۲۷	۴/۸۴۶۰	۴/۸۸۱۰	۱۰	۱/۰	۰/۴



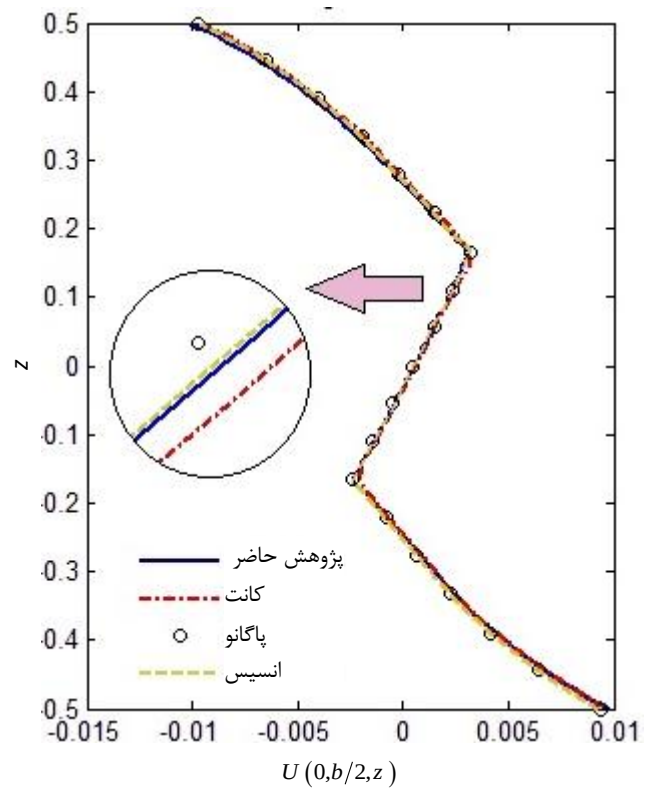
شکل ۵- ب توزیع تنش بین لایه‌های σ_z در وسط صفحه و در راستای ضخامت



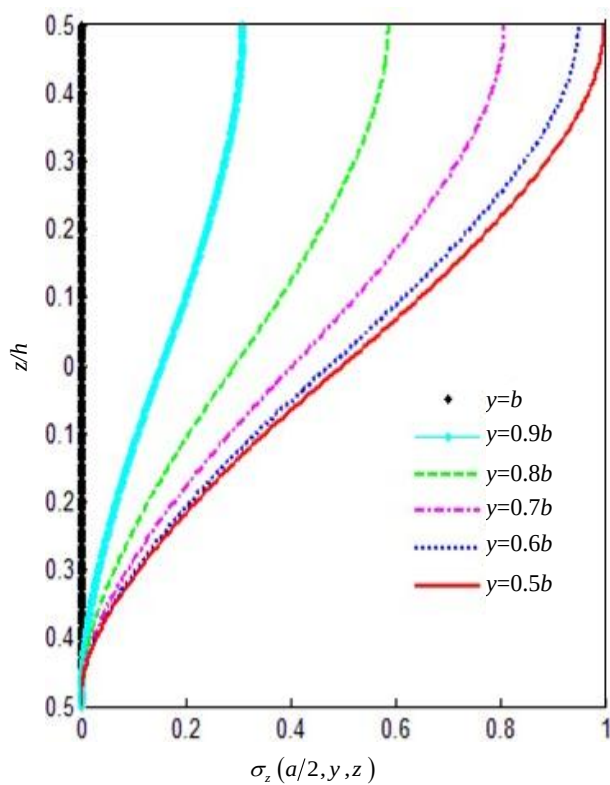
شکل ۵- الف توزیع تنش درون صفحه‌های σ_x در وسط صفحه و در راستای ضخامت



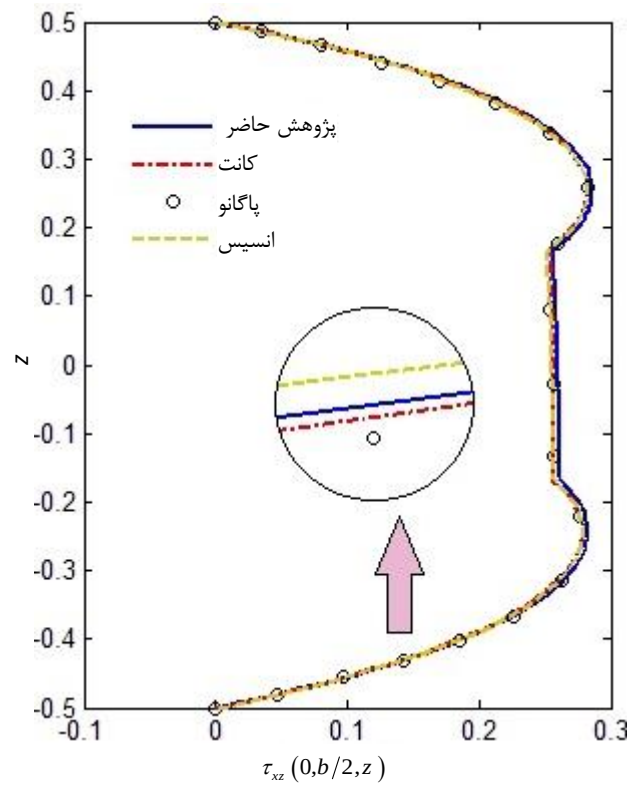
شکل ۵- ت توزیع تنش بین لایه‌های τ_{yz} در راستای ضخامت



شکل ۵- پ توزیع جابجایی U در راستای ضخامت

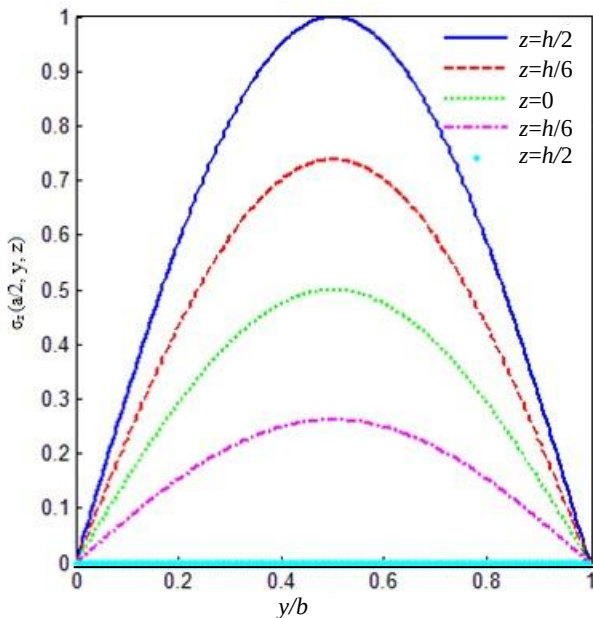


شکل ۶ توزیع تنش برون صفحه‌های σ_z در راستای ضخامت به ازای مقادیر مختلف y



شکل ۵- ت توزیع تنش بین لایه‌های τ_{xz} در راستای ضخامت

بین لایه‌ای در محدوده‌ای بین یک‌ونیم تا دو برابر ضخامت نمونه از لبه آزاد تغییرات شدیدی را دارا می‌باشند و در سایر نقاط برابر صفر هستند.



شکل ۷ توزیع تنش برون صفحه‌ای σ_z در راستای پهنا و در سطوح مشترک لایه‌های ورق

جدول ۲ خواص مواد و کمیت‌های نرمال شده [۲۳]

خواص ماده	کمیت‌های بی‌بعد شده
$E_1 = 172/4 \text{ GPa}$	$s = \frac{a}{h}$
$E_T = E_T = 6/89 \text{ GPa}$	
$G_{1T} = G_{1T} = 3/45 \text{ GPa}$	$\bar{w} = \frac{100E_2h^3w}{p_0a^4}, \bar{u} = \frac{E_2u}{hp_0s^3},$
$G_{TT} = 1/378 \text{ GPa}$	
$\nu_{1T} = \nu_{1T} = \nu_T = 0/25$	$(\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) = \frac{1}{p_0s}(\tau_{xz}, \tau_{yz}), \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{p_0},$
	$(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}) = \frac{1}{p_0s^2}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$

شکل ۷ نیز توزیع تنش برون صفحه‌ای σ_z را در راستای پهنا و در سطوح مشترک چندلایه نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مقدار σ_z در $z = -h/2$ صفر است و با افزایش ضخامت، مقدار تنش مذکور در سطوح مشترک لایه‌ها افزایش می‌یابد، به نحوی که در $z = h/2$ این تنش حداکثر توزیع را در راستای پهنا خواهد داشت.

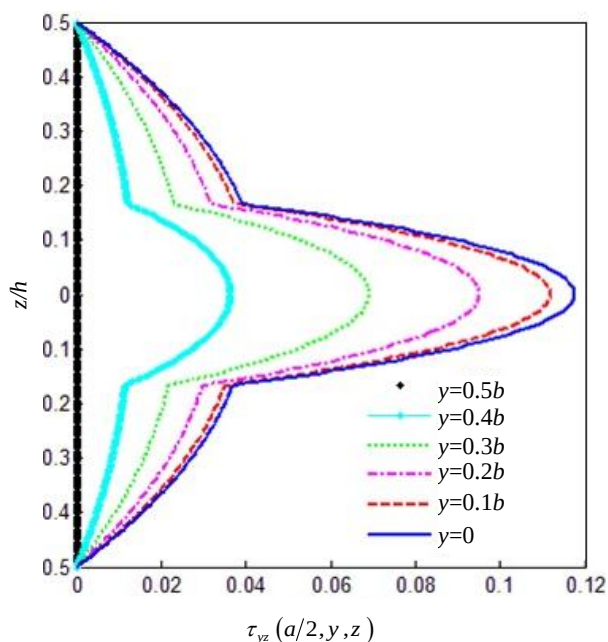
شکل ۸ توزیع تنش τ_{xz} را در میانه پهنا و در راستای ضخامت به ازای مقادیر مختلف x نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، کاملاً مشهود است که تنش بین لایه‌ای τ_{xz} دارای تغییرات شدید در نزدیکی لبه آزاد است و در نواحی دور از لبه آزاد مقدار این تنش به سمت صفر میل می‌کند و در قسمت میانی صفحه مقدار این تنش برابر با صفر می‌شود. تنش‌های

جدول ۳ بیشینه تنش‌های درون صفحه‌ای، برون صفحه‌ای و جابجایی عرضی در یک چندلایه‌های متعامد مربعی با لایه‌گذاری متقارن تحت اثر بارگذاری عرضی سینوسی

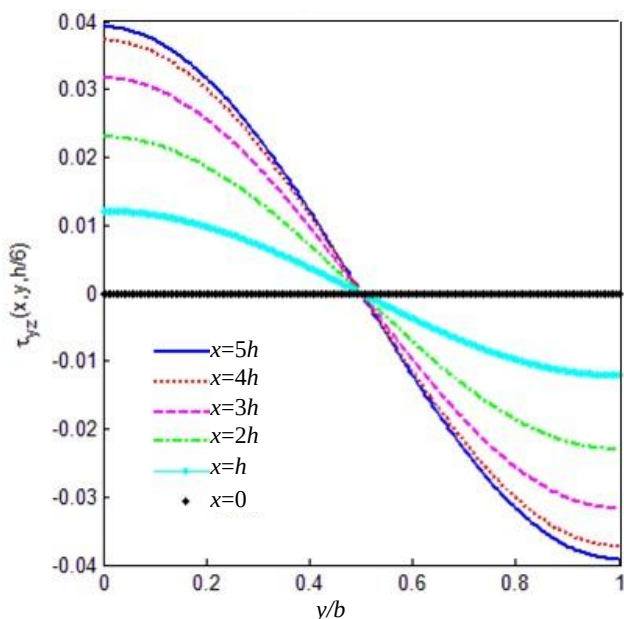
s	$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$	$\bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right)$	$\bar{\sigma}_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{6}\right)$	$\bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right)$
پژوهش حاضر	۴/۹۲۶۴	۰/۲۵۶۵	۰/۱۵۸۴	۰/۰۸۳۷	۰/۰۶۷	۰/۰۸۳۷
۲	کانت [۲۳]	۵/۰۹۵۰	۰/۲۵۹۰	۰/۱۶۴۰	۰/۰۸۵۹	۰/۰۷۰۲
پاگانو [۲۳]	-	۰/۲۵۹۰	۰/۱۶۴۰	۰/۰۷۰۰	۰/۰۸۵۰	۰/۰۷۰۰
پژوهش حاضر	۲/۰۵۱۴	۰/۲۱۷۰	۰/۲۶۰۰	۰/۰۵۴۹	۰/۰۵۶۰	۰/۰۵۴۹
۴	کانت [۲۳]	۲/۰۰۶۰	۰/۲۱۷۰	۰/۲۵۶۰	۰/۰۵۱۰	۰/۰۵۰۵
پاگانو [۲۳]	-	-	۰/۲۸۲۰	۰/۲۵۶۰	۰/۰۵۱۰	۰/۲۵۶۰
پژوهش حاضر	۰/۷۸۱۱	۰/۱۱۷۶	۰/۳۶۵۱	۰/۰۲۹۵	۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۹۵
۱۰	کانت [۲۳]	۰/۷۵۳۰	۰/۱۲۳۰	۰/۳۵۷۰	۰/۰۲۹۰	۰/۰۲۹۰
پاگانو [۲۳]	-	۰/۱۲۳۰	۰/۳۵۷۰	۰/۰۲۹۰	۰/۰۲۸۸۰	۰/۰۲۹۰
پژوهش حاضر	۰/۵۳۶۹	۰/۰۸۸۰	۰/۳۹۲۱	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۱۸۳	۰/۰۲۳۵
۲۰	کانت [۲۶]	۰/۵۱۶۴	۰/۰۹۴۰	۰/۳۸۵۰	۰/۰۲۳۴	۰/۰۲۳۴
پاگانو [۲۶]	-	۰/۰۹۴۰	۰/۳۸۵۰	۰/۰۲۳۴	۰/۰۲۱۰۰	۰/۰۲۳۴

همچنین روش ناویر، توزیع تنش در ورق مرکب متعامد با لایه‌گذاری متقارن و تحت اثر بارگذاری عرضی مورد بررسی قرار گرفت.

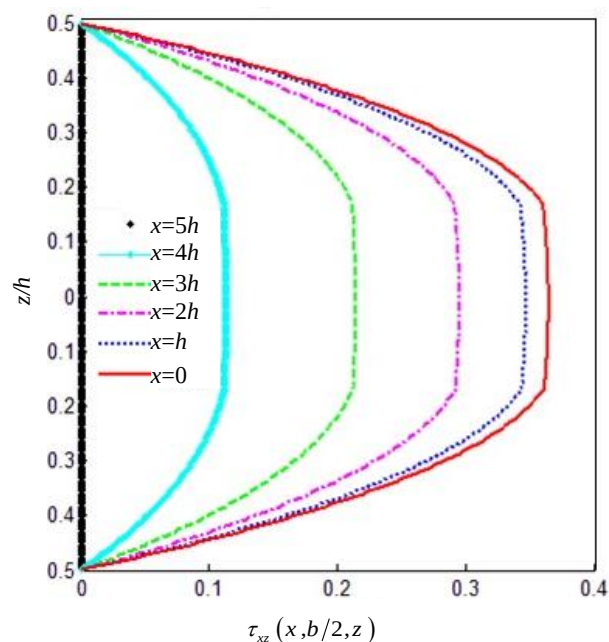
معادلات حاکم به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول بیان شد و این دستگاه با استفاده از روش پرتابی حل شد.



شکل ۹ توزیع تنش برون صفحه‌ای τ_{yz} در راستای ضخامت



شکل ۱۰ توزیع تنش برون صفحه‌ای τ_{yz} در راستای پهنا و در سطح مشترک لایه‌های ورق مرکب



شکل ۸ توزیع تنش برون صفحه‌ای τ_{xz} در راستای ضخامت

شکل ۹ توزیع تنش τ_{yz} را در راستای ضخامت ورق مرکب و در موقعیت‌های مختلف از پهنای ورق نشان می‌دهد. با توجه به شکل نشان داده شده، توزیع این تنش در نواحی درونی ورق صفر بوده و در نزدیکی لبه، تغییرات تنش افزایش می‌یابد، به نحوی که در لبه آزاد، ورق دارای بیشترین تغییرات می‌باشد. نکته مهم در این شکل است که این مؤلفه تنش در مقایسه با دو مؤلفه دیگر تنش‌های برون صفحه‌ای از لحاظ اندازه کوچک‌تر است. بنابراین در لایه‌گذاری بیان شده تنش‌های برون صفحه‌ای σ_z و τ_{xz} عوامل اصلی جدایش لایه‌ها می‌باشند.

شکل ۱۰ نیز توزیع تنش τ_{yz} را در فصل مشترک لایه‌های دوم و سوم در راستای پهنا نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود به ازای $y=0$ توزیع این تنش در لبه آزاد برابر صفر بوده و با دور شدن از نواحی لایه مرزی مقدار این تنش افزایش می‌یابد و در قسمت میانی ضلع a بیشترین مقدار تنش به وجود می‌آید. همچنین در راستای پهنا با توجه به بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی، به منظور ایجاد تعادل توزیع تنش به صورت نشان داده شده است.

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق با استفاده از نظریه الاستیسیته سه بعدی و

- [10] Kassapoglou C., Lagace P. A., "An efficient method for the calculation of interlaminar stresses in composite materials", *J. Applied Mechanics*, Vol. 53, 1986, pp. 744-750.
- [11] Rose C. A., Herakovich C. T., "An approximate solution for interlaminar stresses in composite Laminates", *J. Composite Eng*, Vol. 3, No. 3, 1993, pp. 271-285.
- [12] Yin W.-L., "Free edge effects in anisotropic laminates under extension, bending, and twisting, part I: A stress-function-based variational approach", *J. Applied Mechanics*, Vol. 61, 1994, pp. 410-415.
- [13] Becker W., "Closed-form solution for the free-edge effect in cross-ply laminate", *Compos Struct.*, Vol. 26, 1993, pp. 39-45.
- [14] Lin C. C., Hsu C. Y., Ko, C. C., "Interlaminar stresses in general laminates with straight free edges", *AIAA Journal*, Vol. 33, 1995, pp. 1471-1476.
- [15] Robbins D. H., Reddy J. N., "Variable kinematics modeling of laminated composite plates", *Int. J. Numer. Methods in Engineering*, Vol. 39, No. 13, 1996, pp. 2283-2317.
- [16] Cho M., Kim H.S., "Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting and thermal loading", *Int J Solids Struct*, Vol. 37, 2000, pp. 435-59.
- [17] Tahani M., Nosier A., "Free edge stress analysis of general cross-ply composite laminates under extension and thermal loading", *Compos Struct.*, Vol. 60, No. 1, 2003, pp. 91-103.
- [18] Tahani M., Nosier A., "Three-dimensional interlaminar stress analysis at free edges of general cross-ply composite laminates", *Mater Des*, Vol. 24, No. 2, pp. 121-130.
- [19] Tahani M., Nosier A., "Edge effects of uniformly loaded cross-ply composite laminates", *Mater Des*, Vol. 24, No. 8, pp. 647-658.
- [20] Nosier A. Bahrami A. "Free-edge stresses in antisymmetric angle-ply laminates in extension and torsion", *Int. J. Solids Struct*, Vol. 43, No. 22, 2006, pp. 6800-6816.
- [21] Pagano N.J., "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *J. Compos Mater*, Vol. 4, 1970, pp. 20-34.
- [22] Srinivas S., Rao AK. Bending, "vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates", *Int. J. Solids Struct*, Vol. 6, 1970, pp. 1463-81.
- [23] Tarun K., et al., "Elasticity solution for cross-ply composite and sandwich laminates", *Compos Struct*, Vol. 83, No. 1, 2008, pp. 13-24.

نتایج به دست آمده از این رویکرد با نتایج ارایه شده در سایر مقالات مقایسه شد. تطابق خوب به دست آمده بین نتایج، دقت و صحت روش استفاده شده را در پیش‌بینی تنش‌های برون صفحه‌ای نشان می‌دهد. مزیت روش استفاده شده نسبت به سایر روش‌های مشابه، همگرایی سریع‌تر، حجم محاسبات کمتر و دقتی مشابه با آنها است. به علاوه خطاهای عددی موجود در روش حل عددی به کار گرفته شده به علت تحلیلی بودن نظریه ارایه شده اندک است، لذا نتایج به دست آمده از این نظریه می‌تواند به عنوان مرجعی برای ارزیابی روش‌های تقریبی عددی به کار رود.

۵- مراجع

- [1] Hayashi T., "Analytical Study of Interlaminar Shear Stresses in a Laminate Composite Plane", *Jpn. Aeron & Space Sci.*, 1967; pp. 10-43.
- [2] Puppo A.H., Evensen H.A., "Interlaminar Shear in Laminated Composites under Generalized Plane Stress", *J. Composite Materials*, Vol. 4, 1970, p. 204.
- [3] Pagano N.J., Pipes R.B., "Inter Laminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension" *J. Composite Materials*, Vol.4, No.4, 1970, pp. 538-548.
- [4] Pagano N.J., Pipes R.B., "Some Observations on the Interlaminar Strength of Composite Laminates", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 15, 1973, p. 679.
- [5] Whitney J.M., Sun C.T., "A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites", *J. Sound and Vibration*, Vol. 30, 1973, pp. 85-97.
- [6] Tang S., Levy A., "A Boundary Layer Theory-Part II, Extension of Laminated Finite Strip", *J. Composite Materials*, Vol. 9, No. 1, 1975, pp. 42-52.
- [7] Wang AS.D., Crossman F.W. "Some New Results on Edge Effects in Symmetric Composite Laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 11, No. 1, 1977, pp. 92-106.
- [8] Hsu P. W., Herakovich C. T., "Edge effects in Angle-ply composite Laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 11, No. 4, 1977, pp. 422-428.
- [9] Wang S. S., Choi I., "Boundary layer effects in composite laminates: part I-Free-edge stress singularities", *J. Applied Mechanics*, Vol. 49, 1982, pp. 541-548.