



پیش بینی عملکرد چرخ دنده های مارپیچ تحت رژیم روان کاری مخلوط

ابوالفضل ابراهیمی سرست¹، صالح اکبرزاده^{2*}

1- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

*اصفهان، صندوق پستی 8415683111، s.akbarzadeh@cc.iut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 30 مرداد 1392

پذیرش: 15 مهر 1392

ارائه در سایت: 06 مهر 1393

کلید واژگان:

چرخ دنده مارپیچ

روان کاری

زبری سطح

ضریب اصطکاک

ضخامت فیلم روان کار

چرخ دنده ها یکی از اجزای بسیار مهم در سیستم های انتقال قدرت می باشند. از بین انواع چرخ دنده ها، چرخ دنده های مارپیچ به علت ظرفیت بالای انتقال توان و سروصدای کمتر بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند. هدف از این تحقیق، ارائه مدلی برای تحلیل درگیری یک دندانه چرخ دنده مارپیچ با لحاظ نمودن اثرات دما و زبری سطح است. در مدل حاضر هر چرخ دنده مارپیچ از تعداد محدودی چرخ دنده ساده ی باریک تشکیل شده که هر یک نسبت به قبلی به میزان زاویه کوچکی دوران داشته است. همچنین از جایگزینی دو استوانه معادل به جای هر نقطه از تماس دو چرخ دنده استفاده شده است. با توجه به این که رژیم حاکم بر روان کاری چرخ دنده ها رژیم الاستوهیدرودینامیک مخلوط است، بار کلی وارد شده بر دندانه، بین روان کار و زبری ها تقسیم شده است. تحلیل درگیری و روان کاری دو چرخ دنده مارپیچ بر اساس روش تقسیم بار انجام شده است و مشخصه های عملکردی مانند ضخامت لایه روغن، ضریب اصطکاک و افزایش دمای روغن پیش بینی شده است. نتایج حاصل از روش تقسیم بار با نتایج سایر روش ها مقایسه شده است. دقت قابل قبول و زمان اجرای کوتاه از ویژگی های مطالعه ی پیش رو است.

Prediction of Performance of Helical Gears under Mixed- Lubrication Regime

Abolfazl Ebrahimi Serest¹, Saleh Akbarzadeh^{2*}

1- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

*P.O.B. 8415683111 Isfahan, s.akbarzadeh@cc.iut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 August 2013
Accepted 07 October 2014
Available Online 28 September 2014

Keywords:
Helical gear
Lubrication
Surface roughness
Friction coefficient
Film thickness of lubricant

ABSTRACT

Gears are one of the most important elements of any power transmission system. Among all types of gears, helical gears are more common due to their high capacity in power transmission as well as lower level of noise. The aim of this study is to present a model for analyzing the contact of teeth of helical gears considering thermal effects and surface roughness. In the present model, each helical gear is divided to several narrow spur gears in which each of the spur gears have a small rotation angle relative to the previous one. Also each contact point of gears is replaced with contact of two equivalent cylinders. Considering the fact that the governing regime for gears lubrication is the mixed-elastohydrodynamic regime, the total load of a tooth is carried by lubricant and asperities' contact. Meshing and lubrication analysis of a pair of helical gears is conducted based on the load-sharing concept and parameters such as film thickness, friction coefficient and temperature rise are predicted. The predictions based on the load-sharing concept are compared to other published results. Acceptable accuracy, short execution time along with considering thermal and roughness effects are some of the major characteristics of this study.

1- مقدمه

تاکنون مقاله های مختلفی در زمینه تحلیل الاستوهیدرودینامیک و تریبولوژی چرخ دنده ها ارائه شده است. محققین در تحلیلشان از روش های گوناگونی استفاده کردند و اغلب مطالعات خود را بر روی چرخ دنده های ساده انجام داده اند. چرخ دنده مارپیچ با توجه به ویژگی های مناسبش، به طور مثال ظرفیت توان بالا و سروصدای کم، از پرکاربردترین چرخ دنده ها است. دندانه های این چرخ دنده برخلاف چرخ دنده ساده، موازی با محور چرخ دنده نیستند.

در بسیاری از تحقیقات انجام شده پیرامون تحلیل هندسی و بارگذاری در

چرخ دنده ها را می توان از اصلی ترین ابزار انتقال توان دانست که با توجه به حجم وسیع کاربردها، امروزه دارای تنوع و محاسبات پیچیده زیادی در طراحی اش است. مسلماً شناخت و آگاهی کامل از شکل هندسی، روابط سینماتیکی، تحلیل نیروها و بررسی عملکرد انواع چرخ دنده ها برای طراحی و ساخت یک قطعه صنعتی امری اجتناب ناپذیر است. بحث تریبولوژی در چرخ دنده ها، که به بررسی سایش اصطکاک و روان کاری می پردازد، بیش از یک قرن است که مورد توجه و علاقه محققین این حوزه بوده است [1].

Please cite this article using:

A. Ebrahimi Serest, S. Akbarzadeh, Prediction of Performance of Helical Gears under Mixed- Lubrication Regime, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 167-176, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

ایجادشده در زبری‌ها بر اساس بار اعمال شده و ارتفاعشان به سه حالت الاستیک، الاستیک-پلاستیک و پلاستیک تقسیم می‌شوند و در نهایت نیروی اصطکاک ایجادشده بر اثر فیلم روان کار و تماس زبری‌ها محاسبه می‌شود. با استفاده از مدل حاضر می‌توان پارامترهایی مانند ضریب اصطکاک در هر نقطه از تماس و همچنین میزان بار تحمل شده توسط زبری‌ها را تعیین کرد.

2- مدل سازی

2-1- تحلیل هندسی چرخ‌دنده‌های مارپیچ

چرخ‌دنده مارپیچ از نظر ظاهری شبیه چرخ‌دنده ساده است. اما در تحلیل درگیری‌اش تفاوت‌های زیادی را می‌توان بین این دو نوع چرخ‌دنده مشاهده نمود که موجب پیچیدگی قابل توجهی در تحلیل خواهد شد. در شکل 1 موقعیت‌های خط تماس در طول سیکل درگیری یک دندانه‌ی این دو نوع چرخ‌دنده نشان داده شده است. خط تماس در چرخ‌دنده ساده موازی با محور چرخ‌دنده در طول درگیری ثابت است درحالی‌که در چرخ‌دنده مارپیچ، خط تماس زاویه‌ای برابر با زاویه مارپیچ با محور می‌سازد و در طول درگیری متغیر است.

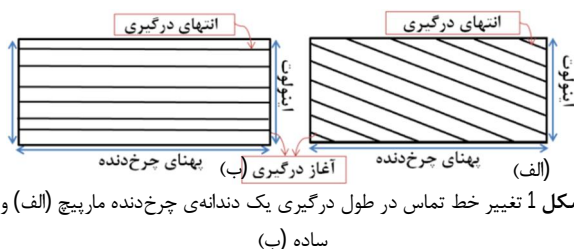
در چرخ‌دنده مارپیچ برای تعیین موقعیت نقطه تماس (c) در هر لحظه می‌بایست دو متغیر را تعریف کرد که در این مدل از دو متغیر بی‌بعد ξ و η استفاده می‌شود [13]. مفهوم فیزیکی متغیر اول، نسبت شعاع انحنا در نقطه تماس به گام مبنای دایره‌ای است. متغیر دوم (η)، موقعیت نسبی پینیون و چرخ‌دنده درگیر با هم را نشان دهد. برای محاسبه ξ از معادله (1) استفاده می‌شود [13].

$$\xi = \frac{Z}{2\pi} \left(\frac{r_c^2}{r_b^2} - 1 \right) \quad (1)$$

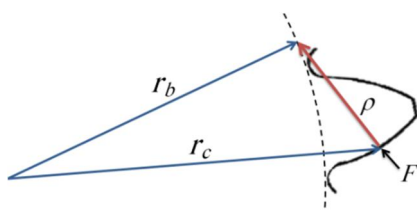
که Z تعداد دندانه‌ها، r_c فاصله مرکز چرخ‌دنده تا نقطه تماس c و r_b شعاع مبنا است که در شکل 2 نشان داده شده‌اند. شعاع انحنا نقاط تماس بر روی اینولوت دندانه هم با استفاده از معادله (1) و شکل 2، توسط معادله (2) محاسبه می‌شود:

$$\rho = \sqrt{r_c^2 - r_b^2} = r_b \frac{2\pi}{Z} \xi \quad (2)$$

در مدل حاضر سیکل درگیری یک دندانه از ورود به درگیری تا خروج آن از درگیری مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ابتدا بایستی مجموع طول خطوط



شکل 1 تغییر خط تماس در طول درگیری یک دندانه‌ی چرخ‌دنده مارپیچ (الف) و ساده (ب)



شکل 2 موقعیت یک نقطه تماس بر اینولوت دندانه

چرخ‌دنده‌های مارپیچ، معمولاً چرخ‌دنده مارپیچ به چندین چرخ‌دنده ساده باریک که بر یک محور سوار شده‌اند و هر یک منحصرأ زاویه کوچکی حول محور مشترک چرخیده‌اند، تقسیم می‌شود. این روش توسط هاینز و اولرتون [2] معرفی شده است و تنها زمانی اعتبار دارد که منطقه تماس در مسیر غلتش، باریک باشد [3]. هدلند و لتواریا [4] در سال 2007، مطالعه‌ای روی مدل‌سازی تماس چرخ‌دنده مارپیچ با در نظر گرفتن تغییرشکل دندانه انجام دادند و توزیع نیروی تماسی دندانه در طول درگیری را به‌دست آوردند.

بعد از انجام تحلیل درگیری دو چرخ‌دنده مارپیچ، مسئله بعدی تعیین ضخامت فیلم و ضریب اصطکاک برای هر نقطه در طول خط تماس است. رژیم حاکم بر روانکاری در چرخ‌دنده‌ها به‌صورت روان کاری مخلوط است [5]. در این حالت لایه نازکی از روان کار بین دو سطح تشکیل می‌شود اما تماس بین زبری‌های سطح نیز وجود دارد. البته این میزان تماس کمتر از حدی است که رژیم روان کاری، رژیم مرزی شود. روش حل این مسئله در اغلب مقالات موجود توسط حل همزمان دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای شامل معادله تعادل بار، معادله رینولدز و معادله تغییرشکل الاستیک سطح است. الگوریتم‌های حل این روش اغلب زمان‌بر و انجام دادنشان طاقت‌فرسا است. تعدادی از مطالعات تجربی در این حوزه، توجه خود را معطوف به محاسبه ضریب اصطکاک کردند که اغلب آن‌ها از دیسک‌هایی تحت شرایط مشابه با یک زوج چرخ‌دنده استفاده کردند [6]. آن‌ها با استفاده از نتایجشان، فرمول‌های تجربی برای محاسبه ضریب اصطکاک ارائه نمودند. در ادامه محققین مدل‌هایی با دقت بالاتر از فرمول‌های تجربی ارائه دادند اما همچنان دقت این مدل‌ها کاملاً وابسته به دقت معادلات تجربی اولیه ضریب اصطکاک است که در مدلشان به‌کار برده شده است [7]. این معادلات تجربی ضریب اصطکاک، عمومی نیستند و اغلب برای برخی از محدوده شرایط کاری و هندسی کاربرد دارند.

در بعضی از مقاله‌های ارائه‌شده، برای تعیین ضخامت فیلم روان کار در طول خط گام تماس چرخ‌دنده مارپیچ از رابطه دوسون و هیگینسون [8] استفاده شده است [9]. این رابطه در واقع یک منحنی برازش‌شده برای بیان ضخامت فیلم بر حسب مشخصات هندسی، سرعت، بار و مشخصات روغن و برای سطوح صیقلی است. فلادین و اندرسون [10] سایش در چرخ‌دنده‌های مارپیچ را بدون تحلیل جزئیات روان کاری مطالعه کردند. کرو و همکاران [11] در سال 2011، تحلیل روان کاری در چرخ‌دنده مارپیچ را با در نظر گرفتن فرض‌های دقیق مانند تحلیل زبری و دمایی ارائه دادند. آن‌ها نشان دادند که ضخامت لایه روان کار، معمولاً برای جدا کردن دو سطح تماس چرخ‌دنده از هم کافی نیست. تحت این شرایط هر دو نیروی برشی فیلم روان کار و تماس زبری در تولید اصطکاک شرکت داشتند. اما زمان لازم برای پاسخ‌گویی مدل آن‌ها طولانی بود. جانسون و همکارانش [12] روش تقسیم بار را برای رژیم روان کار مخلوط معرفی کردند که اکبرزاده و خوانساری [5] از این روش برای تحلیل هم دمای چرخ‌دنده ساده استفاده کردند.

هدف از این تحقیق، ارائه مدلی برای تحلیل روان کاری چرخ‌دنده مارپیچ بر اساس روش تقسیم بار است. در این مدل، ابتدا چرخ‌دنده مارپیچ به تعداد زیادی چرخ‌دنده ساده باریک برش زده می‌شود. سپس هر یک از نقاط تماس دو چرخ‌دنده با دو استوانه معادل جایگزین می‌شوند. با توجه به فرض تماس باریک هرترزین، تحلیل روان کاری بر روی این استوانه‌های جایگزین انجام خواهد شد. تحلیل روان کاری بر اساس روش تقسیم بار جانسون [12] انجام می‌شود و در آن ضخامت فیلم روان کار تعیین می‌شود. تغییر شکل‌های

باریک، طبق رابطه (7) برابر است با [13]:

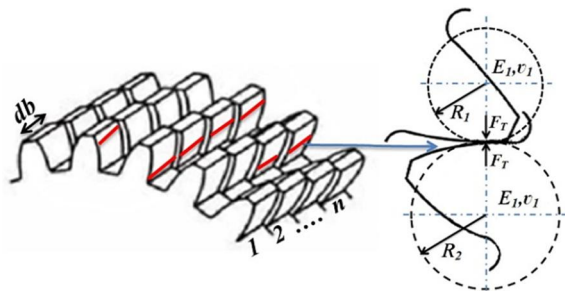
$$dl = b \frac{(\xi_{\max} - \xi_{\min})}{(n-1) \times (\varepsilon_{\beta} \times \cos \psi_b)} \quad (7)$$

که $\xi_{\max}$ و $\xi_{\min}$ مقادیر پارامتر اینولوت داخلی و بیرونی نقطه تماس پینیون هستند. مسئله‌ای که اکنون باید بررسی شود، این است که در هر لحظه از درگیری، کدامیک از چرخ‌دنده‌های ساده باریک در تماس هستند. به عنوان مثال اگر چرخ‌دنده مارپیچ به n چرخ‌دنده ساده برش زده شود (شکل 3)، ابتدا باید بررسی کرد که خط تماس دندانه‌ی مورد نظر در این لحظه از درگیری، کدامیک از چرخ‌دنده‌های ساده را شامل می‌شود. خط تماس کامل بر روی یک دندانه، مشابه لحظه درگیری شکل 3 است که طول خط تماس بر روی دندانه وسط به بیش‌ترین مقدار خود رسیده است و کل اینولوت دندانه را شامل می‌شود. همان‌طور که در شکل 3 نشان داده شده است، برای هر نقطه بر روی پروفیل اینولوت چرخ‌دنده ساده، تماس دو چرخ‌دنده با تماس دو استوانه جایگزین می‌شود. شعاع این استوانه‌ها، برابر شعاع انحنای پروفیل اینولوت چرخ‌دنده و بار اعمال شده به دو استوانه نیز برابر بار اعمال شده در چرخ‌دنده ساده است. مدل تحلیل روان کاری که در قسمت بعدی آمده است بر اساس تماس دو استوانه است.

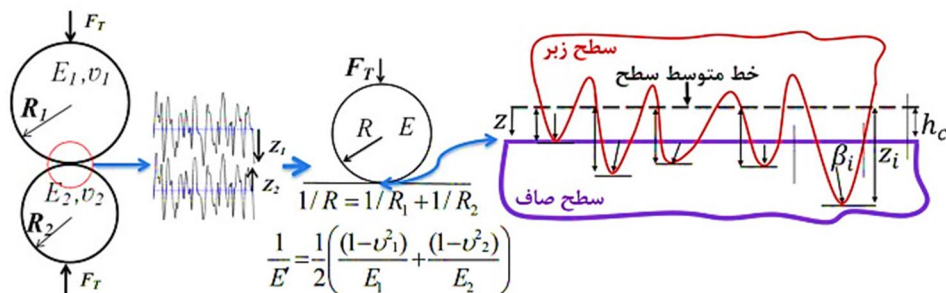
2-2- تحلیل روان کاری

برای انجام تحلیل روان کاری استوانه‌های جایگزین، ابتدا چند فرض صورت می‌گیرد. همان‌طور که در شکل 4 نشان داده شده است، تماس دو استوانه با تماس یک استوانه معادل بر روی یک سطح تخت جایگزین می‌شود. در این حالت، استوانه معادل دارای شعاع و مدول الاستیسیته معادل که در شکل 4 نشان داده شده است می‌باشد. همچنین سطح تخت دارای زبری معادل جمع زبری دو استوانه است. [14].

مسئله اساسی در روان کاری چرخ‌دنده‌ها، تعیین ضخامت فیلم روان کار و ضریب اصطکاک درگیری است. همان‌طور که گفته شد، رژیم حاکم بر روان کاری چرخ‌دنده‌ها معمولاً رژیم روان کاری مخلوط است. بنابراین قسمتی



شکل 3 خطوط تماس چرخ‌دنده مارپیچ در لحظه‌ای از درگیری



شکل 4 جایگذاری تماس دو استوانه زبر با دو سطح صاف و زبر

تماس چرخ‌دنده را در هر لحظه از سیکل درگیری مشخص نمود. تابع l_v معرفی‌شده در معادله (3)، تقریبی برای تابع انتگرال انرژی پتانسیل معکوس چرخ‌دنده است. می‌توان نشان داد که نحوه تغییرات این تابع، بیان‌گر نحوه تغییر طول کل خطوط تماس در طول درگیری است [13]. با توجه به این که در واقعیت سفتی دندانه در طول پهنای دندانه تغییر می‌کند، توزیع بار در راستای خط تماس غیریکنواخت خواهد بود. البته در این مدل، دندانه صلب فرض شده است و در نتیجه توزیع بار در طول خط تماس، یکنواخت است [13]:

$$I_v(\xi_0) = \frac{1}{b_0} \sum_{i=0}^{E_v} \left(\sin b_0 \left[\xi_{i,sup} - \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} \right] - \sin b_0 \left[\xi_{i,inf} - \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} \right] \right) \\ b_0 = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \\ \xi_{i,sup} = \xi_0 + i + \varepsilon_{\alpha} - \min(\xi_0 + i, 0) - \max(\xi_0 + i, \varepsilon_{\alpha}) \\ \xi_{i,inf} = \xi_0 + i - \varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\alpha} - \min(\xi_0 + i - \varepsilon_{\beta}, 0) - \max(\xi_0 + i - \varepsilon_{\beta}, \varepsilon_{\alpha}) \quad (3)$$

که E_v بخش صحیح نسبت تماس کلی ($\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} = E_v$) است. برای محاسبه طول مجموع خطوط تماس چرخ‌دنده در هر لحظه از سیکل درگیری $L(\xi_0)$ هم، از معادلات (3) و (4) می‌توان استفاده نمود. همچنین برای محاسبه تغییرات طول خط تماس یک دندانه در طول سیکل درگیری‌اش $l(\xi_0)$ ، از معادله (3) استفاده می‌شود و $E_v=1$ قرار داده می‌شود.

$$L(\xi_0) = \frac{I_v \times b}{(\varepsilon_{\beta} \times \cos \psi_b)} \quad (4)$$

در گام بعد، با استفاده از طول خط تماس به‌دست‌آمده و با توجه به فرض توزیع بار یکنواخت در طول خط تماس، مقدار بار بر واحد طول در موقعیت درگیری ξ_0 ، از معادله (5) محاسبه می‌شود:

$$f(\xi_0) = \frac{F}{L(\xi_0)} \quad (5)$$

با توجه به فرض توزیع بار یکنواخت، باری که دندانه در هر لحظه از درگیری تحمل می‌کند متناسب با طول خط تماس است. پس بار کل وارده بر یک دندانه در طول سیکل درگیری‌اش به صورت رابطه (6) بیان می‌شود

$$F_T = F \times \frac{l(\xi_0)}{L(\xi_0)} = L(\xi_0) \times l(\xi_0) \quad (6)$$

در شکل 3 لحظه‌ای از درگیری یک چرخ‌دنده مارپیچ نمایش داده شده است. از خط تماس مشاهده می‌شود که در این لحظه سه دندانه از چرخ‌دنده درگیر هستند و هر نقطه از خط تماس انحنای متفاوتی دارد. روش متداول برای مدل‌سازی هندسی چرخ‌دنده مارپیچ، تقسیم چرخ‌دنده مارپیچ (با پهنای b) به تعداد مشخصی (n) چرخ‌دنده ساده است. این کار با برش زدن چرخ‌دنده مارپیچ در راستای محور در فاصله‌های دیفرانسیلی برابر (db) صورت می‌گیرد. حالا تعداد محدودی چرخ‌دنده ساده با پهنای دیفرانسیلی حاصل شده است که هر یک نسبت به قبلی به‌اندازه‌ی زاویه کوچکی دوران کرده است. با این کار طبق رابطه (7) طول خط تماس (dl) بر روی هر چرخ‌دنده ساده

که در آن H_{EP} ، H_{EI} ، H_{RP} ، H_{RI} و H_{EP} اعداد بی‌بعدی هستند، که به‌صورت رابطه (14) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} H_{RI} &= 3M^{-1}, \quad H_{RI} = 2.62M^{-\frac{1}{5}}, \quad H_{RP} = 1.287L^{\frac{2}{3}}, \\ H_{EP} &= 1.311M^{-\frac{1}{8}L^{\frac{3}{4}}}, \quad H_C = h'_c U_{\Sigma}^{-0.5}, \\ L &= GU_{\Sigma}^{-0.5}, \quad M = WU_{\Sigma}^{-0.5}, \quad U_{\Sigma} = \frac{\eta_0 u}{E'R}, \quad G = \alpha E', \\ W &= \frac{F_N}{E'RB}, \quad h'_c = \frac{h_c}{R} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن H_C ضخامت لایه روان‌کار مرکزی بی‌بعد، L عدد بی‌بعد روان‌کار و M عدد بی‌بعد بار، U_{Σ} عدد بی‌بعد سرعت، G عدد بی‌بعد روان‌کار، W عدد بی‌بعد بار، و α هم ضریب لزجت فشار است [17و18].

البته این رابطه بر اساس رژیم روان‌کاری فیلم کامل روغن به‌دست آمده و اثرات زبری سطح در آن لحاظ نشده است. برای در نظر گرفتن زبری سطح، معادله بالا به شرحی که در برخی مراجع آمده است اصلاح می‌شود [19]. طبق معادله (15) داریم:

$$\begin{aligned} H_C &= \gamma_1^s \left[\left(H_{RI}^{\frac{7}{3}} + \gamma_1^{-\frac{14}{15}} H_{EI}^{\frac{7}{3}} \right)^{\frac{3s}{7}} + \left(H_{RP}^{-\frac{7}{2}} + H_{EP}^{-\frac{7}{2}} \right)^{\frac{-2s}{7}} \right]^{\frac{1}{5}} \\ s &= \frac{1}{5} \left(7 + 8e^{\left(\frac{-2H_{EI}}{H_{RI}} \right)^{\frac{2}{5}}} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

بنابراین می‌توان گفت معادله (15) معادله ضخامت فیلم مرکزی روان‌کار در رژیم روان‌کاری مخلوط است. اغلب مطالعات انجام‌شده، تغییرشکل تمام زبری‌ها را در رژیم روان‌کاری مخلوط به‌صورت الاستیک فرض کرده‌اند. این در حالی است که زبری‌های در تماس، بسته به ارتفاع زبری و بار وارد شده به آن‌ها یکی از سه حالت (الاستیک، الاستیک-پلاستیک و پلاستیک کامل) را تجربه می‌کنند. در این مدل فرض می‌شود که شکل تمام زبری‌ها، کروی است و دارای شعاع مساوی β (شعاع متوسط تمام زبری‌ها) هستند. برای هر فاصله معین h_c ، تعداد مشخصی از زبری‌های پروفیل در تماس هستند. عمق تو رفتگی که میزان تخت‌شدگی قله یک زبری w_i توسط صفحه صاف و تخت است، برای زبری i ام (Z_i) از پروفیل زبری، به‌صورت رابطه (16) می‌باشد.

$$w_i = Z_i - h_c \quad (16)$$

مقدار منفی w_i به این معناست که زبری i ام در تماس قرار نمی‌گیرد. همچنین بر اساس بازه‌های مختلفی از مقدار w_i ، تغییرشکل الاستیک [20]، الاستیک-پلاستیک و پلاستیک [21] به صورت رابطه (17) اتفاق می‌افتد:

$$\begin{aligned} w_e &= \left(0.95 \frac{H}{E} \right)^2 \beta \quad \text{اگر } w_i < w_e \quad \text{الاستیک} \\ w_p &\approx 54w_e \quad \text{اگر } w_i > w_e \quad \text{پلاستیک} \end{aligned} \quad (17)$$

برای محاسبه مساحت تماس زبری‌ها و نیرویی که هر یک از زبری‌ها بر اساس تغییر شکل ایجاد شده در آن‌ها تحمل می‌کنند، از روابط (18) که توسط ژائو [22] و آبات و فایرستون [23] ارائه شده، استفاده شده است:

$$\begin{aligned} A_{ie} &= 2\pi\beta w_i \\ A_i &= \begin{cases} A_{iep} = \pi\beta w_i (1 - 2w_i^{-3} + 3w_i^{-2}) \\ A_{ip} = 2\pi\beta w_i \end{cases} \\ w' &= \frac{w_i - w_e}{w_p - w_e} \\ F_{ie} &= \frac{4}{3} E' \beta^{0.5} w_i^{1.5} \\ F_i &= \begin{cases} F_{iep} = \left(H - 0.6H \frac{\ln w_i - \ln w_e}{\ln w_p - \ln w_e} \right) A_{iep} \\ F_{ip} = H A_{ip} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

مساحت تماس کلی زبری‌ها بر روی پروفیل زبری A_r ، از جمع تمام

از بار توسط فیلم روان‌کار و قسمت دیگر توسط زبری‌های در تماس تحمل می‌شود. به همین خاطر در این مدل محاسبه ضخامت فیلم روان‌کار و ضریب اصطکاک چرخ‌دنده، بر اساس ضرایب تقسیم بار جانسون و همکاران [12] انجام خواهد شد (رابطه 8). چنانچه بار وارده به دو استوانه برابر با F_T باشد، سهم بار تحمل‌شده توسط فیلم روان‌کار برابر است با F_T/γ_1 و سهم بار تحمل‌شده توسط زبری‌ها برابر با F_T/γ_2 است [5].

$$F_T = \frac{F_T}{\gamma_1} + \frac{F_T}{\gamma_2} = F_H + F_C, \quad \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = 1 \quad (8)$$

با استفاده از همین تقسیم بار، می‌توان نیروی اصطکاک ایجادشده از تماس چرخ‌دنده مارپیچ را به دو قسمت تقسیم نمود. بخشی ناشی از برش بین لایه‌های فیلم روان‌کار F_{fC} و بخشی هم ناشی از تماس زبری‌های دو سطح F_{fH} است. بنابراین در رابطه (9) داریم:

$$F_f = F_{fH} + F_{fC} \quad (9)$$

برای محاسبه F_{fC} همان‌طور که در رابطه (10) نشان داده شده است فرض می‌شود که تمام زبری‌ها دارای ضریب اصطکاک مشابه f_c هستند:

$$F_{fC} = \sum_{i=1}^N f_c \cdot F_{Ci} = f_c \sum_{i=1}^N F_{Ci} = f_c \times F_C \quad (10)$$

مقدار F_{fH} به پارمترهای زیادی وابسته است. برای محاسبه ضریب اصطکاک هیدرودینامیک از معادله (11) استفاده می‌شود که بر اساس فرض سیال نیوتونی است. همچنین ضریب اصطکاک نهایی توسط معادله (12) محاسبه می‌شود [5]:

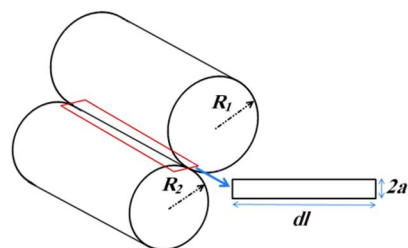
$$F_{fH} = \frac{u_{sliding} \eta}{h_c} \times A_H \quad (11)$$

$$\mu = \frac{F_f}{F_T} = \frac{f_c F_C + \frac{u_{sliding} \eta}{h_s} \times A_H}{F_T} \quad (12)$$

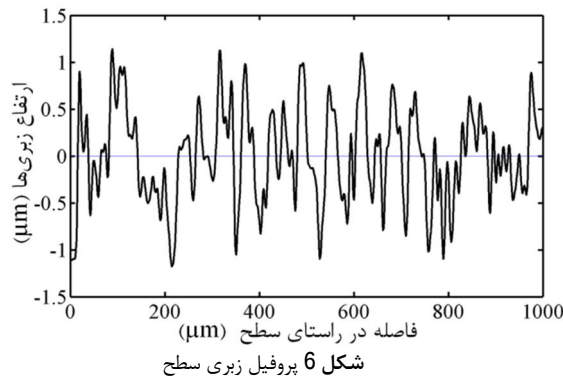
که در آن η لزجت روان‌کار در حین درگیری، A_H سطح تماس فیلم روان‌کار و h_c ضخامت فیلم روان‌کار است. سطح تماس دو استوانه جایگزین برابر است با مجموع سطح تماس زبری‌ها A_C و سطح تماس فیلم روان‌کار A_H . بر اساس تماس هرگزین، فرض شده است که a نیم‌عرض تماس هرگزین است. شکل 5 تماس هرگزین دو استوانه را نشان می‌دهد.

ضخامت فیلم روان‌کار از حل همزمان معادله رینولدز، معادله تعادل بار و معادله مربوط به تغییر شکل الاستیک سطح که توسط تیموشنکو و گودر [15] ارائه شده است حاصل می‌شود. با انجام حل عددی برای دستگاه معادلات فوق برای شرایط کاری مختلف، روابط مختلفی برای بیان ضخامت فیلم روغن بر اساس جنس سطوح، جنس روغن، و شرایط کاری ارائه شده است. در این تحقیق، از رابطه برازش‌شده موز [16] استفاده شده است و طبق رابطه (13) داریم:

$$\begin{aligned} H_C &= \left[\left(H_{RI}^{\frac{7}{3}} + H_{EI}^{\frac{7}{3}} \right)^{\frac{3s}{7}} + \left(H_{RP}^{-\frac{7}{2}} + H_{EP}^{-\frac{7}{2}} \right)^{\frac{-2s}{7}} \right]^{\frac{1}{5}} \\ s &= \frac{1}{5} \left(7 + 8e^{\left(\frac{-2H_{EI}}{H_{RI}} \right)^{\frac{2}{5}}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$



شکل 5 سطح تماس هرگزین دو استوانه جایگزین



همان‌طور که در رابطه (25) نشان داده شده است، فشار هیدرودینامیکی هم برابر با نسبت بار تحمل شده توسط فیلم سیال به سطح مقطع سیال در نظر گرفته شده است:

$$P_H = \frac{F_T}{A_H}, \quad A_H = A_{nom} - A_C \quad (25)$$

برای محاسبه تغییرات دمای روان کار در طول درگیری، از رابطه تقریبی ارائه شده توسط میهالیدیس و همکاران [26] برای تخمین تغییرات دما در طول خط عمل چرخ‌دنده ساده استفاده می‌شود که به صورت رابطه (26) بیان می‌شود:

$$\Delta T = W_T^{0.75} \omega_p^{0.5} \left(\frac{50}{50 - \sigma_s} \right) \times \left[\frac{0.0175 \left(\sqrt{R_1} - \sqrt{\frac{R_2}{m_g}} \right)}{(\cos \phi)^{0.75} \left(\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \right)} \right] \quad (26)$$

که در آن W_t (lbf/in) بار مماسی بر واحد طول، σ_s (μin) انحراف معیار زبری سطح، R_1 (in) و R_2 (in) شعاع انحنا پینیون چرخ‌دنده و m_g نسبت تبدیل چرخ‌دنده است. با استفاده از این رابطه، دمای کاری روان کار را برای هر زوج استوانه جایگزین می‌توان تخمین زد و در نهایت با استفاده از معادله (25) لزجت روان کار را محاسبه نمود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در رابطه تقریبی (26) اثر تماس زبری‌ها در افزایش دما وارد نشده است. از آنجایی که این معادله تنها تقریبی از افزایش دمای کلی را فراهم می‌کند، می‌توان از افزایش دماهای محلی صرف‌نظر نمود. اساساً این گرماهای محلی ایجاد شده بر اثر تماس زبری‌ها، موجب تغییر شکل پلاستیک می‌شوند [10].

3- روش حل

برای تحلیل روان کاری هر یک از زوج استوانه‌های جایگزین، ترتیب حل معادلات به صورت طرح‌واره در شکل 7 مشاهده می‌شود. بعد از تعیین ورودی‌های لازم برای محاسبه ضخامت فیلم و ضریب اصطکاک، گام اول حدس زدن مقداری برای γ_1 است. سپس با داشتن γ_1 و معادله (8)، مقدار γ_2 و همین‌طور با استفاده از معادله (15)، ضخامت فیلم محاسبه می‌شود. در گام دوم برای محاسبه نیروی زبری‌ها F_C ، از دو مسیر (مسیر اول: با استفاده از معادله (8)، مسیر دوم: توسط معادله (23)) استفاده می‌شود. حال دو مقدار برای F_C به دست آمده است. اگر قدر مطلق اختلاف این دو مقدار از تolerانس تعریف شده کمتر باشد، فرض اولیه γ_1 صحیح بوده و اگر با هم اختلاف داشته باشند (بیشتر از یک‌صدم درصد)، می‌بایست مقدار فرضی γ_1 را تغییر داد. در پایان توسط معادله (12) مقدار ضریب اصطکاک محاسبه می‌شود.

4- بحث و نتیجه‌گیری

برای حل عددی مسئله، نیاز است پارامترهایی مانند مشخصات هندسی

مؤلفه‌های جزئی مساحت تماس محاسبه می‌شود. برای محاسبه سطح تماس زبری‌های دو استوانه A_c ، می‌بایست A_r را در یک عدد x ضرب نمود. چرا که این مقدار تنها مربوط به پهنایی از سطح تماس است که پروفیل زبری آن در اختیار است. از آنجایی که پروفیل زبری سطح همسانگرد فرض شده است، در تمام پهنای هرترزین و طول سطح تماس همین توزیع زبری وجود خواهد داشت. مقدار x از نسبت تعداد کل قله‌های موجود در پهنای هرترز به تعداد قله‌های موجود در پروفیل زبری حاصل می‌شود. در رابطه (19) داریم:

$$x = \frac{\text{تعداد کل قله‌ها}}{\text{تعداد قله‌های پروفیل}} \quad (19)$$

همچنین برای تعیین تعداد قله‌ها به صورت رابطه (20) عمل می‌شود:

$$\text{تعداد کل قله‌ها} = n \times A_{nom}, \quad A_{nom} = 2a \times dl \quad (20)$$

که n چگالی زبری‌ها است و قله، جزئی از پروفیل زبری است که ارتفاعی بزرگ‌تر از جزء زبری قبلی و بعدی‌اش در طول پروفیل زبری دارد. بنابراین همان‌طور که در روابط (21) و (22) نشان داده شده است مساحت سطح تماس زبری‌های دو استوانه (شکل 5) و بار کلی حمل‌شده توسط تماس زبری‌ها برابر است با:

$$A_c = x \times A_r = x \times \sum_{i=1}^n A_i (w_i) \quad (21)$$

$$F_c = x \times \sum_{i=1}^n F_i (w_i) \quad (22)$$

در مدل حاضر، از پروفیل زبری شکل 6 استفاده می‌شود. این طیف ثبت شده، از اندازه‌گیری پروفیل زبری سطح چرخ‌دنده در طول یک میلی‌متر به دست آمده است. از آنجایی که سطح همسانگرد در نظر گرفته شد، توزیع زبری کل سطح چرخ‌دنده مطابق همین قسمت است. مشخصات زبری این پروفیل زبری بر اساس روابط موجود در [5] در جدول 1 آورده شده است.

ضخامت فیلم سیال پیش‌بینی شده در معادله (16) بر پایه دمای ورودی است. دمای روان کار تأثیر قابل توجهی در تحلیل چرخ‌دنده‌ها دارد. به منظور تصحیح این ضخامت فیلم، از ضریب اصلاح دمایی ارائه شده توسط سو و لیبی [24] استفاده شده است. طبق رابطه (23) داریم:

$$C_t = \frac{h_{thermal}}{h_{isothermal}} = \frac{1}{1 + 0.0766G^{0.687}W^{0.447}L^{0.527}e^{0.875Sr}} \quad (23)$$

$$L = \frac{\eta_0 \gamma u}{K_f}, \quad Sr = \frac{u_{sliding}}{u}$$

که η_0 لزجت در فشار محیط و γ ضریب لزجت دمایی هستند. مقادیر u و K_f هم به ترتیب سرعت غلتشی و ضریب هدایت گرمایی روان کار هستند. برای وارد کردن تأثیر دما و فشار بر لزجت روان کار، از معادله رولندز و همکاران استفاده می‌شود [25]. در رابطه (24) داریم:

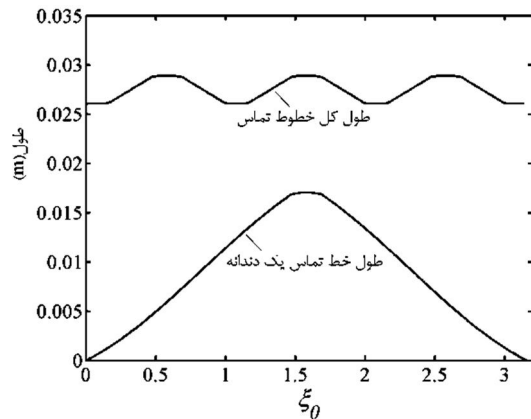
$$\eta = \eta_0 \exp\{(\ln \eta_0 + 9.67) \times [-1 + V]\} \quad (24)$$

$$V = (1 + 5.1 \times 10^{-9} P_H)^{Z_p} \times \left[\frac{T - 138}{T_0 - 138} \right]^{-1.1}$$

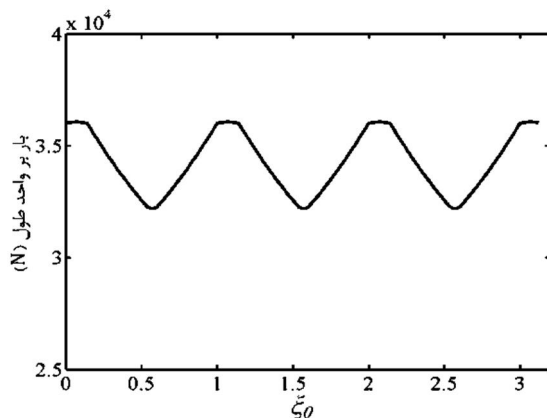
در این رابطه، η لزجت روان کار در دما و فشار کاری است. T_0 دمای ورودی، T دمای کاری، P_H فشار هیدرودینامیکی و Z_p شاخص لزجت فشاری است.

جدول 1 مشخصات زبری سطح

تعریف	واحد	مشخصه	مقدار
انحراف استاندارد زبری‌ها	μm	σ_s	0/5
متوسط شعاع نوک زبری‌ها	μm	B	20/3
چگالی زبری	1/mm ²	N	4/01
ضریب اصطکاک زبری‌ها	-	f_c	0/1



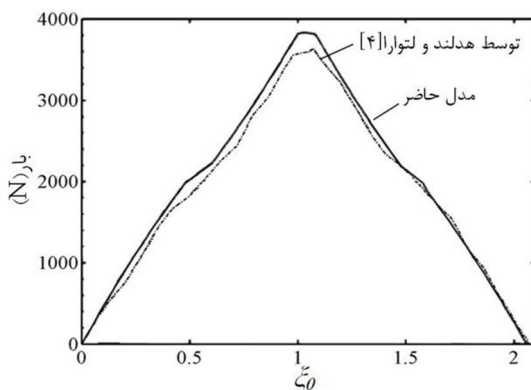
شکل 8 تغییر طول خط تماس برای یک دندانه و مجموع دندانه‌های درگیر



شکل 9 بار وارده بر دندانه در طول سیکل درگیری‌اش

برای چرخ‌دنده‌های جدول 2 به 160 قسمت تقسیم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تطابق زیادی بین پاسخ مدل حاضر و هدلند برای بار وارد شده بر دندانه در طول درگیری‌اش دیده می‌شود.

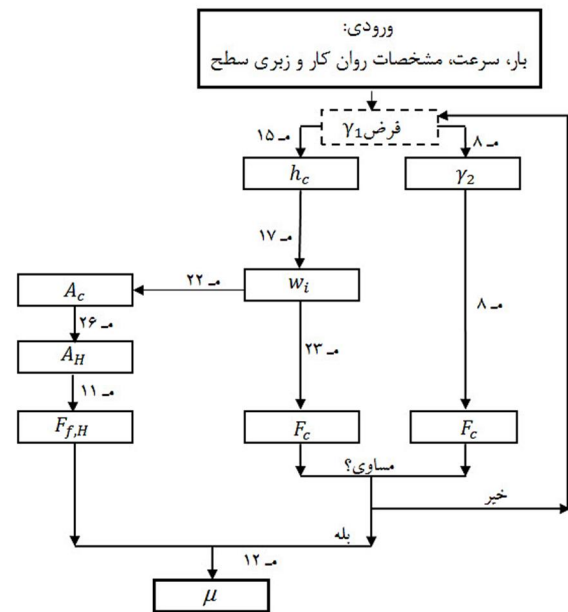
در شکل 11 تغییرات شعاع انحناهای معادل R_1 و R_2 و همین‌طور شعاع انحنا معادل R در طول این خط تماس دندانه نمایش داده شده است. برای انجام تحلیل هندسی و همچنین در تحلیل روان کاری چرخ‌دنده مارپیچ، به محاسبه شعاع انحنا احتیاج است. در شکل 12 تغییرات سرعت لغزشی و غلظشی برای نقاط تماس بر روی خط تماس یک دندانه مشاهده می‌شود. در قسمت‌های قبل توزیع بار، شعاع انحنا و سرعت نقاط تماس برای 160 نقطه در طول این خط تماس محاسبه شدند. بنابراین می‌بایست مدل روان کاری برای 160 زوج استوانه در تماس پیاده‌سازی شود، با پیاده‌سازی



شکل 10 بار وارد بر واحد طول در سیکل درگیری دندانه

چرخ‌دنده، شرایط کاری و مشخصات روان کار مشخص باشد که در جدول‌های 2 و 3 آورده شده‌اند.

ابتدا طول خط تماس و بار منتقل شده توسط هر دندانه بر اساس ورودی‌های کروژ و همکاران [11] که در جدول 2 آمده است، محاسبه می‌شود. در شکل 8 تغییر طول خط تماس یک دندانه در طول سیکل درگیری‌اش و همچنین تغییر طول خطوط تماس چرخ‌دنده در طول سیکل درگیری یک دندانه نشان داده شده است. بار اعمال شده بر واحد طول در شکل 9 مشاهده می‌شود. در شکل 10 بار وارده بر یک دندانه در طول سیکل درگیری که توسط هدلند و لتوارا در سال 2007 ارائه شده بود [4]، آورده شده است. روش هدلند بر اساس تحلیل المان محدود سه بعدی بر روی تغییرشکل دندانه بوده است. در مقاله حاضر، خط تماس کامل (خط تماس وسط در شکل 3



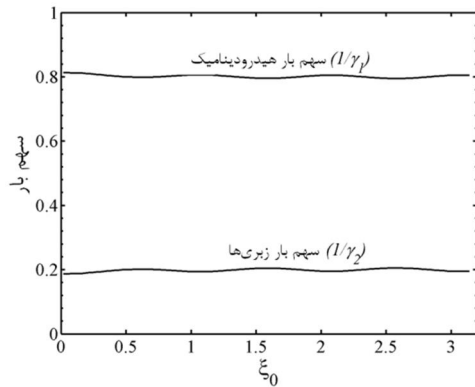
شکل 7 طرح‌واره محاسبه ضریب اصطکاک با روش تقسیم بار جانسون

جدول 2 مشخصات هندسی چرخ‌دنده

تعریف	واحد	مشخصه	کروژ [11]
تعداد دندانه	-	Z_p/Z_g	40/43
مدول نرمال	mm	m_n	2/2
زاویه مارپیچ	deg	ψ	31
زاویه فشار نرمال	deg	ϕ_n	18
پهنای چرخ‌دنده	mm	B	17
گشتاور (یا نیرو) کلی	N.m	F	1650N
سرعت زاویه‌ای پینیون	rpm	ω	800
مدول الاستیک	GPa	E	209

جدول 3 مشخصات روان کار مورد استفاده [11]

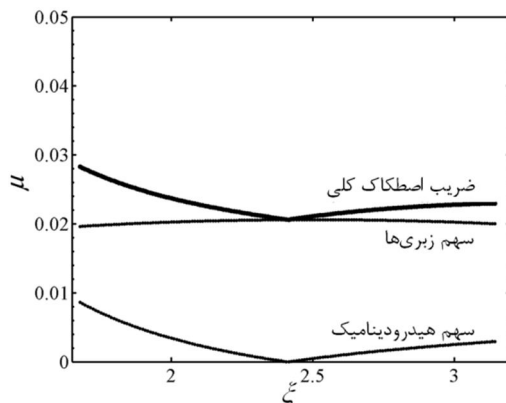
تعریف	واحد	مشخصه	75W-90B0
لزجت دینامیکی در 20°C	Pa.s	η_0	0/0115
ضریب لزجت فشار	1/Pa	α_{EHL}	0/12
ضریب لزجت دما	1/K	γ	0/04
شاخص لزجت فشاری	-	Z_p	0/6
هدایت گرمایی	W/m/K	K_f	0/145



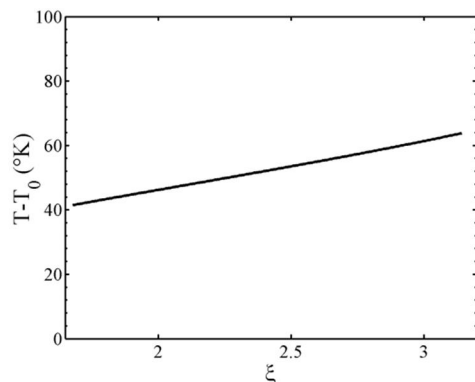
شکل 14 سهم بار تحمل‌شده بین روان کار و زبری‌ها در طول سیکل درگیری

15 و شکل 16 به ترتیب آورده شده است. همان‌طور که در شکل 15 مشاهده می‌شود، سهم اصلی اصطکاک ایجادشده، ناشی از تماس زبری‌ها است. با توجه به اینکه اصطکاک زبری‌ها به‌طور مستقیم وابسته به بار تحمل‌شده توسط زبری‌ها است، تغییر زیادی در طول خط تماس ندارد. اما اصطکاک ناشی از فیلم روان کار با توجه به معادله 11 تحت تأثیر سرعت لغزشی، ضخامت فیلم و دمای کاری قرار دارد. نحوه تغییرات ضریب اصطکاک مشابه با تغییرات سرعت لغزشی مشاهده می‌شود که می‌توان اثر قابل توجه سرعت لغزشی را بر روی ضریب اصطکاک نتیجه گرفت. با افزایش دمای کاری در طول خط تماس (شکل 17)، با توجه به معادله (24) لزجت روان کار کاهش یافته و در نتیجه ضریب اصطکاک ناشی از فیلم روان کار کاهش می‌یابد.

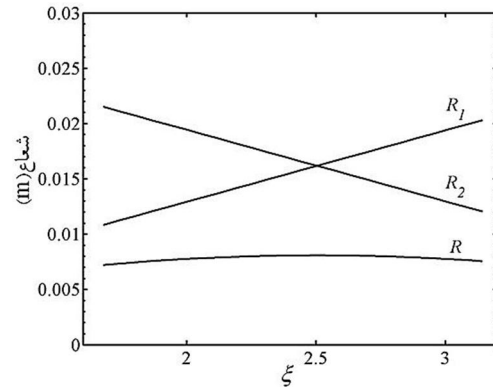
در شکل 17 ضخامت متوسط فیلم روان کار پیش‌بینی‌شده توسط معادله اصلاح‌شده گروبین [27] و تحلیل گذرای کرویز و همکاران ارائه شده است [11].



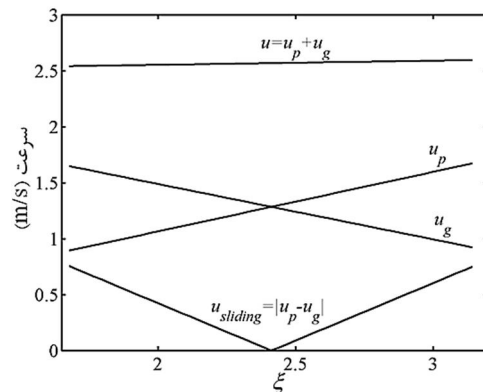
شکل 15 ضریب اصطکاک در طول خط تماس کامل



شکل 16 میزان افزایش دمای روان کار در طول خط تماس کامل



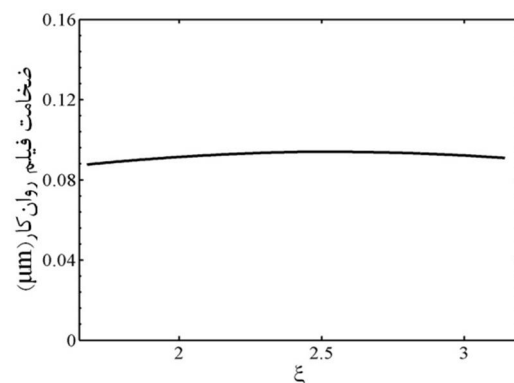
شکل 11 تغییر شعاع استوانه جایگزین روی اینولوت (در طول خط تماس کامل) R_1 پینیون، R_2 چرخ‌دنده و R شعاع انحنای معادل



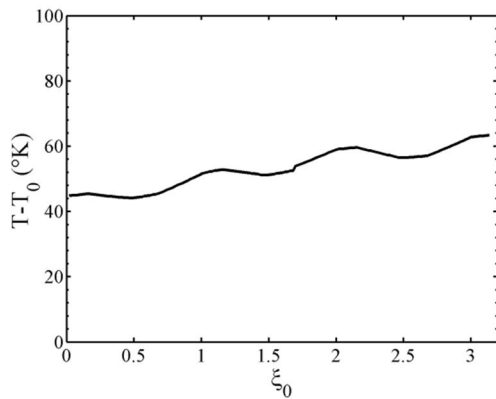
شکل 12 تغییرات سرعت لغزشی و غلظتی در طول خط تماس یک دندان

مدل معرفی‌شده، ضخامت فیلم روان کار مطابق شکل 13 به دست می‌آید. همان‌طور که مشاهده می‌شود، لایه نازکی از روان کار بر روی سطح چرخ‌دنده قرار می‌گیرد. در نتیجه سهم قابل توجهی از زبری‌ها در تماس قرار می‌گیرند. همان‌طور که گفته شد، بار اصلی توسط فیلم روان کار تحمل می‌شود که این مسئله را می‌توان در شکل 14 مشاهده نمود. در این لحظه از درگیری، به‌طور تقریبی، 80% بار واردشده بر دندان توسط فیلم روان کار تحمل می‌شود.

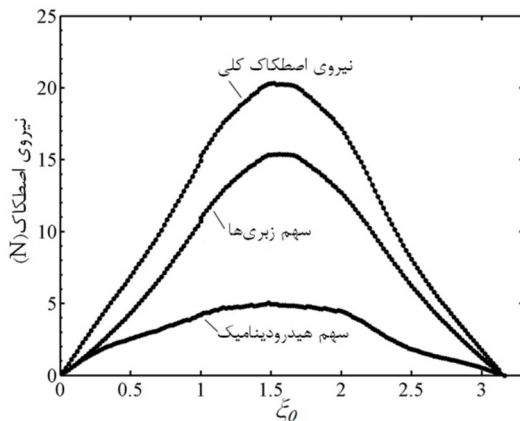
سهم بار تحمل‌شده توسط زبری‌ها و فیلم روان کار در هر لحظه از سیکل درگیری دندان را می‌توان در شکل 14 مشاهده نمود. مشاهده می‌شود که همواره بار اصلی توسط فیلم روان کار تحمل می‌شود. بنابراین می‌توان مطمئن شد که استفاده از نتایج تحقیق جانسون و همکارانش بدون مشکل بوده است. همچنین مقدار ضریب اصطکاک و تغییرات دما در طول خط تماس در شکل



شکل 13 ضخامت فیلم روانکار در طول خط تماس کامل



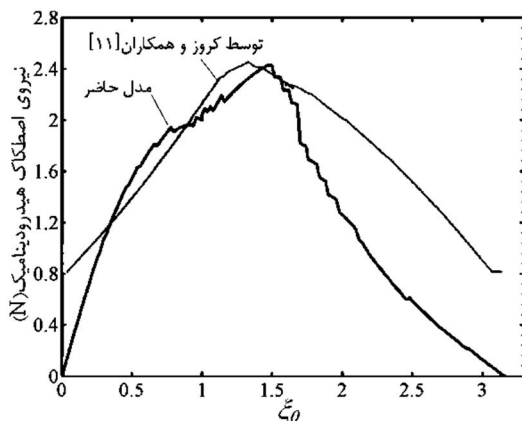
شکل 19 میزان افزایش دمای روانکار نسبت به دمای ورودی



شکل 20 نیروی اصطکاک یک دندانه در هر لحظه از سیکل درگیری‌اش

[11] آورده شده است. با توجه به اینکه دندانه در لحظه ورود به درگیری و خروج از درگیری، باری را متحمل نمی‌شود، مقدار نیروی اصطکاک دندانه در ابتدا و آغاز درگیری برابر صفر است.

همان‌طور که بیان شد، در مدل حاضر زبری‌های تغییر شکل یافته به سه دسته الاستیک، الاستیک-پلاستیک و پلاستیک تقسیم می‌شوند. اگر تمام تغییر شکل‌های زبری‌ها به صورت الاستیک فرض شود، نیروی اصطکاک دندانه به صورت شکل 22 محاسبه می‌شود. با توجه به اختلاف زیاد مقادیر نیروی اصطکاک در دو شکل 20 و 22 می‌توان نشان داد که چنانچه همه تغییر شکل زبری‌ها الاستیک فرض شود، خطای زیادی در محاسبات ایجاد می‌شود.



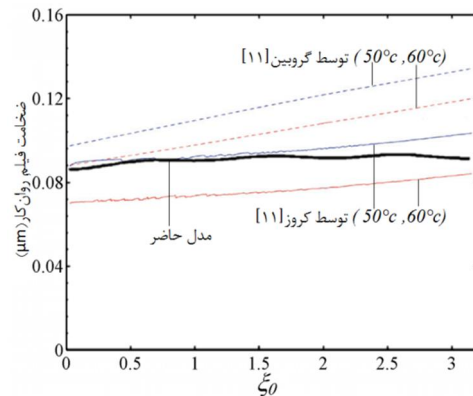
شکل 21 نیروی اصطکاک ناشی از فیلم روان‌کار یک دندانه در هر لحظه از سیکل درگیری‌اش

حل گروبین را می‌توان به عنوان تقریب اولیه قابل قبولی در نظر گرفت (با وجود اختلافی بین 20% تا 30%) که به میزان قابل توجه در زمان محاسبات می‌کاهد. زمان حل گروبین در حدود چند ثانیه است و این در حالی است که حل گذرای دقیق ارائه شده توسط کروژ و همکاران بیش از چند ساعت زمان CPU را نیاز دارد [11]. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، ضخامت فیلم محاسبه شده توسط مدل حاضر، تا حدود زیادی به مقدار تحلیل گذرای کروژ و همکاران برای دمای 50 °C نزدیک است البته با توجه به اینکه میزان تغییرات دما در طول سیکل درگیری دندانه، در مطالعه پیش‌رو ثابت فرض نشده است، مقداری تفاوت در قسمت پایانی درگیری مشاهده می‌شود. این نتیجه دقیق در حالی حاصل شده است که مدت زمان لازم برای پردازش CPU در این روش کمتر از چند دقیقه می‌باشد.

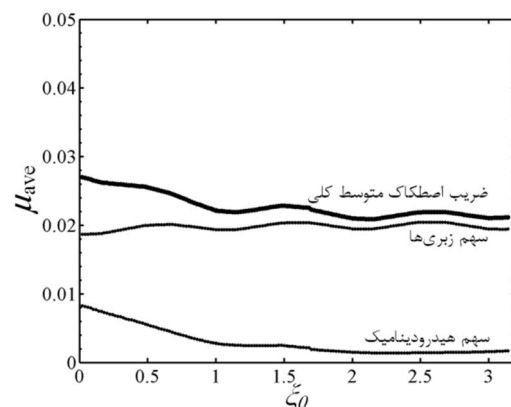
تغییرات ضریب اصطکاک متوسط و افزایش دمای کاری متوسط در هر لحظه از سیکل درگیری یک دندانه مطابق شکل 18 و 19 شده است. مشاهده می‌شود که در طول سیکل درگیری، دمای کاری افزایش می‌یابد که این افزایش با توجه به رابطه (26) و جابجایی خط تماس روی سطح دندانه اتفاق می‌افتد. افزایش دما در طول سیکل درگیری، باعث کاهش مقدار لزجت روان-کار می‌شود. بنابراین با توجه به معادله (11)، ضریب اصطکاک هیدرودینامیک کاهش می‌یابد.

در شکل 20 نیروی اصطکاک دندانه در طول سیکل درگیری‌اش به تفکیک سهم زبری‌های در تماس و سهم روانکار رسم شده است. همچنین مجموع این دو جزء که در واقع نیروی اصطکاک کلی دندانه است هم مشاهده می‌شود.

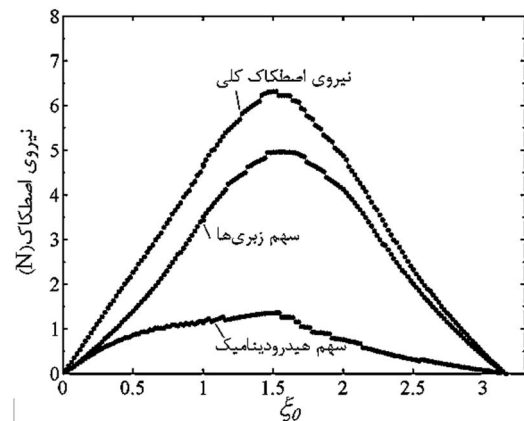
همچنین در شکل 21، نیروی اصطکاک ناشی از فیلم روان‌کار به طور جداگانه برای مقایسه با نتیجه ارائه شده توسط تحلیل گذرای کروژ و همکاران



شکل 17 ضخامت فیلم روانکار متوسط در هر لحظه از سیکل درگیری یک دندانه



شکل 18 ضریب اصطکاک متوسط دندانه در طول سیکل درگیری



شکل 22 نیروی اصطکاک یک دندانه با فرض تغییر شکل الاستیک برای همه زبری‌های در تماس

5- جمع‌بندی

در این پژوهش، تحلیل روان‌کاری چرخ‌دنده مارپیچ به کمک روش تقسیم بار با لحاظ کردن تغییر شکل‌های زبری ارائه شد. بر این اساس، بار اعمال شده به چرخ‌دنده توسط فیلم روان‌کار و زبری سطح تحمل می‌گردد و باری که هر زبری منتقل می‌نماید باعث ایجاد تغییر شکل الاستیک، الاستوپلاستیک و پلاستیک می‌شود. مزایای استفاده از روش تقسیم بار، کوتاه شدن زمان انجام محاسبات و همچنین قابلیت اعمال اثرات زبری سطح و همچنین اثرات دمایی است. مقایسه نتایج پیش‌بینی‌شده مربوط به ضخامت لایه روغن تشکیل‌شده بین دندانه‌ها و همچنین ضریب اصطکاک بین دندانه‌ها با نتایج سایر مقالات، نشان‌دهنده دقت نسبتاً مناسب این روش است.

6- فهرست علائم

A_c	سطح تماس زبری‌ها (m^2)
A_H	سطح روان‌کار (m^2)
A_{nom}	سطح تماس نامی دو استوانه (m^2)
A_i	سطح تماس زبری نام (m^2)
E_{eq}	مدول الاستیسیته معادل (N/m^2)
E_γ	بخش صحیح نسبت تماس
F_c	نیروی تحمل‌شده توسط زبری‌ها (N)
F_i	نیروی تحمل‌شده توسط زبری نام (N)
F_H	نیروی تحمل‌شده توسط فیلم روان‌کار (N)
F_T	نیروی تحمل‌شده توسط دندانه (N)
F_f	نیروی اصطکاک (N)
$F_{f,c}$	نیروی اصطکاک ناشی از تماس زبری‌ها (N)
$F_{f,H}$	نیروی اصطکاک ناشی از روان‌کار (N)
$f(\xi_0)$	نیروی بر واحد طول خط تماس (N/m)
H_c	ضخامت بی‌بعد فیلم روان‌کار
h_c	ضخامت فیلم روان‌کار (m)
I_v	تابع انتگرال انرژی پتانسیل معکوس چرخ‌دنده
$L(\xi_0)$	مجموع طول خطوط تماس چرخ‌دنده (m)
$l(\xi_0)$	طول خط تماس دندانه (m)
P_H	فشار وارد بر فیلم روان‌کار (N/m^2)
R	شعاع انحنا معادل دو استوانه جایگزین (m)

7- مراجع

- [1] F. Reuleaux, Friction in Tooth Gearing, *Transactions of the ASME*, Vol. VIII, No. 9, pp. 45-85, 1886.
- [2] D. J. Haines, E. Ollerton, Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces, *Proceedings of Institute of Mechanical Engineering*, Vol. 177, No. 1, pp. 95-114, 1963.
- [3] J. J. Kalker, Three-dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact, *Kluwer Academic Publishing, Dordrecht*, 1990.
- [4] J. Hedlund, A. Lehtoavaara, Modeling of helical gear contact with tooth deflection, *Tribology International*, vol. 40, No. 1, pp. 613-619, 2007.
- [5] S. Akbarzadeh, M. M. Khonsari, Performance of spur gears considering surface roughness and shear thinning lubricant, *ASME Journal of Tribology*, vol. 130, No. 2, pp. 21503, 2008.
- [6] F. Hirano, T. Ueno, S. Asanabe, Effect of Angle Between Direction of Sliding and Line of Contact on Friction and Wear of a Roller, *Lubrication Engineering*, vol. 64, No. 1, pp. 57-64, 1964.
- [7] P. Heingartner, D. Mba, Determining Power Losses in The Helical Gear Mesh; Case Study, *DETC'3, Chicago, Illinois*, 2003.
- [8] D. Dowson, G. R. Higginson, A Theory of Involute Gear Lubrication, Proceeding of a Symposium Organized by the Mechanical Tests of Lubricants Panel of the Institute, *Institute of Petroleum, Gear Lubrication, Elsevier*, London, Vol. 182, No. 1, pp. 8-15, 1964.
- [9] B. W. Kelley, A. J. Lemanski, Lubrication of Involute Gearing, *Proceedings of Institute of Mechanical Engineering*, Vol. 182, No. 32, pp. 173-184, 1967-1968.
- [10] A. Flodin, S. Anderson, Simulation of mild wear in helical gears, *Wear*, vol. 241, No. 2, pp. 123-128, 2000.
- [11] M. Cruz, W. W. F. Chong, M. Teodorescu, S. Theodossides, H. Rahnejat, Transient mixed thermo-elastohydrodynamic lubrication in multi-speed transmissions, *Tribology International*, vol. 49, No. 1, pp. 17-29, 2012.
- [12] K. L. Johnson, J. A. Greenwood, S. Y. Poon, A Simple Theory of Asperity Contact in Elastohydrodynamic Lubrication, *Wear*, vol. 19, No. 1, pp. 91-108, 1972.
- [13] J. I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Artés, J. A. Antona, Load distribution model along the line of contact for involute external gears, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, No. 5, pp. 780-794, 2010.
- [14] J. A. Greenwood, J. H. Tripp, The contact of two nominal flat rough surfaces, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineering*, vol. 185, No. 1, pp. 625-633, 1970.
- [15] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, 1982.

- [23] E. J. Abbott, F. A. Firestone, Specific surface quality a method based on accurate measurement and comparison, *Mechanical Engineering*, Vol. 55, No. 2, pp. 569-572, 1933.
- [24] C. H. Hsu, R. T. Lee, An efficient algorithm for thermal elastohydrodynamic lubrication under rolling/sliding line contacts, *ASME Journal of Tribology*, Vol. 116, No. 4, pp. 762-769, 1994.
- [25] C. J. A. Roelands, J. C. Vlugter, H. I. Waterman, The viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils and its correlation with chemical constitution, *ASME Journal of Basic Engineering*, vol. 85, No. 4, pp. 601- 610, 1962.
- [26] A. Mihailidis, V. Bakolas, Numerical simulation of real 3-D rough surfaces, *Journal of Balkan Tribology Association*, vol. 5 No. 1., pp. 247-255, 1999.
- [27] A.N. Grubin, Contact stresses in toothed gears and worm gears, *Book 30 CSRI for Technology and Mechanical Engineering*, Moscow DSRI Trans, pp. 337, 1949.
- [16] H. Moes, Lubrication and Beyond , lecture notes 115531, *University of Twente, Enschede, The Netherlands*, 1997.
- [17] H. Moes, Optimum similarity analysis with applications to elastohydrodynamic lubrication, *Wear*, vol. 159, No. 2, pp 57-66, 1992.
- [18] D. Dowson, G. R. Higginson, Elasto-hydrodynamic lubrication The fundamentals of roller and gear lubrication, *Pergamon Press*, Oxford, 1966.
- [19] E. R. M. Gelinck, D. J. Schipper, Calculation of Stribeck Curves for Line Contacts, *Tribology International*, Vol. 33, No. 3, pp. 175-18, 2000.
- [20] J. A. Greenwood, J. B. P. Williamson, Contact of nominally flat surfaces, *Proceedings of Royal Society of London Serie A*, Vol. 295, No. 1442, pp. 300-319, 1966.
- [21] K. L. Johnson, Contact Mechanics, *Cambridge University Press*, Cambridge, UK, 1985.
- [22] Y. Zhao, D. M. Maietta, L. Chang, An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow, *ASME Journal of Tribology*, vol. 122, No. 1, pp. 86-93, 2000.