http://mme.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دی ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۱۰ ص‌ص ۵۱-۶۱

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۱۲/۱۵
تاریخ پذیرش ۹۲/۲/۲۱
ارائه در سایت ۹۲/۷/۳۰

تحلیل پارامترهای مؤثر بر کمانش پوستهٔ تقویت شدهٔ کامپوزیتی با استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول

محمد امین قاسمی[۱]، مجتبی یزدانی[۲*]، سید محمد حسینی[۳]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
۳- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز
* تبریز، صندوق پستی ۵۱۳۳۵/۱۹۹۶، m.yazdani@sut.ac.ir

چکیده- پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شدهٔ مشبک کامپوزیتی، یکی از با اهمیت‌ترین سازه‌ها در صنایع هوافضا هستند. در این مقاله به محاسبه‌ی بار کمانش بحرانی این پوسته‌ها با شکل تقویت‌کننده‌های مشبک لوزی، تحت بار محوری و با استفاده از روش معادل‌سازی پرداخته شده است. همچنین تأثیر پارامترهایی چون، ضخامت پوسته، زاویهٔ الیاف پوسته و زاویهٔ قرارگیری تقویت‌کننده‌ها در بار کمانش این سازه‌ها ارائه شده است. برای تحلیل بار کمانش پوستهٔ معادل از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ اول بر اساس روش ریتز استفاده شده است. برای استفاده از تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبهٔ اول، اثر نیروهای برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها نیز لحاظ شده است. نتایج حاصل با حل اجزاء محدود با شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار مقایسه شده است.

کلیدواژگان: پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده مشبک، روش معادل‌سازی، سفتی معادل، روش ریتز.

Analysis of effective parameters on the buckling of grid stiffened composite shells based on first order shear deformation theory

M.A. Ghasemi[1], M. Yazdani[2*], S.M. Hoseini[3]

1-MSc. Student, Mech. Eng., Sahand Univ. of Tech., Tabriz, Iran
2- Assist. Prof., Mech. Eng., Sahand Univ. of Tech., Tabriz, Iran
3- MSc., Mech. Eng., Sahand Univ. of Tech., Tabriz, Iran
* P.O.B. 51335/1996 Tabriz, Iran. m.yazdani@sut.ac.ir

Abstract- Grid stiffened composite shells are one of the most important structures in aerospace industries. In this study critical buckling load of these structures with diamond shape stiffeners under axial loading based on smeared method is presented. The effect of shell thickness, angle of fibers in shell and the direction of stiffeners into the buckling load is determined. First-order shear deformation theory based upon the Ritz method is used to calculation of critical buckling load of these structures. In the use of FSDT theory, transverse shear forces in stiffeners have been considered. The results are compared with FEM solution with clamped boundary condition.

Keywords: Grid Stiffened Composite Shells, Smeared Method, Equivalent Stiffness, Ritz Method.

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده مشبک کامپوزیتی یکی از مهمترین سازه‌های مورد استفاده در صنایع هوافضا است. این سازه‌ها شامل یک پوستهٔ استوانه‌ای یا مخروطی است که

تقویت‌کننده‌هایی در سطح داخلی، خارجی یا هر دو طرف این پوسته قرار گرفته‌اند. بر طبق تحقیقات صورت گرفته این سازه‌ها دارای بار کمانشی بالا و جرم نسبتاً پایینی هستند.

مودهای کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده‌به سه گروه تقسیم‌بندی می‌شوند. کمانش کلی[1]، کمانش موضعی در پوسته‌ی خارجی[2] و کمانش در تقویت‌کننده‌ها[3] [۱]. با توجه به هندسهٔ پیچیده این سازها برای تحلیل کمانش آنها روش‌های تقریبی-حلیلی و عددی متفاوتی ارائه شده است که در این میان روش تقویت کننده‌های معادل برای محاسبهٔ بار کمانش صفحات تقویت شدهٔ مشبک کامپوزیتی در حالت کمانش کلی در سازه، نخستین بار در سال ۱۹۹۶ توسط جانکی ارئه شد. او در پژوهش خود، سفتی معادل را بر مبنای صفحه میانی تقویت کننده‌ها نوشت [۲]. در سال ۲۰۰۳ کیدانه روش تقویت کننده‌های معادل را برای پوستهٔ استوانه‌ای تقویت شده به کار برد [۱]. او در روش خود بر خلاف جانکی، معادلات را بر مبنای صفحهٔ میانی پوسته خارجی نوشت. جانکی در سال ۲۰۰۱ به محاسبهٔ یک طرح بهینه برای کمانش صفحات تقویت شده بر اساس الگوریتم ژنتیک پرداخت [۳]. در واقع هدف آنها به دست آوردن شکلی از تقویت کننده‌ها، در صفحه‌ای با ابعاد، بارها و شرایط مرزی معلوم بود که حداقل وزن را داشته باشد. یزدانی و رحیمی [۵،۴]، به بررسی تجربی مقاومت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده تحت بار محوری پرداختند. آنها در بررسی‌های خود به این نتیجه رسیدند که در این سازه‌ها، برای داشتن رفتار بهینه در مقابل کمانش به حداقل مقداری از چگالی شبکه نیاز است. همچنین به این نتیجه رسیدند که در بارگذاری محوری، اثر تقویت‌کننده‌های مارپیچ از تقویت‌کننده‌های محیطی بیشتر است.

در این پژهش سعی شده است که اثر تعدادی از پارامترهای هندسی سازه‌های مشبک کامپوزیتی بر روی بار کمانش آنها مورد بررسی قرار گیرد. در روش تقویت‌کننده‌های معادل ارائه شده توسط جانکی و کیدانه تئوری مورد استفاده تئوری کلاسیک صفحات است در حالی که در پژوهش حاضر با توجه به ماهیت غیر متقارن این سازه‌ها، تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول مد نظر قرار گرفته است.

1. Global Buckling
2. Skin Buckling
3. Stiffener Crippling

۲- فرمول‌بندی مسأله و محاسبهٔ سفتی معادل

روش معادل‌سازی برای محاسبهٔ بار بحرانی کمانش در مود کمانش کلی در سازه معتبر است. برای محاسبهٔ سفتی معادل تقویت کننده‌ها، ابتدا یک سلول واحد از تقویت کننده‌ها که در کل سازه تکرار شده، در نظر گرفته شد. از آنجا که شکل تقویت کننده‌ها در سازهٔ مورد بررسی به شکل لوزی است، لذا این سلول مطابق شکل ۱ خواهد بود.

برای محاسبهٔ مؤلفه‌های سفتی در این المان، عکس‌العمل‌های بین پوستهٔ خارجی و تقویت کننده‌ها در نظر گرفته شد. سپس سفتی معادل بر مبنای مؤلفه‌های کرنش وانحنای لایهٔ میانی محاسبه شد. برای این منظور، فرض‌های زیر در نظر گرفته شد.

۱- تقویت‌کننده‌ها بار محوری و بار برشی را تحمل می‌کنند.

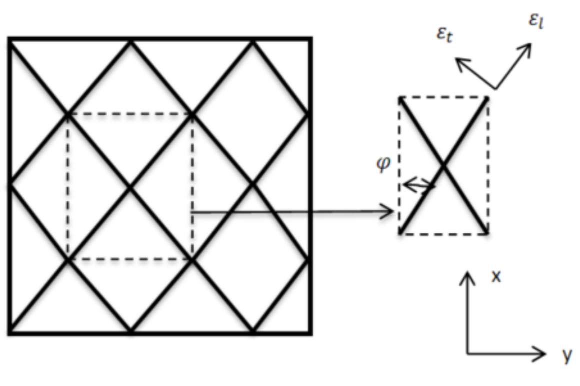
۲- کرنش به صورت یکنواخت بر مقطع اعمال می‌شود لذا تنش نیز در سطح مقطع یکنواخت است.

۳- مقطع تقویت‌کننده‌ها می‌تواند دچار پیچش شود.

۴- بار بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها به صورت نیروی برشی انتقال می‌یابد.

۲-۱- تحلیل نیرو در سلول واحد

مؤلفه‌های کرنش و انحنای لایهٔ میانی پوستهٔ خارجی $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ ، ε_{xy}^0 و $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ است. کرنش در سطح داخلی پوسته، محل تلاقی پوسته و تقویت کننده‌ها، مطابق رابطه (۱) می‌باشد [۶]. این کرنش‌ها برابر با کرنش‌های تقویت‌کننده‌ها است.



شکل ۱ آرایش تقویت کننده‌ها و سلول واحد مورد بررسی

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \left(\frac{t}{2}\right)\kappa_x$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \left(\frac{t}{2}\right)\kappa_y$$
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + \left(\frac{t}{2}\right)\kappa_{xy} \qquad (۱)$$

که در آن t ضخامت پوستهٔ خارجی است. برای محاسبهٔ کرنش‌ها در راستاهای طولی و عرضی تقویت کننده‌ها، رابطه (۱) در ماتریس انتقال ضرب شد. رابطه (۲) این کرنش‌ها را در راستای تقویت‌کننده‌ها بیان می‌کند [۱].

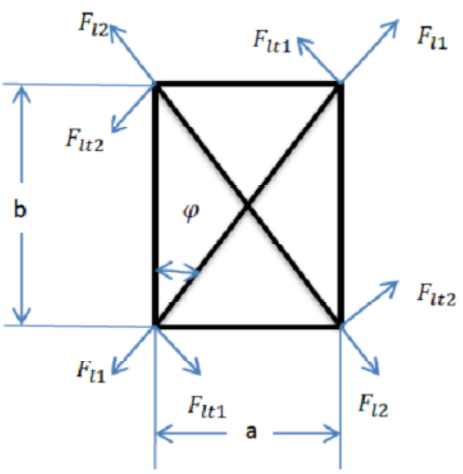
$$\begin{bmatrix}\varepsilon_l\\ \varepsilon_t\\ \varepsilon_{lt}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc\\ s^2 & c^2 & -sc\\ 2sc & -2sc & s^2-c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن $c=\cos(\varphi)$، $s=\sin(\varphi)$، ε_l کرنش در راستای طولی تقویت‌کننده‌ها، ε_t کرنش در راستای عرضی تقویت‌کننده‌ها و ε_{lt} کرنش برشی در مقطع تقویت‌کننده‌ها است.

شکل ۲ نمودار آزاد نیروهای وارد بر المان مورد نظر را نشان می‌دهد. در این شکل، F_l مؤلفه‌ی نیروی طولی و F_{lt} نیروی برشی وارد برمقطع تقویت‌کننده‌ها است.

با قرار دادن زاویهٔ مناسب برای هر یک از راستاهای تقویت کننده‌ها، نیروهای نشان داده شده در شکل ۲ مطابق رابطهٔ (۳) محاسبه می‌شود.

$$F_{l1} = E_1 A\varepsilon_{l1} = E_1 A(\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2 - \varepsilon_{xy} sc)$$
$$F_{l2} = E_1 A\varepsilon_{l2} = E_1 A(\varepsilon_x s^2 + \varepsilon_y c^2 + \varepsilon_{xy} sc)$$
$$F_{lt1} = GA\varepsilon_{lt1} = GA(-2\varepsilon_x sc + 2\varepsilon_y sc + \varepsilon_{xy}(s^2-c^2))$$
$$F_{lt2} = GA\varepsilon_{lt2} = GA\left(2\varepsilon_x sc - 2\varepsilon_y sc + \varepsilon_{xy}(s^2-c^2)\right) \qquad (۳)$$



شکل ۲ نمودار آزاد نیروهای وارد بر سلول واحد

که در این رابطه E_1 مدول الاستیسیته تقویت‌کننده‌ها در جهت طولی خود و G مدول برشی تقویت‌کننده‌ها در صفحهٔ lt است.
برآیند نیروها در راستاهای x , y، مطابق معادلات (۴)، (۵) و (۶) می‌باشد.

$$F_x = (F_{l1}+F_{l2})c + (F_{lt1}-F_{lt2})s \qquad (۴)$$
$$F_y = (F_{l1}+F_{l2})s + (F_{lt2}-F_{lt1})c \qquad (۵)$$
$$F_{xy} = (F_{l2}-F_{l1})s + (F_{lt1}-F_{lt2})c \qquad (۶)$$

که در این روابط F_x، F_y نیروهای عمود بر صفحات x , y و F_{xy} برآیند نیروهای برشی در صفحه x و راستای y هستند.
نیروهای معادل N_x , N_y, N_{xy} از تقسیم کردن (۴)، (۵) و (۶) بر طول لبه‌های متناظر خود در المان واحد به دست آمد.
با قرار دادن (۱) و (۳) در (۴)، (۵) و (۶) و تقسیم آنها بر طول لبه‌های متناظر، معادلات (۷)، (۸) و (۹) بر مبنای کرنش و انحنای صفحهٔ میانی پوستهٔ خارجی به صورت روابط (۷) تا (۹) می‌باشد.

$$\begin{aligned}N_x = A/a\{&(2E_1c^3-4Gcs^2)\varepsilon_x^0\\ &+(2E_1+4G)cs^2\varepsilon_y^0\\ &+(E_1c^3-2Gcs^2)t\kappa_x\\ &+(E_1+2G)cs^2 t\kappa_y\}\end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\begin{aligned}N_y = A/b\{&(2E_1sc^2+4Gsc^2)\varepsilon_x^0\\ &+(2E_1s^3-4Gsc^2)\varepsilon_y^0\\ &+(E_1sc^2+2Gsc^2)t\kappa_x\\ &+(E_1s^3-2Gsc^2)t\kappa_y\}\end{aligned} \qquad (۸)$$

$$\begin{aligned}N_{xy} = \frac{A}{a}\{&\left(2E_1cs^2-2Gc^3+2Gcs^2\right)\varepsilon_{xy}^0\\ &+\left(E_1cs^2-Gc^3+Gcs^2\right)\}t\kappa_{xy}\end{aligned} \qquad (۹)$$

۲-۲- تحلیل گشتاورها در سلول واحد

به واسطهٔ نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها، گشتاورهای پیچشی و خمشی بر پوسته و تقویت‌کننده‌ها وارد می‌شود. شکل‌های ۳ و ۴ نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها و گشتاورهای حاصل از آنها را نشان می‌دهد.شکل ۳ گشتاور خمشی وارد بر تقویت‌کننده‌ها و شکل ۴ گشتاور پیچشی وارد بر آنها را نشان می‌دهد. تنها M_{sh} و M_{t-sh} برای محاسبهٔ سفتی در معادلات وارد می‌شوند زیرا این گشتاورها اثر تقویت‌کننده روی پوستهٔ خارجی می‌باشند.

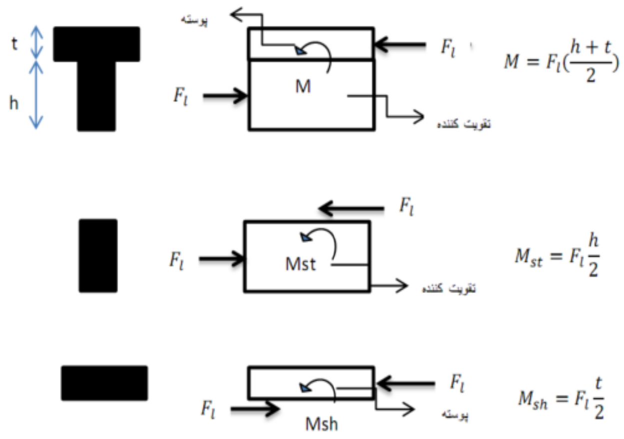
شکل ۵ نمودار آزاد گشتاورهای وارد بر المان در نظر گرفته

شده را نشان می‌دهد. معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) برآیند این گشتاورها را در راستاهای x, y و گشتاور پیچشی را بیان می‌کند.

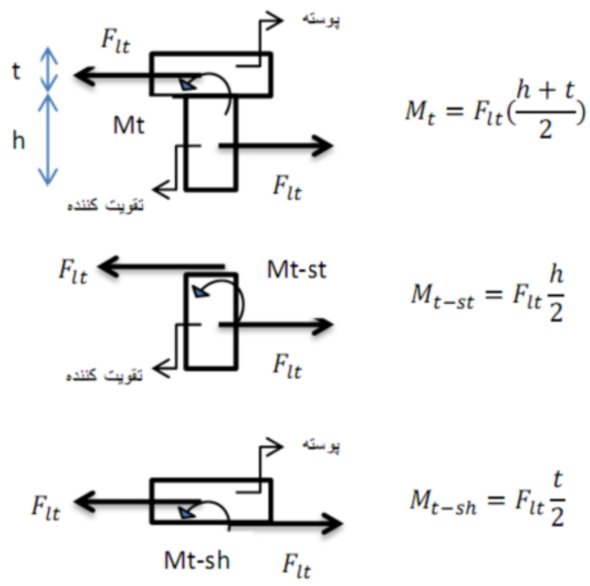
$$M_x = \left(M_{sh1} + M_{sh2}\right)s + \left(M_{t-sh1} - M_{t-sh2}\right)c \qquad (۱۰)$$

$$M_y = \left(M_{sh2} + M_{sh1}\right)c + \left(M_{t-sh2} - M_{t-sh1}\right)c \qquad (۱۱)$$

$$M_{xy} = \left(M_{sh2} - M_{sh1}\right)s + \left(M_{t-sh1} + M_{t-sh2}\right)c \qquad (۱۲)$$



شکل ۳ گشتاورهای خمشی وارد بر تقویت‌کننده‌ها



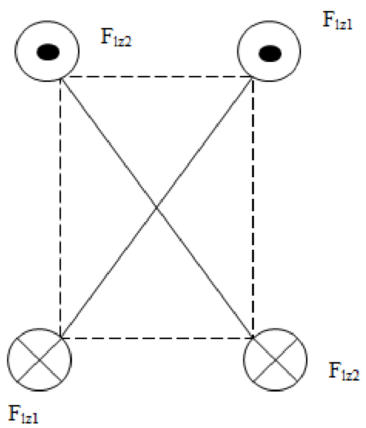
شکل ۴ گشتاور پیچشی وارد بر مقطع تقویت‌کننده‌ها

با جایگذاری گشتاورها در (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) و تقسیم کردن آنها بر طول ضلع مربوط به خود در المان واحد، معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) این گشتاورها را بر حسب کرنش و انحنای صفحهٔ میانی پوسته خارجی بیان می‌کند.

$$\begin{aligned} M_x = \frac{A}{a}\{ & \left(E_1 - 2G\right)sc^2 t\varepsilon_x^0 \\ & + \left(E_1 s^3 + 2Gsc^2\right)t\varepsilon_y^0 \\ & + \frac{1}{2}\left(E_1 - G\right)sc^2 t^2 \kappa_x \\ & + \left(E_1 s^3 + Gsc^2\right)t^2 \kappa_y \} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} M_y = \frac{A}{b}\{ & \left(E_1 + 2G\right)sc^2 t\varepsilon_x^0 \\ & + \left(E_1 s^3 - 2Gsc^2\right)t\varepsilon_y^0 \\ & + \frac{1}{2}\left(E_1 + 2G\right)sc^2 t^2 \kappa_x \\ & + \frac{1}{2}(E_1 s^3 - 2Gsc^2)t^2 \kappa_y \} \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} = A/a\{ & (E_1 cs^2 - 2Gc^3 + 2Gcs^2)t\varepsilon_{xy}^0 \\ & + 1/2(E_1 cs^2 + Gc^3 - Gcs^2)t^2 \kappa_{xy} \} \end{aligned} \qquad (۱۵)$$



شکل ۵ نیروهای برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها

۲-۳- ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها

معادلات (۷ تا ۹) و (۱۳ تا ۱۵) توزیع نیروها و گشتاورها را روی تقویت‌کننده‌ها بیان می‌کند. معادلات (۱۶ تا ۱۸) ماتریس‌های A^{st} و B^{st} و D^{st} را که مؤلفه‌های سفتی معادل برای تقویت‌کننده‌ها هستند، نشان می‌دهد.

$$A^{st}=\begin{bmatrix} \frac{2E_1c^3-4Gcs^2}{a}A & \frac{2E_1cs^2+4Gcs^2}{a}A & 0 \\ \frac{2E_1sc^2+4Gsc^2}{b}A & \frac{2E_1s^3-4Gsc^2}{b}A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_1cs^2-2G\left(c^2-s^2\right)c}{a}A \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

$$B^{st}=\begin{bmatrix} \frac{E_1c^3-2Gcs^2}{a}tA & \frac{E_1cs^2+2Gcs^2}{a}tA & 0 \\ \frac{E_1sc^2+2Gsc^2}{b}tA & \frac{E_1s^3-2Gsc^2}{b}tA & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1cs^2-G\left(c^2-s^2\right)c}{a}tA \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

$$D^{st}=\begin{bmatrix} \frac{E_1sc^2-2Gsc^2}{2a}t^2A & \frac{E_1s^3+2Gsc^2}{2a}t^2A & 0 \\ \frac{E_1sc^2+2Gsc^2}{2b}t^2A & \frac{E_1s^3-2Gsc^2}{2b}t^2A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1cs^2-G\left(c^2-s^2\right)c}{2a}t^2A \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

در ظاهر این سه ماتریس متقارن نیستند ولی با توجه به رابطهٔ هندسی بین $a, b, \sin(\varphi), \cos(\varphi)$، می‌توان به متقارن بودن آنها پی برد.

۲-۴- نیروی برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها

شکل ۵ نیروی برشی عرضی را در سلول واحد نشان می‌دهد. معادلهٔ (۱۹) کرنش عرضی تقویت‌کننده‌ها را به کرنش پوستهٔ خارجی ارتباط می‌دهد.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{lz} \\ \gamma_{tz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

که در این رابطه $\varepsilon_{lz},\varepsilon_{tz}$، کرنش برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها و $\varepsilon_{xz},\varepsilon_{yz}$، کرنش برشی عرضی در پوسته است. لذا نیروی برشی عرضی مطابق رابطه‌ی (۲۰) می‌باشد.

$$\begin{aligned} F_{lz}^1 &= GA\varepsilon_{lz}^1 = GA(\varepsilon_{xz}c-\varepsilon_{yz}s) \\ F_{lz}^2 &= GA\varepsilon_{lz}^2 = GA(\varepsilon_{xz}c+\varepsilon_{yz}s) \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

با استفاده از این رابطه، منتجه‌های نیروی برشی عرضی به صورت رابطه (۲۱) می‌باشد.

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{a}(F_{lz}^1+F_{lz}^2) \\ Q_y &= \frac{1}{b}(F_{lz}^2-F_{lz}^1) \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با استفاده از معادله‌ی (۲۰) و (۲۱)، ماتریس سفتی برشی عرضی معادل در تقویت‌کننده‌ها مطابق رابطه‌ی (۲۲) است.

$$\left[A_s^{st}\right]=\begin{bmatrix} \frac{2G_{lz}Ac}{b} & 0 \\ 0 & \frac{2G_{lz}As}{a} \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

لذا، رابطه (۲۳)، معادله ساختاری معادل برای تقویت‌کننده‌ها را نشان می‌دهد.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [A^{st}] & [B^{st}] & 0 \\ [B^{st}] & [D^{st}] & 0 \\ 0 & 0 & [A_s^{st}] \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left[A^{sh}\right] & \left[B^{sh}\right] & 0 \\ \left[B^{sh}\right] & \left[D^{sh}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[A_s^{sh}\right] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad (۲۴)$$

۳- معادلات پوستهٔ خارجی

تئوری تغییر شکل‌های مرتبهٔ اول برشی برای پوستهٔ خارجی مطابق رابطه (۲۴) است [۷]. در این روابط N منتجه‌های نیرو، M منتجه‌های گشتاور و Q منتجه‌های نیروی برشی عرضی هستند.

۴- سفتی معادل کل سازه

نیرو و ممان در کل سازه از رابطهٔ (۲۵) محاسبه شد. در این رابطه v^{sh} و v^{st} درصد حجمی پوسته و تقویت‌کننده‌ها در سازه می‌باشند [۸].

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{sh}N^{sh} + v^{st}N^{st} \\ v^{sh}M^{sh} + v^{st}M^{st} \\ v^{sh}Q^{sh} + v^{st}Q^{st} \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

با قرار دادن سفتی‌های به دست آمده مطابق روابط (۲۳و۲۴) در معادلهٔ (۲۵)، نیروهای صفحه‌ای، گشتاورها و نیروهای برشی برای تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول مطابق رابطه (۲۶) به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{sh}N^{sh} + v^{st}N^{st} \\ v^{sh}M^{sh} + v^{st}M^{st} \\ v^{sh}Q^{sh} + v^{st}Q^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{sh}\left[A^{sh}\right] + v^{st}\left[A^{st}\right] & v^{sh}\left[B^{sh}\right] + v^{st}\left[B^{st}\right] & 0 \\ v^{sh}\left[B^{sh}\right] + v^{st}\left[B^{st}\right] & v^{sh}\left[D^{sh}\right] + v^{st}\left[D^{st}\right] & 0 \\ 0 & 0 & v^{sh}\left[A_s^{sh}\right] + v^{st}\left[A_s^{st}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

این معادله، سفتی معادل کل سازه را بیان می‌کند.

۵- سفتی معادل سازه در تئوری کلاسیک لایه‌ها

سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها بر مبنای تئوری کلاسیک لایه‌ها مطابق روابط (۲۷ تا ۲۹) است [۱].

$$A^{st} = E_1 A \begin{bmatrix} \dfrac{2c^3}{a} & \dfrac{2s^2c}{a} & 0 \\ \dfrac{2sc^2}{b} & \dfrac{2s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

$$B^{st} = E_1 A t \begin{bmatrix} \dfrac{c^3}{a} & \dfrac{s^2c}{a} & 0 \\ \dfrac{sc^2}{b} & \dfrac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

$$D^{st} = E_1 A t^2 \begin{bmatrix} \dfrac{c^3}{2a} & \dfrac{s^2c}{2a} & 0 \\ \dfrac{sc^2}{2b} & \dfrac{s^3}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{sc^2}{2b} \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

لذا معادلهٔ ساختاری برای سازه بر مبنای تئوری کلاسیک لایه‌ها مطابق رابطه (۳۰) است [۸].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{sh}A^{sh} + v^{st}A^{st} & v^{sh}B^{sh} + v^{st}B^{st} \\ v^{sh}B^{sh} + v^{st}B^{st} & v^{sh}D^{sh} + v^{st}D^{st} \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

۶- محاسبهٔ بار بحرانی کمانش

برای حل مسأله مقدار ویژه کمانش این سازها، روش ریتز برای محاسبهٔبار بحرانی کمانش استفاده شد. در این روش، توابعی که شرایط مرزی هندسی مسأله را ارضا می‌کنند به عنوان جابجایی سیستم در تابع انرژی پتانسیل کل مورد استفاده قرار می‌گیرند. با این فرض، یک سیستم با درجات آزادی بی‌نهایت، به سیستمی با درجات آزادی محدود کاهش می‌یابد. انرژی پتانسیل کل برابر مجموع انرژی کرنش و کار ناشی از نیروهای خارجی می‌باشد [۹]. مؤلفه‌های خطی کرنش برای تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه‌ی اول مطابق روابط (۳۱ تا ۳۳) است [۱۰].

$$\varepsilon^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{w}{R} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

$$\kappa^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dfrac{1}{2R}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \quad (۳۲)$$

$$\gamma^{T}=\begin{bmatrix}\varphi_1+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \varphi_2+\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{v}{R}\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

که در این روابط u، جابجایی در راستای محوری، v جابجایی در راستای محیطی، w جابجایی در راستای شعاعی، φ_1 و φ_2 به ترتیب دوران صفحات x و y هستند و R شعاع استوانه می‌باشد. انرژی کرنش نیز مطابق رابطه (۳۴) است [۱۰].

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{L}\int_0^{2\pi R}(\varepsilon.[A].\varepsilon^{T}+\kappa.[D].\kappa^{T}$$
$$+2\varepsilon.[B].\kappa^{T}+\gamma.[A_s].\gamma^{T})dydx \tag{۳۴}$$

کار انجام شده توسط نیروی محوری نیز از رابطه (۳۵) محاسبه می‌شود [۱۱].

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^{L}N_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dydx \tag{۳۵}$$

از آنجا که شرایط مرزی مسأله تکیه‌گاه گیردار است، لذا میدان جابجایی مناسب که شرایط مرزی هندسی را ارضا کند مطابق معادلهٔ (۳۶) می‌باشد.

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\cos(\bar{m}x)\sin(\bar{n}y)$$
$$v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\sin(\bar{m}x)\cos(\bar{n}y)$$
$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}(1-\cos(\bar{m}x))\sin(\bar{n}y)$$
$$\varphi_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_{mn}\cos(\bar{m}x)\sin(\bar{n}y)$$
$$\varphi_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e_{mn}\sin(\bar{m}x)\cos(\bar{n}y) \tag{۳۶}$$

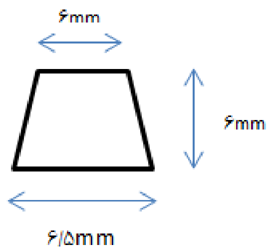
در این روابط $\bar{m}=\frac{m\pi}{L},\bar{n}=\frac{n}{R},y=R\theta$، می‌باشد که L طول استوانه است.

با قرار دادن این میدان‌ها در معادلات (۳۲) و (۳۳)، انرژی پتانسیل کل بر حسب مجهولات میدان جابجایی $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn}$، به دست می‌آید. برای این‌که تعادل پایدار باشد باید انرژی پتانسیل کل حداقل شود. این امر زمانی اتفاق می‌افتد که مشتق اول انرژی پتانسیل کل نسبت به ضرایب مجهول میدان جابجایی برابر صفر شود. این کار باعث ایجاد یک مسأله مقدار ویژه می‌شود. با حل این مسأله برای نیروی مجهول N_l، تعداد زیادی مقدار ویژه به دست می‌آید که کمترین مقدار این مقادیر برابر با بار بحرانی کمانش پوستهٔ استوانه‌ای مورد نظر است [۸].

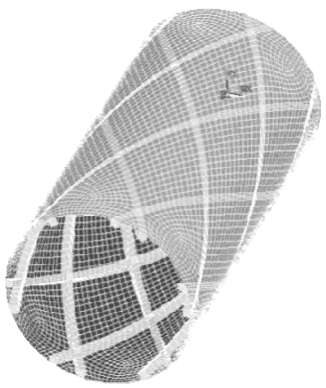
۷- تحلیل اجزاء محدود

شکل ۶ مدل اجزاء محدود این سازه را نشان می‌دهد. شکل‌های ۷ تا ۹ حالت‌های مختلف کمانش این سازه راتحت بار محوری فشاری نشان می‌دهد. شکل ۷ کمانش موضعی در پوسته، شکل ۸ کمانش کلی و شکل ۹ کمانش و شکست موضعی در تقویت‌کننده‌ها است. خواص مکانیکی مواد برای پوسته و ریب‌ها در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است.

مدل سه بعدی از استوانه تقویت‌شده مشبک کامپوزیتی با شبکه‌های لوزی در نرم‌افزار المان محدود انسیس[1] ایجاد شد. مرحلهٔ اول شبیه‌سازی ریب‌های تقویت کننده است که به منظور شبیه‌سازی دقیق، این ریب‌های تقویت کننده از استوانهٔ تو خالی با شعاع‌های داخلی و خارجی مورد نظر جدا شدند.



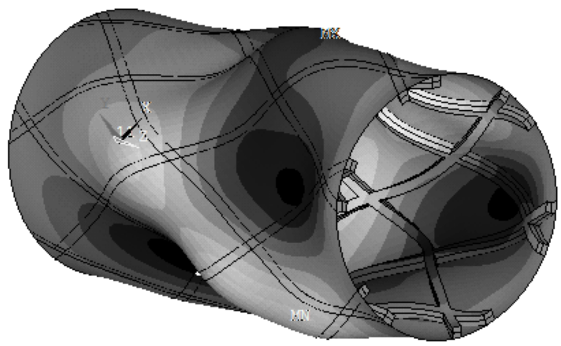
شکل ۶ شکل و ابعاد مقطع تقویت‌کننده‌ها



شکل ۷ مدل اجزاء محدود استوانه‌ی مشبک

1. Ansys

شکل ۸ کمانش موضعی در پوسته



شکل ۹ کمانش کلی در سازه

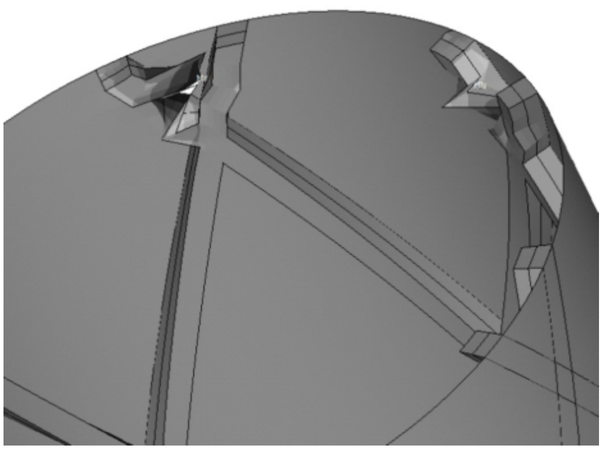
پس از تکمیل شبیه‌سازی ریب‌های استحکام دهنده، در مرحله بعد پوسته سازه ایجاد شد که این پوسته، قسمتی از استوانهٔ توخالی است و دقیقاً روی لبه خارجی ریب‌ها قرار گرفته است. برای مدل‌سازی پوسته از المان پوسته ۹۹[1] و برای تقویت‌کننده‌ها از المان سازه‌ای ۱۹۱[2] استفاده شد. شبکه‌بندی پوسته در ناحیهٔ منطبق بر سطح تقویت‌کننده‌ها دقیقاً منطبق (مشابه) بر شبکه‌بندی تقویت‌کننده است و در نواحی دیگر پوسته، مش‌بندی به گونه‌ای است که در لبه‌های منطبق بر لبه‌های تقویت‌کننده‌ها، تعداد تقسیمات با تعداد تقسیمات تقویت‌کننده برابر است، بنابراین گره‌های المان‌های پوسته دقیقاً روی گره‌های المان تقویت‌کننده قرار می‌گیرد و اتصال بین المان‌ها بدین ترتیب انجام شد. لایه‌چینی الیاف در پوسته به صورت $[-۷۲,۷۲]_{5s}$ و زاویه تقویت‌کنندها ۳۰∓ است.
شکل ۱۰ هندسهٔ سطح مقطع تقویت‌کننده و ابعاد آن نشان را نشان می‌دهد.

جدول ۱ خواص مکانیکی مواد برای پوسته

خاصیت	مقدار (واحد)
مدول الاستیسیته طولی (E_1)	۴۸۲۸۰(MPa)
مدول الاستیسیته عرضی (E_2)	۱۰۴۳۱/۵(MPa)
ضریب پواسون (ϑ_{12})	۰/۲۴۵
مدول برشی (G_{12})	۳۸۴۲(MPa)
مدول برشی عرضی (G_{13})	۳۸۴۲(MPa)
مدول برشی عرضی (G_{23})	۴۵۷۶/۱(MPa)
چگالی نسبی	۱/۹۱۵

جدول۲ خواص تقویت‌کننده‌ها

خاصیت	مقدار (واحد)
مدول طولی (E_1)	۲۷۵۹۰(MPa)
مدول برشی (G_{12})	۲۳۴۰(MPa)
مدول برشی عرضی (G_{lz})	۳۰۶۰(MPa)



شکل ۱۰ کمانش موضعی در تقویت‌کننده‌ها

۸- نتایج و بحث

۸-۱- اثر ضخامت پوسته

شکل ۱۱ منحنی بار کمانش بر حسب ضخامت پوسته و شکل ۱۲، بار کمانش ویژه (بار کمانش نسبت به جرم) را برای این سازه نشان می‌دهد. بار کمانش به دست آمده از دو تئوری

1. Shell 99
2. Solid 191

کلاسیک لایه‌ها و تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول با حل اجزاء محدود مقایسه شد. این نتایج برای سازهٔ دارای ۶ جفت ریب مارپیچ (۶ تقویت‌کننده‌ی ساعتگرد و ۶ تقویت‌کننده پادساعت‌گرد) است. طول استوانه در تمامی نتایج ۲۸۰mm و شعاع آن ۷۰mm است (L/D=۲). در این حالت عرض المان واحد (a) برابر ۷۳mm و طول آن ۱۲۷mm می‌باشد.

جدول ۳ مقادیر این نمودار را نشان می‌دهد. همان‌گونه که از شکل ۱۱ مشخص است، جواب‌های حاصل از حل تحلیلی ارائه شده، روش معادل‌سازی، در محدوده ضخامت‌های 1mm تا ۴mm، که در این محدوده کمانش کلی در سازه به وجود می‌آید، هم‌خوانی قابل قبولی نسبت به حل اجزاء محدود دارند، اما از این ضخامت به بعد که کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها در سازه به‌وجود می‌آید، این روش کارایی ندارد. همچنین با افزایش ضخامت، مقدار بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. اما آن چه که از اهمیت بیشتری برخوردار است مقدار بار کمانش ویژه است که از ضخامت ۴mm به بعد، که بیان‌گر کمانش موضعی در تقویت‌کننده‌هاست و پوستهٔ خارجی در آن آسیب نمی‌بیند، این کمیت در حل حاصل از اجزاء محدود مطابق شکل ۱۲ کاهش یافت یعنی اثر افزایش جرم ناشی از افزایش ضخامت پوسته بر اثر افزایش ضخامت غلبه می‌کند که این موضوع نیز مجدداً به دلیل عدم کاربرد این روش در محدودهٔ کمانش موضعی، در نمودارهای حاصل از این روش نمود پیدا نکرده است.

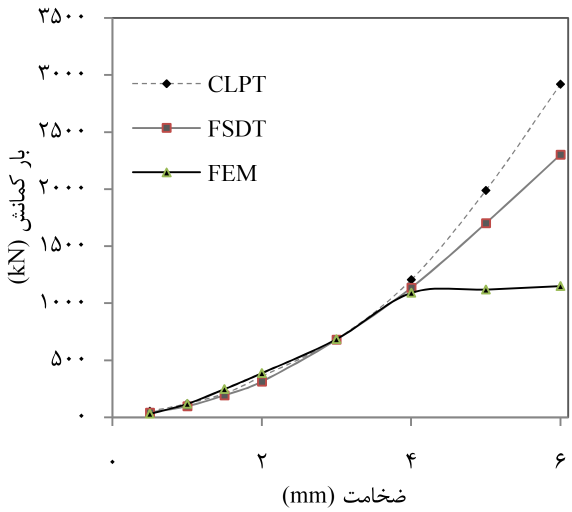
این مقادیر نشان می‌دهد که کمانش کلی تقریباً در ضخامت ۳/۵mm اتفاق می‌افتد.

جدول ۳ بار کمانش پوسته‌های تقویت‌شده در ضخامت‌های مختلف

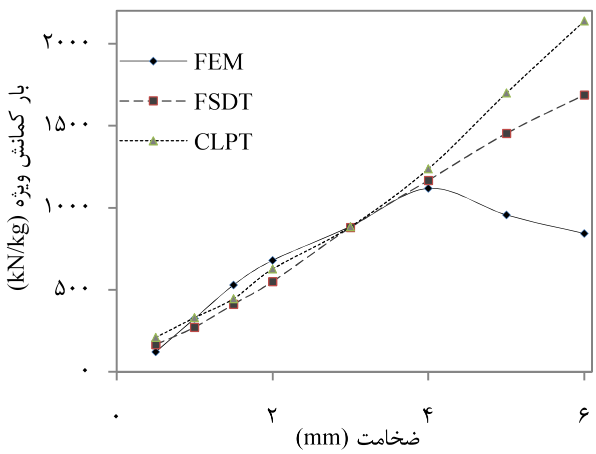
ضخامت (mm)	FEM (kN)	CLPT (kN)	FSDT (kN)
۰/۵	۳۱/۷۲۱	۵۴/۷	۴۳
۱	۱۱۸/۴۷۵	۱۲۰/۵	۹۹/۴
۱/۵	۲۴۸/۴۸۸	۲۰۹/۲	۱۹۳/۷
۲	۳۸۸/۷۵۹	۳۵۸/۵	۳۱۴/۹
۳	۶۸۵/۲	۶۸۵/۱	۶۸۱/۳
۴	۱۰۹۰	۱۲۰۵	۱۱۳۷
۵	۱۱۲۰	۱۹۸۹	۱۷۰۱

۸-۲- اثر تعداد تقویت‌کننده‌ها

شکل ۱۳ بار کمانش و شکل ۱۴ بار کمانش ویژهٔ پوستهٔ استوانه‌ای تقویت‌شده را در ضخامت‌های مختلف به ازای تغییر تعداد تقویت‌کننده‌ها نشان می‌دهد.

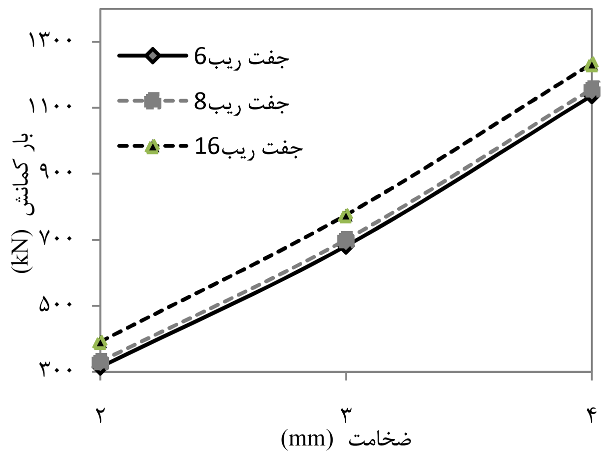


شکل ۱۱ بار کمانش بر حسب ضخامت پوستهٔ خارجی

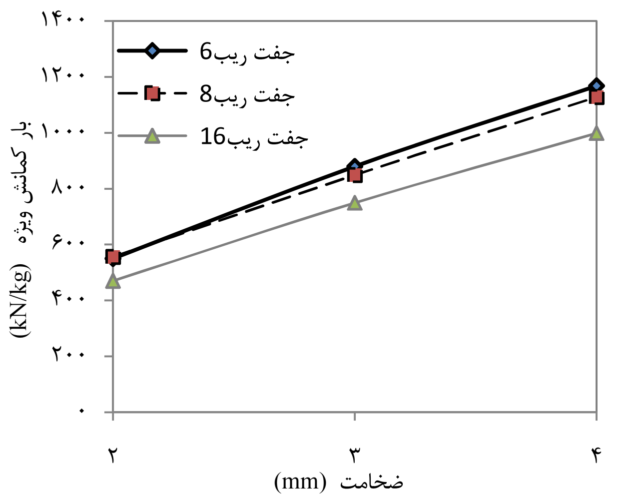


شکل ۱۲ بار کمانش ویژه بر حسب ضخامت پوستهٔ خارجی

تعداد تقویت‌کننده‌ها، ۶، ۸ و ۱۶ جفت انتخاب شد و همان‌طور که در شکل مشخص است، با افزایش تعداد آن‌ها، بار کمانش یافته، اما بار کمانش ویژه برای حالت ۱۶ جفت تقویت‌کننده کمتر از ۶ و ۸ جفت است. همچنین بار کمانش ویژه در ضخامت کم، در حالت ۸ جفت تقویت‌کننده نسبت به حالت ۶ جفت، بیشتر است ولی با افزایش ضخامت، حالت ۶ جفت تقویت‌کننده نسبت به ۸ جفت بار کمانش ویژه‌ی بیشتری دارد.



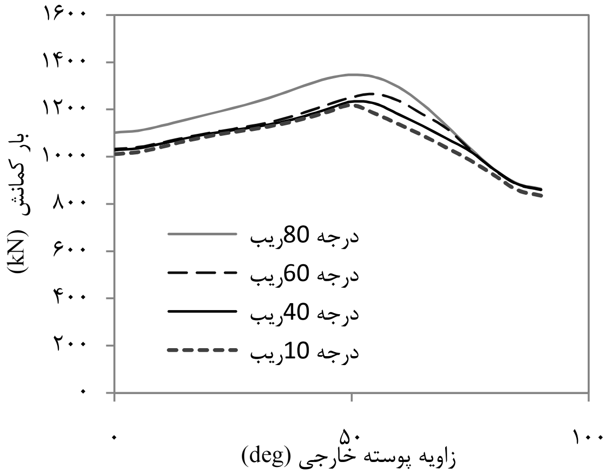
شکل ۱۳ بار کمانش بر حسب ضخامت در تعداد ریب‌های مختلف



شکل ۱۴ بار کمانش ویژه بر حسب ضخامت در تعداد تقویت‌کننده‌های مختلف

۸-۳- اثر زاویهٔ الیاف پوسته و زاویه‌ی تقویت‌کننده

شکل ۱۵ تأثیر زاویهٔ الیاف پوسته و زاویهٔ تقویت‌کننده‌ها را در بار کمانش پوستهٔ تقویت شده، با ۶ جفت تقویت‌کننده، به ازای ضخامت 4mm را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشخص است به ازای یک زاویهٔمشخص در تقویت‌کننده‌ها، با افزایش زاویه پوسته تا محدودهٔ ۴۰ تا ۵۰ درجه، بار کمانش نیز افزایش یافته و از آن به بعد بار کمانش کاهش می‌یابد. لذا بیشینه این نمودار در محدودهٔ ۵۰ درجه اتفاق افتاد که این به معنی بهینه بودن این محدوده برای زاویه الیاف است.



شکل ۱۵ تأثیر زاویه پوسته و تقویت‌کننده در بار کمانش

دلیل آن را نیز می‌توان این گونه در نظر گرفت که حالت ایده‌ال، حالتی است که زاویه الیاف به زاویهٔ جهت‌گیری تقویت‌کننده‌ها نزدیک شوند به طوری که سفتی در راستاهای طولی و محیطی استوانه کاهش پیدا نکند. در واقع تقویت‌کننده‌ها نیروی وارد بر خودشان را به دو راستای طولی و محیطی تقسیم می‌کنند. همان‌طور که در نمودار مشخص است، به ازای جهت‌گیری تقویت‌کننده‌ها در ۴۰ درجه، زاویهٔ الیاف بهینه نیز به این سمت کشیده شده است، زیرا می‌توان گفت که پوسته در این زاویه، سفتی مناسبی در راستاهای طولی و محیطی دارد. اگرچه جهت‌گیری ۸۰ درجه دارای بیشترین بار کمانشی است ولی به نظر می‌رسد بار کمانشی ویژه آن نسبت به حالت ۴۰ درجه کمتر باشد. با کاهش زاویهٔ تقویت‌کننده‌ها، بار کمانش کاهش یافته است. چون مقدار تقویت‌کننده‌های سازه در زاویهٔ ۸۰ درجه بسیار بیشتر از ۱۰ درجه است. بهتر است برای رسیدن به زاویه تقویت‌کننده مناسب بار کمانش ویژه را در نظر گرفت.

۹- نتیجه‌گیری

روابط تحلیلی برای پوستهٔ تقویت شده کامپوزیتی بر اساس روش معادل سازی و تئوری تغییر شکل مرتبهٔ اول برشی برای محاسبهٔ بار بحرانی کمانش ارائه و نتایج حاصل از آن با حل اجزاء محدود مقایسه شد. روابط ارائه شده فقط در محدوده‌ی کمانش کلی سازه معتبر است. با در نظر گرفتن چگالی تقویت‌کننده ثابت و افزایش ضخامت پوسته بار کمانش افزایش

یافت. بار کمانش ویژه نیز تا ضخامت ۴mm افزایش می‌یابد ولی بعد از آن این مقدار کاهش یافت، اما از آنجا که در این محدوده ضخامت، شکل کمانش سازه به کمانش موضعی در تقویت کننده‌ها تبدیل می‌شود، این کاهش در روش ارائه شده، نمود پیدا نمی‌کند. با افزایش چگالی تقویت‌کننده‌ها در سازه نیز بار کمانش افزایش می‌یابد. همچنین زاویهٔ الیاف برای داشتن بالاترین بار کمانش در حدود ۵۰ درجه می‌باشد.

۱۰- مراجع

[1] Kidane S., Li, G., Helms J., Pang S. S., and Woldesenbet E., "Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders", *Composites Part B: Engineering,* 2003. Vol. 34(1), pp. 1-9.
[2] Jaunky N., N.F. Knight Jr, and D.R. Ambur "Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels", *Composites Part B: Engineering,* 1996.Vol. 27(5), pp. 519-526.
[3] Ambur D.R. and N. Jaunky "Optimal design of grid-stiffened panels and shells with variable curvature", *Composite Structures,* 2001. Vol. 52(2), pp. 173-180.
[4] Yazdani M., Rahimi H.,Khatibi, A. A., and Hamzeh S., "An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading", *Scientific Research and Essays,* 2009. Vol. 4(9), pp. 914-920.
[5] Yazdani M. and Rahimi G.H., "The effects of helical ribs number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading", *Journal of Reinforced Plastics and Composites,* 2010. Vol. 29(17), pp. 2568-2575.
[6] Kaw A.K., *Mechanics of Composite Materials*, 2006, Taylor & Francis Group, LLC: New York. pp. 320-325.
[7] Reddy J.N, *Mechanics of laminated composite plates and shells*. 2004, CRC Press: United States of America. pp. 462-466.
[8] Wodesenbet E., Kidane S, and Pang S.S., "Optimization for buckling loads of grid stiffened composite panels", *Composite Structures,* 2003. Vol. 60(2), pp. 159-169.
[9] Chen W.F. and Lui E.M., *Energy and Numerical Methods*, in *Structural Stability*1987, Elsevier Seience Publishing Co. pp. 414-435.
[10] Amabili M., *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, 2008, Cambridge University Press: United States of America pp. 52-89.
[11] Langhaar H.L., *Energy Methods in Applied Mechanics*. 1989, John Wiley and Sons: United States of America. pp. 201-232.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \left(\frac{t}{2}\right)\kappa_x$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \left(\frac{t}{2}\right)\kappa_y$$
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + \left(\frac{t}{2}\right)\kappa_{xy} \qquad (۱)$$

که در آن t ضخامت پوستهٔ خارجی است. برای محاسبهٔ کرنش‌ها در راستاهای طولی و عرضی تقویت کننده‌ها، رابطه (۱) در ماتریس انتقال ضرب شد. رابطه (۲) این کرنش‌ها را در راستای تقویت‌کننده‌ها بیان می‌کند [۱].

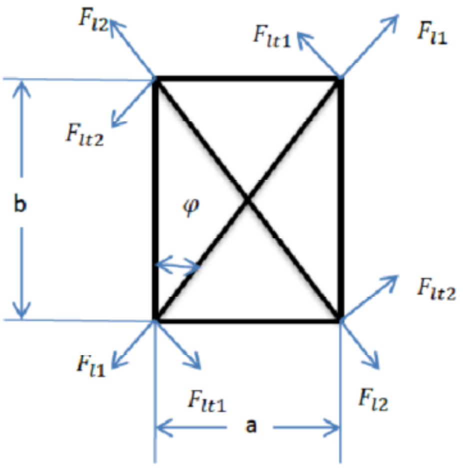
$$\begin{bmatrix}\varepsilon_l\\ \varepsilon_t\\ \varepsilon_{lt}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc\\ s^2 & c^2 & -sc\\ 2sc & -2sc & s^2-c^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن $c=\cos(\varphi)$، $s=\sin(\varphi)$، ε_l کرنش در راستای طولی تقویت‌کننده‌ها، ε_t کرنش در راستای عرضی تقویت‌کننده‌ها و ε_{lt} کرنش برشی در مقطع تقویت‌کننده‌ها است.

شکل ۲ نمودار آزاد نیروهای وارد بر المان مورد نظر را نشان می‌دهد. در این شکل، F_l مؤلفه‌ی نیروی طولی و F_{lt} نیروی برشی وارد برمقطع تقویت‌کننده‌ها است.

با قرار دادن زاویهٔ مناسب برای هر یک از راستاهای تقویت کننده‌ها، نیروهای نشان داده شده در شکل ۲ مطابق رابطهٔ (۳) محاسبه می‌شود.

$$F_{l1} = E_1 A\varepsilon_{l1} = E_1 A(\varepsilon_x c^2 + \varepsilon_y s^2 - \varepsilon_{xy} sc)$$
$$F_{l2} = E_1 A\varepsilon_{l2} = E_1 A(\varepsilon_x s^2 + \varepsilon_y c^2 + \varepsilon_{xy} sc)$$
$$F_{lt1} = GA\varepsilon_{lt1} = GA(-2\varepsilon_x sc + 2\varepsilon_y sc + \varepsilon_{xy}(s^2-c^2))$$
$$F_{lt2} = GA\varepsilon_{lt2} = GA\left(2\varepsilon_x sc - 2\varepsilon_y sc + \varepsilon_{xy}(s^2-c^2)\right) \qquad (۳)$$



شکل ۲ نمودار آزاد نیروهای وارد بر سلول واحد

که در این رابطه E_1 مدول الاستیسیته تقویت‌کننده‌ها در جهت طولی خود و G مدول برشی تقویت‌کننده‌ها در صفحهٔ lt است.

برآیند نیروها در راستاهای x , y، مطابق معادلات (۴)، (۵) و (۶) می‌باشد.

$$F_x = (F_{l1} + F_{l2})c + (F_{lt1} - F_{lt2})s \qquad (۴)$$
$$F_y = (F_{l1} + F_{l2})s + (F_{lt2} - F_{lt1})c \qquad (۵)$$
$$F_{xy} = (F_{l2} - F_{l1})s + (F_{lt1} - F_{lt2})c \qquad (۶)$$

که در این روابط F_x، F_y نیروهای عمود بر صفحات x , y و F_{xy} برآیند نیروهای برشی در صفحه x و راستای y هستند.

نیروهای معادل N_x , N_y, N_{xy} از تقسیم کردن (۴)، (۵) و (۶) بر طول لبه‌های متناظر خود در المان واحد به دست آمد. با قرار دادن (۱) و (۳) در (۴)، (۵) و (۶) و تقسیم آنها بر طول لبه‌های متناظر، معادلات (۷)، (۸) و (۹) بر مبنای کرنش و انحنای صفحهٔ میانی پوستهٔ خارجی به صورت روابط (۷) تا (۹) می‌باشد.

$$\begin{aligned}N_x = A/a\{&(2E_1c^3 - 4Gcs^2)\varepsilon_x^0\\ &+ (2E_1 + 4G)cs^2\varepsilon_y^0\\ &+ (E_1c^3 - 2Gcs^2)t\kappa_x\\ &+ (E_1 + 2G)cs^2 t\kappa_y\}\end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\begin{aligned}N_y = A/b\{&(2E_1sc^2 + 4Gsc^2)\varepsilon_x^0\\ &+ (2E_1s^3 - 4Gsc^2)\varepsilon_y^0\\ &+ (E_1sc^2 + 2Gsc^2)t\kappa_x\\ &+ (E_1s^3 - 2Gsc^2)t\kappa_y\}\end{aligned} \qquad (۸)$$

$$\begin{aligned}N_{xy} = \frac{A}{a}\{&\left(2E_1cs^2 - 2Gc^3 + 2Gcs^2\right)\varepsilon_{xy}^0\\ &+\left(E_1cs^2 - Gc^3 + Gcs^2\right)\}t\kappa_{xy}\end{aligned} \qquad (۹)$$

۲-۲- تحلیل گشتاورها در سلول واحد

به واسطهٔ نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها، گشتاورهای پیچشی و خمشی بر پوسته و تقویت‌کننده‌ها وارد می‌شود. شکل‌های ۳ و ۴ نیروهای برشی بین پوسته و تقویت‌کننده‌ها و گشتاورهای حاصل از آنها را نشان می‌دهد.شکل ۳ گشتاور خمشی وارد بر تقویت‌کننده‌ها و شکل ۴ گشتاور پیچشی وارد بر آنها را نشان می‌دهد. تنها M_{sh} و M_{t-sh} برای محاسبهٔ سفتی در معادلات وارد می‌شوند زیرا این گشتاورها اثر تقویت‌کننده روی پوستهٔ خارجی می‌باشند.

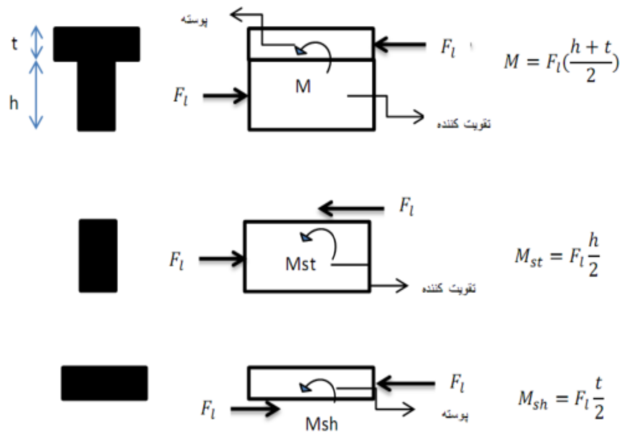
شکل ۵ نمودار آزاد گشتاورهای وارد بر المان در نظر گرفته

شده را نشان می‌دهد. معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) برآیند این گشتاورها را در راستاهای x, y و گشتاور پیچشی را بیان می‌کند.

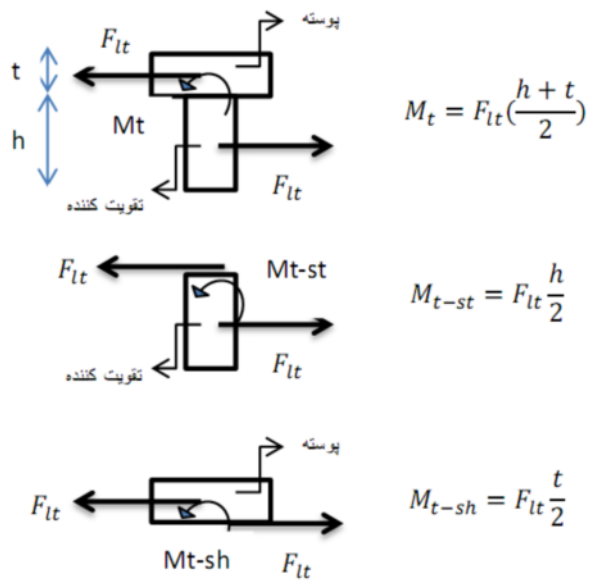
$$M_x = \left(M_{sh1} + M_{sh2}\right)s + \left(M_{t-sh1} - M_{t-sh2}\right)c \tag{۱۰}$$

$$M_y = \left(M_{sh2} + M_{sh1}\right)c + \left(M_{t-sh2} - M_{t-sh1}\right)c \tag{۱۱}$$

$$M_{xy} = \left(M_{sh2} - M_{sh1}\right)s + \left(M_{t-sh1} + M_{t-sh2}\right)c \tag{۱۲}$$



شکل ۳ گشتاورهای خمشی وارد بر تقویت‌کننده‌ها



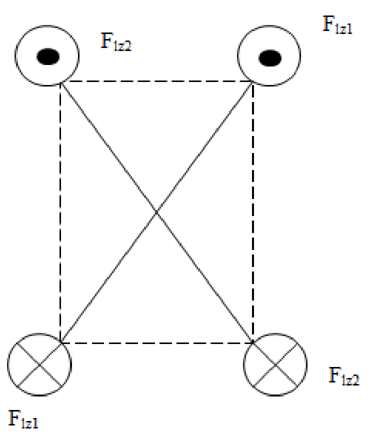
شکل ۴ گشتاور پیچشی وارد بر مقطع تقویت‌کننده‌ها

با جایگذاری گشتاورها در (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) و تقسیم کردن آنها بر طول ضلع مربوط به خود در المان واحد، معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) این گشتاورها را بر حسب کرنش و انحنای صفحهٔ میانی پوسته خارجی بیان می‌کند.

$$\begin{aligned} M_x = \frac{A}{a}\{&\left(E_1 - 2G\right)sc^2 t\varepsilon_x^0 \\ &+\left(E_1 s^3 + 2Gsc^2\right)t\varepsilon_y^0 \\ &+\frac{1}{2}\left(E_1 - G\right)sc^2 t^2 \kappa_x \\ &+\left(E_1 s^3 + Gsc^2\right)t^2 \kappa_y\} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned} M_y = \frac{A}{b}\{&\left(E_1 + 2G\right)sc^2 t\varepsilon_x^0 \\ &+\left(E_1 s^3 - 2Gsc^2\right)t\varepsilon_y^0 \\ &+\frac{1}{2}\left(E_1 + 2G\right)sc^2 t^2 \kappa_x \\ &+\frac{1}{2}(E_1 s^3 - 2Gsc^2)t^2 \kappa_y\} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} = A/a\{&(E_1 cs^2 - 2Gc^3 + 2Gcs^2)t\varepsilon_{xy}^0 \\ &+1/2(E_1 cs^2 + Gc^3 - Gcs^2)t^2 \kappa_{xy}\} \end{aligned} \tag{۱۵}$$



شکل ۵ نیروهای برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها

۳-۲- ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها

معادلات (۷ تا ۹) و (۱۳ تا ۱۵) توزیع نیروها و گشتاورها را روی تقویت‌کننده‌ها بیان می‌کند. معادلات (۱۶ تا ۱۸) ماتریس‌های A^{st} و B^{st} و D^{st} را که مؤلفه‌های سفتی معادل برای تقویت‌کننده‌ها هستند، نشان می‌دهد.

$$A^{st}=\begin{bmatrix} \frac{2E_1c^3-4Gcs^2}{a}A & \frac{2E_1cs^2+4Gcs^2}{a}A & 0 \\ \frac{2E_1sc^2+4Gsc^2}{b}A & \frac{2E_1s^3-4Gsc^2}{b}A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_1cs^2-2G\left(c^2-s^2\right)c}{a}A \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$B^{st}=\begin{bmatrix} \frac{E_1c^3-2Gcs^2}{a}tA & \frac{E_1cs^2+2Gcs^2}{a}tA & 0 \\ \frac{E_1sc^2+2Gsc^2}{b}tA & \frac{E_1s^3-2Gsc^2}{b}tA & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1cs^2-G\left(c^2-s^2\right)c}{a}tA \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

$$D^{st}=\begin{bmatrix} \frac{E_1sc^2-2Gsc^2}{2a}t^2A & \frac{E_1s^3+2Gsc^2}{2a}t^2A & 0 \\ \frac{E_1sc^2+2Gsc^2}{2b}t^2A & \frac{E_1s^3-2Gsc^2}{2b}t^2A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1cs^2-G\left(c^2-s^2\right)c}{2a}t^2A \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

در ظاهر این سه ماتریس متقارن نیستند ولی با توجه به رابطهٔ هندسی بین $a, b, \sin(\varphi), \cos(\varphi)$، می‌توان به متقارن بودن آنها پی برد.

۲-۴- نیروی برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها

شکل ۵ نیروی برشی عرضی را در سلول واحد نشان می‌دهد. معادلهٔ (۱۹) کرنش عرضی تقویت‌کننده‌ها را به کرنش پوستهٔ خارجی ارتباط می‌دهد.

$$\begin{bmatrix}\gamma_{lz}\\ \gamma_{tz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

که در این رابطه $\varepsilon_{lz}, \varepsilon_{tz}$، کرنش برشی عرضی در تقویت‌کننده‌ها و $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$، کرنش برشی عرضی در پوسته است. لذا نیروی برشی عرضی مطابق رابطه‌ی (۲۰) می‌باشد.

$$\begin{aligned} F_{lz}^1 &= GA\varepsilon_{lz}^1 = GA(\varepsilon_{xz}c-\varepsilon_{yz}s) \\ F_{lz}^2 &= GA\varepsilon_{lz}^2 = GA(\varepsilon_{xz}c+\varepsilon_{yz}s) \end{aligned} \quad (۲۰)$$

با استفاده از این رابطه، منتجه‌های نیروی برشی عرضی به صورت رابطه (۲۱) می‌باشد.

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{a}(F_{lz}^1+F_{lz}^2) \\ Q_y &= \frac{1}{b}(F_{lz}^2-F_{lz}^1) \end{aligned} \quad (۲۱)$$

با استفاده از معادله‌ی (۲۰) و (۲۱)، ماتریس سفتی برشی عرضی معادل در تقویت‌کننده‌ها مطابق رابطه‌ی (۲۲) است.

$$\left[A_s^{st}\right]=\begin{bmatrix}\frac{2G_{lz}Ac}{b} & 0 \\ 0 & \frac{2G_{lz}As}{a}\end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

لذا، رابطه (۲۳)، معادله ساختاری معادل برای تقویت‌کننده‌ها را نشان می‌دهد.

$$\begin{bmatrix}N\\M\\Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon^0\\ \kappa\\ \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[A^{st}] & [B^{st}] & 0\\ [B^{st}] & [D^{st}] & 0 \\ 0 & 0 & [A_s^{st}]\end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

$$\begin{bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\\M_x\\M_y\\M_{xy}\\Q_x\\Q_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[A^{sh}\right] & \left[B^{sh}\right] & 0\\ \left[B^{sh}\right] & \left[D^{sh}\right] & 0\\ 0 & 0 & \left[A_s^{sh}\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon^0\\ \kappa\\ \gamma\end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

۳- معادلات پوستهٔ خارجی

تئوری تغییر شکل‌های مرتبهٔ اول برشی برای پوستهٔ خارجی مطابق رابطه (۲۴) است [۷]. در این روابط N منتجه‌های نیرو، M منتجه‌های گشتاور و Q منتجه‌های نیروی برشی عرضی هستند.

۴- سفتی معادل کل سازه

نیرو و ممان در کل سازه از رابطهٔ (۲۵) محاسبه شد. در این رابطه $\mathrm{v^{sh}}$ و $\mathrm{v^{st}}$ درصد حجمی پوسته و تقویت‌کننده‌ها در سازه می‌باشند [۸].

$$\begin{bmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{v^{sh}N^{sh} + v^{st}N^{st}} \\ \mathrm{v^{sh}M^{sh} + v^{st}M^{st}} \\ \mathrm{v^{sh}Q^{sh} + v^{st}Q^{st}} \end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

با قرار دادن سفتی‌های به دست آمده مطابق روابط (۲۳و۲۴) در معادلهٔ (۲۵)، نیروهای صفحه‌ای، گشتاورها و نیروهای برشی برای تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول مطابق رابطه (۲۶) به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{N} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{v^{sh}N^{sh} + v^{st}N^{st}} \\ \mathrm{v^{sh}M^{sh} + v^{st}M^{st}} \\ \mathrm{v^{sh}Q^{sh} + v^{st}Q^{st}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{v^{sh}}\left[\mathrm{A^{sh}}\right]+\mathrm{v^{st}}\left[\mathrm{A^{st}}\right] & \mathrm{v^{sh}}\left[\mathrm{B^{sh}}\right]+\mathrm{v^{st}}\left[\mathrm{B^{st}}\right] & 0 \\ \mathrm{v^{sh}}\left[\mathrm{B^{sh}}\right]+\mathrm{v^{st}}\left[\mathrm{B^{st}}\right] & \mathrm{v^{sh}}\left[\mathrm{D^{sh}}\right]+\mathrm{v^{st}}\left[\mathrm{D^{st}}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{v^{sh}}\left[\mathrm{A_s^{sh}}\right]+\mathrm{v^{st}}\left[\mathrm{A_s^{st}}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

این معادله، سفتی معادل کل سازه را بیان می‌کند.

۵- سفتی معادل سازه در تئوری کلاسیک لایه‌ها

سفتی معادل تقویت‌کننده‌ها بر مبنای تئوری کلاسیک لایه‌ها مطابق روابط (۲۷ تا ۲۹) است [۱].

$$\mathrm{A^{st}} = E_1 A \begin{bmatrix} \frac{2c^3}{a} & \frac{2s^2c}{a} & 0 \\ \frac{2sc^2}{b} & \frac{2s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2sc^2}{b} \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

$$\mathrm{B^{st}} = E_1 A t \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{s^2c}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{s^3}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

$$\mathrm{D^{st}} = E_1 A t^2 \begin{bmatrix} \frac{c^3}{2a} & \frac{s^2c}{2a} & 0 \\ \frac{sc^2}{2b} & \frac{s^3}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{2b} \end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

لذا معادلهٔ ساختاری برای سازه بر مبنای تئوری کلاسیک لایه‌ها مطابق رابطه (۳۰) است [۸].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{sh}A^{sh} + v^{st}A^{st} & v^{sh}B^{sh} + v^{st}B^{st} \\ v^{sh}B^{sh} + v^{st}B^{st} & v^{sh}D^{sh} + v^{st}D^{st} \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

۶- محاسبهٔ بار بحرانی کمانش

برای حل مسأله مقدار ویژه کمانش این سازها، روش ریتز برای محاسبهٔبار بحرانی کمانش استفاده شد. در این روش، توابعی که شرایط مرزی هندسی مسأله را ارضا می‌کنند به عنوان جابجایی سیستم در تابع انرژی پتانسیل کل مورد استفاده قرار می‌گیرند. با این فرض، یک سیستم با درجات آزادی بی‌نهایت، به سیستمی با درجات آزادی محدود کاهش می‌یابد. انرژی پتانسیل کل برابر مجموع انرژی کرنش و کار ناشی از نیروهای خارجی می‌باشد [۹]. مؤلفه‌های خطی کرنش برای تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه‌ی اول مطابق روابط (۳۱ تا ۳۳) است [۱۰].

$$\varepsilon^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\mathrm{R}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

$$\kappa^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{1}{2\mathrm{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{bmatrix} \qquad (۳۲)$$

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} \varphi_1 + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \varphi_2 + \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{v}{R} \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

که در این روابط u، جابجایی در راستای محوری، v جابجایی در راستای محیطی، w جابجایی در راستای شعاعی، φ_1 و φ_2 به ترتیب دوران صفحات x و y هستند و R شعاع استوانه می‌باشد. انرژی کرنش نیز مطابق رابطه (۳۴) است [۱۰].

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi R} (\varepsilon.[A].\varepsilon^T + \kappa.[D].\kappa^T + 2\varepsilon.[B].\kappa^T + \gamma.[A_s].\gamma^T)dydx \tag{۳۴}$$

کار انجام شده توسط نیروی محوری نیز از رابطه (۳۵) محاسبه می‌شود [۱۱].

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R} \int_0^L N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dydx \tag{۳۵}$$

از آنجا که شرایط مرزی مسأله تکیه‌گاه گیردار است، لذا میدان جابجایی مناسب که شرایط مرزی هندسی را ارضا کند مطابق معادلهٔ (۳۶) می‌باشد.

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cos(\bar{m}x)\sin(\bar{n}y)$$
$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\sin(\bar{m}x)\cos(\bar{n}y)$$
$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}(1-\cos(\bar{m}x))\sin(\bar{n}y)$$
$$\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn}\cos(\bar{m}x)\sin(\bar{n}y)$$
$$\varphi_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e_{mn}\sin(\bar{m}x)\cos(\bar{n}y) \tag{۳۶}$$

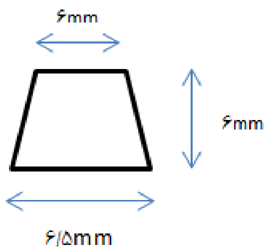
در این روابط $y = R\theta$، $\bar{m} = \frac{m\pi}{L}, \bar{n} = \frac{n}{R}$ می‌باشد که L طول استوانه است.

با قرار دادن این میدان‌ها در معادلات (۳۲) و (۳۳)، انرژی پتانسیل کل بر حسب مجهولات میدان جابجایی $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}, e_{mn}$، به دست می‌آید. برای این‌که تعادل پایدار باشد باید انرژی پتانسیل کل حداقل شود. این امر زمانی اتفاق می‌افتد که مشتق اول انرژی پتانسیل کل نسبت به ضرایب مجهول میدان جابجایی برابر صفر شود. این کار باعث ایجاد یک مسأله مقدار ویژه می‌شود. با حل این مسأله برای نیروی مجهول N_l، تعداد زیادی مقدار ویژه به دست می‌آید که کمترین مقدار این مقادیر برابر با بار بحرانی کمانش پوستهٔ استوانه‌ای مورد نظر است [۸].

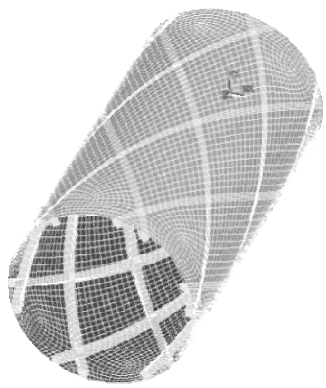
۷- تحلیل اجزاء محدود

شکل ۶ مدل اجزاء محدود این سازه را نشان می‌دهد. شکل‌های ۷ تا ۹ حالت‌های مختلف کمانش این سازه راتحت بار محوری فشاری نشان می‌دهد. شکل ۷ کمانش موضعی در پوسته، شکل ۸ کمانش کلی و شکل ۹ کمانش و شکست موضعی در تقویت‌کننده‌ها است. خواص مکانیکی مواد برای پوسته و ریب‌ها در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است.

مدل سه بعدی از استوانه تقویت‌شده مشبک کامپوزیتی با شبکه‌های لوزی در نرم‌افزار المان محدود انسیس[1] ایجاد شد. مرحلهٔ اول شبیه‌سازی ریب‌های تقویت کننده است که به منظور شبیه‌سازی دقیق، این ریب‌های تقویت کننده از استوانهٔ تو خالی با شعاع‌های داخلی و خارجی مورد نظر جدا شدند.



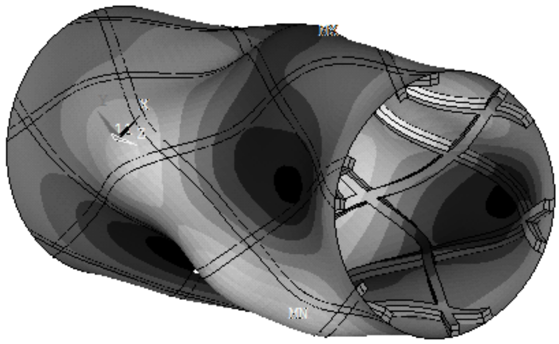
شکل ۶ شکل و ابعاد مقطع تقویت‌کننده‌ها



شکل ۷ مدل اجزاء محدود استوانه‌ی مشبک

1. Ansys

شکل ۸ کمانش موضعی در پوسته



شکل ۹ کمانش کلی در سازه

پس از تکمیل شبیه‌سازی ریب‌های استحکام دهنده، در مرحله بعد پوسته سازه ایجاد شد که این پوسته، قسمتی از استوانهٔ توخالی است و دقیقاً روی لبه خارجی ریب‌ها قرار گرفته است. برای مدل‌سازی پوسته از المان پوسته ۹۹[1] و برای تقویت‌کننده‌ها از المان سازه‌ای ۱۹۱[2] استفاده شد. شبکه‌بندی پوسته در ناحیهٔ منطبق بر سطح تقویت‌کننده‌ها دقیقاً منطبق (مشابه) بر شبکه‌بندی تقویت‌کننده است و در نواحی دیگر پوسته، مش‌بندی به گونه‌ای است که در لبه‌های منطبق بر لبه‌های تقویت‌کننده‌ها، تعداد تقسیمات با تعداد تقسیمات تقویت‌کننده برابر است، بنابراین گره‌های المان‌های پوسته دقیقاً روی گره‌های المان تقویت‌کننده قرار می‌گیرد و اتصال بین المان‌ها بدین ترتیب انجام شد. لایه‌چینی الیاف در پوسته به صورت $[-72,72]_{5s}$ و زاویه تقویت‌کنندها ۳۰∓ است.

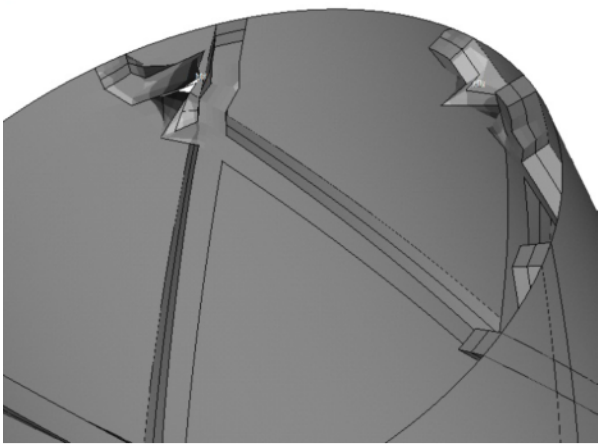
شکل ۱۰ هندسهٔ سطح مقطع تقویت‌کننده و ابعاد آن نشان را نشان می‌دهد.

جدول ۱ خواص مکانیکی مواد برای پوسته

خاصیت	مقدار (واحد)
مدول الاستیسیته طولی (E_1)	۴۸۲۸۰(MPa)
مدول الاستیسیته عرضی (E_2)	۱۰۴۳۱/۵(MPa)
ضریب پواسون (ϑ_{12})	۰/۲۴۵
مدول برشی (G_{12})	۳۸۴۲(MPa)
مدول برشی عرضی (G_{13})	۳۸۴۲(MPa)
مدول برشی عرضی (G_{23})	۴۵۷۶/۱(MPa)
چگالی نسبی	۱/۹۱۵

جدول۲ خواص تقویت‌کننده‌ها

خاصیت	مقدار (واحد)
مدول طولی (E_1)	۲۷۵۹۰(MPa)
مدول برشی (G_{12})	۲۳۴۰(MPa)
مدول برشی عرضی (G_{lz})	۳۰۶۰(MPa)



شکل ۱۰ کمانش موضعی در تقویت‌کننده‌ها

۸- نتایج و بحث

۸-۱- اثر ضخامت پوسته

شکل ۱۱ منحنی بار کمانش بر حسب ضخامت پوسته و شکل ۱۲، بار کمانش ویژه (بار کمانش نسبت به جرم) را برای این سازه نشان می‌دهد. بار کمانش به دست آمده از دو تئوری

1. Shell 99
2. Solid 191

کلاسیک لایه‌ها و تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول با حل اجزاء محدود مقایسه شد. این نتایج برای سازهٔ دارای ۶ جفت ریب مارپیچ (۶ تقویت‌کننده‌ی ساعتگرد و ۶ تقویت‌کننده پادساعت‌گرد) است. طول استوانه در تمامی نتایج ۲۸۰mm و شعاع آن ۷۰mm است (L/D=۲). در این حالت عرض المان واحد (a) برابر ۷۳mm و طول آن ۱۲۷mm می‌باشد.

جدول ۳ مقادیر این نمودار را نشان می‌دهد. همان‌گونه که از شکل ۱۱ مشخص است، جواب‌های حاصل از حل تحلیلی ارائه شده، روش معادل‌سازی، در محدوده ضخامت‌های 1mm تا 4mm، که در این محدوده کمانش کلی در سازه به وجود می‌آید، هم‌خوانی قابل قبولی نسبت به حل اجزاء محدود دارند، اما از این ضخامت به بعد که کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها در سازه به‌وجود می‌آید، این روش کارایی ندارد. همچنین با افزایش ضخامت، مقدار بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. اما آن چه که از اهمیت بیشتری برخوردار است مقدار بار کمانش ویژه است که از ضخامت 4mm به بعد، که بیان‌گر کمانش موضعی در تقویت‌کننده‌هاست و پوستهٔ خارجی در آن آسیب نمی‌بیند، این کمیت در حل حاصل از اجزاء محدود مطابق شکل ۱۲ کاهش یافت یعنی اثر افزایش جرم ناشی از افزایش ضخامت پوسته بر اثر افزایش ضخامت غلبه می‌کند که این موضوع نیز مجدداً به دلیل عدم کاربرد این روش در محدودهٔ کمانش موضعی، در نمودارهای حاصل از این روش نمود پیدا نکرده است.

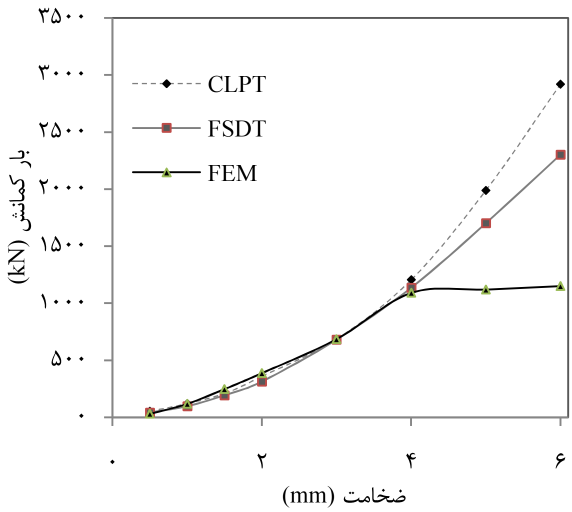
این مقادیر نشان می‌دهد که کمانش کلی تقریباً در ضخامت ۳/۵mm اتفاق می‌افتد.

جدول ۳ بار کمانش پوسته‌های تقویت‌شده در ضخامت‌های مختلف

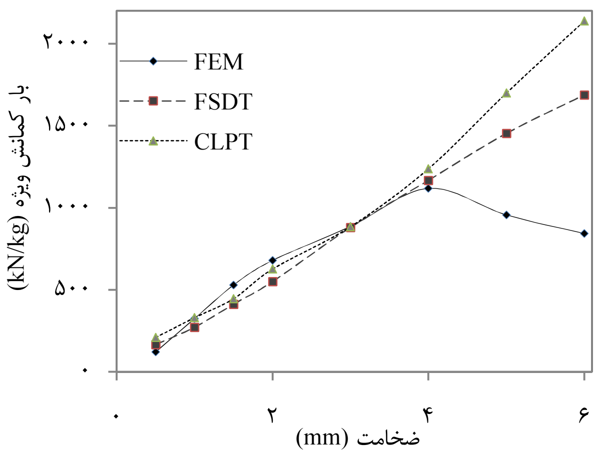
ضخامت (mm)	FEM (kN)	CLPT (kN)	FSDT (kN)
۰/۵	۳۱/۷۲۱	۵۴/۷	۴۳
۱	۱۱۸/۴۷۵	۱۲۰/۵	۹۹/۴
۱/۵	۲۴۸/۴۸۸	۲۰۹/۲	۱۹۳/۷
۲	۳۸۸/۷۵۹	۳۵۸/۵	۳۱۴/۹
۳	۶۸۵/۲	۶۸۵/۱	۶۸۱/۳
۴	۱۰۹۰	۱۲۰۵	۱۱۳۷
۵	۱۱۲۰	۱۹۸۹	۱۷۰۱

۸-۲- اثر تعداد تقویت‌کننده‌ها

شکل ۱۳ بار کمانش و شکل ۱۴ بار کمانش ویژهٔ پوستهٔ استوانه‌ای تقویت‌شده را در ضخامت‌های مختلف به ازای تغییر تعداد تقویت‌کننده‌ها نشان می‌دهد.

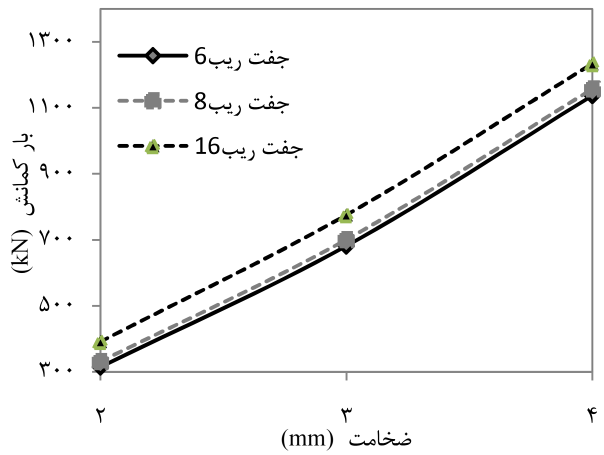


شکل ۱۱ بار کمانش بر حسب ضخامت پوستهٔ خارجی

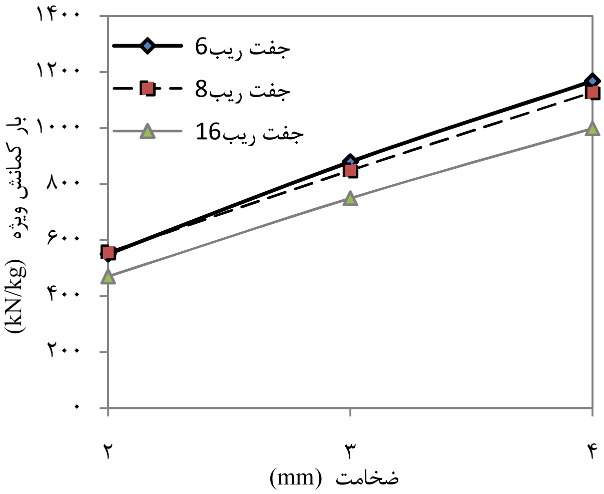


شکل ۱۲ بار کمانش ویژه بر حسب ضخامت پوستهٔ خارجی

تعداد تقویت‌کننده‌ها، ۶، ۸ و ۱۶ جفت انتخاب شد و همان‌طور که در شکل مشخص است، با افزایش تعداد آن‌ها، بار کمانش یافته، اما بار کمانش ویژه برای حالت ۱۶ جفت تقویت‌کننده کمتر از ۶ و ۸ جفت است. همچنین بار کمانش ویژه در ضخامت کم، در حالت ۸ جفت تقویت‌کننده نسبت به حالت ۶ جفت، بیشتر است ولی با افزایش ضخامت، حالت ۶ جفت تقویت‌کننده نسبت به ۸ جفت بار کمانش ویژه‌ی بیشتری دارد.



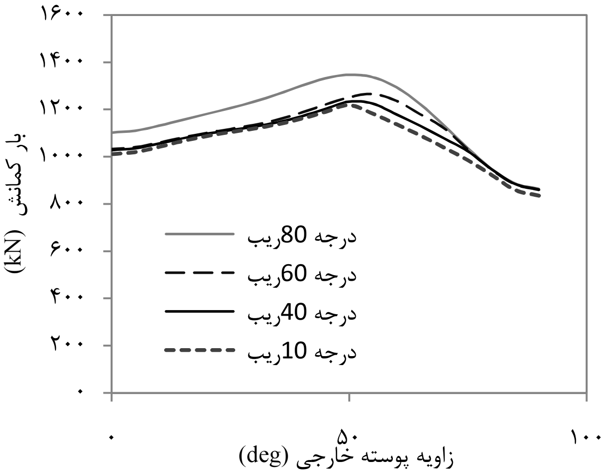
شکل ۱۳ بار کمانش بر حسب ضخامت در تعداد ریب‌های مختلف



شـــکل ۱۴ بـــار کمـــانش ویـــژه بـــر حســـب ضـــخامت در تعـــداد تقویت‌کننده‌های مختلف

۸-۳- اثر زاویهٔ الیاف پوسته و زاویه‌ی تقویت‌کننده

شکل ۱۵ تأثیر زاویهٔ الیاف پوسته و زاویهٔ تقویت‌کننده‌ها را در بار کمانش پوستهٔ تقویت شده، با ۶ جفت تقویت‌کننده، به ازای ضخامت 4mm را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در شکل مشخص است به ازای یک زاویهٔمشخص در تقویت‌کننده‌ها، با افزایش زاویه پوسته تا محدودهٔ ۴۰ تا ۵۰ درجه، بار کمانش نیز افزایش یافته و از آن به بعد بار کمانش کاهش می‌یابد. لذا بیشینه این نمودار در محدودهٔ ۵۰ درجه اتفاق افتاد که این به معنی بهینه بودن این محدوده برای زاویه الیاف است.



شکل ۱۵ تأثیر زاویه پوسته و تقویت‌کننده در بار کمانش

دلیل آن را نیز می‌توان این گونه در نظر گرفت که حالت ایده‌ال، حالتی است که زاویه الیاف به زاویهٔ جهت‌گیری تقویت‌کننده‌ها نزدیک شوند به طوری که سفتی در راستاهای طولی و محیطی استوانه کاهش پیدا نکند. در واقع تقویت‌کننده‌ها نیروی وارد بر خودشان را به دو راستای طولی و محیطی تقسیم می‌کنند. همان‌طور که در نمودار مشخص است، به ازای جهت‌گیری تقویت‌کننده‌ها در ۴۰ درجه، زاویهٔ الیاف بهینه نیز به این سمت کشیده شده است، زیرا می‌توان گفت که پوسته در این زاویه، سفتی مناسبی در راستاهای طولی و محیطی دارد. اگرچه جهت‌گیری ۸۰ درجه دارای بیشترین بار کمانشی است ولی به نظر می‌رسد بار کمانشی ویژه آن نسبت به حالت ۴۰ درجه کمتر باشد. با کاهش زاویهٔ تقویت‌کننده‌ها، بار کمانش کاهش یافته است. چون مقدار تقویت‌کننده‌های سازه در زاویهٔ ۸۰ درجه بسیار بیشتر از ۱۰ درجه است. بهتر است برای رسیدن به زاویه تقویت‌کننده مناسب بار کمانش ویژه را در نظر گرفت.

۹- نتیجه‌گیری

روابط تحلیلی برای پوستهٔ تقویت شده کامپوزیتی بر اساس روش معادل سازی و تئوری تغییر شکل مرتبهٔ اول برشی برای محاسبهٔ بار بحرانی کمانش ارائه و نتایج حاصل از آن با حل اجزاء محدود مقایسه شد. روابط ارائه شده فقط در محدوده‌ی کمانش کلی سازه معتبر است. با در نظر گرفتن چگالی تقویت‌کننده ثابت و افزایش ضخامت پوسته بار کمانش افزایش

یافت. بار کمانش ویژه نیز تا ضخامت ۴mm افزایش می‌یابد ولی بعد از آن این مقدار کاهش یافت، اما از آنجا که در این محدوده ضخامت، شکل کمانش سازه به کمانش موضعی در تقویت کننده‌ها تبدیل می‌شود، این کاهش در روش ارائه شده، نمود پیدا نمی‌کند. با افزایش چگالی تقویت‌کننده‌ها در سازه نیز بار کمانش افزایش می‌یابد. همچنین زاویهٔ الیاف برای داشتن بالاترین بار کمانش در حدود ۵۰ درجه می‌باشد.

۱۰- مراجع

[1] Kidane S., Li, G., Helms J., Pang S. S., and Woldesenbet E., "Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders", *Composites Part B: Engineering,* 2003. Vol. 34(1), pp. 1-9.

[2] Jaunky N., N.F. Knight Jr, and D.R. Ambur "Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels", *Composites Part B: Engineering,* 1996.Vol. 27(5), pp. 519-526.

[3] Ambur D.R. and N. Jaunky "Optimal design of grid-stiffened panels and shells with variable curvature", *Composite Structures,* 2001. Vol. 52(2), pp. 173-180.

[4] Yazdani M., Rahimi H.,Khatibi, A. A., and Hamzeh S., "An experimental investigation into the buckling of GFRP stiffened shells under axial loading", *Scientific Research and Essays,* 2009. Vol. 4(9), pp. 914-920.

[5] Yazdani M. and Rahimi G.H., "The effects of helical ribs number and grid types on the buckling of thin-walled GFRP-stiffened shells under axial loading", *Journal of Reinforced Plastics and Composites,* 2010. Vol. 29(17), pp. 2568-2575.

[6] Kaw A.K., *Mechanics of Composite Materials*, 2006, Taylor & Francis Group, LLC: New York. pp. 320-325.

[7] Reddy J.N, *Mechanics of laminated composite plates and shells*. 2004, CRC Press: United States of America. pp. 462-466.

[8] Wodesenbet E., Kidane S, and Pang S.S., "Optimization for buckling loads of grid stiffened composite panels", *Composite Structures,* 2003. Vol. 60(2), pp. 159-169.

[9] Chen W.F. and Lui E.M., *Energy and Numerical Methods*, in *Structural Stability*1987, Elsevier Seience Publishing Co. pp. 414-435.

[10] Amabili M., *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*, 2008, Cambridge University Press: United States of America pp. 52-89.

[11] Langhaar H.L., *Energy Methods in Applied Mechanics*. 1989, John Wiley and Sons: United States of America. pp. 201-232.