

حل عددی جریان آشفته به روش گردابه‌های بزرگ با استفاده از

مدل زیر شبکه دینامیکی موضعی

قاسم حیدری نژاد^{۱*}، توحید صداقت^۲

۱- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

*تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵

gheidari@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: آذر ۱۳۸۶، پذیرش مقاله: خرداد ۱۳۸۷)

چکیده- در این تحقیق کاربرد مدل‌های زیر شبکه اسماغورینسکی و دینامیکی موضعی در روش شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ مطالعه می‌شود. در مدل‌سازی مقیاس کوچک، به تعیین ضریب اسماغورینسکی نیاز است که در مدل اسماغورینسکی مقدار ثابتی بوده و به صورت تجربی انتخاب می‌شود. برخی مدل‌های دینامیکی در راستای تخمین بهتر این ضریب توسعه یافته‌اند که مستلزم اعمال فیلتر عددی هستند. فیلتر مورد استفاده در متوسط‌گیری مکانی در این تحقیق، فیلتر گاوسی است. روش عددی، حجم محدود است و از الگوریتم سیمپل برای برآورد جمله فشار استفاده شده. برای کاهش بار محاسباتی با هدف انجام در کامپیوترهای شخصی، عدد رینولدز طوری انتخاب شده که جریان سیال را بتوان دوبعدی فرض کرد. مقایسه با نتایج آزمایشگاهی که عدد رینولدز آن در همین محدوده قرار دارد، بیانگر دقت بالای روش و مدل مورد استفاده است. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که گرچه مدل دینامیکی موضعی به دلیل محاسبه ضریب اسماغورینسکی برای هر نقطه، هزینه محاسباتی بیشتری دارد، اما به دلیل دقت بالاتر و استفاده از شبکه‌بندی بزرگ‌تر، هزینه محاسبات اضافی را می‌توان جبران کرد.

کلیدواژه‌ها: شبیه‌سازی گردابه‌های بزرگ، فیلتر، مدل اسماغورینسکی، مدل دینامیکی، مدل دینامیکی موضعی، جریان آشفته.

Simulation of Turbulent Flow using LES Method with Localized Dynamic Sub Grid Scale Model

Gh. Heidarinejad^{1*}, T. Sedaghat²

1- Professor, Mechanical Engineering Department, Tarbiat Modares University

2- M. Sc., student, Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University

*P.O. Box: 14115-143, Tehran, Iran

gheidari@modares.ac.ir

Abstract

In this article sub-grid modeling of Smagorinsky and Localized Smagorinsky Models are investigated. In modeling sub-grid scales, it is necessary to determine the Smagorinsky coefficient which is an experimental constant. Dynamic Models are developed to estimate this value more efficiently. In this research, the test filter is Gaussian, numerical method is based on the finite volume scheme, and a SIMPLE algorithm is used to evaluate the pressure. To perform computations on a personal computer, value of Reynolds number had chosen enough low to make a two dimensional modeling and comparison with respective experimental results possible. Comparison of numerical results shows high accuracy of the localized dynamic models. More numerical investigations reveal that although localized dynamic models need more computing time, but the higher resolution of the method makes it possible to use a coarser grid and hence compensate the extra CPU time.

KeyWords: Large Eddy Simulation, Filter, Smagorinsky SGS Model, Dynamic SGS Model, Localized Dynamic SGS Model, Turbulent Flow.

۱- مقدمه

آشفته‌گی پدیده‌ای است که در بسیاری جاها تجربه می‌شود. جریان سیال در اطراف اتومبیل‌ها، کشتی‌ها و هواپیماها ممکن است آشفته باشد. معادلات حاکم بر جریان سیال نیوتنی، معادلات ناویر-استوکس است که متأسفانه بجز در جریان‌های بسیار ساده، حل تحلیلی آن در دست نیست. به‌طور کلی برای تحلیل و پیش‌بینی رفتار جریان سیال در هندسه‌های مختلف، معادلات دیفرانسیل ناویر-استوکس با شرایط مرزی مناسب باید حل شوند.

برای حل عددی جریان سیال، روش‌ها و مدل‌سازی‌های عددی مختلفی توسعه یافته که برای مثال می‌توان RANS^۱، DNS^۲ و LES^۳ را نام برد. از نظر ماهیت محاسبات، روش LES بین RANS و DNS محسوب می‌شود. در روش RANS با متوسط‌گیری زمانی، مقادیر متوسط متغیرها را محاسبه می‌شود اما روش DNS بدون هیچ‌گونه مدل‌سازی و با اعمال شبکه‌بندی در حد کوچکترین مقیاس‌ها، با عنوان آزمایشگاه عددی شهرت یافته است. در روش RANS پارامترها به دو جمله نوسانی و متوسط تبدیل می‌شوند و جمله نوسانی که شامل تمامی مقادیر نوسان است مدل‌سازی می‌شود. مزیت LES نسبت به RANS در آن است که ابتدا مقیاس‌های بزرگ از مقیاس‌های کوچک جدا شده و سپس نوسان موجود در مقیاس‌های کوچک مدل‌سازی می‌شوند. لذا تأثیر مدل‌سازی مقیاس‌های کوچک در روش LES از اهمیت کمتری نسبت به روش RANS برخوردار است. روش LES در مقایسه با DNS نیز

مزایایی دارد. از آنجا که LES با مقیاس‌های بزرگ سر و کار دارد، لذا می‌تواند با استفاده از شبکه‌بندی بزرگ، نتایج قابل مقایسه‌ای را نسبت به DNS به‌دست دهد؛ درحالی‌که DNS از LES بسیار پرهزینه‌تر است.

LES بر نظریه آبشار انرژی کولموگروف مبتنی است. در این نظریه، انرژی به بزرگترین مقیاس داده شده و سپس این انرژی به مقیاس‌های کوچک‌تری منتقل می‌شود. این فرایند آنقدر ادامه می‌یابد تا انرژی در کوچکترین مقیاس‌ها تلف شده و بالانس انرژی برقرار شود.

همان‌گونه که گفته شد در روش LES ابتدا مقیاس‌های بزرگ که انرژی به آنها داده می‌شود حل می‌شوند، اما پس از حل مقیاس‌های بزرگ بالانس انرژی برقرار نیست. لذا برای برقراری بالانس انرژی لازم است اثر مقیاس‌های کوچک که تلف‌کننده‌اند در نظر گرفته شود. در روش LES به‌منظور جداسازی مقیاس‌های بزرگ از مقیاس‌های کوچک از فیلتر استفاده می‌شود. فیلتر عملگری خطی است که نوعی متوسط‌گیری مکانی انجام می‌دهد.

استفاده از روش LES به اوایل دهه ۷۰ میلادی بازمی‌گردد. در سال ۱۹۷۰ Deardorff برای اولین بار مقیاس‌های سرعت و دما را در لایه مرزی به‌صورت سه‌بعدی شبیه‌سازی کرد [۱].

در روش گردابه‌های بزرگ (LES) تفاوت مدل‌سازی‌های مختلف، در نحوه محاسبه ضریب اسماکورینسکی (C) در به‌دست آوردن جمله تنش‌های رینولدز است که بر اثر اعمال فیلتر در معادلات حاکم به‌وجود می‌آید. اولین مدل SGS که شکل عملی به‌خود گرفت مدل SM^۴ بوده که در سال ۱۹۶۳ توسط

1. Reynolds Averaged Navier-Stokes
2. Direct Numerical Simulation
3. Large Eddy Simulation

4. Smagorinsky Model

۲- معادلات حاکم

در شبیه سازی عددی سه بعدی جریان مغشوش سیالات با توجه به مقیاس شبکه بندی، حجم محاسبات به شدت افزایش می یابد. اگرچه جریان آشفته سیالات ماهیتی سه بعدی دارد، اما در این تحقیق برای آنکه بتوان محاسبات را روی کامپیوتر شخصی انجام داد، عدد رینولدز مسأله چنان انتخاب شده که بتوان جریان سیال را دوبعدی فرض کرد. به همین دلیل برای راست آزمایی نتایج عددی نیز از داده های آزمایشگاهی واقع در همین محدوده استفاده شده است.

معادلات حاکم بر جریان دوبعدی برای سیال با جرم ویژه و لزجت ثابت، مطابق معادله های ۱، ۲ و ۳ شامل دو معادله مومنتم و یک معادله پیوستگی است [۸]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

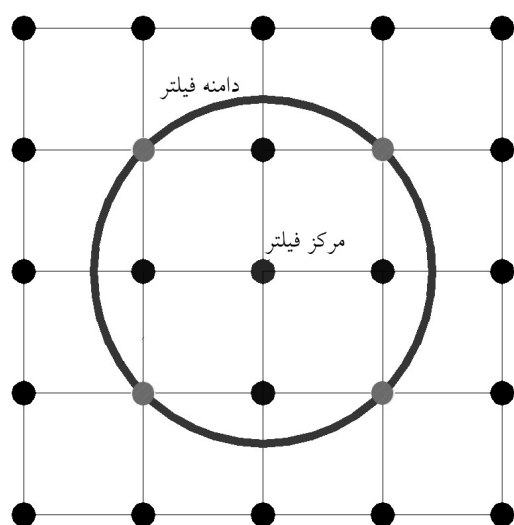
برای حل معادلات حاکم به روش LES باید با اعمال فیلتر بر روی این معادلات، مقیاس های کوچک را از مقیاس های بزرگ جدا کرد.

۳- فیلتر

اگر $f(x)$ تابعی باشد که شامل تمامی مقیاس ها است، آنگاه تابع فیلتر شده $\overline{f(x)}$ به صورت معادله ۴ بیان می شود [۹]:

اسماگورینسکی معرفی شد [۲]. در مدل اسماگورینسکی، از C به عنوان ثابتی تجربی (ثابت اسماگورینسکی) استفاده می شود. ویژگی این روش سادگی و سهولت کاربرد آن است. پس از آن اصلاحاتی بر روی مدل SM انجام شد که می توان به مدل SM بهبود یافته اشاره کرد. توابع میراکننده برای کاهش نرخ اتلاف نزدیک دیواره پیشنهاد شد که همگی در راستای کاهش معایب مدل SM بودند. در سال ۱۹۹۱ مدل دینامیکی توسط Germano و همکاران برای محاسبه دقیق تر ضریب اسماگورینسکی با توجه به اطلاعات به دست آمده از مقیاس های حل شده به ویژه در نزدیکی مرز ارائه شد و با توجه به اینکه کمتر از ۲۰ سال از ابداع این مدل می گذرد، مدلی جدید محسوب می شود [۳]. مدل دینامیکی با استفاده از سرعت های به دست آمده و با اعمال فیلتر بر این سرعت ها به محاسبه C می پردازد و بنابراین در محاسبه آن از خصوصیات جریان و هندسه به طور مستقیم استفاده می شود. بزرگترین مشکل مدل دینامیکی آن است که فقط برای هندسه هایی قابل پیاده سازی است که راستای همگن داشته باشند. در همین راستا و به منظور برطرف ساختن مشکلات مدل دینامیکی در سال ۱۹۹۵ مدل دینامیکی موضعی معرفی شد که برای محاسبه ضریب اسماگورینسکی در هندسه های پیچیده مناسب است [۴]. از میان سایر افرادی که در این زمینه فعالیت داشته اند می توان به معین، کیم، و شاه اشاره کرد [۵، ۶].

روش LES در ایران روشی جدید محسوب می شود. در داخل کشور می توان به گروه تحقیقاتی حیدری نژاد در دانشگاه تربیت مدرس اشاره کرد. سجاد غرضی عضو این گروه در سال ۱۳۸۴، جریان آشفته در هندسه کانال و پشت پله را با استفاده از روش LES و مدل زیر شبکه از نوع اسماگورینسکی تحلیل کرد [۷].



شکل ۲ نقاط همسایه در فیلتر گاوسی

پوسته گاوسی حول نقطه مورد بررسی قرار می‌گیرد و به نسبت فاصله نقاط به آنها وزن می‌دهد که این در شکل ۱ مشاهده می‌شود. این خاصیت زمانی آشکارتر می‌شود که عرض فیلتر بزرگ باشد و مطابق شکل ۲، نقاط بیشتری از همسایه در متوسط‌گیری حاضر باشند. کواک و همکاران^۱ نشان دادند که فیلتر گاوسی به یک میدان فیلتر شده مناسب منجر می‌شود، به نحوی که بیشتر مقیاس‌های بزرگ و قابل حل، باقی مانده و مقیاس‌های کوچک حذف می‌شوند. این خاصیت تابع فیلتر گاوسی، آن را به‌عنوان فیلتری مناسب در LES معرفی می‌کند. فیلتر گاوسی برای مقادیر عددی به شکل رابطه ۷ است [۱۰].

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{1}{a} (f_{ij}) + \frac{1}{b} \sum_{i,j} f_{ij} + \dots \quad (7)$$

بررسی‌های انجام شده در تحقیق حاضر نشان داده است که اگر عرض فیلتر بزرگ باشد، نقاط بیشتری در متوسط‌گیری دخیل بوده و لذا فیلتر گاوسی بهتر عمل می‌کند، هرچند در متوسط‌گیری با عرض فیلتر کوچک این

$$\overline{f(x)} = \int_{\Gamma} G(x-s) f(s) ds \quad (4)$$

خواص تابع فیلتر عبارتند از:

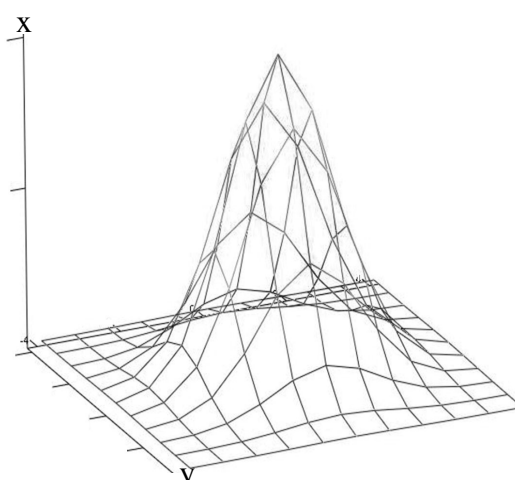
$$\begin{aligned} G(x) &= G(-x) \\ \int_{\Gamma} G(s) ds &= 1 \\ \overline{f} &= f \end{aligned} \quad (5)$$

در معادله $f(0)$ تابعی ثابت است.

فیلتر گاوسی در دو بعد به صورت معادله ۶ بیان می‌شود:

$$G(x-s) = \left(\frac{6}{\pi \Delta_f^2} \right) \exp \left(\frac{-6 \left((x-s)^2 + (y-s)^2 \right)}{\Delta_f^2} \right) \quad (6)$$

این تابع در فضای محاسباتی به صورت شکل ۱ است. این تابع در فضای فوریه دارای شکل مشابه بوده و بر اساس نظرات تابع فیلتر گاوسی انتخابی مناسب برای فیلتر کردن در محیط‌های همگن است. زیرا عمل انتقال بین مقیاس‌های کوچک و بزرگ را به صورت ملایم انجام می‌دهد و در حوزه فیزیکی و همچنین در حوزه موج به صورت مثبت تعریف می‌شود.



شکل ۱ نمایش پوسته تابع فیلتر گاوسی دوبعدی

1. Kwak et al.

$$\tau_{ij}^* = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \text{trace}(\tau_{ij}) \quad (10)$$

در روش LES برای مدل سازی کردن تنش رینولدز، روش های مختلفی وجود دارد که بر دو روش زیر متکی است:

مدل های لزجت گردابه ای^۱

مدل های میدان ترکیبی^۲

مدل های SM، DSM،^۳ و LDSM^۴، همگی در

راستای تخمین بهتر جمله تنش رینولدز بوده و بر مبنای مدل های لزجت گردابه ای بنا شده اند.

۴-۱- مدل اسماکورینسکی

مدل اسماکورینسکی اولین مدل SGS بود که در سال ۱۹۶۳ مطرح شد و هنوز به صورت گسترده ای از آن استفاده می شود [۲]. در این مدل مانند بسیاری از مدل های رایج SGS، از مفهوم لزجت گردابه ای استفاده می شود و قسمت بدون فشار عمودی^۵ تنشهای SGS (معادله ۱۰) را به تانسور نرخ کرنش $\bar{S}_{ij}$ بخش حل شده میدان سرعت ارتباط می دهد:

$$\tau_{ij}^* = -2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij}$$

$$\nu_{SGS} = (C_{SGS} \Delta)^{\frac{1}{2}} |\bar{S}| = C \Delta^{\frac{1}{2}} (\bar{S}_{ij} \cdot \bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$C = C_{SGS}^{\frac{1}{2}}$$

تفاوت محسوس نیست. به این ترتیب تابع فیلتر گاوسی به عنوان فیلتر آزمون مورد استفاده قرار گرفته است.

حل عددی معادلات ناویر-استوکس فیلتر شده، رفتار گردابه های بزرگ مقیاس حامل انرژی را تبیین می کند. معادله پیوستگی پس از فیلتر شدن، بدون تغییر باقی می ماند اما معادله مومنتم فیلتر شده، یک جمله اضافی در مقایسه با معادله اصلی دارد. این جمله باید به نحوی مدل سازی شود که تأثیر گردابه های مقیاس کوچک، موجب برقراری بالانس انرژی شود. معادلات حاکم پس از اعمال فیلتر به شکل زیر بازنویسی می شوند:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}}{\partial y} = 0$$

به منظور آماده سازی معادلات برای اعمال مدل زیر شبکه روابط زیر نوشته می شوند:

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

سرانجام با ساده سازی، معادله ۸ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (9)$$

۴-۲ مدل های زیر شبکه

آخرین جمله معادله ۹، تنش رینولدز (τ_{ij}) نامیده می شود که باید مدل سازی شود. بخش بدون اثر جمله تنش رینولدز به شکل رابطه ۱۰ بیان می شود:

1. Eddy Viscosity Models
2. Synthetic Field Models
3. Dynamic Smagorinsky Model
4. Localized Dynamic Smagorinsky Model
5. Traceless Part

$$\mu_{SGS} = \rho \nu_{SGS}$$

تلفیق معادلات فوق با معادلات ناویر-استوکس فیلتر شده، به روابط زیر منجر می‌شود:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu_G \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_G \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu_G \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_G \frac{\partial \bar{v}}{\partial y})$$

$$\mu_G = \mu + \mu_{SGS}$$

علی‌رغم سادگی، مدل SM همچنان به‌عنوان روشی پرکاربرد و عمومی مطرح است، اما عاری از مشکل نیست. یکی از مشکلات این مدل آن است که ضریب C باید توسط کاربر انتخاب شود که معمولاً برابر ۰/۰۱ یا کمتر انتخاب می‌شود. مقدار C در نزدیکی دیواره باید کاهش یابد که مدل SM توانایی پیش‌بینی آن را ندارد. مدل SM همچنین نمی‌تواند برگشت انرژی^۱ را پیش‌بینی نماید.

۴-۲- مدل دینامیکی

در بخش قبل مشخص شد که مقدار C بنا به دلایل فیزیکی باید با مقداری متغیر نسبت به مکان و زمان جایگزین شود. مدل دینامیکی در سال ۱۹۹۱ توسط Germano و همکاران برای محاسبه C با توجه به اطلاعات به‌دست‌آمده از مقیاس‌های حل شده ارائه شد [۴، ۱۰]:

$$C = C_{sgs}^*$$

$$\nu_{SGS} = C \Delta^* |\bar{S}|$$

$$\hat{\Delta} = \sqrt{2} \Delta$$

در این مدل، تنش‌های رینولدز، هم بر اساس فیلتر با عرض Δ و هم بر اساس فیلتر دیگری با عرض بیشتر که به فیلتر آزمون معروف است، نوشته می‌شود که در آن $\bar{\Delta} = 2\Delta$ و علامت (-) بیانگر فیلتر آزمون است. معادلات تنش رینولدز برای فیلتر اول و فیلتر آزمون به‌صورت زیر است:

$$(C, \Delta, u) \longrightarrow \tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \longrightarrow \tau_{ij} = -\nu C \Delta^* |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$

$$(C, \bar{\Delta}, \bar{u}) \longrightarrow T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j \longrightarrow T_{ij} = -\nu C \hat{\Delta}^* |\hat{S}| \hat{S}_{ij}$$

اختلاف تنش‌های رینولدز به‌دست آمده که ناشی از تغییر عرض فیلتر است را می‌توان به‌صورت رابطه ۱۱ - که به اتحاد Germano معروف است - محاسبه کرد:

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j \quad (11)$$

$$L_{ij}^d = L_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} \quad (12)$$

برای معادل قرار دادن تفاوت تنش‌های رینولدز ناشی از دو مرحله اعمال فیلتر و تانسور نرخ کرنش، از تانسور بدون اثر استفاده می‌شود (معادله ۱۲). ادغام معادلات فوق به معادله ۱۳ منجر می‌شود:

$$L_{ij}^d = -\nu C \hat{\Delta}^* |\hat{S}| \hat{S}_{ij} + \nu C \Delta^* |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (13)$$

$$\beta_{ij} = -\nu \hat{\Delta}^* |\hat{S}| \hat{S}_{ij}$$

$$\alpha_{ij} = -\nu \Delta^* |\bar{S}| \bar{S}_{ij}$$

$$L_{ij}^d = (C \beta_{ij} - \hat{C} \alpha_{ij}) \quad (14)$$

$$L_{ij}^d = C (\beta_{ij} - \hat{\alpha}_{ij})$$

$$M_{ij} = (\beta_{ij} - \hat{\alpha}_{ij})$$

$$L_{ij}^d = C M_{ij}$$

$$C = -\frac{(L_{ij}^d + \widehat{C\alpha_{ij}})\beta_{ij}}{(\beta_{ij}\beta_{ij})} \quad (19)$$

در این معادله C تابع عرض فیلتر بوده و برای حل مشکل در برآورد جمله $C\alpha_{ij}$ از پسماند زمانی^۳ استفاده شده که به معادله ۲۰ منجر می شود:

$$C = -\frac{(L_{ij}^d + \widehat{C^*\alpha_{ij}})\beta_{ij}}{(\beta_{ij}\beta_{ij})} \quad (20)$$

در به دست آوردن معادله ۲۰ هیچ گونه متوسط گیری انجام نشده و این معادله مقدار C را به صورت تابعی از مکان و زمان محاسبه می کند. بررسی های عددی نشان می دهد که C نوسانی شدیدی دارد که علت این نوسان را می توان ناشی از این دانست که C ماهیت تانسوری داشته اما به اجبار^۴ ماهیت عددی برای آن در نظر گرفته شده است. برای جلوگیری از ناپایداری های عددی، مقدار C پس از هر چند بازه زمانی (به عنوان مثال پس از هر ۲۰ بازه زمانی) یکبار محاسبه می شود. همچنین این معادله می تواند مقادیر منفی را نیز شامل شود که به مفهوم برگشت انرژی است. بررسی های عددی نشان می دهد که C می تواند مقادیر بزرگ منفی را شامل شود و همچنین برای مدت طولانی در مقادیر بزرگ منفی باقی بماند که این مسأله نیز به ناپایداری عددی منجر می شود. دلیل ناپایداری عددی برای مقادیر بزرگ منفی را می توان در آن دانست که در تخمین اولیه مدل SM، این قابلیت برای C در نظر گرفته نشده بود. بدین منظور برای جلوگیری از ناپایداری عددی توصیه شده که مقادیر منفی C محدود شود [۳، ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۲]. تحلیل دقیق تر مفهوم بازگشت انرژی، زمینه تحقیقات گسترده ای را فراهم می سازد.

$$C = \frac{L_{ij}^d M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (15)$$

با ساده سازی روابط تعریف شده، سرانجام معادله ۱۵ برای محاسبه C به دست می آید. در استخراج معادله ۱۵ از معادله ۱۴ فرض شده که C مستقل از عرض فیلتر بوده و در واقع به صورت یک ضریب مستقل از عملگر فیلتر خارج شده است. بنابراین فرض، در معادله ۱۵ برای محاسبه مقدار C در راستای همگن باید متوسط گیری انجام شود که در نهایت معادله ۱۶ به دست می آید:

$$C = \frac{\langle L_{ij}^d M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (16)$$

مشخص است که مدل DSM برای جریان هایی که راستای همگن ندارند، مناسب نخواهد بود.

۴-۳- مدل دینامیکی موضعی

مدل دینامیکی موضعی در راستای برطرف ساختن محدودیت مدل دینامیکی توسعه یافته است. برای این منظور معادله ۱۴ به صورت زیر نوشته می شود:

$$L_{ij}^d = (C\beta_{ij} - \widehat{C\alpha_{ij}}) \quad (14)$$

$$E_{ij} = -L_{ij}^d + (C\beta_{ij} - \widehat{C\alpha_{ij}}) \quad (17)$$

$$\frac{dE_{ij}}{dC} = 0 \quad (18)$$

پیوملی و همکاران^۱ معادله ۱۷ را نوشته و آن را به روش حداقل مربعات^۲ مطابق رابطه ۱۸ حداقل کردند که سرانجام معادله ۱۹ برای محاسبه C به دست آمد:

3. Time Lagging

4. Forced

1. Piomelli et. al.

2. Least Square Method

است. در این عدد رینولدز، فیزیک حاکم بر جریان سیال دوبعدی بوده و مقادیر سرعت ناشی از حل عددی جریان دوبعدی با مقادیر ناشی از نتایج آزمایشگاهی قابل مقایسه است. با توجه به تطابق خوب نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی مشخص می‌شود که فرض دوبعدی بودن جریان در عدد رینولدز برابر ۱۰۰۰ منطقی است.

یکی از مزیت‌های روش LES آن است که با گردابه‌های بزرگ در ارتباط است و مقادیر محاسبه شده در این روش، همگی با مقیاس‌های بزرگ مرتبط بوده و لذا می‌توان شرایط مرزی را برای مقادیر بزرگ مقیاس سرعت و دیگر متغیرهای مورد نیاز تعریف کرد. شرایط مرزی فیزیکی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u_{wall} = 0 \left(\frac{m}{Sec} \right)$$

$$v_{wall} = 0 \left(\frac{m}{Sec} \right)$$

$$u_{top} = 0.018 \left(\frac{m}{Sec} \right)$$

$$v_{top} = 0 \left(\frac{m}{Sec} \right)$$

در مسأله مورد بررسی فرض شده که سیال در لحظه اولیه ساکن است. لذا مقادیر اولیه سرعت به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$u_i = 0 \left(\frac{m}{Sec} \right)$$

$$v_i = 0 \left(\frac{m}{Sec} \right)$$

۶- نتایج

با کوچک کردن شبکه‌بندی و بررسی استقلال از شبکه، شبکه‌بندی ۷۰×۷۰ به عنوان شبکه‌بندی نهایی میدان انتخاب شده است.

$$C \geq C_{min}$$

$$C_{min} = -0.01$$

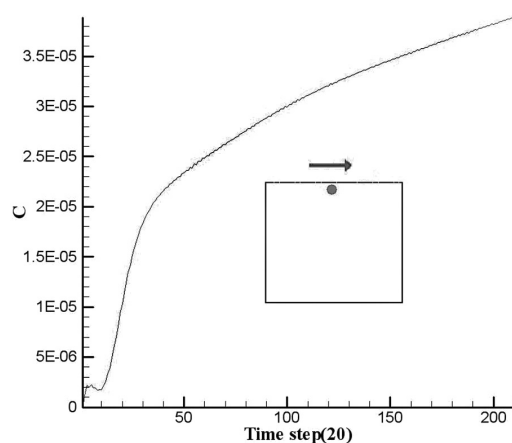
همان‌طور که مشخص است مدل‌های SGS نرخ اتلاف آشفته‌گی را به عرض فیلتر ارتباط می‌دهند و عرض فیلتر نیز تابع ابعاد شبکه است. با کوچکتر شدن ابعاد شبکه، عرض فیلتر نیز کوچکتر شده و در نتیجه از نرخ اتلاف برآورد شده توسط مدل کاسته می‌شود که نتیجه آن، جلوه کمتر اهمیت دقت مدل است. در انتخاب مدل SGS همواره می‌توان دو رویه را در نظر گرفت. در رویه اول می‌توان از مدل ساده‌ای با شبکه‌بندی کوچک استفاده کرد اما در رویه دوم می‌توان از مدل دقیق با شبکه‌بندی بزرگتری استفاده کرد که این به کاهش هزینه محاسباتی منجر می‌شود.

۵- روش عددی

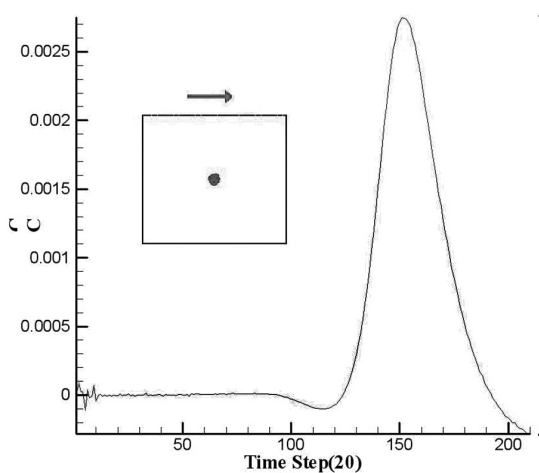
همان‌طور که گفته شد، LES روشی ریاضی است که با اعمال فیلتر بر روی معادلات ناویر-استوکس و ارائه مدل‌های مختلف SGS نقش خود را کامل کرده است. با این حال برای حل معادلات حاکم (فیلتر شده) به یک روش عددی نیاز است. روش عددی استفاده شده، بر روش حجم محدود و استفاده از شبکه جابه‌جا شده برای منفصل‌سازی معادلات مبتنی بوده است. برای حل میدان فشار، الگوریتم سیمپل به کار رفته است. معادلات حاکم با رویه بادسو^۱ گسسته‌سازی و معادلات جبری حاصل به روش خط به خط حل شده است. مدل مورد استفاده LDSM بوده و از تابع فیلتر گاوسی به عنوان فیلتر آزمون استفاده شده است.

برای هندسه حفره، سه دیواره جامد و یک دیواره محرک با سرعت ثابت مدنظر است. مشخصات هندسه و سیال مورد نظر به گونه‌ای است که عدد رینولدز جریان برابر ۱۰۰۰

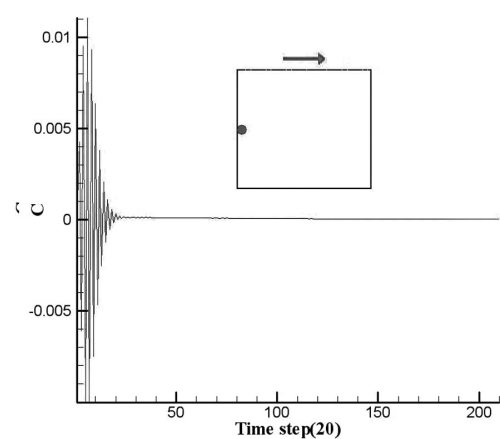
1. Upwind



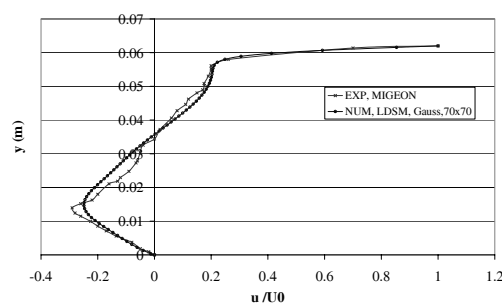
شکل ۶ تغییرات C در نقطه میانی دیوار متحرک



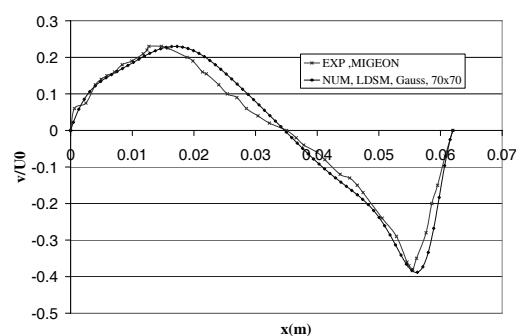
شکل ۷ تغییرات C در نقطه میانی حفره



شکل ۸ تغییرات C در نقطه میانی دیوار سمت چپ

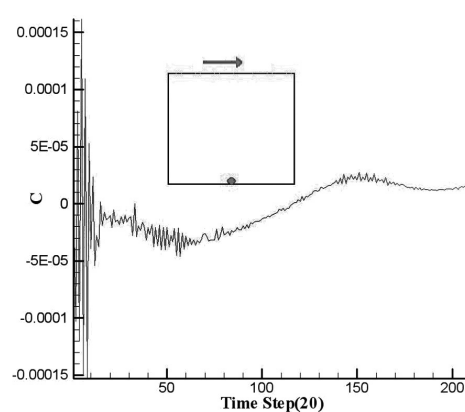


شکل ۳ مقایسه سرعت افقی روی محور تقارن با نتایج تجربی



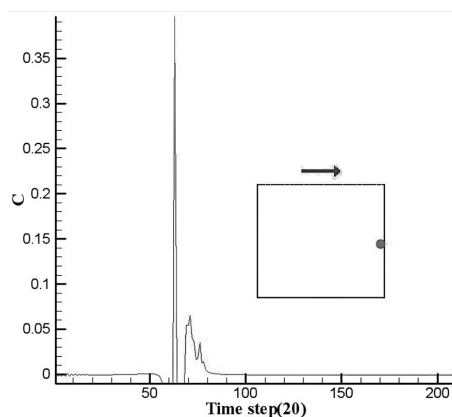
شکل ۴ مقایسه سرعت عمودی روی محور تقارن با نتایج تجربی

در شکل‌های ۳ و ۴ مقادیر سرعت بر روی خطوط تقارن افقی و عمودی با مقادیر آزمایشگاهی مقایسه شده است [۱۳]. در شکل‌های ۵ تا ۹ چگونگی تغییرات C ناشی از مدل LDSM در نقاط مختلف میدان نشان داده شده است.



شکل ۵ تغییرات C در نقطه میانی دیوار پایین

تأثیرگذار است. مدل اسماکورینسکی به عنوان مدلی ساده و پرکاربرد همواره مورد استفاده بوده است. مدل دینامیکی موضعی، نوعی مدل مناسب SGS است که با داشتن خاصیت محاسبه ضریب اسماکورینسکی، وابسته به مکان و زمان و همچنین محاسبه مقادیر منفی برای ضریب اسماکورینسکی، برای شبکه‌بندی بزرگ و همچنین هندسه‌های پیچیده قابل استفاده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که مدل LDSM به دلیل محاسبه ضریب C برای هر نقطه و در هر زمان، در صورت استفاده از شبکه‌بندی بزرگ، از نظر هزینه محاسباتی اقتصادی‌تر بوده و در عین حال دقت بالایی دارد.



شکل ۹ تغییرات C در نقطه میانی دیوار سمت راست

پس از شکل‌گیری میدان، ضریب اسماکورینسکی در نقطه میانی سمت چپ مطابق شکل ۸ به سمت صفر میل و اتلاف آشفتگی روی دیواره را صفر می‌کند. انتظار داریم که در نقطه میانی سمت راست نیز مانند نقطه میانی سمت چپ، اتلاف آشفتگی برابر صفر شود. اما مطابق شکل ۹ افزایش شدید C مشاهده می‌شود. این زمان مربوط به شکل‌گیری گردابه‌ای بر روی دیواره سمت راست است که پس از شکل‌گیری از این نقطه جدا شده و با گردابه گوشه سمت راست ادغام می‌شود. پس از عبور گردابه کوچک از این نقطه، مقدار اتلاف آشفتگی، بار دیگر برابر صفر پیش‌بینی می‌شود. همانگونه که در نمودارها مشخص است، ضریب C نوسانی زیادی دارد و همچنین مدل LDSM توانایی برآورد مقادیر منفی را برای این ضریب دارد که به مفهوم برگشت انرژی است.

۸- فهرست علائم

u, v	سرعت‌های افقی و عمودی
p	فشار نسبی
ρ	چگالی
t	زمان
μ	لزجت
Δ	عرض فیلتر
τ	تنش رینولدز
S	تانسور نرخ کرنش
C	ضریب اسماکورینسکی
Γ	میدان محاسباتی
v_{SGS}	لزجت گردابه‌ای

۹- منابع

- [1] Deardorff J., A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers, J. Fluid Mech., Vol 41: 453-80
- [2] Smagorinsky J.S., General circulation experiments with the primitive equations,

۷- نتیجه‌گیری

مدل‌های زیرشبکه در روش LES نقش مهمی دارند و دقت مدل‌سازی جریان اغتشاشی جریان سیال در آنها نهفته است. مدل‌های SGS به منظور برقراری بالانس انرژی اعمال شده و دقت آنها در برقراری این موازنه

- [9] Leonard A. Energy Cascade in Large Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows, In Turbulent diffusion in environmental pollution; Proceedings of the Second Symposium, Charlottesville, Va., April 8-14, 1973. Volume A. (A75-30951 13-47) New York, Academic Press, Inc., 1974, p. 237-248.
- [10] Sedaghat T., Simulation of The Turbulent Flow with LES Method using the Localized Dynamic SGS Model, 16th International Mechanical Engineering Conference, Kerman, Iran, 2008.
- [11] Tommy, Kunhung, Kim, Applied Mathematics, A Modified Smagorinsky Sub grid Scale Model for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flow, University of California, PhD thesis, 2001.
- [12] Senocak Inanc, Large-eddy simulation of stratocumulus-topped atmospheric boundary layers with dynamic sub grid scale models, Center for Turbulence Research Annual Research Briefs, 2003.
- [13] C. Migeon A., Texier and Pineau G., Effects of Lid-Driven Cavity Shape on the Flow Establishment Phase, Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, 2000, 469-488.
- I, the basic experiment, Mon. Weather, 1963, Rev.91:99-164.
- [3] Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.H., A dynamic Sub Grid-Scale Eddy Viscosity Model, Phys. Fluids, A3, 1991, 1760-1765.
- [4] Ghosal S., Lund T.S., Moin P., Akselvoll K., A Dynamic Localization Model for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 286, Mar. 1995, pp. 229-255.
- [5] Kim, J., Moin, P., Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics, Vol. 59, 1985.
- [6] K.B. Shah, Large eddy simulations of flow past a cubic obstacle, Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1998.
- [7] Gharazi S., Simulation of Turbulent Flow using LES Method, M.S. Thesis, Engineering Faculty, Tarbiat Modares University, 2005.
- [8] Heidarinejad G. Advanced Fluid Mechanics, Nashere Daneshgahi Publishing, 2004.