مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۶، ص‌ص ۹۹-۱۰۶

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه روش باند گراف جهت مدل‌سازی نازل غیرآیزنتروپیک

احمد صانعی[۱]، علیرضا باصحبت نوین‌زاده[۲*]

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۲- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۴۴۱۶، novinzadeh@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۴ مهر ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۲ دی ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۲ تیر ۱۳۹۳

کلید واژگان:

باندگراف

سیال تراکم‌پذیر

نازل همگرا واگرا

جریان غیرآیزنتروپیک

شوک قائم

چکیده

در مقالاتی که تاکنون در زمینه مدل‌سازی سیستم‌های تراکم‌پذیر به‌روش باندگراف منتشر شده، جریان آیزنتروپیک فرض شده‌است؛ اما در نازل-های همگرا-واگرا، در محدوده‌ای از نسبت فشارها، در قسمت واگرای نازل شوک عمودی اتفاق می‌افتد که فرض آیزنتروپیک بودن جریان را نامعتبر می‌کند. در این مقاله برای درنظرگرفتن اثرات شوک عمودی، میدان ظرفیتی NIKE معرفی می‌شود. این میدان، علاوه بر درنظر گرفتن انرژی جنبشی سیال و معادلات مومنتوم، قادر است محل ایجاد شوک قائم در قسمت واگرای نازل را مدل‌سازی نماید. چگونگی کاربرد میدان انرژی NIKE در قالب یک مثال ساده توضیح داده خواهدشد و نشان‌داده‌می‌شود که نیروی پیشرانش به‌دست آمده از شبیه‌سازی، با روابط تحلیلی مطابقت دارد. از آنجایی که میدان معرفی شده جریان‌های غیرآیزنتروپیک را مدل می‌کند، این میدان می‌تواند برای مدل‌سازی نیروی پیشرانش راکت موتورها و تراسترها در حالت‌های گذرا مورد استفاده قرارگیرد. مزیت دیگر مدل ارائه شده این است که می‌تواند به راحتی در نرم افزارهایی مانند ام‌اس‌وان، تونتی‌سیم و سیمبولس به‌کار گرفته شود؛ بنابراین با استفاده از خواص ساختاری باندگراف، معادلات حالت به صورت سیستماتیک استخراج و بااستفاده از روش‌های عددی مناسب حل می‌شوند و نیاز به استخراج معادلات به‌صورت دستی و حل آن‌ها مرتفع می‌گردد.

Development of bond graph approaches for modeling of a non-isentropic nozzle

Ahmad Sanei, Alireza Basohbat Novinzadeh*

Department of Aero-space Engineering, Khajeh Nasireddin Toosi University, Tehran, Iran
* P.O.B. 4416-15875, Tehran, Iran, novinzadeh@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 26 September 2013
Accepted 02 January 2014
Available Online 13 July 2014

Keywords:
Bond Graph
Compressible fluid flow
Converging-diverging nozzle
Non-isentropic flow
Normal shock

ABSTRACT

In the papers published on compressible fluid using Pseudo Bond Graph approach, isentropic flow is assumed. However in a converging- diverging nozzle, for a specific pressure ratio, the assumption of isentropic flow is invalid. For the purpose of considering normal shock effects, this paper introduces a new field (NIKE-field) to the pseudo bond graph. The output of the new field can be also used to determine normal shock position and to extract momentum equation as well. In the following, the methodology developed in this paper has been applied a simple pedagogic example. Simulation result is validated by comparison with the analytical result. As the new field can be modeled non-isentropic flow, it can be used to for modeling rockets motors and thrusters in transient state. One of another advantage of new field is that it can be easily used in many software applications like MS1, SYMBOLS2000 and 20SIM®; therefore, With regard to the systematic derivation of a mathematical model from a bond graph in these softwares, there is no need to derive any state equations and their solutions.

۱- مقدمه

روش‌های متعددی برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی وجود دارد، اما دراین میان روش باندگراف یکی از کارآمدترین روش‌های مدل‌سازی است که قادر است سیستم‌هایی که رفتار غیرخطی داشته و با حوزه‌های مختلف انرژی (سیستم‌های مکانیکی، هیدرولیکی، الکتریکی، پنوماتیکی، ترمودینامیکی) در ارتباط هستند را به راحتی مدل نماید [۱-۳]. از آنجایی که باندگراف یک روش گرافیکی است و می‌تواند معادلات حالت را به‌صورت سیستماتیک استخراج کند، نرم‌افزارهای زیادی در این خصوص ارائه شده‌اند که ازجمله آن‌ها می‌توان به نرم افزارهای تونتی‌سیم [۴]، ام‌اس‌وان [۵] و سیمبولس [۶] اشاره نمود.

از طرف دیگر در سیستمهای تراکم‌پذیر، به دلیل وابستگی خواص ترمودینامیکی، علاوه بر معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی، لازم است معادله حالت سیستم نیز درنظرگرفته‌شود. این موضوع معادلات حاکم بر سیستم را به شدت غیرخطی و پیچیده می‌سازد. مقالات زیادی در مورد مدل‌سازی سیستم‌های ترمودینامیکی و تراکم‌پذیر به روش باندگراف به چاپ رسیده‌است که در همه آن‌ها به دلیل پایین بودن سرعت سیال، از انرژی جنبشی در مقابل انرژی ناشی از آنتالپی صرف‌نظر شده‌است.

به عنوان مثال در المان معرفی شده (CETF) توسط اولد و همکارانش، از انرژی جنبشی صرف‌نظر شده‌است [۷]. آقای جزیری و مدجاهر نیز در مدل-سازی سیستم ترموسیالاتی، انرژی جنبشی سیال را به دلیل کم بودن سرعت

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Sanei, A.R. Basohbat Novinzadeh, Development of bond graph approaches for modeling of a non-isentropic nozzle, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.14, No. 6, pp. 99-106, 2014 (In Persian)

در نظر نگرفتند [۸،۹]. اگرچه توما و همکارانش در کتاب خود به لزوم درنظر گرفتن انرژی جنبشی در توربو ماشین‌های سرعت بالا اشاره کردند [۱۰]، اما آن‌ها نیز المانی که بتواند انرژی جنبشی را در سیالات تراکم‌پذیر مدل کند را معرفی نکردند. کارنوپ و همکارانش نیز برای مدل‌سازی سیستم‌های تراکم‌پذیر، میدان ظرفیتی را معرفی کردند که در آن با صرف‌نظر کردن از انرژی جنبشی، فقط اصول بقای جرم و انرژی ارضا می‌شد [۱۱].

اما در نازل‌های همگرا-واگرا که سرعت سیال بیش از سرعت صوت است، چشم‌پوشی کردن از اثرات انرژی جنبشی باعث خطای قابل‌توجهی می‌شود. به همین دلیل اخیراً نویسندگان با فرض جریان آیزنتروپیک، میدان ظرفیتی KE را معرفی کردند که قادر است اثرات انرژی جنبشی را درنظر گرفته و معادلات مومنتوم را نیز ارضا کند.

از طرفی در لحظات اولیه روشن- خاموش شدن موتورها و تراسترها، نسبت فشار دو طرف نازل به‌گونه‌ای است که شوک قائم در قسمت واگرای نازل اتفاق می‌افتد که این امر فرض آیزنتروپیک بودن جریان را نامعتبر می‌کند.

در این مقاله برای درنظر گرفتن اثرات شوک قائم، میدان انرژی جنبشی غیرآیزنتروپیک NIKE معرفی و معادلات حاکم بر آن نیز ارائه می‌گردد. استفاده از میدان انرژی NIKE قابلیت به‌کارگیری معادله مومنتوم را نیز به کاربر می‌دهد. همچنین روابط المان نازل آیزنتروپیک پیشنهادی کارنوپ، برای نازل همگرا-واگرای غیر آیزنتروپیک توسعه داده می‌شود. درادامه، کاربرد میدان انرژی NIKE در قالب یک مثال ساده توضیح داده خواهدشد. مزیت مدل ارائه شده زمانی بیشتر آشکار می‌شود که مدل مذکور در نرم‌افزارهایی مانند اماس‌وان، تونتی‌سیم و سیمبولس به‌کار گرفته‌شود. چون در این نرم‌افزارها، معادلات حالت به‌صورت سیستماتیک استخراج شده و با استفاده از روش‌های عددی مناسب حل می‌شوند؛ بنابراین نیاز به استخراج معادلات به‌صورت دستی و حل آن‌ها مرتفع می‌گردد.

این مقاله در۶ بخش تهیه شده‌است. بخش اول به مقدمه اختصاص داشت. در بخش دوم به روابط حاکم بر میدان انرژی جنبشی KE برای جریان آیزنتروپیک و نحوه ارتباط آن با میدان ظرفیتی C در سیالات تراکم‌پذیر اشاره‌می‌شود. در بخش سوم، روابط نازل آیزنتروپیک که توسط کارنوپ پیشنهاد شده، برای نازل غیرآیزنتروپیک توسعه داده‌می‌شود. در بخش چهارم میدان انرژی جنبشی NIKE برای جریان‌های غیرآیزنتروپیک معرفی و در بخش پنجم مدل پیشنهادی از طریق مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج تحلیلی اعتبارسنجی خواهدشد. بخش ششم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

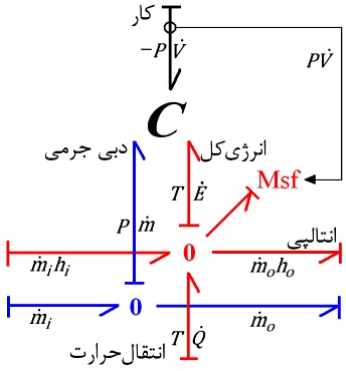
۲- میدان انرژی جنبشی KE برای جریان آیزنتروپیک

با فرض یک بعدی بودن جریان، حجم کنترلی را درنظر بگیرید که خواص درون آن یکنواخت باشد. اگر این حجم کنترل دارای فشار P، دمای T، چگالی ρ، حجم V، سرعت v، جرم m و انرژی داخلی E باشد و از طریق مرزهای متحرک کار $P\dot{V}$ و انتقال حرارت $\dot{Q}$ به حجم کنترل اعمال شود، روابط بقای انرژی، جرم و اندازه حرکت به‌صورت روابط (۱) خواهند بود [۱۱،۲].

$$\frac{d}{dt}E=\dot{m}_i\left(h_i+\frac{v_i^2}{2}\right)-\dot{m}_o\left(h_o+\frac{v_o^2}{2}\right)-P\dot{V}+\dot{Q} \qquad \text{انرژی}$$

$$\frac{d}{dt}m=\dot{m}_i-\dot{m}_o \qquad \text{جرم}$$

$$\frac{d}{dt}(mv)=\dot{m}_iv_i-\dot{m}_ov_o+P_iA_i-P_oA_o+P_{\text{atm}}(A_e-A_i)+R_x \qquad \text{مومنتوم} \qquad (۱)$$



شکل ۱ باندگراف پیشنهادی کارنوپ [۱۱].

که در آن زیرنویس‌های i و o به ترتیب به ورود و خروج کمیت‌ها در مقاطع ورودی و خروجی، h به آنتالپی سیال، R_x به برآیند نیروهای خارجی بر حجم کنترل، P_{atm} به فشار محیط بیرون و A به سطح مقطع عبور جریان اشاره دارد. در روابط (۱)، فرض‌های زیر در نظر گرفته‌شده‌اند:

- جریان یک بعدی فرض شده‌است.
- دستگاه مختصات نسبت به حجم کنترل ثابت است.
- خواص جریان درون حجم کنترل یکنواخت است.
- در معادله مومنتوم از اثرات ویسکوزیته و نیروهای برشی در جداره‌ها صرف‌نظر شده‌است.

کارنوپ و همکارانش با چشم‌پوشی از انرژی جنبشی و معادله مومنتوم سیال، روابط (۱) را به شکل روابط (۲) ساده نموده و باندگراف آن را به‌صورت نشان داده‌شده در شکل ۱ نمایش دادند [۱۱].

$$\frac{d}{dt}E=\dot{m}_ih_i-\dot{m}_oh_o-P\dot{V}+\dot{Q} \qquad \text{انرژی}$$

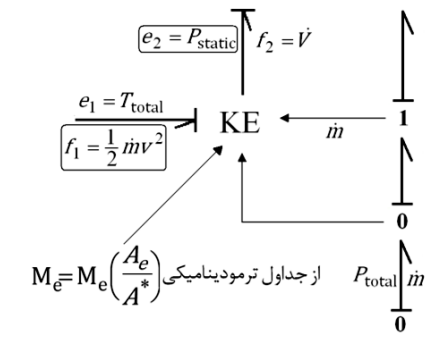
$$\frac{d}{dt}m=\dot{m}_i-\dot{m}_o \qquad \text{جرم} \qquad (۲)$$

در مدل پیشنهادی کارنوپ، بعد از انتگرال‌گیری از $\dot{m},\dot{E}$، فشار و دما به ترتیب از رابطه $T=E/(mC_v);\ \ P=RE/(C_vV)$ محاسبه می‌شوند.

اما صرف‌نظر کردن از انرژی جنبشی در مقابل انرژی منتقل شده توسط آنتالپی فقط زمانی معتبر است که سرعت سیال کسری از سرعت صوت باشد؛ بنابراین در نازل‌های همگرا-واگرا که سرعت سیال بیش از سرعت صوت است، مدل پیشنهادی کارنوپ نیاز به اصلاح دارد. علاوه بر آن مدل کارنوپ قادر به درنظر گرفتن معادلات مومنتوم نیز نیست. به‌همین منظور نویسندگان با فرض جریان آیزنتروپیک در نازل همگرا-واگرا، میدان انرژی KE را به‌صورت نشان داده‌شده در شکل ۲ معرفی نمودند.

همان‌طورکه در شکل ۲ مشخص است، در میدانKE دبی جرمی $(\dot{m})$، فشار و دمای جریان بالادست $(T_{\text{total}},P_{\text{total}})$ به عنوان ورودی میدان و انرژی جنبشی $(\dot{m}v_e^2/2)$ و فشار استاتیک (P_{static})در مقطع خروجی به عنوان خروجی میدان KE هستند. عدد ماخ خروجی (M_e)هم مقدار ثابتی بوده و باتوجه به رابطه (۳) تابعی از نسبت سطح مقطع خروجی به سطح مقطع گلوگاه نازل (A_e/A^*)است [۱۴] که به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان می‌شود.

$$\frac{A_e}{A^*}=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}}{\text{M}_e\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\text{M}_e^{\,2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}} \qquad (۳)$$



$$\begin{cases} e_1 = T_{total}\,, \quad f_2 = \dot{V} \\ f_1 = \frac{1}{2}\dot{m}v^2 = \frac{1}{2}\dot{m}\gamma R T_{total}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)^{-1} M_e^2, \\ e_2 = P_{static} = P_{total}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$

شکل ۲ میدان انرژی جنبشی KE

باتوجه به موارد فوق، ترکیب میدان انرژی KE با میدان ظرفیتی C در شکل ۳ نشان داده شده‌است. ملاحظه می‌شود در المان 0_1، از جمع جبری انرژی‌های وارد شده به میدان ظرفیتی C، معادلات انرژی بادرنظرگرفتن انرژی جنبشی ارضا می‌شود. (اولین معادله در روابط (۱))

ازطرف دیگر باتوجه به معلوم بودن سرعت و فشار استاتیک در مقطع خروجی، به راحتی می‌توان نیروی پیشرانش را از معادله سوم رابطه (۱) به دست آورد. این موضوع در بخش ۵ در قالب یک مثال نشان داده خواهدشد. بنابراین ملاحظه می‌شود میدان ظرفیتی C پیشنهاد شده توسط کارنوپ، بعلاوه میدان انرژی جدید KE، قادر است مجموعه معادلات انرژی و مومنتوم در رابطه (۱) را به‌طورکامل ارضا نماید.

۳- اصلاح روابط نازل آیزنتروپیک R برای نازل همگرا-واگرا

در میدان نازل آیزنتروپیک که توسط کارنوپ معرفی شد، دبی جرمی از رابطه (۴) به‌دست می‌آید [۱۱]:

$$\dot{m} = C_d \frac{AP_u}{\sqrt{RT_u}}\sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\left(pr^{\frac{2}{\gamma}} - pr^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right)}$$

$$pr = \begin{cases} \frac{P_d}{p_u} & \frac{P_d}{P_u} \rangle pr_{crit} \text{ اگر} \\ pr_{crit} & \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{crit} \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۴)$$

در رابطه فوق مقادیر γ, C_d, A به ترتیب نشان‌دهنده سطح مقطع گلوگاه نازل، ضریب تخلیه نازل و نسبت گرمای ویژه سیال و زیرنویس‌های u و d به ترتیب به جریان بالادست و پایین‌دست اشاره دارد. pr_{crit} نیز نسبت فشار بحرانی است که مقدار آن از رابطه $pr_{crit} = (2/(\gamma+1))^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ به دست می‌آید؛ اما در یک نازل همگرا-واگرا، بسته به عدد ماخ خروجی و نوع جریان (آیزنتروپیک یا غیرآیزنتروپیک)، نسبت فشار دو طرف نازل را می‌توان به سه ناحیه مختلف مطابق شکل ۴ تقسیم‌بندی نمود.

ناحیه I ($pr \langle pr_{normal_shock}$): جریان در قسمت واگرا، مافوق صوت و آیزنتروپیک است. در این حالت جریان در گلوگاه خفه[1] شده و برای محاسبه دبی جرمی می‌توان با جایگذاری $pr = pr_{crit}$، از رابطه (۴) استفاده نمود.

1. choke

هنگام استفاده از میدان ظرفیتی KE با معلوم بودن A_e/A^*، عدد ماخ خروجی مافوق صوت (M_e)، از رابطه (۳) محاسبه و به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان KE می‌شود. لازم به ذکر است در این حالت فشار در صفحه خروجی با فشار بیرون برابر نبوده ($P_e \neq P_d$) و سیال در خارج از نازل خود را با فشار بیرون تطبیق می‌دهد. بنابراین نیروی پیشرانش دو مؤلفه دارد. مؤلفه اول ناشی از خروج جرم سیال $\dot{m}v_e$ و مؤلفه دوم ناشی از اختلاف فشار صفحه خروجی و محیط بیرون $(P_e - P_d)A_e$.

ناحیه II ($pr_{crit(exit)sub} \rangle pr \rangle pr_{normal_shock}$): در این حالت یافتن حل آیزنتروپیک غیرممکن است و یک موج عمودی در قسمت واگرای نازل شکل می‌گیرد. مکان این شوک قائم به نسبت فشار دوطرف نازل (P_d/P_u) وابسته است. در این حالت چون جریان در گلوگاه خفه شده‌است، جریان جرمی مانند حالت قبلی، با جایگذاری $pr = pr_{crit}$ از رابطه (۴)، به‌دست می‌آید؛ اما به دلیل غیرآیزنتروپیک بودن جریان، میدان انرژی KE اعتبار خود را از دست می‌دهد. لذا در بخش ۴ میدان ظرفیتی NIKE برای جریان غیرآیزنتروپیک معرفی می‌شود.

لازم به ذکر است، در این حالت چون فشار در صفحه خروجی با فشار پشت برابر است، نیروی پیشرانش فقط مؤلفه $\dot{m}v_e$ خواهدداشت و مؤلفه پیشرانش فشاری $(P_e - P_d)A_e$ حذف خواهدشد.

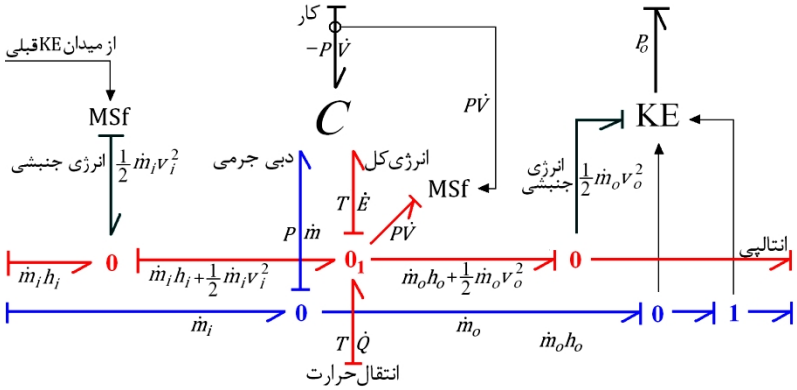
ناحیه III ($pr \rangle pr_{crit(exit)sub}$): جریان درون نازل زیرصوت و آیزنتروپیک است. چون جریان در گلوگاه از حالت خفگی خارج شده‌است، لذا دبی جرمی تابعی از نسبت فشار P_d/P_u خواهدبود و برای محاسبه جریان جرمی با جایگذاری $pr = P_d/P_u$ می‌توان از رابطه (۴) استفاده نمود. لازم به ذکر است چون از نسبت فشار در مقطع خروجی استفاده شده‌است، بنابراین بجای سطح مقطع گلوگاه نازل بایستی از سطح مقطع خروجی نازل استفاده‌شود. عدد ماخ خروجی زیرصوت نیز با معلوم بودن A_e/A^* به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان KE می‌شود. چون فشار در صفحه خروجی با فشار پشت برابر است، لذا مانند حالت قبلی نیروی پیشرانش مؤلفه فشاری ندارد.

باتوجه به موارد مذکور، در رابطه پیشنهادی کارنوپ برای نازل آیزنتروپیک (رابطه (۳))، pr برای نازل همگرا- واگرا به‌صورت رابطه (۵) اصلاح می‌شود:

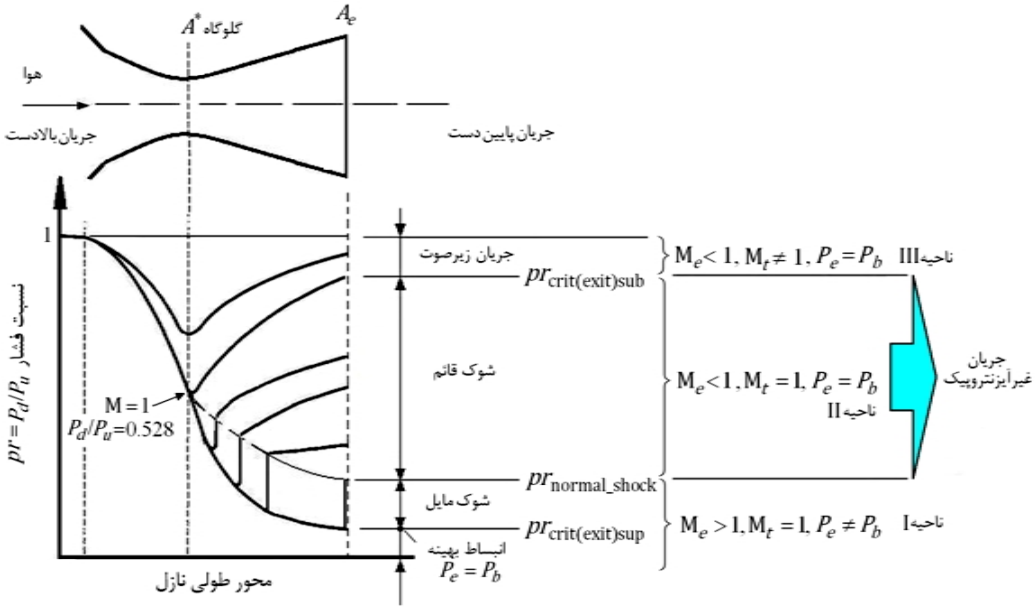
$$pr = \begin{cases} \frac{P_d}{p_u} & \frac{P_d}{P_u} \rangle pr_{crit(exit)sub} \text{ اگر} \\ pr_{crit} & \text{آیزنتروپیک} \quad \text{غیر } pr_{(normal-shock)} \langle \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{crit(exit)sub} \text{ اگر} \\ pr_{crit} & \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{(normal-shock)} \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۵)$$

۴- میدان انرژی جنبشی NIKE برای جریان غیرآیزنتروپیک

همان‌طورکه گفته‌شد، وقتی ($pr_{crit(exit)sub} \rangle pr \rangle pr_{normal_shock}$)، شوک قائم در قسمت واگرای نازل اتفاق می‌افتد. در این حالت، برای به‌دست آوردن فشار و نرخ انرژی جنبشی در صفحه خروجی، نمی‌توان از روابطی که برای میدان انرژی KE بیان شد استفاده‌کرد. لذا میدان انرژی NIKE برای جریان غیرآیزنتروپیک معرفی می‌گردد. ورودی و خروجی‌های میدان جدید دقیقاً با میدان انرژی KE یکسان هستند و تنها تفاوت آن نحوه محاسبه خروجی‌های f_1, e_2 است (فشار خروجی و نرخ انرژی جنبشی در شکل ۲) که برای آن بایستی از روابط شوک قائم استفاده نمود. در این حالت به دلیل غیرآیزنتروپیک بودن جریان، برای محاسبه عدد ماخ خروجی، نمی‌توان از رابطه (۳) استفاده کرد. لذا مقدار P_d/P_u به عنوان باند اطلاعاتی وارد میدان انرژی NIKE شده و از آنجا با استفاده از روابط شوک قائم، عدد ماخ خروجی محاسبه می‌شود.



شکل ۳ میدان ظرفیتی بهینه‌شده



شکل ۴ توزیع فشار در نازل همگرا واگرا به ازای نسبت فشارهای مختلف

از طرف دیگر برای استفاده از روابط شوک قائم، بایستی محل وقوع شوک معلوم باشد. به این منظور در ابتدا فرض می‌شود، شوک درست در صفحه خروجی اتفاق افتاده است. با این فرض، فشار در صفحه خروجی محاسبه می‌شود. اگر فشار به‌دست آمده از فشار پشت کمتر بود یعنی شوک قائم در قسمت‌های داخلی نازل اتفاق افتاده و لذا محل فرضی شوک را به اندازه ΔA به سمت داخل حرکت داده و محاسبات مجدداً انجام می‌شود. این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد تا فشار به‌دست‌آمده در صفحه خروجی برابر فشار پشت شود. الگوریتم و روابط مورد نیاز برای به دست آوردن عدد ماخ خروجی و مقادیر f_1, e_2 در شکل ۵ نشان داده‌شده‌است.

۵- شبیه‌سازی و اعتبارسنجی

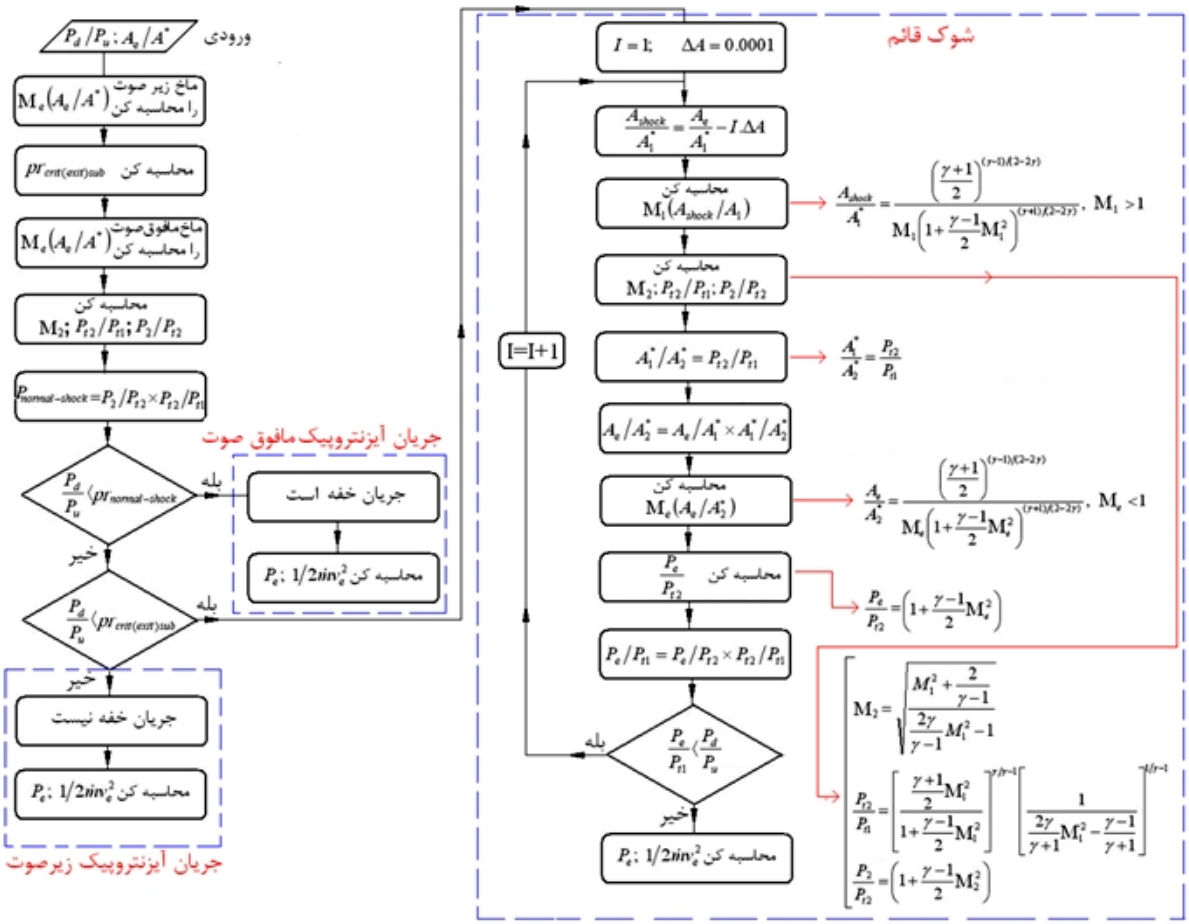
در مجموعه مخزن و نازل همگرا- واگرای نشان داده‌شده در شکل۶-الف، فرض شده که در زمان t=0 مخزن با فشار ۲۰۰ بار از هوا پرشده‌باشد. باندگراف سیستم مذکور بادرنظرگرفتن اثرات انرژی جنبشی، مومنتوم و اثرات مربوط به ایجاد شوک قائم، در شکل ۶- (ب) رسم شده‌است. برای نشان دادن قابلیت مدل‌سازی به روش باندگراف، ظرفیت حرارتی، انتقال حرارت هدایتی و جابجایی آزاد نیز درنظر گرفته شده‌است. مقاومت حرارتی ناشی از جابجایی آزاد (R_{conv}) تابعی از اختلاف دمای مخزن با محیط بیرون است که برای محاسبه آن می‌توان از روابط تجربی در مرجع [۱۲]، استفاده نمود. باتوجه به محدود شدن حرکت مجموعه توسط فنر و دمپر، از انتقال حرارت جابجایی اجباری صرف‌نظر شده‌است.

در شکل۶-ب باند اطلاعاتی که از سمت میدان ظرفیتی C به سمت المان اینرسی I می‌رود، نشان دهنده جرم لحظه‌ای مجموعه مخزن و گاز است که به دلیل خروج گاز، این جرم هرلحظه کاهش می‌یابد. همچنین باتوجه به اینکه جمع جبری متغیرهای سعی در المان 1_1 شکل ۶-ب، برابر صفر است، بنابراین اندازه حرکت(p) المان I و جابجایی (q) المان C از رابطه (۶) به‌دست می‌آیند:

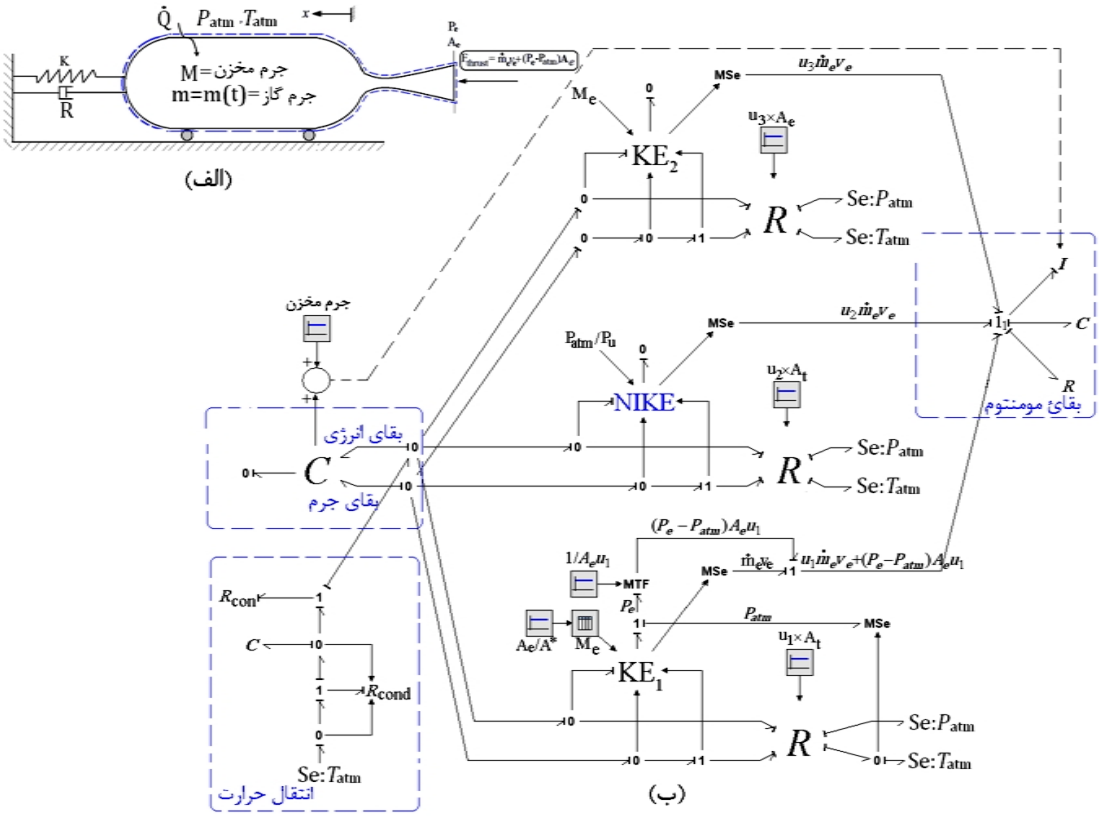
$$\dot{p} = e = \frac{d}{dt}((M+m)v)$$
$$= u_1\dot{m}_e v_e + u_2\dot{m}_e v_e + u_3\dot{m}_e v_e + (P_e - P_{atm})A_e u_1 - R.v - kq$$

$$\dot{q} = f = \frac{p}{(M+m)} \qquad (۶)$$

روابط نشان داده‌شده در اولین رابطه (۷) همان معادله مومنتوم است که در مدل کارنوپ درنظر گرفته نشده بود. رابطه مذکور دارای فرم $\sum f = ma$ است. بنابراین این مسئله را می‌توان مشابه هر مسئله دیگری حل نمود با این تفاوت که در این حالت جرم m تابعی از زمان است [۱۳] که به‌صورت باند اطلاعاتی وارد المان I می‌شود. ملاحظه می‌شود در مدل رسم شده علاوه بر اینکه انرژی جنبشی در مقطع خروجی نازل درنظر گرفته شده‌است، از خروجی میدان ظرفیتی KE و NIKE می‌توان معادله مومنتوم که در مدل کارنوپ از آن صرف‌نظر شده بود [۱۱] را به‌دست آورد.



شکل ۵ الگوریتم محاسبه فشار و انرژی جنبشی در المان NIKE



شکل ۶ الف- شماتیک مخزن و نازل همگرا-واگرا ب- باندگراف سیستم

جدول ۱ پارامترهای استفاده شده برای شبیه‌سازی

پارامتر	واحد	مقدار	نماد
حجم مخزن	m^3	۰/۰۱۷	V
فشار اولیه	bar	۲۰۰	$P_{initial}$
دمای اولیه	K	۳۰۰	$T_{initial}$
فشار محیط	bar	۱	P_{atm}
دمای محیط	K	۳۰۰	T_{atm}
وزن مخزن	kg	۱۳/۵	$mass$
ظرفیت گرمایی مخزن	J/(kg.K)	۱۳۰۰	C
مقاومت هدایتی مخزن	w/K	۰/۰۰۶	R_{cond}
نسبت گرمای ویژه گاز	--	۱/۴	γ
ثابت گاز	J/(kg.K)	۲۹۶/۸	R
گرمای ویژه فشار ثابت	J/(kg.K)	۱۰۲۴	C_p
سطح مقطع گلوگاه نازل	mm^2	۳/۱۴	A^*
نسبت سطح خروجی به گلوگاه	--	۲/۰۰۵	Ae/A^*
ضریب دمپر ویسکوز	N.sec/m	۴۰	R
ضریب فنریت	N/m	۱۰۰۰	k

در شکل۶-ب، پارامترهای کنترلی u_1,u_2,u_3 نیز به‌صورت روابط (۷) زیر تعریف می‌شوند:

$$u_1 = 1 \quad \frac{P_d}{P_u} \rangle pr_{\text{crit(exit) sub}} \text{ اگر } u_1 = 0 \text{ در غیر این صورت}$$

$$u_2 = 1 \quad pr_{(\text{normal-shock})} \langle \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{\text{crit(exit)sub}} \text{ اگر } u_2 = 0 \text{ در غیر این صورت}$$

$$u_3 = 1 \quad \frac{P_d}{P_u} \langle pr_{(\text{normal -shock})} \text{ اگر } u_3 = 0 \text{ در غیر این صورت} \tag{۷}$$

لازم به ذکر است، همان طور که در بخش ۳ گفته‌شد، درحالتی‌که جریان در خروجی نازل زیرصوت باشد، فشار در صفحه خروجی با فشار محیط بیرون برابر می‌شود. به‌همین دلیل در خروجی میدان KE_2 و NIKE نیروی تراست فشاری حذف شده‌اند.

شبیه‌سازی باتوجه به پارامترهای داده‌شده در جدول ۱ و توسط نرم‌افزار تونتی‌سیم انجام شده‌است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های ۷ تا ۱۱ ترسیم شده‌اند.

شکل ۷ تغییرات دما و فشار مخزن را برای مدل کارنوپ و مدل بهینه‌شده نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه‌می‌شود در مدل بهینه شده چون مقداری از انرژی سیال به‌صورت انرژی جنبشی از حجم کنترل خارج می‌شود، لذا دمای و فشار حجم کنترل نسبت به مدل کارنوپ بیشتر کاهش می‌یابد. از طرف دیگر کاهش بیشتر دما در مدل بهینه‌شده، باعث افزایش اختلاف دمای حجم کنترل نسبت به محیط اطراف و نهایتاً افزایش نرخ انتقال حرارت به حجم کنترل می‌گردد؛ بنابراین بخشی از انرژی حجم کنترل که به‌صورت انرژی جنبشی از سیستم خارج شده‌بود، توسط انتقال حرارت از محیط اطراف جبران می‌شود. به‌همین دلیل در لحظات کمتر از ۴۵ ثانیه، فشار محاسبه‌شده توسط مدل کارنوپ با فشار محاسبه‌شده توسط مدل بهینه شده برهمدیگر منطبق می‌شوند.

در شکل ۸ مکان ایجاد شوک قائم نشان داده شده‌است. لازم به‌ذکر است در طی فرآیند تخلیه کامل مخزن، هر سه نوع جریان (آیزنتروپیک مافوق، آیزنتروپیک مادون‌صوت و شوک قائم) درون نازل اتفاق خواهد افتاد. به خصوص وقتی نسبت فشار دوطرف نازل به $pr_{(\text{normal-shock})}$ کاهش می‌یابد، یک شوک قائم در دهانه خروجی اتفاق می‌افتد. با کاهش بیشتر فشار مخزن و در نتیجه افزایش P_d/P_u، شوک قائم به‌طرف گلوگاه نازل حرکت می‌کند تا اینکه در زمان ۱۴۹ ثانیه $P_d/P_u = pr_{\text{crit(exit)sub}}$ شود. در این حالت شوک قائم از بین رفته و جریان درون نازل کاملاً به‌صورت آیزنتروپیک منبسط می‌شود.

در شکل ۹ نیز تغییرات عدد ماخ خروجی نشان داده شده‌است. ملاحظه می‌شود تازمانی که شوک قائم درون نازل اتفاق نیافتاده‌است، عدد ماخ در صفحه خروجی M_e=۲/۲است. با ایجاد شوک قائم، عدد ماخ با یک ناپیوستگی به کمتر از یک کاهش می‌یابد. وقتی نسبت فشار دوطرف نازل به $P_d/P_u = pr_{\text{crit(exit)sub}}$ رسید، شوک قائم از بین رفته و جریان نیز از حالت خفگی خارج می‌شود. از این نقطه به بعد چون جریان از حالت خفگی خارج شده‌است، نرخ کاهش عدد ماخ در صفحه خروجی نیز افزایش می‌یابد.

در شکل ۱۰ تغییرات سرعت و جابجایی مخزن نسبت به زمان ترسیم شده‌است. ملاحظه می‌شود در اثر نیروی پیشرانش، فنر با حرکت نوسانی میرا فشرده می‌شود. همزمان با کاهش فشار مخزن، مقدار نیروی پیشرانش نیز کم می‌شود تا اینکه نیروی فشردگی فنر بر نیروی پیشرانش غلبه کند. در این حالت (بعد از مستهلک شدن نوسانات) فنر تمایل به برگشتن به طول اولیه خود را دارد و هنگامی که نیروی پیشرانش به مقدار صفر رسید، مخزن نیز به نقطه اولیه خود بازمی‌گردد.

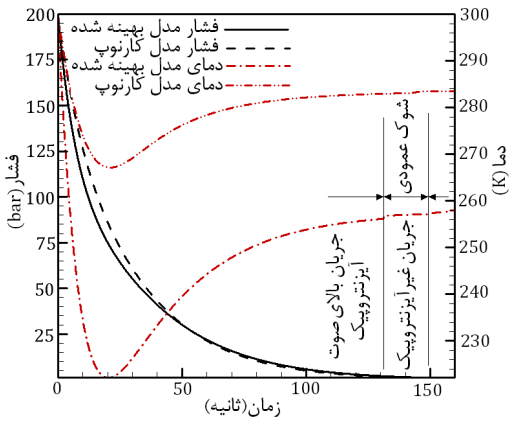
در شکل‌های ۱۱-الف و ب نیز سهم نیروی پیشرانش ناشی از مومنتوم و نیروی پیشرانش فشاری کاهش نشان داده است. ملاحظه می‌شود با ایجاد شوک قائم، سهم نیروی پیشرانش ناشی از مومنتوم (به دلیل کاهش عدد ماخ در خروجی نازل) کاهش می‌یابد که این کاهش، با افزایش نیروی پیشرانش فشاری جبران می‌شود.

در شکل ۱۱ – ج نیز کل نیروی پیشرانش به‌دست آمده از نتایج شبیه‌سازی، با نتایج تحلیلی مقایسه شده که با نتایج تحلیلی مطابقت دارد. برای مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج تحلیلی، از رابطه (۸) که مقدار نیروی پیشرانش را در یک نازل همگرا- واگر محاسبه می‌کند، استفاده شده است [۱۴].

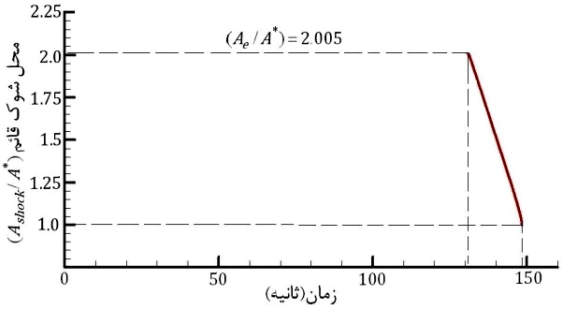
$$F_{\text{thrust}} = \left(\sqrt{\left(\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_{\text{total}}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right)} + \frac{P_e - P_{\text{atm}}}{P_{\text{total}}} \frac{A_e}{A^*} \right) A^* P_{\text{total}} \tag{۸}$$

۶- نتیجه‌گیری

در جریان غیرآیزنتروپیک درون یک نازل همگرا-واگرا که شوک عمودی در قسمت واگرا اتفاق می‌افتد، علاوه بر درنظر گرفتن اثرات انرژی جنبشی و معادلات مومنتوم، لازم است اثرات ناشی از شوک قائم نیز مدنظر قرارگیرد. به این منظور میدان انرژی NIKE معرفی شد. میدان جدید علاوه بر درنظر گرفتن اثرات انرژی جنبشی و مومنتوم سیال، قادر است محل ایجاد شوک را متناسب با نسبت فشار دوطرف نازل محاسبه نماید. چگونگی کاربرد میدان جدید در قالب یک مثال ترموسیالاتی توضیح داده‌شد. نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی توسط نرم‌افزار تونتی‌سیم نشان داد که نیروی پیشرانش به‌دست آمده از شبیه‌سازی، مطابقت خوبی با نتایج تحلیلی دارد. از آنجاییکه مدل مذکور قابلیت پیاده‌سازی روی نرم‌افزارهایی مانند تونتی‌سیم را دارد، بنابراین بدون نیاز به استخراج معادلات و حل آن‌ها، می‌توان از مدل مذکور برای مدل‌سازی نیروی پیشرانش حالت گذرا استفاده نمود.



شکل ۷ مقایسه تغییرات دما و فشار مخزن برای مدل کانوپ [۱۱] و مدل بهینه شده

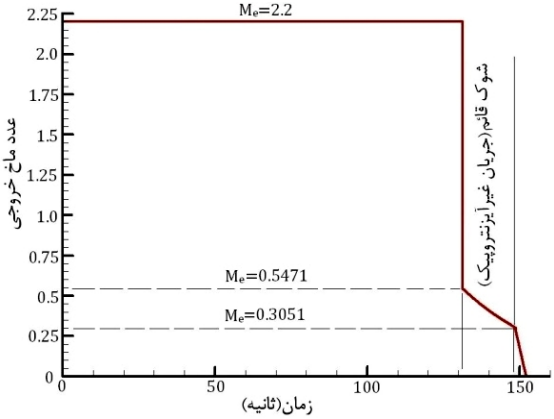


شکل ۸ تغییرات مکان ایجاد شوک قائم

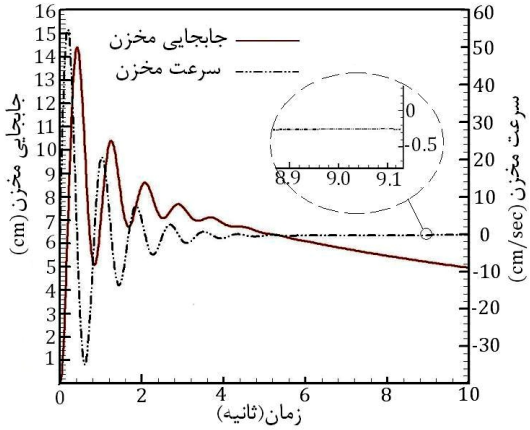
۷- پیوست

در یک نازل همگرا واگرا که نسبت فشار بالادست به فشار محیط به اندازه‌ای بالاست که جریان در خروجی نازل مافوق صوت باشد، عدد ماخ خروجی از رابطه (۹) به‌دست می‌آید:

$$\frac{A_e}{A^*}=\frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}}{\mathrm{M_e}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M_e}^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2-2\gamma}}} \qquad (۹)$$

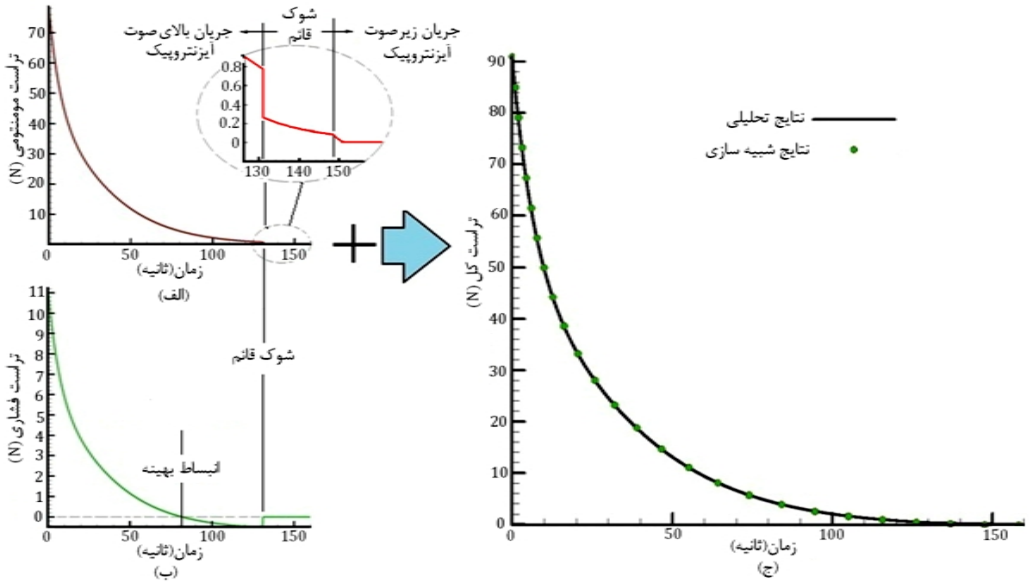


شکل ۹ تغییرات عدد ماخ خروجی



شکل۱۰ جابجایی و سرعت مخزن

که در آن، γ نسبت گرمای ویژه گاز ($\gamma=c_p/c_v$) و $\mathrm{M_e}$ عدد ماخ در خروجی نازل و A_e, A^* نیز به ترتیب به سطح مقطع گلوگاه و سطح مقطع خروجی نازل اشاره می‌کند بنابراین با معلوم بودن عدد ماخ در خروجی، سرعت گاز در خروجی نازل، از رابطه $v_e=\mathrm{M_e}.a$ به‌دست خواهدآمد. که در آن، a سرعت صوت در مقطع خروجی است و مقدار آن از رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید:



شکل۱۱ الف- نیروی پیشران مومنتوم ب-نیروی پیشران فشاری ج- نیروی پیشران کل

$$a=\sqrt{\gamma RT} \quad \Rightarrow \quad v_e=\sqrt{\gamma RT}.\mathrm{M_e} \tag{۱۰}$$

که در آن، R ثابت گازها (J/(kg.K)) و T دمای استاتیک گاز در مقطع خروجی است و مقدار آن از رابطه (۱۱) به‌دست می‌آید:

$$T=T_{total}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M_e^2}\right)^{-1} \tag{۱۱}$$

بنابراین چنانچه مقادیر $P_{\mathrm{total}}, \dot{m}, \mathrm{M}_e$ در هرلحظه معلوم باشند، نرخ انرژی جنبشی که از سیستم خارج می‌شود از رابطه (۱۲) به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{1}{2}\dot{m}_e v_e^2=\frac{1}{2}\dot{m}_e\gamma RT_{\mathrm{total}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M_e^2}\right)^{-1}\mathrm{M_e^2} \tag{۱۲}$$

به‌همین ترتیب اگر روابط آیزنتروپیک را برای فشار در مقطع خروجی بنویسیم، رابطه فشار استاتیک و فشار کل به‌صورت رابطه (۱۳) خواهدبود:

$$P_{\mathrm{static}}=P_{\mathrm{total}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M_e^2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \tag{۱۳}$$

بنابراین باتوجه به روابط (۱۲) و (۱۳) باندگراف میدان انرژی جنبشی KE به‌صورت نشان داده‌شده در متن مقاله (شکل۲) پیشنهاد می‌گردد.

۸- مراجع

[1] A. Mukherjee, R. Karmakar, and A.K. Samantaray. *Bond Graph in Modeling, Simulation and Fault Identification* . I.K. International Publishing House, New Delhi, India, 2006.

[2] W. Borutzky, Bond Graph Methodology Developmentand Analysis of Multidisciplinary Dynamics System Models, Springer-Verlag, London, 2010.

[3] W. Borutzky, Bond Graph Modeling and Simulation of Multidisciplinary Systems - An Introduction, *J. Simulation Modeling Practice and Theory*, Vol. 17, No.1 , pp. 3-21 , 2009.

[4] J. F. Broenink. *20-sim software for hierarchical bond-graph/block-diagram models*, Accessed 1999; http://www.20sim.com .

[5] R. Jacob-Macoy, *Lorenz Simulation*. Accessed 2007 ; http://www.lorsim.be/ Default.htm

[6] Samantaray, A. K., and Mukhejee, A, *Manual of System Modeling by Bond graph Language Simulation: SYMBOLS* Ver 1.0, IIT Kharagpur.1997.

[7] B. Ould Bouamama, K. Medjaher, A.K. Samantaray, and M. Staroswiecki. Supervision of an industrial steam generator. Part I: Bond graph modelling. *Control Engineering Practice* , Vol. 14, No.1 , pp.71–83, 2006.

[8] M. A. Djeziri, B. Ould Bouamama, R. Merzoudki, Modeling and robust FDI of steam generator using uncertain bond graph model. *Journal of Process Control*, Vol. 19, No. 1, pp.149-162, 2009.

[9] K. Medjaher, A.K. Samantaray, and B. Ould Bouamama. Bond graph model of a vertical U-tube steam condenser coupled with a heat exchanger. *Simulation Modelling Practice and Theory* , Vol. 17, No. 1, pp.228–239, 2009.

[10] J. U. Thoma and G. Mocellin. *Simulation with Entropy in Engineering Thermodynamics*, New York, Springer, pp.52-55, 2006.

[11] D.C. Karnopp, D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. *System Dynamics - Modeling and Simu-lation of Mechatronic Systems*. 3th edition, John Wiley & Sons Inc., pp. 455-462, 2006.

[12] F. P. incropera, D. P. Dewitt. *Fundamental of Heat and Mass Transfer*, 6th Edition, John Wiley & Sons Inc., pp.550-555, 2007.

[13] A. sinaee, *Engineering Mechanics Dynamics*, 4th edition., Mashad: entesharat Nama, pp.309-311, 1998.(In persian).

[14] George P. Sutton,O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements: An Itroduction to the engeering of rockets*, 7th Edition, John Wiley & Sons, pp. 62-63, 2000.