http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

دی ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۰ ص ص ۳۵-۵۰

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۲/۲۲
تاریخ پذیرش ۹۲/۳/٤
ارائه در سایت ۹۲/۷/۳۰

بررسی سینماتیک مستقیم سه ربات موازی چهار درجه آزادی با مفاصل فعال کشویی و الگوی حرکتی 3T1R در فضای سینماتیک هفت بعدی

داود نادری[۱*]، مهدی طالع ماسوله[۲]، پیام ورشوی جاغرق[۳]

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان
۲- استادیار مهندسی مکاترونیک، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران
۳- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان
* همدان، صندوق پستی ۴۱۶۱- ۶۵۱۷۵، d_naderi@basu.ac.ir

چکیده- در این مقاله، به بررسی مسألهٔ سینماتیک مستقیم سه ربات موازی ۴ درجه آزادی 4-PRUR$_1$ ، 4-PRUR$_2$ و 4-PUU با الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی، موسوم به شونفلیز، پرداخته می‌شود. این ربات‌ها، به ترتیب حالت خاصی از سه مکانیزم موازی 4-PR′R′R″R″، 4-PR″R″R′R′ و 4-PR″R′R′R″ بوده که نوعی حاصل سنتز انجام شده بر روی ربات‌های موازی با آرایش سینماتیکی یکسان می‌باشند. هر یک از این ربات‌ها، دارای چهار زنجیرهٔ سینماتیکی یکسان و هر زنجیره شامل یک عملگر کشویی فعال و ۴ مفصل لولایی غیر فعال می‌باشند. راستای مفاصل لولایی در این سه ربات با یکدیگر متفاوت بوده و نتیجتاً باعث ایجاد سه مکانیزم متفاوت شده است. تحلیل مسألهٔ سینماتیک مستقیم این ربات‌ها، بر اساس جبر هندسی در فضای سینماتیک هفت بعدی و با استفاده از پارامترهای استودی و الگوریتم LIA صورت گرفته است و نهایتاً نشان داده شده است که یک عبارت جبری از درجه ۴ بیانگر عبارت سینماتیک مستقیم هر زنجیرهٔ سینماتیکی از ربات موازی می‌باشد. همچنین با استفاده از روش هوموتوپی و همچنین مقایسه نتایج با روش برآیند، نشان داده شد که مسألهٔ سینماتیک مستقیم این ربات‌ها، به ترتیب دارای حداکثر ۲۳۶، ۲۳۶ و ۲ جواب حقیقی می‌باشد.

کلیدواژگان: ربات موازی ۴ درجه آزادی، الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی، مسأله سینماتیک مستقیم، فضای سینماتیک هفت بعدی، پارامترهای استودی.

Forward kinematic investigation of three 4-DOF parallel robots with prismatic actuators performing 3T1R motion pattern in seven-dimensional kinematic space

D. Naderi[1*], M. Tale-Masouleh[2], P. Varshovi-Jaghargh[3]

1- Assoc. Prof. of Mech. Eng., Bu Ali Sina Univ., Hamedan, Iran
2- Assist. Prof. of Mech. Eng., Modern Science of Tech. faculty, Tehran Univ., Tehran, Iran
3- PhD. Candidate, Mech. Eng., Bu Ali Sina Univ., Hamedan, Iran
* P.O.B. 65175-4161, Hamedan, Iran. d_naderi@basu.ac.ir

Abstract- This paper involves the investigation of the forward kinematic problem of three 4-DOF parallel robots, named as 4-PRUR$_1$, 4-PRUR$_2$, 4-PUU, performing 3 translations and one rotation, namely Schönflies motion. The foregoing parallel robots are special cases of 3 parallel robots, named as 4-PR′R′R″R″, 4-PR″R″R′R′ and 4-PR″R′R′R″, respectively, arisen from the type synthesis performed for 4-DOF parallel mechanisms with identical kinematic limb structures. Each robot has 4 identical kinematic chains and each chain consists of one prismatic active joint and 4 revolute passive joints. Due to different direction of revolute joints in each limb, 3 different architectures are considered in this paper. The forward kinematic problem is explored in seven-dimensional kinematic space using the so-called Study's parameters and LIA algorithm and eventually, it has been shown that an algebraic expression of degree 4 indicates the forward kinematic of each kinematic chains of parallel robots under study in this paper. Moreover, using homotopy continuation and comparison with resultant method, it reveals that the forward kinematic problem of this robots have up to 236,236 and 2 real solutions, respectively.

Keywords: 4-DOF Parallel Robot, 3T1R Motion Pattern, Forward Kinematic Problem, Seven-Dimensional Kinematic Space, Study's Parameters.

۱- مقدمه

روش‌های جبری مرتبط با هندسه کلاسیک، در محاسبات سینماتیکی بسیار مؤثر هستند. ایدهٔ تبدیل خصوصیات سینماتیکی به جبر هندسی[1] اولین بار بوسیله شخصی به نام استودی [۱] معرفی شد. استودی، به ازای هر جابجایی در فضای اقلیدوسی، یک نقطه در فضای سینماتیک هفت بعدی نسبت و نشان داد که می‌توان حرکت اجسام صلب را در این فضا و بر اساس مفاهیم جبر هندسی بیان کرد. اما این ایده برای مدت بسیار طولانی به دست فراموشی سپرده شد، چرا که بکارگیری مفاهیم جبر هندسی، نیازمند وجود بستری مناسب برای تحلیل محاسبات پیچیده آن دارد که در آن زمان، به دلیل عدم وجود سیستم‌های محاسباتی پیشرفته، چنین بستری مهیا نبود. اما امروزه، مسائل بسیاری که محققان، تا چندی پیش، از حل آن ناامید بوده‌اند، قابل حل شده است. یکی از این مسائل، تحلیل مشخصات سینماتیکی ربات‌های موازی است که اغلب به وسیلهٔ سیستم‌های جبری چند متغیره و یا معادلات غیر خطی پیچیده تشریح می‌شوند. این نوع ربات‌ها، مکانیزم‌های حلقه بسته‌ای هستند که در آن سکوی متحرک به وسیله حداقل دو زنجیره سینماتیکی سری به سکوی ثابت متصل شده است [۲]. ربات‌های موازی، دارای کاربردهای بسیار زیادی در صنعت، از جمله شبیه‌ساز پرواز [۳]، ابزار و ماشین‌آلات [۴]، تجهیزات پزشکی [۵]، میکروروبات‌ها و نانوربات‌ها [۶] می‌باشند که باعث شده مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گیرند. ربات‌های موازی در مقایسه با ربات‌های سری، دارای برتری‌هایی نظیر صلبیت، دقت و نسبت تحمل نیرو به وزن بالا و معایبی نظیر فضای کاری کوچک‌تر و تعدد حالت‌های تکین در داخل فضای کاری می‌باشند [۷].

در علم ربات‌ها، پیدا کردن ساده‌ترین مدل ریاضی مکانیزم اهمیت بسیار زیادی دارد، چرا که سیستم معادلات آنها، عموماً بسیار پیچیده است. بنابراین داشتن فضایی برای تفسیر معادلات، می‌تواند بسیار مفید باشد. روش‌های ریاضی متفاوتی در این زمینه وجود دارد. روش‌های برداری و ماتریسی [۸]، از متعارف‌ترین روش‌ها برای به‌دست آوردن معادلات تشریح کنندهٔ یک مکانیزم می‌باشند. اما عموماً این روش‌ها دارای معایبی از قبیل ظاهر شدن عبارت‌های دربرگیرندهٔ سینوس و کسینوس در محاسبات می‌باشند که حل این دسته از معادلات را دشوار می‌سازند، تا جایی که حل آنها حتی برای اکثر نرم‌افزارهای محاسبات ریاضی، امری امکان‌ناپذیر می‌شود. نتیجتاً محققان به دنبال فضایی ساده‌تر برای مدل‌سازی ریاضی سینماتیک مکانیزم‌ها بوده‌اند. فضاهای تصویر سینماتیکی، از جمله این فضاها می‌باشند که با پیشرفت‌های اخیر در زمینهٔ جبر هندسی، محاسبات کامپیوتری و حل سیستم معادلات چند متغیره، انگیزهٔ بسیاری در محققان ایجاد کرده تا ایدهٔ تبدیل خصوصیات سینماتیکی به جبر هندسی و استفاده از این فضاها را دوباره از سر بگیرند. یکی از این خصوصیات سینماتیکی، تحلیل مسأله سینماتیک مستقیم در ربات‌های موازی می‌باشد. مسألهٔ سینماتیک مستقیم یک ربات موازی [۹]، شامل پیدا کردن تمامی حالت‌های ممکن مجری نهایی، به ازای ورودی‌های معلوم برای مفاصل فعال می‌باشد. شایان ذکر است که سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی، به دلیل پیچیدگی حل آن، همواره مسألهٔ چالش برانگیزی بوده و هم از نقطه نظر ریاضی و هم از نقطه نظر مکانیکی، منشا بسیاری از تحقیقات بوده است.

ربات‌های موازی اولیه، معمولاً سه یا شش درجه آزادی ساخته می‌شدند، این در حالی بود که با توجه به هندسهٔ ساده ربات‌های سه درجه آزادی صفحه‌ای، تحلیل مسألهٔ سینماتیک مستقیم آنها، در فضای اقلیدوسی سه بعدی و با استفاده از روابط ساده انجام‌پذیر بود و کارهای زیادی [۱۰،۱۱] نیز در این زمینه انجام گرفت. اما مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات موازی ۶ درجه آزادی گو-استوارت، به دلیل طرح فضایی آن، به صورت یک مسألهٔ باز محسوب می‌شد و هیچکس قادر به حل آن نبود، تا این که در سال ۱۹۹۶، مانفرد هوستی [۱۲]، با استفاده از جبر هندسی، نام خود را به عنوان اولین نفری که توانست سینماتیک مستقیم ربات استوارت را حل کند، مطرح کرد و نشان داد که سینماتیک مستقیم این ربات، حداکثر دارای ۴۰ جواب می‌باشد. البته بعدها، یی و همکارش [۱۳] با استفاده از شبکه عصبی و لی و همکارش [۱۴] با استفاده از حذف جبری[2]، الگوریتم‌هایی برای تحلیل مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات استوارت نیز ارائه دادند. اما کاربرد جبر هندسی در تحلیل مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات‌های فضایی پیچیده‌تر، نیازمند

1. Algebra Geometrical

2. Algebraic Elimination

وجود سیستم‌های کامپیوتری پیشرفته‌تری بود که در آن دوره از زمان، این امر مهیا نبود. همچنین در آن سال‌ها، محققان بر این عقیده بودند که ربات‌های موازی با ساختار پایه‌های یکسان و درجه آزادی کمتر از ۶، قابل ساخت نیستند و در تمامی کاربردها، از ربات‌های ۶ درجه آزادی استفاده می‌کردند. اما از سال ۲۰۰۱ و با به کارگیری روش‌هایی نظیر تئوری پیچش[1] [۱۵] و روش زنجیره مجازی[2] [۱۶]، سنتز طرح‌هایی با شاخه‌های سینماتیکی یکسان برای ربات‌هایی با درجه آزادی کمتر از ۶ (ربات‌های موازی با درجه آزادی محدود[3]) ارائه گردید و کانون توجه بسیاری از انجمن‌های تحقیقاتی رباتیک قرار گرفت، چرا که این نوع ربات‌ها (ربات‌های موازی ۴ و ۵ درجه آزادی) در مقایسه با ربات‌های موازی ۶ درجه آزادی، دارای برتری‌هایی از قبیل ساختار مکانیکی و الگوریتم کنترل ساده‌تر، هزینه ساخت پایین‌تر و سرعت حرکت بالاتر می‌باشند [۱۷]. بنابراین محققان در پی بکارگیری روش‌ها و الگوریتم‌هایی جدید برای تحلیل خواص سینماتیکی و مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات‌های با درجه آزادی محدود برآمدند. بر این اساس، گسلاین و همکارانش [۱۸]، به بررسی و مقایسه خواص ربات‌های موازی تریپترون[4]، کوادپترون[5] و پنتاپترون[6] پرداختند. همچنین ریچارد و همکارانش [۱۹]، مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی 3T1R به نام کوادپترون را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که یک معادله از درجه دو، بیانگر مسأله سینماتیک مستقیم این ربات می‌باشد. ورشوی و همکارانش نیز در مرجع [۲۰]، مسألهٔ سینماتیک مستقیم سه ربات موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی 3T1R (با مفاصل فعال لولایی) را در فضای اقلیدوسی سه بعدی و با استفاده از روش برآیند، تحلیل کردند.

اما امروزه، به دلیل توانایی کامپیوترهای مدرن و پیشرفت‌هایی که در محاسبات عددی حاصل شده است، امکان کاربرد جبر هندسی در سینماتیک محاسباتی ربات‌های پیچیده فضایی فراهم شده و بسیاری از محققان مجدداً به استفاده از جبر هندسی در مسائل سینماتیکی ربات‌ها، روی آوردند. اما با این حال، کارهای کمی بر روی مکانیزم‌ها با استفاده از جبر هندسی انجام شده است. برونتالر و همکارانش در مرجع [۲۱]، روش جدیدی برای سنتز مکانیزم‌های بنت[7] در فضای تصویر سینماتیک هفت بعدی، ارائه کردند. مانفرد هوستی و همکارانش نیز[۲۲]، به بررسی مسألهٔ سینماتیک معکوس حالت کلی ربات سری 6R در فضای سینماتیک هفت بعدی پرداختند. همچنین والتر و همکارانش[۲۳]، با استفاده از جبر هندسی، مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات موازی SNU 3-UPU را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و نشان دادند که حداکثر تعداد جواب‌ها برای این مسأله، برابر ۷۸ می‌باشد. طالع ماسوله و همکارانش نیز [۲۴]، بر پایه تولید چندجمله‌ای‌های خطی و حذف متغیرهای مربوط به مفاصل غیر فعال به صورت سیستماتیک، سینماتیک مستقیم ربات موازی پنج درجه آزادی 5-RPUR را بررسی و دو طرح ساده‌سازی شده برای این مکانیزم ارائه کردند که تحلیل سینماتیک مستقیم آنها ساده‌تر از مکانیزم موازی اصلی انجام می‌گرفت.

بر این اساس و با توجه به آخرین اطلاعات به‌دست آمده تا حال حاضر، مبحث سنتز ربات‌های موازی با درجه آزادی محدود، توسط محققان بسیاری به انجام رسیده است. اما به دلیل تاریخچه کوتاه این نوع ربات‌ها، هنوز برخی شکاف‌ها در بررسی خواص سینماتیکی آنها، نظیر مسألهٔ سینماتیک مستقیم،[8] وجود دارد. علاوه بر این، به دلیل پیچیدگی‌های ریاضی راه حل تحلیلی مسأله سینماتیک مستقیم (به دلیل سیستم معادلات غیر خطی حاصل)، حل آن با مشکلاتی روبرو است. بر این اساس و با توجه به دامنه وسیع کاربردهای صنعتی ربات‌های ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی سه درجه انتقالی و یک درجه دورانی 3T1R[9] (موسوم به حرکت شونفلیز[10] یا حرکت اسکارا[11])، از قبیل مونتاژ قطعات، در این تحقیق به بررسی و مقایسهٔ مسأله سینماتیک مستقیم سه ربات موازی از این نوع به نام‌های $4\text{-}\underline{P}RUR_1$، $4\text{-}\underline{P}RUR_2$ و 4-PUU، که تا بحال مورد بررسی قرار نگرفته، پرداخته شده است. این ربات‌ها حالت خاصی از سه مکانیزم موازی 4-PR′R′R″R″، 4-

1. Screw Theory
2. Virtual Chain Approach
3. Limited-DOF
4. Tripteron
5. Quadrupteron
6. Pentapteron
7. Bennett
8. Forward Kinematic Problem (FKP)
9. 3 Translation and 1 Rotation (3T1R)
10. Schönflies Motion
11. SCARA Motion

PR″R″R′R′ و 4-PR″R′R′R″ بوده که سنتز آنها توسط کنگ و گسلاین [۲۵] در سال ۲۰۰۷، بر اساس تئوری پیچش و روش زنجیره مجازی انجام شده و در کتابی با عنوان "سنتز انواع ربات‌های موازی" به صورت کامل آورده شده است. برای تحلیل مسأله سینماتیک مستقیم این ربات‌ها، از پارامترهای استودی در فضای سینماتیک هفت بعدی، الگوریتم LIA، پایه‌های گروبنر[1] و روش هوموتوپی [۲۶] استفاده شده است. همچنین نشان داده می‌شود که چگونه مسألهٔ سینماتیک مستقیم می‌تواند به زبان جبر هندسی بیان و در نهایت با استفاده از یک سری تکنیک‌هایی در این زمینه حل شود. در واقع یکی از اهداف این تحقیق در این است که اهمیت درک هندسهٔ چندبعدی فضاهای تصویر سینماتیک، برای پیدا کردن سیستم معادلات ساده‌تر را نشان دهد. لازم به ذکر است که در این مطالعه، تداخل مکانیکی در نظر گرفته نشده است.

بر این اساس، این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم، ساختار هندسی و خواص سینماتیکی سه ربات موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی 3T1R تشریح می‌شود. در بخش بعد، نگاشت سینماتیک استودی و کاربرد آن در مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی، با هدف پایه‌ریزی مفاهیم اولیه مورد نیاز برای مقاله، مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس الگوریتم LIA و چگونگی استفاده از آن برای به‌دست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم[2] ربات موازی (عبارتی که به صورت ریاضی، وضعیت یک زنجیره سینماتیکی از ربات موازی را متناسب با موقعیت مفصل فعال آن، مشخص می‌کند) نشان داده می‌شود. در ادامه نیز، نتایج مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی فوق‌الذکر ارائه شده است.

۲- ساختار هندسی ربات‌های موازی چهار درجه آزادی (3T1R) مورد نظر

در مرجع [۲۵]، ۱۱ مکانیزم ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی معرفی شده است که ۶ مکانیزم از آنها، در گروه 5R (متشکل از ۵ مفصل لولایی در هر زنجیره) و ۵ مکانیزم دیگر در گروه 1P4R (متشکل از یک مفصل کشویی و ۴ مفصل لولایی در هر زنجیره) طبقه‌بندی شده‌اند.

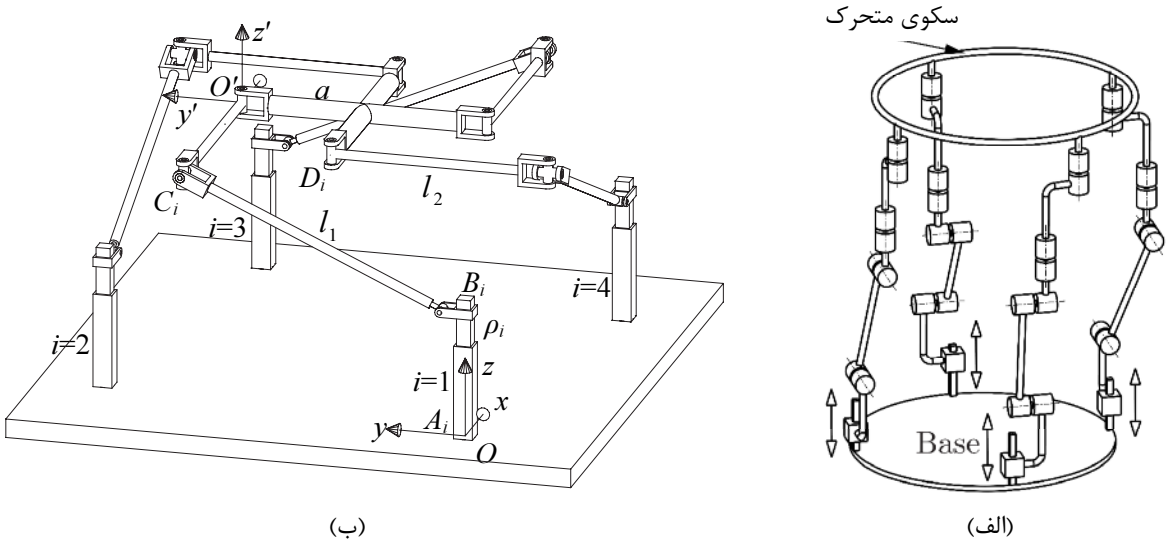
سه مکانیزم موازی 4-PR′R′R″R″، 4-PR″R″R′R′ و 4-PR″R′R′R″ (مفاصل با بالانویس یکسان، دارای محورهای موازی می‌باشند) که طرح کلی آنها به ترتیب در شکل‌های ۱- الف، ۲- الف و ۳- الف آورده شده است، از گروه 1P4R می‌باشند که حالت خاصی از آنها، به ترتیب منجر به ربات‌های موازی $4\text{-}\underline{P}RUR_1$، $4\text{-}\underline{P}RUR_2$ و 4-PUU (شکل‌های ۱- ب، ۲- ب و ۳- ب) می‌شود. لازم به ذکر است که در سرتاسر این مقاله، مفاصل کشویی با P، مفاصل لولایی با R و مفاصل یونیورسال با U نشان داده می‌شود، همچنین در زیر مفاصل فعال خطی کشیده شده است که آنها را از مفاصل غیر فعال مجزا می‌کند.

همان گونه که در شکل‌های ۱ تا ۳ مشاهده می‌شود، این ربات‌ها، از یک مجری نهایی (سکوی متحرک) تشکیل شده‌اند که به وسیلهٔ چهار زنجیرهٔ سینماتیکی یکسان به سکوی ثابت متصل شده‌اند. چهارچوب ثابت O_{xyz}، بر روی مفصل B_1 (طوری که محور z در راستای مفصل کشویی یا همان مفصل فعال قرار گیرد) و چهارچوب متحرک $O'_{x'y'z'}$ بر روی مفصل E_i (طوری که راستای محور z' در راستای محور z از چهارچوب ثابت قرار گیرد) قرار داده شده است.

همچنین، یک عملگر کشویی موازی محور z نیز (متصل به سکوی ثابت)، ورودی هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. با توجه به شرایط و قیود حاکم بر این ربات، جهت‌گیری محور z' از چهارچوب متحرک، همواره ثابت و در جهت محور z از چهارچوب ثابت قرار می‌گیرد، اما جهت‌گیری محورهای x' و y' با تغییر ورودی‌های ربات، تغییر می‌کند. نتیجتاً مجری نهایی این ربات‌ها، توانایی ایجاد سه درجه انتقالی در راستای محورهای x، y و z به علاوهٔ یک درجه دورانی حول محور z (θ) را دارا می‌باشند.

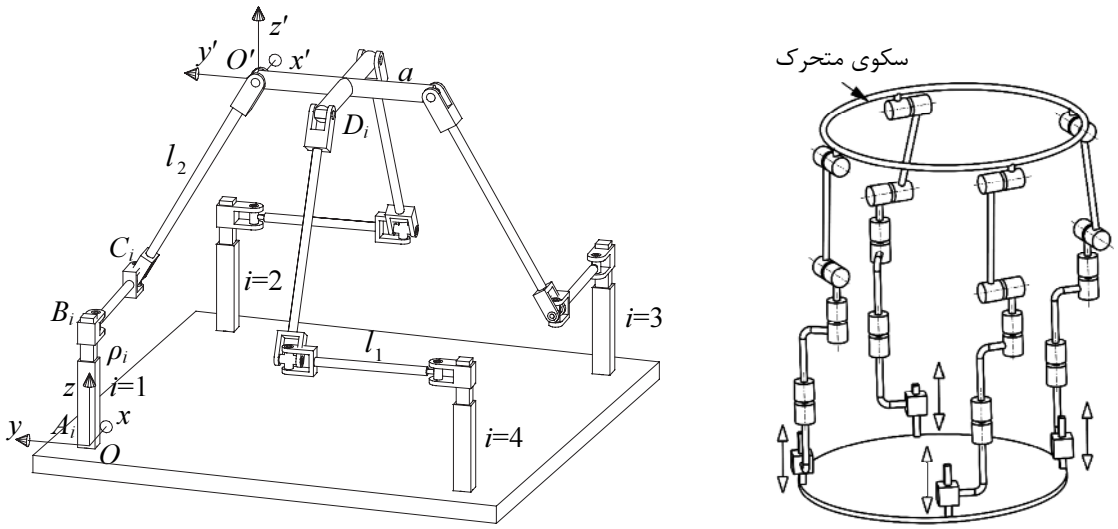
در حقیقت، این سه ربات، جزء ربات‌های با درجه آزادی محدود می‌باشند که مجری نهایی آنها، نمی‌تواند حول محورهایی موازی محورهای x و y دوران کنند. همچنین در زنجیره‌های سینماتیکی ربات‌های موازی فوق‌الذکر، اندازهٔ بردارهای B_iC_i و C_iD_i به ترتیب با مقادیر l_1 و l_2 نشان داده می‌شوند. در ادامه به ترتیب ساختار هندسی هر زنجیره از ربات‌های موازی $4\text{-}\underline{P}RUR_1$، $4\text{-}\underline{P}RUR_2$ و 4-PUU تشریح می‌شود.

1. Gröbner Bases
2. Forward Kinematic Expression (FKE)



(الف) (ب)

شکل ۱ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی $4-\underline{P}R'R'R''R''$ [۲۵]، ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری ربات موازی $4\text{-}\underline{P}RUR_1$



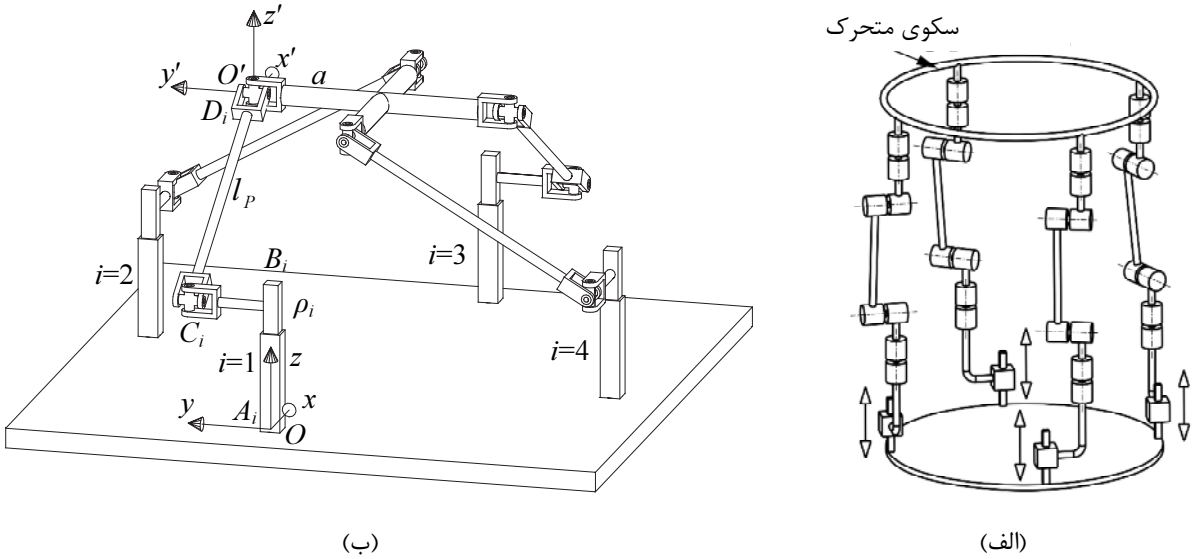
(الف) (ب)

شکل ۲ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی $4-\underline{P}R''R''R'R'$ [۲۵]، ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری ربات موازی $4\text{-}\underline{P}RUR_2$

۲-۱- ساختار هندسی ربات موازی $4\text{-}\underline{P}RUR_1$

بر اساس سنتز انجام شده در مرجع [۲۵]، مشخصات هندسی هر زنجیرهٔ سینماتیکی از ربات موازی $4\text{-}\underline{P}RUR_1$ به این صورت می‌باشد که: چهار مفصل کشویی متصل به سکوی ثابت و چهار مفصل لولایی متصل به سکوی متحرک (آخرین مفاصل لولایی در هر زنجیرهٔ سینماتیکی) دارای محورهای دوران موازی (موازی محور z) می‌باشند. همچنین، دو مفصل لولایی ابتدایی در هر زنجیره، همواره موازی بوده و در صفحه‌ای موازی صفحهٔ x-y قرار دارند.

علاوه بر این، دو مفصل لولایی انتهایی در هر زنجیره نیز، همواره دارای محورهای دوران موازی محور z می‌باشند. در واقع، راستای مفاصل کشویی، موازی با راستای محور دوران دو مفصل لولایی انتهایی و عمود بر محور دوران دو مفصل ابتدایی در هر زنجیره می‌باشد. لازم به ذکر است که مفاصل لولایی دوم و سوم در هر زنجیره دارای محورهای متقاطع و عمود بر هم بوده و یک مفصل یونیورسال را تشکیل می‌دهند.



شکل ۳ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی $4-\underline{P}R''R'R'R''$ [۲۵]، ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری ربات موازی 4-$\underline{P}$UU

۲-۲- ساختار هندسی ربات موازی 4-$\underline{P}$RUR$_2$

طرح کلی زنجیره سینماتیکی ربات موازی 4-$\underline{P}$RUR$_2$ در شکل ۲ آورده شده است. همان گونه که در این شکل ملاحظه می‌شود، یک عملگر کشویی موازی محور z و متصل به سکوی ثابت، ورودی هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. راستای محورهای دوران دو مفصل لولایی پس از آن، همواره موازی محور z می‌باشد. همچنین دو مفصل انتهایی در هر زنجیره نیز همواره دارای محورهای موازی (در صفحه‌ای موازی صفحهٔ x-y) می‌باشند. مشابه با ربات موازی 4-$\underline{P}$RUR$_1$، مفاصل دوم و سوم در هر زنجیره می‌توانند یک مفصل یونیورسال را تشکیل دهند. لازم به ذکر است که چهار مفصل لولایی متصل به مجری نهایی در این ربات، همواره دارای محورهایی موازی بوده و در صفحه‌ای موازی صفحهٔ x-y قرار دارند.

ملاحظه می‌شود که حالت‌های خاص دو مکانیزم موازی 4-$\underline{P}R'R'R''R''$ و 4-$\underline{P}R''R''R'R'$ با نام 4-$\underline{P}$RUR معرفی شده‌اند. اما مشابه بودن نام این دو ربات، دلیل بر یکسان بودن ساختار هندسی آنها نیست، چرا که راستای مفاصل لولایی و قیود حاکم بر زنجیره‌های سینماتیکی این دو ربات موازی، با یکدیگر کاملاً متفاوت می‌باشند. به همین دلیل، برای تفکیک این دو ربات موازی از هم، حالت خاص مکانیزم موازی 4-$\underline{P}R'R'R''R''$، به نام 4-$\underline{P}$RUR$_1$ و حالت خاص مکانیزم موازی 4-$\underline{P}R''R''R'R'$ ، با نام 4-$\underline{P}$RUR$_2$ بیان می‌شوند.

۲-۳- ساختار هندسی ربات موازی 4-$\underline{P}$UU

در شکل ۳، طرح کلی ربات موازی 4-$\underline{P}$UU، که حالت خاصی از مکانیزم موازی 4-$\underline{P}R''R'R'R''$ می‌باشد، آورده شده است. همان طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، راستای مفصل کشویی و محور دوران اولین و چهارمین مفصل لولایی در هر زنجیره، موازی محور z می‌باشد. علاوه بر این، راستای محورهای دوران دومین و سومین مفصل لولایی در هر زنجیره نیز همواره عمود بر راستای محور z می‌باشد. لازم به ذکر است که اولین و دومین مفصل لولایی و همچنین سومین و چهارمین مفصل لولایی در هر زنجیره از ربات موازی، دارای محورهای دوران متقاطع و عمود بر هم بوده و تشکیل دو مفصل یونیورسال در هر زنجیره را می‌دهند.

۳- فضای سینماتیک هفت بعدی

بخش دوم این تحقیق، شامل معرفی چهارچوب ریاضی مناسبی است که بتواند در تحلیل مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی مورد استفاده قرار گیرد. این چهارچوب باید بتواند انتقال و دوران را به طور کامل تشریح کند. این کار می‌تواند با استفاده از جبر هندسی [۲۷] انجام شود. جبر هندسی، مطالعه اهداف تعریف شده بوسیله چندجمله‌ای‌ها با استفاده از ابزارهای جبری می‌باشد. امروزه با ظهور سیستم‌های کامپیوتری، امکان استفاده از تئوری‌ها و الگوریتم‌های جبر هندسی افزایش یافته است.

نگاشت سینماتیک استودی نیز، یک مفهوم اساسی در رابطه با تحلیل حرکات اجسام صلب با متغیرهای جبری می‌باشد. این نگاشت اولین بار به‌وسیلهٔ شخصی بنام استودی معرفی شد. ایده اصلی این نگاشت سینماتیکی این است که جابجایی‌های فضای سه بعدی را با نقاطی در فضایی با ابعاد بالاتر جایگزین کند تا به این وسیله، دیدگاه بهتری از ویژگی‌های این جابجایی‌ها ایجاد شود. در واقع، نگاشت سینماتیک استودی، نگاشت یک جزء γ، از فضای سه بعدی اقلیدوسی[1] $SE(3)$ به فضای سینماتیک هفت بعدی P^7 می‌باشد. بردار مختصات یک نقطه در فضای سینماتیک هفت بعدی به وسیلهٔ آرایه هفت بعدی $\chi=[x_0:x_1:x_2:x_3:y_0:y_1:y_2:y_3]$ بیان می‌شود، جایی که عناصر این آرایه، پارامترهای استودی[2] نامیده می‌شوند. همچنین، تصویر سینماتیکی χ به ازای جابجایی α بوسیله ماتریس تبدیل رابطه (۱) نشان داده می‌شود:

$$F=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\Delta & 0_{1\times3}\\ P_{3\times1} & R_{3\times3}\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2 & 2(x_1x_2-x_0x_3) & 2(x_1x_3+x_0x_2)\\ 2(x_1x_2+x_0x_3) & x_0^2-x_1^2+x_2^2-x_3^2 & 2(x_2x_3-x_0x_1)\\ 2(x_1x_3-x_0x_2) & 2(x_2x_3+x_0x_1) & x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_3^2\end{bmatrix} \quad (۱)$$

جایی که $\Delta=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$. همچنین چهار پارامتر x_i باید شرایط تعامد با چهار پارامتر y_i را برقرار کنند:

$$S=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \quad (۲)$$

که در رابطهٔ (۲)، S معادله درجه دو استودی[3] نامیده می‌شود [۲۷]. در واقع، یک تناظر یک به یک از تمامی تبدیلات فضایی به معادله درجه دو استودی در فضای هفت بعدی، وجود دارد. همچنین اگر بتوان پارامترها را طوری مرتب کرد که $\Delta=1$ باشد، آنگاه مختصه x_0 بیان کننده کسینوس نصف زاویه دوران می‌باشد.

برای به‌دست آوردن پارامترهای استودی یک زنجیرهٔ سینماتیکی، ابتدا بر اساس قرارداد دناویت-هارتنبرگ[4]، پارامترهای دناویت-هارتنبرگ اولین زنجیرهٔ سینماتیکی (زنجیره اصلی) ربات را به‌دست آورده و سپس ماتریس تبدیل کلی زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی (ماتریسی چهار در چهار که مبین موقعیت و جهت‌گیری چهارچوب متحرک قرار گرفته بر روی مجری نهایی نسبت به چهارچوب ثابت می‌باشد) نوشته می‌شود. در ادامه، پارامترهای استودی x_i از زنجیره اصلی ربات، با استفاده از عناصر ماتریس تبدیل کلی و حداقل از طریق یکی از مجموعه روابط (۳) حاصل می‌شوند [۲۷]:

$$\begin{aligned}
x_0&=1+f_{11}+f_{22}+f_{33}:f_{32}-f_{23}:f_{13}-f_{31}:f_{21}-f_{12};\\
x_1&=f_{32}-f_{23}:1+f_{11}+f_{22}+f_{33}:f_{12}-f_{21}:f_{31}-f_{13};\\
x_2&=f_{13}-f_{31}:f_{12}-f_{21}:1+f_{11}+f_{22}+f_{33}:f_{23}-f_{32};\\
x_3&=f_{21}-f_{12}:f_{31}-f_{13}:f_{23}-f_{32}:1+f_{11}+f_{22}+f_{33};
\end{aligned} \quad (۳)$$

در حالت کلی، یکی از مجموعه روابط فوق، منتهی به جواب برای پارامترهای استودی x_i می‌شوند. این به این صورت است که اگر $1+f_{11}+f_{22}+f_{33}=0$، آنگاه اولین مجموعه از روابط بالا، دارای مقادیر $x_0=x_1=x_2=x_3=0$ می‌شود که غیر قابل قبول است. نتیجتاً، باید از مجموعه رابطهٔ دوم استفاده کرد، به شرطی که $f_{22}+f_{33}\neq0$. اگر این شرط برقرار نباشد می‌توان از مجموعه رابطهٔ سوم استفاده کرد به شرطی که $f_{11}+f_{33}\neq0$ و در غیر این صورت می‌توان از مجموعه رابطهٔ چهارم استفاده کرد که منجر به $x_0=x_1=x_2=0$ و $x_3=1$ می‌شود. لازم به ذکر است که حداقل یکی از چهار مجموعه رابطهٔ (۳)، غیر صفر می‌باشد. پس از محاسبه پارامترهای استودی x_i ، چهار پارامتر استودی باقی‌مانده از رابطه (۴) حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
y_0&=(f_{14}x_1+f_{24}x_2+f_{34}x_3)/2;\\
y_1&=(-f_{14}x_0+f_{34}x_2-f_{24}x_3)/2;\\
y_2&=(-f_{24}x_0-f_{34}x_1+f_{14}x_3)/2;\\
y_3&=(-f_{34}x_0+f_{24}x_1-f_{14}x_2)/2;
\end{aligned} \quad (۴)$$

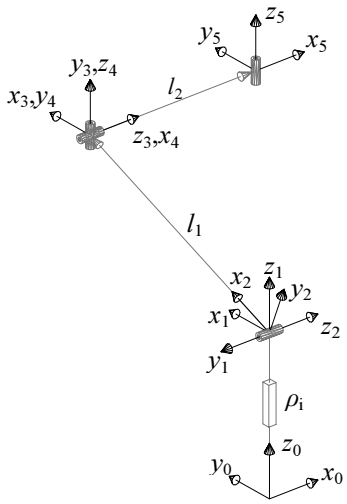
که در روابط فوق، f_{ij}ها، عناصر ماتریس تبدیل چهار در چهار حاصل از قرارداد دناویت-هارتنبرگ می‌باشند. همان گونه که ملاحظه می‌شود، در نگاشت سینماتیک استودی، دوران بر روی پارامترهای استودی x_i و انتقال بر روی پارامترهای استودی x_i و y_i نگاشت پیدا می‌کند. بنابراین x_iها بیان کننده دوران و ترکیب x_iها و y_iها بیان کننده انتقال در یک تبدیل کلی می‌باشند. لازم به ذکر است ماتریس تبدیل کلی زنجیرهٔ

1. Three-Dimensional Euclidean Space
2. Study's Parameters
3. Study's Quadric
4. Denavit-Hartenberg

سینماتیکی اصلی، شامل عبارت‌های سینوس و کسینوس می‌باشد، لذا برای حذف عبارت‌های مثلثاتی از معادلات فوق و ساده‌تر شدن روابط، از تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ به صورت $t=\tan(\theta/2)$، $\sin\theta=\left(2t/(1+t^2)\right)$ و $\cos\theta=\left((1-t^2)/(1+t^2)\right)$ استفاده می‌شود. در ادامه، پارامترهای استودی سه ربات موازی مورد نظر محاسبه می‌شود.

۳-۱- پارامترهای استودی ربات 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$

در شکل ۴، طرح کلی زنجیره سینماتیکی $\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$ به همراه چهارچوب‌های متصل به مفاصل آن بر اساس قرارداد دناویت-هارتنبرگ نشان داده شده است. بر این اساس، پارامترهای دناویت-هارتنبرگ زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات موازی 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$ به صورت جدول ۱ حاصل می‌شوند.



شکل ۴ طرح کلی زنجیرهٔ سینماتیکی $\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$

جدول ۱ پارامترهای دناویت- هارتنبرگ زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$

$\theta_i \equiv t_i$	d_i	α_{i-1}	a_{i-1}	i
۰	ρ_i	۰	۰	۱
$\theta_2 \equiv t_2$	۰	۹۰°	۰	۲
$\theta_3 \equiv t_3$	۰	۰	l_1	۳
$\theta_4 \equiv t_4$	۰	-۹۰°	۰	۴
$\theta_5 \equiv t_5$	۰	۰	l_2	۵

در ادامه، پس از نوشتن ماتریس تبدیل کلی زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات موازی 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$، پارامترهای استودی آن از روابط (۳) و (۴) حاصل می‌گردند:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2(t_2t_3-1)(t_4t_5-1);\\
x_1 &= -2(t_2+t_3)(t_4+t_5);\\
x_2 &= 2(t_2+t_3)(t_4t_5-1);\\
x_3 &= 2(t_2t_3-1)(t_4+t_5);\\
y_0 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4-t_2t_3t_5+t_4+t_5\right)\\
&\quad+(l_1+l_2)(t_2t_5-t_3t_4)+(l_1-l_2)(t_2t_4-t_3t_5);\\
y_1 &= \rho_P\left(t_2t_4t_5+t_3t_4t_5-t_2-t_3\right)\\
&\quad+(l_1+l_2)(t_2t_3t_4t_5-1)+(l_1-l_2)(t_4t_5-t_2t_3);\\
y_2 &= \rho_P\left(t_2t_4+t_2t_5+t_3t_4+t_3t_5\right)\\
&\quad+(l_1+l_2)(t_2t_3t_4+t_5)+(l_1-l_2)(t_2t_3t_5+t_4);\\
y_3 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4t_5+t_2t_3+t_4t_5-1\right)\\
&\quad+(l_1+l_2)(-t_3t_4t_5-t_2)+(l_1-l_2)(t_2t_4t_5+t_3);
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

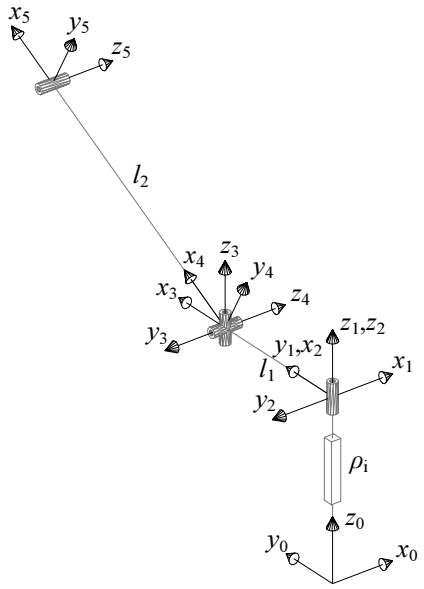
که در رابطه (۵)، t_iها تانژانت نصف زاویه θ_iها (زوایای مفصلی در نمادگذاری دناویت-هارتنبرگ) و ρ_Pها، طول مفصل کشویی فعال در زنجیره P-ام می‌باشند.

۳-۲- پارامترهای استودی ربات 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_2$

طرح کلی زنجیره سینماتیکی $\underline{\text{P}}\text{RUR}_1$ به همراه چهارچوب‌های متصل به مفاصل آن بر اساس قرارداد دناویت-هارتنبرگ و همچنین پارامترهای دناویت-هارتنبرگ و پارامترهای استودی زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات موازی 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_2$ به ترتیب در جدول ۲، شکل ۵ و رابطه (۶) آورده شده است.

جدول ۲ پارامترهای دناویت- هارتنبرگ زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_2$

$\theta_i \equiv t_i$	d_i	α_{i-1}	a_{i-1}	i
۰	ρ_i	۰	۰	۱
$\theta_2 \equiv t_2$	۰	۰	۰	۲
$\theta_3 \equiv t_3$	۰	۰	l_1	۳
$\theta_4 \equiv t_4$	۰	۹۰°	۰	۴
$\theta_5 \equiv t_5$	۰	۰	l_2	۵



شکل ۵ طرح کلی زنجیرهٔ سینماتیکی $\underline{P}RUR_2$

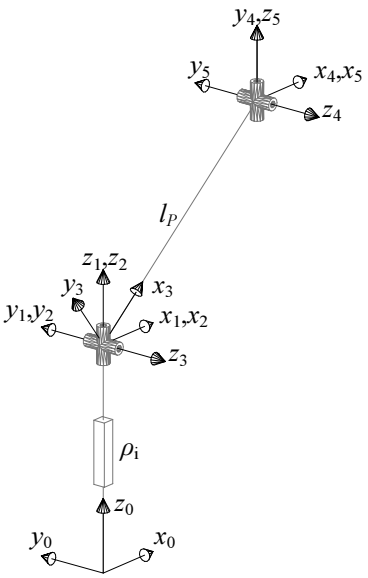
$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2\left(t_2t_3t_4t_5 - t_2t_3 - t_2t_4 - t_2t_5 - t_3t_4 - t_3t_5 - t_4t_5 + 1\right);\\
x_1 &= 2\left(t_2t_3t_4t_5 - t_2t_3 + t_2t_4 + t_2t_5 + t_3t_4 + t_3t_5 - t_4t_5 + 1\right);\\
x_2 &= 2\left(t_2t_3t_4 + t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3t_4t_5 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5\right);\\
x_3 &= 2\left(-t_2t_3t_4 - t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3t_4t_5 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5\right);\\
y_0 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4 - t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3t_4t_5 + t_2 + t_3\right.\\
&\quad \left. + t_4 + t_5\right) + \left(l_1 + l_2\right)\left(-t_2t_3t_4t_5 - t_2t_5 + t_3t_4 + 1\right)\\
&\quad + \left(l_1 - l_2\right)\left(t_2t_3 - t_2t_4 + t_3t_5 - t_4t_5\right);\\
y_1 &= \rho_P\left(t_2t_3t_4 + t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3t_4t_5 + t_2 + t_3\right.\\
&\quad \left. - t_4 - t_5\right) + \left(l_1 + l_2\right)\left(t_2t_3t_4t_5 - t_2t_5 + t_3t_4 - 1\right)\\
&\quad + \left(l_1 - l_2\right)\left(-t_2t_3 - t_2t_4 + t_3t_5 + t_4t_5\right);\\
y_2 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4t_5 + t_2t_3 - t_2t_4 - t_2t_5 - t_3t_4 - t_3t_5\right.\\
&\quad \left. + t_4t_5 - 1\right) + \left(l_1 + l_2\right)\left(t_2t_3t_4 - t_3t_4t_5 - t_2 + t_5\right)\\
&\quad + \left(l_1 - l_2\right)\left(t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 + t_3 + t_4\right);\\
y_3 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4t_5 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_2t_5 + t_3t_4 + t_3t_5\right.\\
&\quad \left. + t_4t_5 - 1\right) + \left(l_1 + l_2\right)\left(t_2t_3t_4 + t_3t_4t_5 + t_2 + t_5\right)\\
&\quad + \left(l_1 - l_2\right)\left(t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3 + t_4\right);
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

۳-۳- پارامترهای استودی ربات 4-$\underline{P}$UU

تمامی مراحل فوق در این مرحله برای ربات موازی 4-$\underline{P}$UU انجام شده و نتایج آن در جدول ۳، شکل ۶ و رابطه (۷) نشان داده شده است.

جدول ۳ پارامترهای دناویت- هارتنبرگ زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات 4-$\underline{P}$UU

i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	$\theta_i \equiv t_i$
۱	۰	۰	ρ_i	۰
۲	۰	۰	۰	$\theta_2 \equiv t_2$
۳	۰	۹۰°	۰	$\theta_3 \equiv t_3$
۴	l_P	۰	۰	$\theta_4 \equiv t_4$
۵	۰	-۹۰°	۰	$\theta_5 \equiv t_5$



شکل ۶ طرح کلی زنجیرهٔ سینماتیکی $\underline{P}$UU

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2\left(t_3t_4 - 1\right)\left(t_2t_5 - 1\right);\\
x_1 &= 2\left(t_3 + t_4\right)\left(t_2 - t_5\right);\\
x_2 &= -2\left(t_3 + t_4\right)\left(t_2t_5 + 1\right);\\
x_3 &= -2\left(t_3t_4 - 1\right)\left(t_2 + t_5\right);\\
y_0 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4 - t_3t_4t_5 + t_2 + t_5\right)\\
&\quad + l_P\left(t_2t_3 - t_2t_4 + t_3t_5 - t_4t_5\right);\\
y_1 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3 - t_4\right)\\
&\quad + l_P\left(-t_2t_3t_4t_5 - t_2t_5 - t_3t_4 - 1\right);\\
y_2 &= \rho_P\left(-t_2t_3 - t_2t_4 + t_3t_5 + t_4t_5\right)\\
&\quad + l_P\left(-t_2t_3t_4 + t_3t_4t_5 - t_2 + t_5\right);\\
y_3 &= \rho_P\left(-t_2t_3t_4t_5 + t_2t_5 + t_3t_4 - 1\right)\\
&\quad + l_P\left(t_2t_3t_5 - t_2t_4t_5 - t_3 + t_4\right);
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

۴- عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره اصلی ربات‌های موازی مورد نظر

پس از به‌دست آوردن پارامترهای استودی x_i و y_i بر حسب متغیرهای مفاصل غیر فعال t_1، t_2، t_3 و t_4، مرحله بعدی شامل جستجو برای پیدا کردن عبارت همگنی بر حسب x_iها و y_iها است که بیانگر سینماتیک مستقیم زنجیره اصلی ربات موازی باشد. در واقع برای یک تبدیل پارامتری شده در فضای هفت بعدی (معادلات ۳ که x_iها و y_iها را تشریح می‌کند)، ابتدا باید نقاط نظیر به نظیر آن در فضای هفت بعدی محاسبه شوند و سپس کوچکترین عبارتی که در بر گیرندهٔ تمامی این نقاط باشد، پیدا شود. این عبارت باید به ازای تمامی پارامترهای استودی صدق کند، نتیجتاً نباید به مقادیر این پارامترها وابسته باشد. برای به‌دست آوردن این عبارت که عبارت سینماتیک مستقیم نامیده می‌شود، از الگوریتم LIA[1] که در مرجع [۲۴] آورده شده است، استفاده می‌شود. در این الگوریتم، برای به‌دست آوردن عبارتی که بتواند در برگیرندهٔ تمامی نقاط در فضای هفت بعدی باشد، از چندجمله‌ای‌هایی به نام آنساتز[2] استفاده شده است که بر اساس درجه آن طبقه‌بندی می‌شوند (مثلاً آنساتز از درجه ۱، ۲، ۳، ۴ و ...). این چندجمله‌ای‌ها به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شوند:

$$g(c,x)=\sum_{|j|=n} c_j \chi^j \qquad (۸)$$

در رابطه فوق، χ^jها پارامترهای استودی و c_jها ضرایب پارامترهای استودی در این چندجمله‌ای‌ها می‌باشند. پس از جایگزین کردن x_iها و y_iها در رابطه (۸)، این رابطه به صورت رابطه (۹) حاصل می‌شود:

$$f(c,t)=\sum_{j\in J} \alpha_j(c) t^j \qquad (۹)$$

جایی که ضرایب تابع فوق، $\alpha_j(c)$، همگی خطی می‌باشند. چندجمله‌ای f باید به ازای تمامی مقادیر t_iها صفر گردد، در نتیجه تمامی ضرایب چندجمله‌ای f باید صفر شود. بنابراین پس از استخراج این ضرایب، یک سیستم از معادلات خطی به‌دست می‌آید که مجهولات این سیستم، ضرایب چندجمله‌ای آنساتز می‌باشند. به بیان ساده‌تر، مراحل این الگوریتم به این صورت است که پس از نوشتن چندجمله‌ای آنساتز از درجه ۱، ۲، ۳ یا ۴ و بر حسب x_iها و y_iها، مقادیر پارامترهای استودی از روابط (۳) و (۴) بر حسب t_iها در آن جایگزین می‌شوند. سپس این چندجمله‌ای را بر حسب درجه t_iها مرتب کرده و پس از استخراج ضرایب t_iها (که بر حسب C_iها می‌باشند)، برابر صفر قرار داده می‌شوند. با این کار یک سیستم معادلات خطی حاصل می‌شود که با حل آن، C_iها (ضرایب پارامترهای استودی) به‌دست می‌آیند. نهایتاً ضرایب به‌دست آمده، در چندجمله‌ای آنساتز اصلی قرار داده می‌شوند. نکته حائز اهمیت در حل سیستم معادلات خطی در این است که به علت بیشتر بودن تعداد معادلات از تعداد مجهولات، ضرایب C_iها به صورت پارامتری به‌دست خواهند آمد. تمامی مراحل فوق برای به‌دست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم زنجیرهٔ اصلی ربات‌های 4-$\underline{\text{P}}$RUR$_1$، 4-$\underline{\text{P}}$RUR$_2$ و 4-$\underline{\text{P}}$UU در فضای سینماتیک هفت بعدی به صورت زیر انجام شد:

<u>ربات موازی 4-PRUR$_1$:</u>

پس از به‌دست آوردن پارامترهای استودی زنجیرهٔ سینماتیکی اصلی ربات موازی 4-$\underline{\text{P}}$RUR$_1$ (رابطه ۴ در بخش ۳-۱)، ابتدا آنساتز از درجه ۱ (رابطه ۱۰) در نظر گرفته می‌شود:

$n=1$

$$g_1=c_0x_0+\cdots+c_3x_3+c_4y_0+\cdots+c_7y_4 \qquad (۱۰)$$

در این حالت ۱۶ معادله خطی و ۸ مجهول حاصل می‌شود. با حل این سیستم معادلات، تمامی مقادیر c_iها برابر صفر به‌دست می‌آیند و در نتیجه $g_1=0$. نتیجتاً عبارت آنساتز به‌دست آمده در این مرحله صفر می‌شود.

$n=2$

با در نظر گرفتن آنساتز از درجه ۲، ۸۱ معادله خطی و ۳۶ مجهول حاصل می‌شود. با حل این سیستم معادلات، تمامی عبارت‌های درجه دوم، به صورت ترکیب خطی از دو عبارت (۱۱) و (۱۲) حاصل می‌شوند.

$$q_1=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \qquad (۱۱)$$

$$q_2=x_2x_3-x_0x_1=C_1 \qquad (۱۲)$$

همچنین هر یک از این دو عبارت، به تنهایی صفر می‌باشند. بنابراین دو معادله قیدی در این مرحله ظاهر می‌شود. همان طور که مشاهده می‌شود، عبارت اول، همان معادله درجه دوم استودی است و عبارت دوم ، قید دورانی اعمال شده از طرف یک زنجیره مکانیزم می‌باشد که پیش از این از ماتریس تبدیل کلی زنجیره اصلی ($f_{34}=0$) نیز به‌دست آمده است. از آنجا که معادله درجه دوم استودی برای هر حرکت جسم صلب

1. Linear Implicitization Algorithm
2. Ansatz

صادق است، بنابراین نمایان شدن این عبارت برای آنساتز درجه دوم الزامی است.

$n=3$

در این حالت ۲۵۶ معادله خطی و ۱۲۰ مجهول ظاهر می‌شود. پس از حل این سیستم، ۱۶ چندجمله‌ای حاصل شده که بیشتر آنها در نگاه اول شباهت زیادی به هم دارند. اما استفاده از پایه‌های گروبنر نشان می‌دهد که این ۱۶ چندجمله‌ای، وابستگی خطی به همان ۲ چندجمله‌ای به‌دست آمده در مرحله $n=2$ دارند. بنابراین حل سیستم معادلات در این مرحله، اطلاعات جدیدی معرفی نمی‌کند.

$n=4$

در این حالت، ۶۲۵ معادله خطی و ۳۳۰ مجهول حاصل می‌شود. با حل این سیستم معادلات و استفاده مجدد از پایه‌های گروبنر، ملاحظه می‌شود که تمامی جواب‌های به‌دست آمده در این مرحله، بجز عبارت رابطه (۱۳)، به صورت خطی به دو عبارت به‌دست آمده از مرحله $n=2$ وابسته می‌باشند:

$$\begin{aligned}
q_3 &= 0.0625\left(\rho_P^4+\cdots+2\rho_P^2 l_2^2\right)\left(x_0^4+\cdots+2x_1^2x_2^2\right)\\
&+0.0625\left(\rho_P^4+\cdots-6\rho_P^2 l_2^2\right)\left(2x_0^2x_2^2+\cdots+4x_2^2x_3^2\right)\\
&+0.5\rho_P\left(\rho_P^2-l_1^2+l_2^2\right)\left(x_0^3y_3-2x_0^2x_3y_0+\cdots-x_3^3y_0\right)\\
&-0.5\rho_P\left(\rho_P^2-l_1^2+3l_2^2\right)\left(x_0^2x_2y_1+\cdots-x_1x_3^2y_2\right)\\
&+\rho_P\left(\rho_P^2-l_1^2-l_2^2\right)\left(x_0x_1^2y_3-x_2x_3^2y_1\right)\\
&+2\rho_P l_2^2\left(x_2^2x_3y_0-x_0x_2x_3y_2\right)\\
&+0.5\left(\rho_P^2-l_1^2-l_2^2\right)\left(x_0^2y_1^2+x_1^2y_0^2+x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2\right)\\
&-0.5\left(\rho_P^2-l_1^2+l_2^2\right)\left(x_0^2y_2^2+x_1^2y_3^2+x_2^2y_0^2+x_3^2y_1^2\right)\\
&+0.5\left(3\rho_P^2-l_1^2+l_2^2\right)\left(x_0^2y_3^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_3^2y_0^2\right)\\
&+\rho^2\left(3x_0^2y_0^2+\cdots-2x_1x_3y_0y_2\right)\\
&+l_1^2\left(-x_0^2y_0^2+x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\cdots+3x_1x_2y_1y_2\right)\\
&+l_2^2\left(x_0^2y_0^2-x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\cdots+2x_1x_3y_0y_2\right)\\
&+2\rho\left(3x_0y_0^2y_3+4x_0y_0y_1y_2+\cdots+x_3y_0y_3^2\right)\\
&+\left(y_0^4-2y_0^2y_1^2+2y_0^2y_2^2+2y_0^2y_3^2+\cdots+y_3^4\right)
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

در این مثال، چهار پارامتر t_i (متغیرهای مفاصل غیر فعال) وجود دارد و درجه چندجمله‌ای تولید شده به وسیله این معادلات نیز برابر ۴ می‌باشد. بنابراین فرایند در اینجا متوقف شده و از این سه عبارت (روابط ۱۱-۱۳) برای تشریح عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره اصلی و قیود آن استفاده می‌شود. تمامی مراحل فوق برای دو ربات موازی 4-PRUR$_2$ و 4-PUU نیز تکرار شده و نتایج زیر حاصل شده است:

ربات موازی 4-PRUR$_2$:

$$q_1=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \tag{۱۴}$$

$$q_2=x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_3^2=C_1 \tag{۱۵}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= 0.0625\left(l_1^2-l_2^2+\rho_P^2\right)^2\left(x_0^2x_1^2+x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2\right.\\
&\left.+x_2^4\right)+0.25\rho_P\left(l_1^2-l_2^2+\rho_P^2\right)\left(x_0^3y_3-\cdots+x_3^3y_0\right)\\
&-0.5\left(l_1^2+l_2^2\right)\left(x_1y_1+x_2y_2\right)^2\\
&+0.5\left(l_1^2-l_2^2+2\rho_P^2\right)\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\left(x_0y_3-y_0x_3\right)\\
&+0.5\rho_P^2\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)\\
&+\rho_P\left(x_0y_1^2y_3+x_0y_2^2y_3+\cdots-x_3y_0y_1^2-x_3y_0y_2^2\right)\\
&+\left(y_0^2y_1^2+y_0^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2\right)
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

لازم به ذکر است که q_1 ، q_2 و q_3، به ترتیب، معادله درجه دو استودی، عبارت قیدی و عبارت سینماتیک مستقیم اولین زنجیره از ربات موازی مذکور می‌باشند.

ربات موازی 4-PUU:

$$q_1=x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \tag{۱۷}$$

$$q_2=x_0y_0+x_3y_3=C_1 \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= 0.25(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)(\rho_P^2-l_P^2)+(x_0y_3\\
&+x_1y_2-x_2y_1-x_3y_0)\rho_P+(x_0^2y_3-x_0x_3y_0+x_1^2y_3\\
&+x_2^2y_3)(\rho_P^2-l_P^2)+4(x_0y_0^2+x_0y_3^2+x_1y_2y_3\\
&-x_2y_1y_3)\rho_P+(-x_0^2y_2y_3+x_0x_3y_0y_2-x_1^2y_2y_3\\
&+x_1x_2y_1y_3)\left(\rho_P^2-l_P^2\right)+(x_0^2y_2^2y_3-x_0x_3y_0y_2^2\\
&+x_1^2y_1^2y_3+x_1^2y_2^2y_3)(\rho_P^2-l_P^2)+4(y_2-1)(x_0y_0^2y_2\\
&+x_0y_2y_3^2+x_1y_1^2y_3+x_1y_2^2y_3)\rho_P+(1-y_2y_3+4y_3\\
&+4y_2^2y_3)(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

۵- محاسبه عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره‌های دوم الی چهارم با استفاده از تبدیلات چهارچوب‌ها

پس از به‌دست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره سینماتیکی اصلی ربات موازی و معادلات قیدی آن در فضای هفت بعدی، باید عبارت‌های سینماتیک مستقیم دیگر زنجیره‌های سینماتیکی نیز به‌دست آیند. برای این کار می‌توان با نوشتن پارامترهای دناویت-هارتنبرگ برای هر زنجیره، همانند آنچه که در قسمت قبل توضیح داده شد، پارامترهای استودی و عبارت سینماتیک مستقیم برای هر زنجیره به‌دست

آورده شوند، که مسیر طولانی و زمان‌بری می‌باشد. اما با انجام یک سری تغییرات منطقی بر روی پارامترهای استودی زنجیره سینماتیکی اصلی ربات موازی، می‌توان پارامترهای استودی دیگر زنجیره‌ها را به‌دست آورد. با توجه به شکل ۷، این کار با استفاده از رابطهٔ (۲۰) انجام‌پذیر می‌باشد.

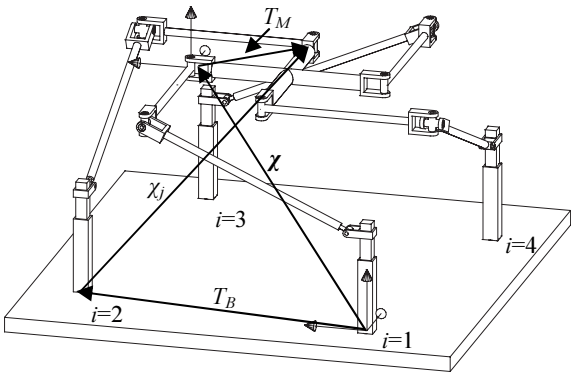
$$\chi_j = T_B^{-1}.\chi.T_M \qquad (۲۰)$$

که در رابطهٔ فوق، T_B ماتریس تبدیل بین دو مفصل ابتدایی (متصل به پایه ثابت)، T_M ماتریس تبدیل بین دو مفصل انتهایی (متصل به سکوی متحرک ربات)، χ ماتریس تبدیل بین مفصل ابتدایی و انتهایی از زنجیره سینماتیکی اصلی (اولین زنجیره سینماتیکی) و χ_j ماتریس تبدیل بین مفصل ابتدایی و انتهایی از زنجیره سینماتیکی شماره j ($j = 2\cdots 4$) در فضای هفت بعدی از رباتهای موازی می‌باشد. همچنین می‌توان نشان داد که رابطه (۲۰) همواره معکوس‌پذیر است. لازم به ذکر است که فرم اصلی ماتریس تبدیل در فضای هفت بعدی [۲۷] در رابطه (۲۱) نشان داده شده است:

$$T = \begin{bmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ y_1 & y_0 & y_3 & -y_2 & x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ y_2 & -y_3 & y_0 & y_1 & x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ y_3 & y_2 & -y_1 & y_0 & x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

به عنوان مثال، برای محاسبهٔ ماتریس T_B، ابتدا باید ماتریس تبدیل دو مفصل متصل به زنجیرهٔ ثابت با استفاده از پارامترهای دناویت-هارتنبرگ نوشته شود، سپس پارامترهای استودی این تبدیل محاسبه شود و نهایتاً با قرار دادن پارامترهای استودی به‌دست آمده در فرم اصلی ماتریس تبدیل در فضای هفت بعدی، ماتریس T_B حاصل می‌شود.

با انجام مراحل فوق برای ربات موازی 4-PRUR$_1$، پارامترهای دناویت-هارتنبرگ و پارامترهای استودی بین دو چهارچوب متصل به مفاصل ابتدایی، به صورت $\{a = a_B, \alpha = 0, d = 0, \theta = 0\}$ و $\{4,0,0,0,0,-2a_B,0,0\}$ و بین دو چهارچوب متصل به مفاصل انتهایی ربات مذکور، برابر $\{a = a_m, \alpha = 0, d = 0, \theta = 0\}$ و $\{4,0,0,0,0,-2a_m,0,0\}$ حاصل می‌شود. نتیجتاً، پارامترهای استودی دیگر زنجیره‌های سینماتیکی (χ_j) ربات فوق، به صورت رابطه (۲۲) به دست می‌آیند:



شکل ۷ ترتیب تبدیلات چهارچوب‌ها برای محاسبه پارامترهای استودی دیگر زنجیره‌های سینماتیکی ربات 4-PRUR$_1$

$$\chi_j = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ (-0.5a_b + 0.5a_m)x_1 + y_0 \\ (+0.5a_b - 0.5a_m)x_0 + y_1 \\ (+0.5a_b + 0.5a_m)x_3 + y_2 \\ (-0.5a_b - 0.5a_m)x_2 + y_3 \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

که در رابطهٔ فوق، a_b و a_m، به ترتیب فاصلهٔ بین محورهای مفاصل متصل به پایه ثابت و متصل به سکوی متحرک ربات می‌باشند. در ادامه، با قرار دادن پارامترهای استودی به‌دست آمده برای دیگر زنجیره‌های سینماتیکی در عبارت سینماتیک مستقیم (رابطه ۱۳) و عبارت قیدی زنجیره اول، عبارت سینماتیک مستقیم دیگر زنجیره‌های سینماتیکی و یک قید دیگر (رابطه ۲۳) حاصل می‌شود.

$$C_2 = x_0 y_0 + x_1 y_1 = 0 \qquad (۲۳)$$

لازم به ذکر است که از طریق تئوری پیچش می‌توان نشان داد که هر زنجیره سینماتیکی، به تنهایی یک درجه آزادی انتقالی از مکانیزم موازی را حذف می‌کند، نتیجتاً ۴ درجه حذف شده توسط ۴ زنجیره، در حقیقت وابسته خطی می‌باشند و تنها ۲ درجه آزادی از مجری نهایی را حذف می‌کنند. این امر

می‌بایست در معادلات به‌دست آمده از طریق LIA و جبر هندسی نیز نمایان شود. در حقیقت، رابطه ۱۲ به‌دست آمده، گواه بر حذف یک درجه آزادی انتقالی توسط یک زنجیرهٔ سینماتیکی است که به وسیلهٔ جبر هندسی معرفی شده است. جهت به‌دست آوردن قید سینماتیکی دوم، می‌بایست رابطه (۱۲) را بر اساس تبدیل ارائه شده در رابطه (۲۰) به سایر زنجیره‌های سینماتیکی تعمیم داد. در حقیقت، از آنجا که دو قید سینماتیک نیاز می‌باشد، تعمیم رابطه (۱۲) توسط رابطه (۲۰)، فقط باعث ایجاد یک عبارت قیدی دیگر خواهد شد.

همچنین، مقادیر پارامترهای دناویت- هاتنبرگ بین دو چهارچوب متصل به پایه ثابت $(D-H_B)$ و متحرک $(D-H_M)$ ربات 4-$\underline{\text{P}}\text{RUR}_2$، به ترتیب، به صورت روابط (۲۴) و (۲۵) به‌دست می‌آید:

$$D-H_B:\{a=a_b,\alpha=0,d=0,\theta=0\} \quad (۲۴)$$

$$D-H_M:\{a=0,\alpha=-0.5\pi,d=a_M,\theta=0\} \quad (۲۵)$$

نتیجتاً، پارامترهای استودی تبدیلات بین دو چهارچوب متصل به پایه ثابت $(P-S_B)$ و متحرک $(P-S_M)$ ربات فوق، به ترتیب، به صورت روابط (۲۶) و (۲۷) حاصل می‌شود:

$$S-P_B:\{4,0,0,0,0,-2a_b,0,0\} \quad (۲۶)$$

$$S-P_M:\{2,-2,0,0,0,0,-a_M,-a_M\} \quad (۲۷)$$

نهایتاً، پارامترهای استودی دیگر زنجیره‌ها و همچنین دیگر قید سینماتیکی به صورت تابعی از پارامترهای استودی زنجیره اول نتیجه می‌شود:

$$\chi_j=\begin{bmatrix} 0.5(x_0-x_1)\\ 0.5(x_0+x_1)\\ 0.5(x_2+x_3)\\ 0.5(x_3-x_2)\\ 0.25a_B(-x_0-x_1)+0.25a_M(-x_2-x_3)\\ +0.5(y_0-y_1)\\ 0.25a_B(+x_0-x_1)+0.25a_M(+x_2-x_3)\\ +0.5(y_0+y_1)\\ 0.25a_B(+x_0-x_1)+0.25a_M(-x_2+x_3)\\ +0.5(y_2+y_3)\\ 0.25a_B(+x_0+x_1)+0.25a_M(-x_2-x_3)\\ +0.5(-y_2+y_3) \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

$$C_2=x_0x_1+x_2x_3=0 \quad (۲۹)$$

همچنین اگر مراحل فوق برای ربات موازی 4-$\underline{\text{P}}\text{UU}$ انجام شود، مقادیر پارامترهای دناویت-هاتنبرگ، پارامترهای استودی تبدیلات پایه ثابت و متحرک و همچنین پارامترهای استودی دیگر زنجیره‌ها و قید سینماتیکی ثانویه به صورت روابط (۳۰) تا (۳۵) به‌دست خواهد آمد:

$$D-H_B:\{a=a_B,\alpha=0,d=0,\theta=0\} \quad (۳۰)$$

$$D-H_M:\{a=a_M,\alpha=0,d=0,\theta=0\} \quad (۳۱)$$

$$S-P_B:\{4,0,0,0,0,-2a_B,0,0\} \quad (۳۲)$$

$$S-P_M:\{4,0,0,0,0,-2a_M,0,0\} \quad (۳۳)$$

$$\chi_j=\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ (-0.5a_M-0.5a_B)x_1+y_0\\ (+0.5a_M+0.5a_B)x_0+y_1\\ (+0.5a_M+0.5a_B)x_3+y_2\\ (-0.5a_M-0.5a_B)x_2+y_3 \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

$$C_2=x_0y_0+x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3 \quad (۳۵)$$

پس از انجام این مرحله، ۴ معادله سینماتیک مستقیم برای ۴ زنجیره سینماتیکی از هر ربات موازی به‌دست می‌آید. در ادامه با تلفیق این ۴ معادله (F_j) با دو معادله قیدی $(C_1$ و $C_2)$ و معادلهٔ درجه دوم استودی (S) و عبارت Δ، یک سیستم ۸ معادله و ۸ مجهول (رابطه ۳۶) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} F_j=0: \quad j=1,2,3,4\\ C_1=0\\ C_2=0\\ S=0\\ \Delta=1 \end{cases} \quad (۳۶)$$

برای تحلیل مسأله سینماتیک مستقیم هر ربات، باید سیستم معادلات (۳۶) به ازای پارامترهای استودی χ حل شود. به دلیل پیچیده بودن سیستم معادلات به‌دست آمده، برای حل آن از نرم‌افزار برتینی[1] [۲۸] استفاده شد. نرم‌افزار برتینی، نرم‌افزاری مبتنی بر روش هوموتوپی می‌باشد که حل عددی سیستم معادلات و تعداد جواب‌ها را محاسبه می‌کند. برای استفاده از این نرم‌افزار، ابتدا باید سیستم معادلات را در آن وارد و سپس متغیرها را مشخص کرد تا این نرم‌افزار، تمامی جواب‌های حقیقی و موهومی سیستم معادلات را محاسبه کند.

1. Bertini

مثال‌های تصادفی متعددی با تغییر در مقادیر ورودی (ρ_i)، مقادیر طراحی (a_m, l_1, l_2) و مختصات نقاط A_i، برای سه ربات موازی فوق انجام شد و پس از به‌دست آوردن سیستم معادلات، با قرار دادن آنها در نرم‌افزار برتینی، تمامی جواب‌های حقیقی و موهومی مسأله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی به ازای مقادیر ورودی داده شده به‌دست آمد. نتایج این مثال‌ها نشان می‌دهد که مسأله سینماتیک مستقیم هر یک از ربات‌های 4-$\underline{P}RUR_1$ و 4-$\underline{P}RUR_2$ دارای ۲۳۶ جواب حقیقی و ربات موازی 4-$\underline{P}UU$ دارای حداکثر ۲ جواب حقیقی می‌باشد. در اینجا لازم به توضیح است که مجموع تعداد جواب‌های حقیقی و موهومی هر ربات موازی و به ازای هر مقدار ورودی، همواره ثابت است. این بدان معنی است که اگر تعداد جواب‌های حقیقی n_{real}، تعداد جواب‌های موهومی n_{complex} و مجموع جواب‌های حقیقی و موهومی N در نظر گرفته شود، آنگاه در هر شرایطی، همواره مقدار N ثابت و رابطه $N = n_{\text{real}} + n_{\text{complex}}$ در بین آنها برقرار می‌باشد، اما مقادیر n_{real} و n_{complex} می‌توانند بین صفر تا N تغییر داشته باشند. به عنوان مثال، تعداد حداکثر جواب‌های تحلیل مسأله سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-$\underline{P}RUR_1$ همواره برابر ۲۳۶ به‌دست می‌آید، حال اگر به ازای یک سری مقادیر ورودی خاص، تعداد جواب‌های حقیقی برابر ۹۸ باشد، آنگاه تعداد ۱۳۸ جواب موهومی نیز به‌دست می‌آید.

۶- اعتبارسنجی و مقایسه نتایج

برای بررسی صحت نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش استفاده شده در فضای سینماتیک هفت بعدی، نتایج به‌دست آمده با روش برآیند[1] [۳۰،۲۹،۲۰] در فضای اقلیدوسی سه بعدی که از روش‌های حذف جبری متعارف در تحلیل مسأله سینماتیک مستقیم می‌باشد، مقایسه شد. روش برآیند یک روش برای حذف یک یا چند متغیر از یک دستگاه معادلات می‌باشد، به طوری که معادله نهایی حاصله، اثر تمامی معادلات را در بر خواهد داشت.

به طور خلاصه، روش کار به این صورت است که با استفاده از مختصات مفاصل در فضای اقلیدسی سه بعدی، قیود سینماتیکی حاکم بر زنجیره‌های هر ربات موازی و استفاده از روش برآیند، یک عبارت سینماتیک مستقیم برای هر زنجیره از ربات موازی به‌دست آورده می‌شود. این ۴ عبارت (به ازای ۴ زنجیره سینماتیکی) متشکل از مختصات مجری نهایی (x، y، z و θ)، مقادیر ورودی (ρ_i)، مقادیر طراحی (a_m, l_1, l_2) و مختصات نقاط A_i می‌باشند. همچنین این عبارت‌ها باید فاقد مختصات مفاصل غیرفعالی باشند که موقعیت آنها مشخص نیستند. سپس با استفاده از عبارت سینماتیک مستقیم به‌دست آمده برای هر زنجیره و استفاده مجدد از روش برآیند، یک عبارت ریاضی تک‌متغیره به‌دست آورده که سینماتیک مستقیم ربات موازی را تشریح می‌کند. به این صورت که در مسأله سینماتیک مستقیم، مقادیر $\{\rho_i\}$ به عنوان ورودی به مسأله داده می‌شوند، همچنین مقادیر پارامترهای طراحی (a_b, a_m, l_1, l_2) و مختصات نقاط A_i نیز بر اساس هندسه ربات، مشخص شده و وارد مسأله می‌شوند. علاوه بر این، برای حذف عبارت‌های مثلثاتی از معادلات فوق و ساده‌تر شدن روابط، از تغییر متغیر $t = \tan(\theta/2)$ (تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ) استفاده می‌گردد. نتیجتاً، چهار عبارت سینماتیک مستقیم به‌دست آمده برای چهار زنجیرهٔ ربات موازی، تنها بر حسب مختصات مجری نهایی (x، y، z و t) می‌باشند. در ادامه، با استفاده مجدد از روش برآیند، پارامتر x از ۴ عبارت سینماتیک مستقیم به‌دست آمده حذف و سه عبارت بر حسب پارامترهای y، z و t ایجاد می‌شود. در ادامه پارامتر y از سه رابطهٔ جدید حذف شده و دو عبارت بر حسب z و t تولید می‌شود. نهایتاً با استفاده مجدد از روش برآیند، پارامتر z نیز از دو رابطه انتهایی حذف شده و عبارت تک متغیره نهایی ربات موازی، بر حسب متغیر t حاصل می‌شود. درجهٔ عبارت تک‌متغیره نهایی به‌دست آمده، بیانگر تعداد جواب‌های مسأله سینماتیک مستقیم ربات می‌باشد. این عبارت تک‌متغیره، شامل تمامی جوابهای مسأله سینماتیک مستقیم ربات موازی بر حسب t می‌باشد که با تحلیل رو به عقب معادلات می‌توان تمامی جواب‌ها را به‌دست آورد.

نمونه‌های تصادفی متعددی با استفاده از روش برآیند، بر روی رباتهای موازی فوق انجام شد که در تمامی موارد، حاصلضرب چند عبارت تک‌متغیره از درجات (۷۲، ۶۴، ۶۴، $۸^۲$، ۴ و $۲^۸$)، که درجه نهایی آنها برابر ۲۳۶ می‌باشد، همواره بیانگر مسألهٔ سینماتیک مستقیم دو ربات موازی 4-$\underline{P}RUR_1$ و 4-

1. Resultant Method

$\underline{P}RUR_2$ می‌باشد. همچنین یک عبارت تک‌متغیره از درجه ۲ نیز همواره مسأله سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-$\underline{P}UU$ را تشریح می‌کند. این نشان می‌دهد که نتایج حاصل با استفاده از روش ارائه شده در فضای سینماتیک هفت بعدی و روش برآیند کاملاً با هم هم‌خوانی داشته و صحت روش مذکور به اثبات می‌رسد. به عنوان مثال، به ازای مقادیر ورودی $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 3$ ، $\rho_4 = 2$، مقادیر طراحی $l_1 = 5$، $l_2 = 2$، $a_m = 2\sqrt{2}$ و مختصات نقاط $A_1(۰،۰،۰)$، $A_1(۰،۵،۱)$، $A_1(۶،۴،۰)$، $A_1(۵،۱،-۰)$، تمامی مراحل ذکر شده در بالا برای ربات موازی 4-$\underline{P}RUR_1$ انجام شد که در این حالت ۱۰ جواب حقیقی و ۲۲۶ جواب موهومی برای مسألهٔ سینماتیک مستقیم به‌دست آمد که تمامی جوابهای حقیقی آن در جدول ۴ نشان داده شده است. (لازم به ذکر است که به دلیل حجم زیاد جواب‌های موهومی محاسبه گردیده، آورده نشده است):

جدول ۴ جوابهای حقیقی مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-$\underline{P}RUR_1$

	x	y	z	$t(\theta)$
۱	۰/۷۸۷	۲/۳۴۲	۱/۹۷۴	۱/۱۶۵ (۹۸/۷۳°)
۲	۰/۶۶۷	۰/۷۵۹	-۱/۸۷۱	۱/۸۶۱ (۱۲۳/۵°)
۳	۱/۳۳۴	۱/۳۱۲	۱/۹۹۶	۱/۳۰۳ (۱۰۴/۹°)
۴	۱/۱۰۹	۱/۳۴۹	۶/۹۹۰	۱/۴۰۱ (۱۰۹/۰°)
۵	۱/۹۵۰	۳/۷۰۲	۵/۷۹۳	۰/۲۸۳ (۳۱/۶۷°)
۶	۰/۰۰۰	۲/۹۹۸	۱/۸۹۹	۰/۹۹۸ (۹۸/۹۴°)
۷	۰/۷۰۸	۰/۵۴۸	۱/۸۲۱	۱/۹۰۰ (۱۲۴/۴°)
۸	۱/۹۵۰	۳/۷۰۲	۰/۷۹۳	۰/۰۰۰ (۰/۰°)
۹	۱/۳۶۹	۱/۷۲۱	۱/۹۹۳	۱/۱۸۲ (۹۹/۵۵°)
۱۰	۱/۱۰۹	۱/۳۴۹	۱/۹۹۰	۱/۴۰۱ (۱۰۹/۰°)

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی مسألهٔ سینماتیک مستقیم سه ربات موازی ۴ درجه آزادی با زنجیره‌های یکسان، مفاصل فعال کشویی و الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و یک درجه دورانی، موسوم به شونفلیز، در فضای سینماتیک هفت بعدی پرداخته شد. برای تحلیل مناسب مسألهٔ سینماتیک مستقیم در این فضا، از پارامترهای استودی، الگوریتم LIA و روش هوموتوپی استفاده گردید. نتایج نشان می‌دهد که عبارت‌هایی از درجه ۴، مبین عبارت سینماتیک مستقیم هر زنجیرهٔ سینماتیکی از ربات‌های موازی 4-$\underline{P}RUR_1$، 4-$\underline{P}RUR_2$ و 4-$\underline{P}UU$ می‌باشد و دو قید از درجه ۲، هر یک از ربات‌ها را مقید به حرکت ۴ درجه آزادی می‌سازد. همچنین حل سیستم معادلات به‌دست آمده در فضای هفت بعدی با انجام آزمایش‌های متعدد و همچنین مقایسه نتایج با نتایج حاصل از روش برآیند، نشان می‌دهد که مسألهٔ سینماتیک مستقیم ربات‌های فوق، به ترتیب دارای حداکثر ۲۳۶، ۲۳۶ و ۲ جواب می‌باشند که بسته به پیکربندی هر ربات، تعدادی از این جواب‌ها حقیقی و مابقی موهومی به‌دست می‌آیند. همچنین به‌دست آوردن ۲۳۶ جواب برای مسأله سینماتیک مستقیم دو ربات موازی 4-$\underline{P}RUR_1$ و 4-$\underline{P}RUR_2$ نشان دهنده این است که حل سینماتیک مستقیم این ربات‌ها در قیاس با حل سینماتیک مستقیم ربات موازی استوارت، که دارای حداکثر ۴۰ جواب است، بسیار پیچیده‌تر می‌باشد.

۸- مراجع

[1] Study E., "Von den Bewegungen und Umlegungen", *Math. Ann.*, Vol. 39, 1891, pp. 441-566.
[2] Merlet, J. P., *Parallel Robots*, Springer, Dordrecht, France, 2006.
[3] Stewart D. "A Platform with 6 Degrees of Freedom", *Proc. Inst. Mech. Eng*, Vol. 180, 1965, pp. 371-386.
[4] Wang J., Liu X. J., "Analysis of a Novel Cylindrical 3-DoF Parallel Robot", *Robotics and Autonomous Systems,* Vol. 42, 2003, pp. 31-46.
[5] Brandt G., "CRIGOS: A Compact Robot for Image-Guided Orthopedic Surgery", *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, Vol. 3, 1999, pp. 252–260.
[6] Jensen K. A., Lusk C. P., Howell L. L. "An XYZ Micromanipulator with Three Translational Degrees of Freedom", *Robotica*; Vol. 24, No. 3, 2006, pp. 305-314.
[7] Siciliano B., Khatib O., *Springer Handbook of Robotics*, Springer, 2008; pp. 269-281.
[8] Angeles J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods and Algorithms*, Springer, New York, 1997.
[9] Tale-Masouleh M., Walter D. R., Husty, M. L., Gosselin C.M., "Forward Kinematics of 5-DOF Parallel Mechanisms (3R2T) with Identical Limb Structures Using the Linear Implicitization Algorithm", *13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, 19-25 June, 2011.
[10] Gosselin C. M., Merlet J. P., "The Direct

Kinematics of Planer Parallel Manipulators: Special Architectures and Number of Solution" *Mechanism and Machine Theory,* Vol. 29, No. 8, 1994, pp. 1083-1097.

[11] Merlet J.P. "Direct Kinematics of Planar Parallel Manipulators", *International Conference on Robotics and Automation, IEEE*, 1996, pp. 3744-3749.

[12] Husty M. L., "An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart–Gough Platforms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, 1996, pp. 365-379.

[13] Yee C. S., Lim K. B. "Forward Kinematics Solution of Stewart Platform Using Neural Networks", *Neurocomputing*; Vol. 16, 1997, pp. 333-349.

[14] Lee T. Y., Shim J. K., "Forward Kinematic of general 6-6 Stewart Platform Using Algebraic Elimination", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, 2001, pp. 1073-1085.

[15] Kong X., Gosselin C. M., "Generation of Parallel Manipulators with Three Translational Degrees of Freedom Using Screw Theory", *Proceedings of the CCToMM Symposium on Mechanisms, Machines and Mechatronics*, Montreal, Canada, 2001, pp. M3-01-012.

[16] Kong X., Gosselin C. M., "Type Synthesis of 4-DOF SP-Equivalent Parallel Manipulators: A Virtual-Chain Approach", *Mechanism and Machine* Theory, Vol. 41, No. 11, 2006, pp. 1306-1319.

[17] Joshi S. A., Tsai L. W., "Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators", *ASME J Mech Des*, No. 124, 2002, pp. 254-258.

[18] Gosselin C. M., Tale-Masouleh M., Duchaine V., Richard P., Foucault S., Kong X., "Parallel Mechanisms of the Multipteron Family: Kinematic Architectures and Benchmarking", *In Proceedings of ICRA*, Roma, Italy, 2007, pp. 555-560.

[19] Richard P. L., Gosselin C. M. and Kong X., "Kinematic Analysis and Prototyping of a Partially Decoupled 4-DOF 3T1R Parallel Manipulator", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 129, 2007, pp. 611-616.

[20] Varshovi-Jaghargh P., Naderi D., Tale-Masouleh M., "Forward Kinematic Problem of Two 4-RRUR with Different Geometric Structures and One 4-RUU Spatial Parallel Robots", The Modares Journal of Mechanics Engineering, Vol 12, No. 4, 2012, pp. 105-119.

[21] Brunnthaler K., Schröcker H. P., Husty M., "A New Method for the Synthesis of Bennet Mechanisms", *Proceedings of CK2005*, Cassino, May 4-6, 2005.

[22] Husty M. L., Pfurner M., Schröcker H. P., "A New and Efficient Algorithm for the Inverse Kinematics of a General Serial 6R Manipulator", *Mechanism and Machine Theory,* Vol. 42, 2007, pp. 66–81.

[23] Walter D. R., Husty M. L., and Pfurner M., "The SNU 3-UPU Parallel Robot from a Theoretical Viewpoint", *Proceedings of the Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Montpellier, France, September 21-22, 2008.

[24] Tale-Masouleh M., Gosselin C. M., Husty M. L., Walter D. R., "Forward Kinematic Problem of 5-RPUR Parallel Mechanisms (3T2R) with Identical Limb Structures", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, No. 7, 2011, pp. 945-959.

[25] Kong X., Gosselin C. M., *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*, Springer Tracts in Advanced Robotics, Vol. 33, 2007.

[26] Sommese A. J., Wampler C. W., "Numerical Solution of Systems of Polynomials Arising in Engineering and Science", *World Scientific*, Singapore, 2005.

[27] Husty M. L., Schröcker H. P., "*Algebraic Geometry and Kinematics*", in: Emiris, I. Z., Sottile F., Theobald T., (Eds.), Nonlinear Computational Geometry, 2007, pp. 85-106.

[28] Bates D. J., Hauenstein J. D., Sommese A. J., Wampler C. W., *Bertini: Software for Numerical Algebraic Geometry*, Available at http://www.nd.edu/-sommese/bertini.

[29] Naderi D., Tale-Masouleh M., Varshovi-Jaghargh P., "Forward Kinematic Analysis of 4-PRUR 4-DoF Parallel Mechanism with Identical Limbs Structures and 3T1R Motion Pattern", In Persian, *ISME*, Shiraz, Iran, 2012.

[30] Varshovi-Jaghargh P., Naderi D., Tale-Masouleh M., "Forward Kinematic Analysis of 4-DoF Parallel Robots with Identical Limbs Structures and 3T1R Motion Pattern Using Resultant Method", In Persian, *ICRoM*, Tehran, Iran, 2013.