مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1393، دوره 14، شماره 7، ص‌ص 52-60

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تعیین محدوده مدول الاستیک نانوکامپوزیت‌های پلیمری تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به روش تحلیلی

مهدی مندعلی[1*]، محمودرضا یوسفی[2]

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران
2- دانشجوی کارشناسی‌ارشد مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران
* تهران، صندوق پستی14515/775، mondali@srbiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 16 مهر 1392
پذیرش: 15 آذر 1392
ارائه در سایت: 30 تیر 1393

کلید واژگان:
مدول الاستیک
نانوکامپوزیت
تئوری عقب‌افتادگی برشی
مدل المان محدود
نانولوله کربنی

چکیده

روش‌های تحلیلی و المان محدود موجود مقدار مدول الاستیک نانوکامپوزیت‌ها را بیشتر از مقادیر حاصل از آزمایش تعیین می‌کنند. در این مقاله یک مدل تئوری تمام پیوسته جهت تعیین یک باند بالا و پایین با تغییرات کم از مدول الاستیسیته برای نانوکامپوزیت‌های پلیمری ارائه شده است به گونه‌ای که نتایج آزمایشگاهی همواره در این محدوده قرار گیرند. بدین منظور معادلات الاستیسیته حاکم بر رفتار زمینه و تقویت‌کننده در نانوکامپوزیت در مختصات استوانه‌ای با استفاده از تئوری عقب‌افتادگی برشی برای یک المان حجمی در حالت اتصال کامل دو فاز حل و مدول الاستیک محاسبه شده است. سپس با استفاده از مدل‌سازی المان محدود به کمک نرم‌افزار انسیس، مدول الاستیک حالت‌های اتصال کامل و گسستگی بین دو فاز محاسبه شده و نتایج با مقادیر تحلیلی مقایسه شده‌اند که صحت مدل‌سازی تحلیلی را تأیید می‌کند. جهت اطمینان از صحت نتایج مدل معرفی شده برای تعیین مدول الاستیک در حالات یاد شده بالا نتایج به‌دست آمده، با نتایج روش آزمایشگاهی دیگر محققین مورد مقایسه قرار گرفته‌اند که در تمامی آن‌ها مدول الاستیک آزمایشگاهی در محدوده بین باند بالا و پایین تعیین شده به وسیله معادلات تحلیلی و مدل المان محدود قرار دارد.

Prediction a range for elastic modulus of CNT reinforced polymer composites using analytical method

Mehdi Mondali[1*], Mahmoud Reza Yousefi[2]

1- Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran
2- Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran
* P.O.B. 14515/775 Tehran, Iran, mondali@srbiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 08 October 2013
Accepted 06 December 2013
Available Online 21 July 2014

Keywords:
Elastic Modulus
Nanocomposite
Shear-lag Model
Finite Element Model
Carbon Nanotube

ABSTRACT

Analytical and finite element models predict the elastic modulus of CNT-polymer nanocomposites greater than experimental results. This paper presents a theoretical full continuum model to define the upper and lower thresholds with small variations for elastic modulus in polymer nanocomposites, which the experimental results always place between these thresholds. For this purpose, the governing elasticity equations in polar coordinates have been solved for nanocomposite representative volume element (RVE) with shear-lag model by assuming perfect bond condition between CNT and matrix. In addition, the nanocomposite elastic modulus in perfect bond and debonding conditions between nanotube and matrix is calculated using finite element method in ANSYS software which confirms the accuracy of theoretical results. Also the obtained analytical and FEM results are compared with available experimental results, which indicates that the value of experimental results is always between the upper and lower thresholds of analytical and FEM results.

1- مقدمه

نانولوله‌های کربنی از زمان ابداع در سال‌های اولیه دهه 1990 به دلیل دارا بودن خواص مکانیکی فوق‌العاده‌ای چون اندازه کوچک، چگالی کم، سفتی و استحکام بالا و همچنین خواص حرارتی و الکتریکی بسیار عالی همواره مورد توجه محققان و پژوهش‌گران بوده است و در کاربردهای مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است [1]. یکی از کاربردهای مهم این مواد، استفاده به‌عنوان تقویت‌کننده در ساخت کامپوزیت‌های جدید و به‌ویژه کامپوزیت‌هایی با زمینه پلیمری است که به آن‌ها نانوکامپوزیت‌های پلیمری گفته می‌شود. امروزه نانوکامپوزیت‌ها به صورت فزاینده‌ای در صنایع گوناگون و به‌ویژه هوافضا کاربرد دارد که از آن جمله می‌توان به استفاده در قطعات سازه‌ای هواپیما، ترمز هواپیما و قطعات کامپوزیتی کابین هواپیما اشاره کرد. همچنین از نانوکامپوزیت‌های زمینه سرامیکی به دلیل دارا بودن خواص حرارتی مناسب به‌عنوان محافظ حرارتی در موشک‌ها و قطعات توربین استفاده می‌شود [2]. تاکنون تحقیقات وسیعی در مورد تعیین خواص مکانیکی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Mondali, M.R. Yousefi, Prediction a range for elastic modulus of CNT reinforced polymer composites using analytical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 52-60, 2014 (In Persian)

نانوکامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانو لوله‌های کربنی به روش‌های مختلف آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی صورت گرفته است. با استفاده از روابط تئوری عقب‌افتادگی برشی[1] برای نانوکامپوزیت‌های پلیمری اثبات شده است که نسبت طول به قطر نانولوله پارامتری تأثیرگذار در میزان تقویت‌کنندگی نانولوله درون نانوکامپوزیت است [3]. یکی از نکات کلیدی که مانع استفاده کامل از خواص استثنایی نانولوله‌های کربنی در کامپوزیت‌ها می‌شود، پراکندگی ناهمگن این مواد درون زمینه است و به همین دلیل بیشتر نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های مایکرومکانیکال با نتایج آزمایشگاهی تطبیق ندارند. در مورد زمینه پلیمری این ناهمگنی بیشتر هم می‌شود که با عکس‌های گرفته شده با میکروسکوپ الکترونی قابل تأیید است. اثر پراکندگی نانولوله درون زمینه بر سفتی نانوکامپوزیت با استفاده از یک مدل مایکرومکانیک جدید بررسی شده که نتایج این روش در مقایسه با روش‌های پیشین به نتیجه آزمایشاتی که انجام شده نزدیک‌تر است [4]. رفتار کششی نانولوله‌های کربنی در یک زمینه پلیمری با استفاده از مدل المان محدود غیرخطی سه‌بعدی که شامل نانولوله‌ها و زمینه پلیمری است که توسط یک فاز میانی به هم متصل شده‌اند، بررسی و مقدار مدول الاستیک و مدول برشی به صورت دقیق‌تر محاسبه شده است [5]. همچنین مدول الاستیک پلیمر تقویت‌شده با نانولوله کربنی با در نظر گرفتن ابعاد (قطر و طول نانولوله) و ناحیه فاز واسط و با استفاده از رابطه هالپین- تسای و کویان محاسبه شده است که مطابقت مناسبی با نتایج آزمایشگاهی دارد [6]. تأثیر تغییر ضخامت فاز واسط بر مدول الاستیک نانوکامپوزیت با استفاده از روش اجزای محدود برای یک المان حجمی از نانوکامپوزیت با نسبت منظری‌های مختلف بررسی شده است و با نتایج تئوری قانون اختلاط در حوزه میکرومکانیک مقایسه شده‌اند که نشان می‌دهد با افزایش نسبت منظری عملکرد اتصالات بهتر شده و نتایج به قانون اختلاط هم‌گرا می‌شوند [7]. با استفاده از مدل مایکرومکانیک المان محدود، مدول یانگ کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی تک جداره محاسبه شده است. در این مدل تقویت‌کننده براساس ساختار اتمی خود مدل می‌شود در حالی که زمینه به صورت یک ماده نیمه‌پیوسته مدل می‌شود که جهت مدل‌سازی این بخش نیمه‌پیوسته از المان فنر با ساختار و رفتار مجزا استفاده شده است تا انتقال نیروی بین نانولوله و زمینه را با خاصیت متغیر بودن سفتی خود شبیه‌سازی کند. مدل ارائه شده به صورت عددی نیز تحلیل شده و نتایج قابل قبولی براساس مقادیر مختلف سفتی المان فنر به‌دست آمده است [8]. با توجه به مشاهدات صورت گرفته توسط تست مکانیکی و میکروسکوپ الکترونی مشخص شده که تقویت‌کنندگی نانولوله با افزایش سفتی ماده زمینه به تدریج کاهش می‌یابد، این در حالی است که اگر از یک زمینه نرم در ساخت کامپوزیت استفاده شود اثر تقویت‌کنندگی نانولوله به گونه قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند [9]. مدل‌های مایکرومکانیکال و محاسباتی مدول الاستیک نانوکامپوزیت‌ها را بیش از مقدار واقعی که از طریق تست‌های آزمایشگاهی به‌دست می‌آید، محاسبه می‌کنند زیرا بسیاری از فاکتورهایی که در آزمایش مورد توجه قرار می‌گیرد در این مدل‌ها لحاظ نشده است. روش المان محدود گاه مدول الاستیک را به میزان 85% بیشتر از روش آزمایشگاهی محاسبه می‌کند، البته با فرض این‌که اتصال کامل بین نانولوله و زمینه برقرار است؛ ولی وقتی مدول الاستیک با فرض عدم اتصال کامل بین زمینه و تقویت‌کننده محاسبه شود، نتایج روش المان محدود به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است. براساس اصلاحات پیشنهاد شده در روش المان محدود که بر پایه مشاهدات آزمایشگاهی ارائه شده است، می‌توان مدول الاستیک نانوکامپوزیت‌ها را با دقت بیشتری بدون انجام آزمایش محاسبه کرد [10].

مدل‌های المان محدود ارائه شده در سال‌های اخیر پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای را در تعیین مدول الاستیک نانو کامپوزیت‌ها داشته است؛ اما مدل‌های تحلیلی همچنان نتایج چندان قابل قبولی در بر نداشته‌اند. دلیل این امر را می‌توان ناشی از استفاده مدل‌های مایکرومکانیک در تحلیل نانوکامپوزیت در ابعاد مولکولی دانست. در واقع در مدل نانویی این کامپوزیت‌ها تقویت‌کننده به‌صورت مولکولی (شبکه‌ای به‌هم‌پیوسته از مولکول‌های کربن) مدل می‌شود؛ اما زمینه به صورت مولکولی مدل نشده و به‌صورت یک ماده پیوسته در نظر گرفته می‌شود. همچنین نتایج مدل‌های تئوری بعضاً تفاوت آشکاری با مقادیر آزمایشگاهی دارد که این امر به دلیل وجود نواقصی مانند عدم اتصال کامل زمینه به تقویت‌کننده، راستای متفاوت و توزیع ناهمگن نانولوله‌ها درون کامپوزیت، وجود فاز واسط بین نانولوله و رزین در نمونه‌های آزمایشگاهی و وجود ترک و خلل و فرج در نانوکامپوزیت‌های ساخته شده برای انجام تست‌های آزمایشگاهی است که این نواقص در مدل‌های تحلیلی در نظر گرفته نشده است.

در این مقاله یک مدل تئوری تمام پیوسته جهت تعیین یک باند بالا و پایین با تغییرات کم از مدول الاستیسیته برای نانوکامپوزیت‌های پلیمری ارائه شده است، به گونه‌ای که نتایج آزمایشگاهی همواره در این محدوده قرار گیرند. برای این کار نخست با فرض اتصال کامل بین زمینه و تقویت کننده معادلات الاستیسیته حاکم بر رفتار زمینه تقویت‌کننده در نانوکامپوزیت در مختصات استوانه‌ای با استفاده از تئوری عقب‌افتادگی برشی برای یک المان حجمی (RVE)[2] حل شده و سپس با توجه به ثابت‌های به‌دست آمده برای معادلات تنش و جابه‌جایی مقدار مدول الاستیک نانوکامپوزیت محاسبه شده که این مقدار همان باند بالا برای مدول الاستیک است. سپس با ایجاد یک نقصان در مدل بالا که همان گسستگی بین نانو لوله و زمینه در انتهای نانو لوله و در سطح اتصال بین نانو لوله و زمینه است، دوباره معادلات با استفاده از مدل‌سازی المان محدود با نرم‌افزار انسیس و با اضافه کردن پارامتر گسستگی ζ ($1\leq\zeta\leq0$) حل شده و مدول الاستیک در این حالت محاسبه شده که این مقدار همان باند پایین برای مدول الاستیک است. همچنین جهت دقیق‌تر شدن باند پایین مدول الاستیک برای نانوکامپوزیت‌ها مقدار پارامتر ζ ای که در آن نانو لوله کربنی دیگر اثری در تقویت نانوکامپوزیت نداشته و درعمل نانوکامپوزیت به ماده زمینه تبدیل می‌شود با استفاده از روش بالا به‌دست آمده است. برای اطمینان از صحت نتایج حاصل از روش تحلیلی، کلیه نانوکامپوزیت‌های مورد بررسی در نرم‌افزار انسیس برای حالت اتصال کامل مدل‌سازی و مقادیر مدول الاستیک محاسبه و مقایسه شده است. همچنین در انتها نتایج حاصل از مدل‌های تحلیلی و المان محدود با نتایج آزمایشگاهی در دسترس نیز مقایسه شده و پیشنهاداتی جهت چگونگی انتخاب پارامتر گسستگی ζ برای حصول بهترین نتیجه نزدیک به نتایج آزمایشگاهی ارائه شده است.

2- تئوری عقب‌افتادگی برشی

تئوری عقب‌افتادگی برشی ابتدا در سال 1952 توسط کاکس برای بررسی و تخمین میزان تنش انتقال یافته از زمینه به تقویت‌کننده از طریق اینترفیس در کامپوزیت‌ها ارائه شد [11] و سپس در سال 1992 توسط مک کارتنی و در سال 1997 توسط نیرن در قالب روابط الاستیسیته خطی توضیح داده شد [۱۲،۱۳]؛ ولی نمی‌توان این روابط را به طور مستقیم برای نانوکامپوزیت‌ها مورد استفاده قرار داد زیرا باید ساختار اتمی نانولوله‌ها در این معادلات در نظر

1- Shear lag theory

2- Representative volume element

گرفته شود. بدین‌ترتیب که نانو لوله کربنی دارای کلاهک به‌عنوان یک عضو مجزا با یک تقویت‌کننده موثر که پیوسته است و دارای همان قطر و طول نانولوله است، جایگزین شود. مدول الاستیک تقویت کننده موثر برای نانولوله کربنی تک جداره توسط لای محاسبه شده‌است؛ بنابراین با استفاده از این روش لای در سال 2005 روابط تئوری عقب افتادگی برشی را برای یک المان حجمی از نانوکامپوزیت با شرط کرنش همسان[1] ارائه کرد که این روابط به همراه اثبات آن‌ها در ادامه آورده شده‌اند [3و14].

جهت به‌دست آوردن میدان تنش در نانوکامپوزیت برای محاسبه مدول الاستیک ابتدا یک المان حجمی از آن مانند شکل 1 در نظر گرفته شده، سپس با استفاده از تئوری عقب‌افتادگی برشی و تکنیک تقویت‌کننده مجازی به بررسی و تحلیل معادلات پرداخته شده است. جهت حل مسأله به کمک تکنیک تقویت‌کننده مجازی، تک سلولی از المان حجمی شکل 1 را به صورت دوبعدی در نظر گرفته و مطابق شکل 2 به دو ناحیه I و II تقسیم می‌شود.

بر این اساس راه حل مسأله برای ناحیه I که شبیه یک کامپوزیت با تقویت‌کننده ممتد پیوسته است پایه حل کل کامپوزیت قرار گرفته است. در واقع حل ناحیه II که کاملاً از جنس زمینه است، با استفاده از روابط حاصل از حل ناحیه I و با فرض این‌که بخشی از زمینه این ناحیه که در امتداد تقویت‌کننده واقعی است به‌عنوان تقویت‌کننده مجازی با خواص زمینه قلمداد می‌شود، به‌دست خواهد آمد. سپس با اعمال شرایط مرزی مناسب مانند برابری تنش‌های محوری و برشی انتهای تقویت‌کننده ناحیه I و ابتدای تقویت کننده مجازی ناحیه II می‌توان ثابت‌های به‌وجود آمده از حل هر ناحیه را به‌دست آورده و توابع تنش برشی، تنش محوری و دیگر پارامترها را در هر دو فاز زمینه و تقویت‌کننده و در کلیه نقاط تک سلول محاسبه کرد.

معادلات حاکم بر مساله در حالت تقارن محوری و بر حسب جابه‌جایی در مختصات قطبی در روابط (1) و (2) ارائه شده‌اند [15]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\tau_{rz} = 0 \quad (2)$$

روابط کرنش- جابه‌جایی در روابط (3) و (4) ارائه شده‌اند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (3 \text{ الف-ج})$$

$$\gamma_{rz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r}\right) \quad (4)$$

معادلات ساختاری در مختصات قطبی در روابط (5) تا (8) ارائه شده‌اند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})\right) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{rr})\right) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})\right) \quad (7)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \quad (8)$$

برای محاسبه تنش‌های محوری و برشی در ناحیه I ابتدا از رابطه (2) که معادله تعادل در جهت z است، نسبت به r از 0 تا a برای تقویت کننده مؤثر انتگرال گرفته می‌شود:

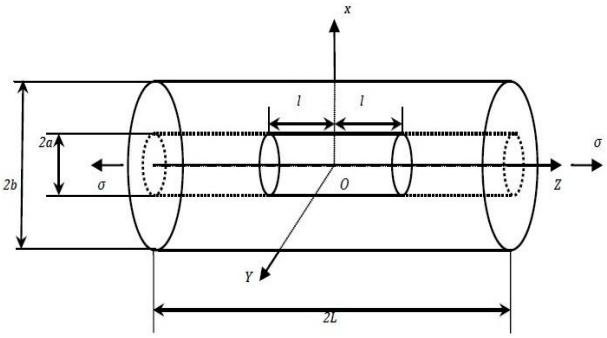
$$\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \frac{\partial \sigma_{zz}^f}{\partial z}(2\pi r)dr + \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}^f\right)(2\pi r)dr = 0 \quad (9)$$

متوسط تنش محوری در مقطع تقویت‌کننده در رابطه (10) ارائه شده است:

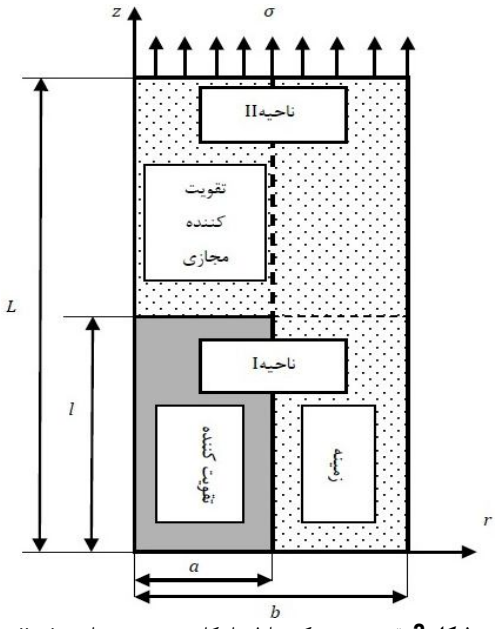
$$\overline{\sigma_{zz}^f}(z) \equiv \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \sigma_{zz}^f(r,z)(2\pi r)dr \quad (10)$$

استفاده از رابطه (10) در رابطه (9)، رابطه (11) را نتیجه می‌دهد:

1- Isostrain



شکل 1 المان حجمی نانوکامپوزیت



شکل 2 تقسیم‌بندی تک سلول نانوکامپوزیت به دو ناحیه I و II

$$\frac{d\overline{\sigma_{zz}^f}}{dz} = -\frac{2}{a}\tau_i \quad (11)$$

بدین‌ترتیب رابطه بین $\overline{\sigma_{zz}^f}$ و τ_i موسوم به معادله عقب‌افتادگی برشی محاسبه شده است، که در این رابطه τ_i تنش برشی در سطح اتصال بین تقویت‌کننده و زمینه است. با اعمال فرض عدم وابستگی تنش محوری به r، روابط مربوط به توزیع تنش برشی در زمینه و تقویت‌کننده به صورت توابعی از r و τ_i به‌دست می‌آیند. برای تعیین τ_{rz}^f برحسب τ_i رابطه (12) فرض می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^f}{\partial z} = f(z) \quad (12)$$

با قرار دادن رابطه (12) در رابطه (2) و انتگرال‌گیری نسبت به r از 0 تا r رابطه (13) به‌دست می‌آید:

$$\tau_{rz}^f = \frac{r}{a}\tau_i \quad (13)$$

برای به‌دست آوردن تنش محوری در زمینه برحسب τ_i، با انتگرال‌گیری از رابطه (2) برحسب r از a تا b، رابطه (14) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d\overline{\sigma_{zz}^m}}{dz} = \frac{2a}{b^2 - a^2}\tau_i \quad (14)$$

در رابطه (14) مقدار متوسط تنش محوری در مقطع زمینه از رابطه (15) به‌دست می‌آید:

$$\overline{\sigma_{zz}^m}(z) \equiv \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)}\int_a^b \sigma_{zz}^m(r,z)(2\pi r)dr \quad (15)$$

برای تنش برشی در زمینه مانند حالت پیش، رابطه (16) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{rz}^m = \frac{a}{b^2 - a^2}\left(\frac{b^2}{r} - r\right)\tau_i \quad (16)$$

سپس برای زمینه و تقویت‌کننده رابطه (17) فرض می‌شود [۳،۱۴،۱۶]:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \ll \left|\frac{\partial w}{\partial r}\right| \quad (17)$$

رابطه (17) به همراه روابط (4) و (8)، روابط (18) و (19) را نتیجه می‌دهد:

$$\tau_{rz}^{f} = G_f \frac{\partial w^f}{\partial r} \quad (18)$$

$$\tau_{rz}^{m} = G_m \frac{\partial w^m}{\partial r} \quad (19)$$

برای به‌دست آوردن τ_i با ترکیب روابط (16) و (19) و انتگرال‌گیری برحسب r از a تا b رابطه (20) به‌دست می‌آید:

$$\tau_i(z) = G_m \frac{b^2-a^2}{a} \frac{1}{b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{2}(b^2-a^2)} (w_b^m - w_a^m) \quad (20)$$

در رابطه (20):

$$w_b^m \equiv w^m|r=b \, , w_a^m \equiv w^m|r=a$$

با قرار دادن τ_i از رابطه (20) در رابطه (16)، رابطه (21) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{rz}^{m} = G_m \frac{(w_b^m - w_a^m)}{b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{2}(b^2-a^2)} \left(\frac{b^2}{r} - r\right) \quad (21)$$

با قرار دادن رابطه (21) در رابطه (19) و انتگرال‌گیری برحسب r از a تا r مولفه جابه‌جایی محوری در زمینه به صورت رابطه (22) به‌دست می‌آید:

$$w^m(r,z) = w_a^m + \frac{b^2 \ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2}(r^2-a^2)}{b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{2}(b^2-a^2)} (w_b^m - w_a^m) \quad (22)$$

برای به‌دست آوردن σ_{zz}^m، در هر دو ناحیهٔ زمینه و تقویت‌کننده رابطه (23) فرض شده است [۳،۱۴،۱۶]:

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} \ll \sigma_{zz} \quad (23)$$

سپس از روابط (3ج)، (7) و (23)، روابط (24) و (25) نتیجه می‌شوند:

$$\sigma_{zz}^{f} = E_f \frac{\partial w^f}{\partial z} \quad (24)$$

$$\sigma_{zz}^{m} = E_m \frac{\partial w^m}{\partial z} \quad (25)$$

با استفاده از رابطه (22) در رابطه (25)، رابطه (26) نتیجه می‌شود:

$$\sigma_{zz}^{m} = \sigma_i^m + \frac{b^2 \ln\frac{r}{a} - \frac{1}{2}(r^2-a^2)}{b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{2}(b^2-a^2)} (\sigma_{zz}^m|r=b - \sigma_i^m) \quad (26)$$

که در این رابطه σ_i^m تنش محوری در ناحیه بین وجهی[1] $r=a$ است. برای بدست آوردن تنش محوری در $r=b$ معادله تعادل نیروها در جهت z به صورت رابطه (27) نوشته می‌شود:

$$\pi b^2 \sigma = \int_0^a \sigma_{zz}^f (2\pi r)\, dr + \int_a^b \sigma_{zz}^m (2\pi r) dr \quad (27)$$

با قراردادن روابط σ_{zz}^f و σ_{zz}^m در رابطه (27)، رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$\sigma_{zz}^{m} = \sigma_i^m + \frac{b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{2}(b^2-a^2)}{b^4 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{4}(b^2-a^2)(3b^2-a^2)} \left[b^2\sigma - a^2 \overline{\sigma_{zz}^f} - (b^2-a^2)\sigma_i^m\right] \quad (28)$$

معادله تغییرات $\overline{\sigma_{zz}^f}$ نسبت به z با استفاده از روابط (11)، (20) و (25) به صورت رابطه (29) به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\overline{\sigma_{zz}^f}}{dz} = -2 \frac{E_m}{2(1+\vartheta_m)} \frac{b^2-a^2}{a^2} \frac{1}{b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{2}(b^2-a^2)} (w_b^m - w_a^m) \quad (29)$$

با مشتق‌گیری نسبت به z از رابطه (29)، معادله دیفرانسیلی به‌صورت رابطه (30) برای $\overline{\sigma_{zz}^f}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2\overline{\sigma_{zz}^f}}{dz^2} = -\frac{1}{1+\vartheta_m} \frac{b^2-a^2}{a^2} \frac{1}{b^4 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{4}(b^2-a^2)(3b^2-a^2)} \left[b^2\sigma - a^2 \overline{\sigma_{zz}^f} - (b^2-a^2)\sigma_i^m\right] \quad (30)$$

در حالت اتصال کامل بین زمینه و تقویت‌کننده و با فرض کرنش همسان در $r = a$ رابطه (31) نتیجه می‌شود:

$$\varepsilon_{zz}^{m} = \varepsilon_{zz}^{f} \quad (31)$$

با توجه به این‌که قطر نانولوله بسیار کوچک است؛ بنابراین می‌توان با دقت خوبی $\sigma_{zz}^f(r,z)$ را با مقدار متوسط آن $\overline{\sigma_{zz}^f}$ جایگزین کرد در نتیجه رابطه (31) به صورت رابطه (32) نوشته می‌شود:

$$\sigma_i^m = \frac{E_m}{E_f} \overline{\sigma_{zz}^f} \quad (32)$$

با قرار دادن رابطه (32) در (30)، رابطه (33) نتیجه می‌شود:

$$\frac{d^2\overline{\sigma_{zz}^f}}{dz^2} - \alpha^2 \overline{\sigma_{zz}^f} = -\frac{\alpha^2 R^2}{a^2 + \frac{E_m}{E_f}(b^2-a^2)} \sigma \quad (33)$$

که در رابطه (33) ضریب α به صورت رابطه (34) نوشته می‌شود:

$$\alpha^2 = \frac{1}{1+\vartheta_m} \frac{b^2-a^2}{a^2} \frac{a^2 + \frac{E_m}{E_f}(b^2-a^2)}{b^4 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{4}(b^2-a^2)(3b^2-a^2)} \quad (34)$$

جواب کلی معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (34) به صورت رابطه (35) است:

$$\overline{\sigma_{zz}^f} = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z} + \frac{b^2}{a^2 + \frac{E_m}{E_f}(b^2-a^2)} \sigma \quad (35)$$

در رابطه(35)، A و B ثابت‌هایی هستند که با اعمال شرایط مرزی محاسبه می‌شوند. با استفاده از رابطه (35) و قرار دادن آن در رابطه (11) برای تنش برشی در ناحیه بین وجهی رابطه (36) نتیجه می‌شود:

$$\tau_i = -\frac{a}{2} \alpha \left(Ae^{\alpha z} - Be^{-\alpha z}\right) \quad (36)$$

برای تعیین ثابت‌ها نیاز به حل معادلات با استفاده از تکنیک تقویت‌کننده مجازی در ناحیهٔ II است. دو استوانه موجود در انتهای المان حجمی در ناحیه II را می‌توان به‌عنوان دو سیلندر کامپوزیتی در نظر گرفت که دارای تقویت‌کننده مجازی با قطر تقویت‌کننده مؤثر هستند، ولی مدول الاستیک و نسبت پواسون آن‌ها مربوط به ماده زمینه است. در نتیجه می‌توان از معادلات به‌دست آمده برای ناحیه I در تعیین تنش‌های محوری و برشی در ناحیه II با قرار دادن E_m به‌جای E_f استفاده کرد. بنابراین در معادله (35) با قرار دادن $E_f = E_m$ رابطه (37) به‌دست می‌آید:

$$\overline{\sigma_{zz}^{fm}} = Ce^{\alpha_m z} + De^{-\alpha_m z} + \sigma \quad (37)$$

در رابطه (37)، fm بیانگر تقویت کننده مجازی است و α_m با مساوی قرار دادن E_f با E_m در رابطه (34) به صورت رابطه (38) به‌دست می‌آید:

$$\alpha_m^2 = \frac{1}{1+\vartheta_m} \frac{b^2-a^2}{a^2} \frac{b^2}{b^4 \ln\frac{b}{a} - \frac{1}{4}(b^2-a^2)(3b^2-a^2)} \quad (38)$$

همچنین برای تنش برشی در تقویت‌کننده مجازی رابطه (39) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{rz}^{fm} = -\frac{r}{2} \alpha_m \left(Ce^{\alpha_m z} - De^{-\alpha_m z}\right) \quad (39)$$

شرایط مرزی در دو انتهای المان حجمی ($z = \pm L$) در روابط (40) و (41) ارائه شده‌اند:

$$\sigma_{zz}^{m} = \sigma \quad (40)$$

$$\tau_{rz}^{m} = 0 \quad (41)$$

شرط مرزی برابری تنش‌های محوری و برشی در انتهای تقویت‌کننده موثر در ناحیه I و ابتدای تقویت‌کننده مجازی در ناحیه II ($z = l$) به صورت روابط (42) و (43) نوشته می‌شود:

$$\sigma_{zz}^{f} = \sigma_{zz}^{m} \quad (42)$$

$$\tau_{rz}^{f} = \tau_{rz}^{m} \quad (43)$$

استفاده از رابطه (41) در رابطه (39)، رابطه (44) را نتیجه می‌دهد:

$$C = D = 0 \quad (44)$$

1- Interface

با جایگذاری این ثابت‌ها در روابط (37) و (39)، روابط (45) و (46) نتیجه می‌شود:

$$\overline{\sigma_{zz}^{fm}} = \sigma \quad (45)$$

$$\tau_{rz}^{fm} = 0 \quad (46)$$

سپس با جای‌گذاری روابط (35) و (45) در رابطه (42) ثابت‌های A و B به صورت رابطه (47) محاسبه شده‌اند:

$$A = B = \frac{\sigma}{2\cosh(\alpha l)}\left[1-\frac{b^2}{a^2+\frac{E_m}{E_f}(b^2-a^2)}\right] \quad (47)$$

با استفاده از ثابت‌های A و B، معادلات تنش محوری و برشی در دو فاز زمینه و تقویت‌کننده و همچنین تنش برشی در ناحیه بین وجهی برای نانوکامپوزیت‌ها به راحتی محاسبه می‌شوند.

2-1- محاسبه مدول الاستیک در حالت اتصال کامل دو فاز

در این قسمت برای محاسبه مدول الاستیک، جابه‌جایی محوری نانوکامپوزیت به صورت تابعی از r, z در حالت اتصال کامل بین نانولوله و زمینه محاسبه خواهد شد. به جهت سادگی کار، ابتدا جابجایی محوری در هر دو ناحیه I و II نشان داده شده در شکل 2 به‌طور مجزا به‌دست آمده و سپس با جمع مقادیر حاصل، جابه‌جایی کل نانوکامپوزیت محاسبه خواهد شد. با توجه به این نکته که جابه‌جایی محوری در کل مقطع المان حجمی یکسان نیست، بنابراین مدول الاستیک محوری المان حجمی به‌وسیله متوسط جابه‌جایی محوری در $z = L$ و در اثر وارد شدن تنش σ به‌دست می‌آید. مقدار متوسط جابه‌جایی محوری در $z = l$ برای ناحیه I از رابطه (48) به‌دست می‌آید:

$$w = \frac{2}{b^2}\left(\int_0^a r\int_0^l \frac{\sigma_{zz}^f}{E_f}\,dzdr + \int_a^b r\int_0^l \frac{\sigma_{zz}^m}{E_m}\,dzdr\right) \quad (48)$$

در رابطه (48)، σ_{zz}^m تنش محوری در زمینه است، اما با توجه به معادله تعادل نیروها در تک سلول که در رابطه (49) آمده است نیازی به استفاده از معادله σ_{zz}^m در رابطه (48) برای محاسبه w نیست [16]:

$$2\int_0^a r\,\sigma_{zz}^f dr + 2\int_a^b r\,\sigma_{zz}^m dr = b^2\sigma \quad (49)$$

با ترکیب روابط (48) و (49)، رابطه (50) نتیجه می‌شود:

$$w = \frac{\sigma l}{E_m} + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{E_f}-\frac{1}{E_m}\right)\int_0^l \sigma_{zz}^f\,dz \quad (50)$$

همان‌طور که از رابطه (50) مشخص است مقدار جابه‌جایی w در ناحیه I فقط به σ_{zz}^f وابسته است، بنابراین با جای‌گذاری رابطه (35) به جای σ_{zz}^f در رابطه (50)، مقدار متوسط جابه‌جایی در تقویت‌کننده به صورت رابطه (51) به‌دست می‌آید:

$$w = \frac{\sigma l}{E_m} + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{E_f}-\frac{1}{E_m}\right)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha l}-e^{-\alpha l}) + \frac{b^2E_f}{a^2E_f+(b^2-a^2)E_m}\,\sigma\right] \quad (51)$$

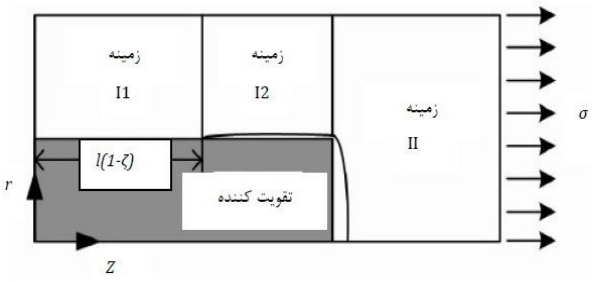
به صورت مشابه مقدار متوسط جابه‌جایی در ناحیه II ($z = L$) به صورت رابطه (52) به‌دست می‌آید:

$$w' = \frac{1}{E_m}\int_l^L \sigma dz = \frac{(L-l)\sigma}{E_m} \quad (52)$$

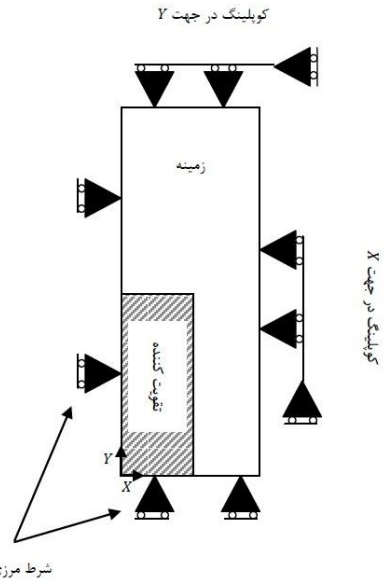
در نتیجه مقدار متوسط جابه‌جایی محوری در کل تک سلول از جمع جابه‌جایی‌های ناحیه I و II به صورت رابطه (53) به‌دست می‌آید:

$$w_T = w + w' = \frac{\sigma L}{E_m} + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{E_f}-\frac{1}{E_m}\right)\left[\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha l}-e^{-\alpha l}) + \frac{b^2E_f}{a^2E_f+(b^2-a^2)E_m}\,\sigma\right] \quad (53)$$

حال با تقسیم جابه‌جایی کل به‌دست آمده از رابطه (53) بر کل طول تک سلول، مقدار کرنش نانوکامپوزیت به صورت رابطه (54) محاسبه می‌شود:



شکل 3 نواحی سه‌گانه تک سلول با در نظر گرفتن پارامتر گسستگی بین دو فاز [17]



شکل 4 شرایط مرزی برای مدل المان محدود تک‌سلول نانوکامپوزیت [18]

$$\varepsilon = \frac{w_T}{L} \quad (54)$$

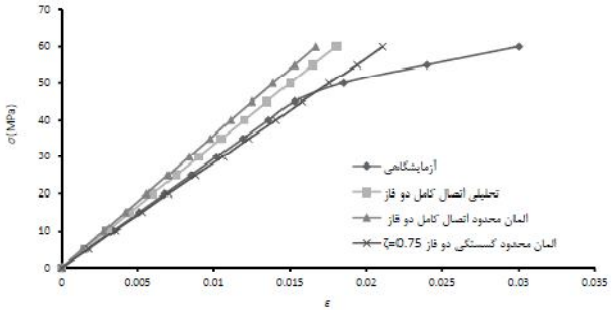
در نهایت با استفاده از مقدار کرنش به‌دست آمده و همچنین تنش وارد شده به المان حجمی ، مدول الاستیک نانوکامپوزیت در حالت اتصال کامل دو فاز از رابطه (55) به‌دست می‌آید که این مقدار همان باند بالا برای مدول الاستیک است:

$$E_{nc} = \frac{L\sigma}{w_T} \quad (55)$$

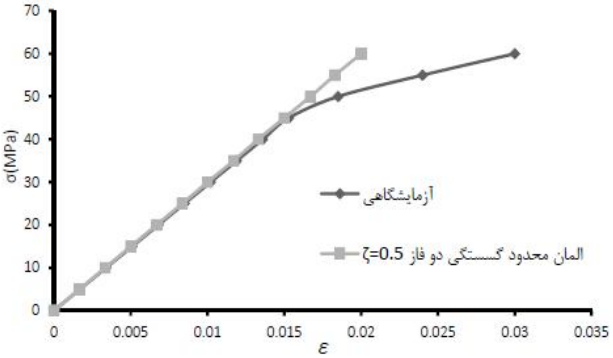
2-2- محاسبه مدول الاستیک در حالت گسستگی بین دو فاز

در این قسمت با استفاده از تئوری عقب‌افتادگی برشی، وضعیت تنش‌ها و کرنش‌ها برای حالتی که بین دو فاز گسستگی وجود داشته باشد، بررسی خواهد شد. برای این منظور زمینه به سه بخش مطابق شکل 3 تقسیم شده و با اعمال پارامتر گسستگی ζ ($1\geq\zeta\geq 0$) مدول الاستیک نانوکامپوزیت با استفاده از مدل المان محدود نرم‌افزار انسیس محاسبه می‌شود. برای این کار از المان پلین 183 نرم‌افزار انسیس که دارای خاصیت تقارن محوری که برای هر دو قسمت زمینه و تقویت‌کننده استفاده شده است. شرایط مرزی مورد استفاده برای این مدل در شکل 4 نشان داده شده‌اند. همچنین برای اطمینان از صحت نتایج روش تحلیلی در حالت اتصال کامل دو فاز از نتایج مدل المان محدود استفاده شده است.

همان‌طور که در شکل 3 مشاهده می‌شود در ζ= 0 فقط قسمت انتهایی تقویت‌کننده در $z = l$ از زمینه جدا شده است و با بیشتر شدن مقدار ζ گسستگی بر ناحیه بین وجهی گسترش پیدا می‌کند و در نهایت در ζ= 1، تقویت‌کننده و زمینه به طور کامل از یکدیگر جدا می‌شوند.



شکل 5 نمودار تنش- کرنش نانوکامپوزیت با یک درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره جهت مقایسه نتایج تحلیلی، آزمایشگاهی و المان محدود [19]



شکل 6 نمودار تنش-کرنش نانوکامپوزیت با یک درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره در حالت برابری مدول الاستیک تئوری و آزمایشگاهی [19]

جدول 1 مشخصات نانولوله و زمینه سازنده نانوکامپوزیت

نوع ماده	2a (nm)	E (GPa)	ν	چگالی (g/cm3)
نانولوله کربنی تک جداره	1/359[3]	779 [3]	0/3 [4]	1/20 [4]
اپون اپوکسی و جفمین D-230 [21]	_	2/84 [19]	0/35 [20]	1/16 [20]

جدول 2 مدول الاستیک نانوکامپوزیت با 1 درصد وزنی نانولوله

اپون 828 / یک درصد وزنی نانولوله کربنی تک جداره			
مدول الاستیک نانوکامپوزیت	آزمایشگاهی (GPa)	تحلیلی (GPa)	المان محدود (انسیس) (GPa)
اتصال کامل دو فاز	2/94 [19]	3/323	3/576
گسستگی بین دو فاز ζ=0/5	_	_	2/991
گسستگی بحرانی ζ=0/75	_	_	2/852

جدول3 مدول الاستیک نانوکامپوزیت با 4 درصد وزنی نانولوله

اپون 828 / چهار درصد وزنی نانولوله کربنی تک جداره			
مدول الاستیک نانوکامپوزیت	آزمایشگاهی (GPa)	تحلیلی (GPa)	المان محدود (انسیس) (GPa)
اتصال کامل دو فاز	3/18 [19]	3/99	4/708
گسستگی بین دو فاز ζ=0/46	_	_	3/382
گسستگی بحرانی ζ=0/75	_	_	2/846

3- بررسی مدول الاستیک نانوکامپوزیت با زمینه اپون اپوکسی

در این قسمت مدول الاستیک نانوکامپوزیت پلیمری با زمینه اپون اپوکسی که حاوی 1و 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک جداره است، در دو حالت اتصال کامل بین دو فاز و گسستگی بین دو فاز با استفاده از روابط ارائه شده در قسمت‌های پیش و مدل المان محدود محاسبه شده است. سپس اعداد به‌دست آمده از روش تحلیلی با نتایج آزمایشگاهی ارائه شده توسط یانگ [19] مقایسه شده‌اند. جهت محاسبه مدول الاستیک این نوع نانوکامپوزیت ابتدا باید خواص مکانیکی و مشخصات ابعادی نانولوله و زمینه و را داشته باشیم. که این مشخصات در جدول 1 ارائه شده است.

در نانوکامپوزیت‌های ساخته شده برای آزمایش میزان نانولوله موجود در نانوکامپوزیت توسط درصد وزنی مشخص می‌شود، در صورتی که در روابط تحلیلی میزان نانو لوله موجود در نانوکامپوزیت با درصد حجمی (V_f) تعیین می‌شود؛ بنابراین با استفاده از رابطه زیر که توسط گازمن ارائه شده است درصد وزنی نانو لوله موجود در نانوکامپوزیت به درصد حجمی تبدیل می‌شود [4]:

$$V_f = \frac{W_f \rho_m}{W_f \rho_f + (1 - W_f)\rho_f} \quad (56)$$

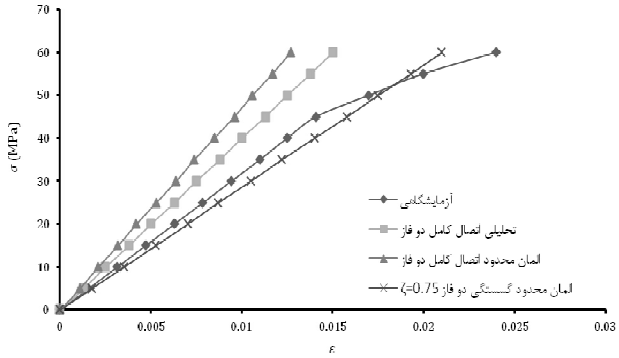
با توجه به رابطه بالا و مشخصات ارائه شده برای نانولوله و زمینه در جدول 1، درصد حجمی برای نانوکامپوزیت با یک درصد وزنی نانولوله تک جداره برابر با 0/96 درصد می‌شود. نسبت طول به قطر نانولوله برای این نانوکامپوزیت برابر با $\frac{l}{a}$ = 15 در نظر گرفته شده است و نسبت شعاع المان حجمی به نانولوله، $b = 5a$ است [3]. مدول الاستیک نانوکامپوزیت با زمینه اپون اپوکسی و 1درصد وزنی نانولوله کربنی در جدول 2 ارائه شده است.

با توجه به اعداد ارائه شده در جدول 2 مشاهده می‌شود که مقدار مدول الاستیک نانوکامپوزیت در حالت اتصال کامل دو فاز که با حل تحلیلی معادلات الاستیسیته و روش المان محدود به‌دست آمده‌اند بیشتر از مدول الاستیک آزمایشگاهی است (باند بالای مدول الاستیک) و این بدان دلیل است که نواقص موجود در ساختار نمونه‌های آزمایشگاهی در مدل‌های تئوری لحاظ نشده است. با در نظر گرفتن این نواقص به صورت گسستگی بین دو فاز در انتهای نانولوله و همچنین در ناحیه بین وجهی مقدار مدول الاستیک روش المان محدود کاهش پیدا می‌کند تا در ζ= 0/5، مقدار مدول الاستیک آزمایشگاهی و المان محدود تقریباً با هم برابر می‌شوند. با ایجاد گسستگی بیشتر بین دو فاز در نقطه ζ= 0/75 با وجود اتصال جزیی بین نانولوله و زمینه، مدول الاستیک نانوکامپوزیت تقریباً با مدول الاستیک زمینه در حالت گسستگی بحرانی برابر می‌شود (باند پایین مدول الاستیک). این وضعیت به خوبی در شکل‌های 5 و 6 نشان داده شده است و نمودار تنش-کرنش آزمایشگاهی بین نمودار تنش- کرنش تحلیلی و المان محدود در حالت اتصال کامل دو فاز (باند بالا) و حالت گسستگی بحرانی (باند پایین) قرار دارد.

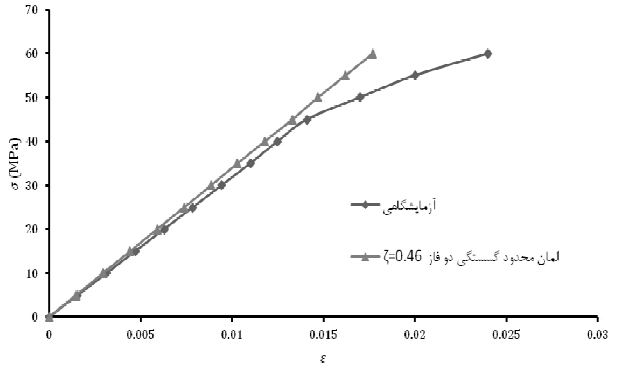
با استفاده از رابطه (56)، درصد حجمی برای نانوکامپوزیت با 4 درصد وزنی نانولوله تک جداره برابر با 3/873 درصد است. نسبت طول به قطر نانولوله برای این نانوکامپوزیت مانند حالت پیش برابر با $\frac{l}{a}$ = 15 است و $b = 3a$ در نظر گرفته شده است. با توجه به فرضیات بالا مدول الاستیک نانوکامپوزیت با زمینه اپون اپوکسی و 4 درصد وزنی نانولوله کربنی در جدول 3 ارائه شده است.

نمودار تنش- کرنش حاصل از نتایج آزمایشگاهی، تحلیلی و المان محدود برای این نانوکامپوزیت در حالت‌های مختلف در شکل‌های 7 و 8 ارائه شده است. در شکل 7 به خوبی مشاهده می‌شود که نمودار تنش-کرنش آزمایشگاهی بین نمودار تنش-کرنش تحلیلی در حالت اتصال کامل دو فاز (باند بالا) و نمودار المان محدود در ζ= 0/75 (باند پایین) قرار دارد.

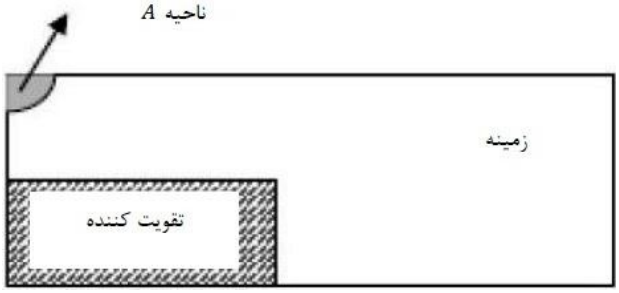
همچنین در ζ=0/46 نمودار تنش- کرنش المان محدود بر نمودار آزمایشگاهی منطبق می‌شود که نشانه برابر بودن مدول الاستیک در این حالت است. با توجه به نتایج مدل المان محدود در جداول 2 و 3 مشاهده می‌شود که مقدار مدول الاستیک به‌دست آمده از این روش کمی بیشتر از مدول الاستیک محاسبه شده به روش تحلیلی است و این به دلیل فرضیاتی مانند متوسط گرفتن تنش محوری تقویت‌کننده و استفاده از رابطه (17) ($\frac{\partial u}{\partial z} \cong 0$) است.



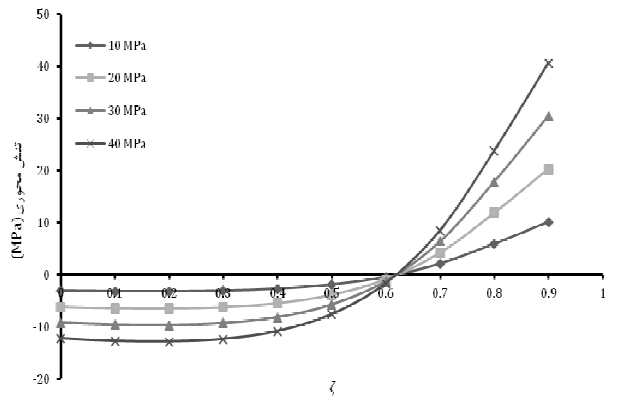
شکل 7 نمودار تنش-کرنش نانوکامپوزیت با 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره جهت مقایسه نتایج تحلیلی، آزمایشگاهی و المان محدود [19]



شکل 8 نمودار تنش-کرنش نانوکامپوزیت با 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره در حالت برابری مدول الاستیک تئوری و آزمایشگاهی [19]

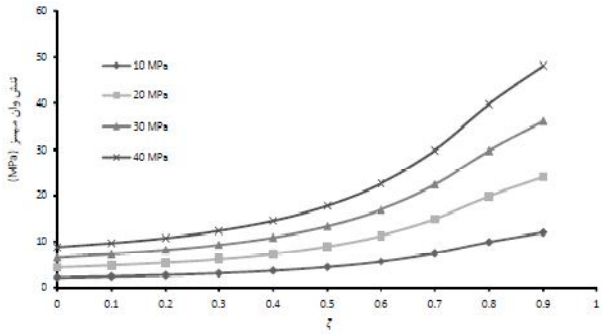


شکل 9 ناحیه A در تک سلول نانوکامپوزیت



شکل 10 تغییرات تنش محوری برحسب تغییر ζ در ناحیه A برای نانوکامپوزیت با 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره

در حالی‌که نرم‌افزار انسیس بدون در نظر گرفتن این فرضیات مساله را حل می‌کند و به همین دلیل در شکل 8 نمودار تنش-کرنش المان محدود در ζ=0/46 کاملاً بر نمودار آزمایشگاهی منطبق نیست.



شکل 11 تغییرات تنش وان میسز بر حسب تغییر ζ در ناحیه A برای نانوکامپوزیت با 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره

همان‌طور که در جداول 2 و 3 مشاهده شد، مقدار مدول الاستیک به‌دست آمده از حل معادلات الاستیسیته برای المان حجمی نانوکامپوزیت با روش عقب‌افتادگی برشی همواره بیشتر از مدول الاستیک حاصل از انجام آزمایش است. برای نزدیک‌تر کردن مدول الاستیک تحلیلی به مقادیر آزمایشگاهی نواقص موجود در مدل‌های آزمایشگاهی را با پارامتر گسستگی ζ در مدل المان محدود وارد کرده و مقدار مدول الاستیک برای گسستگی بین دو فاز محاسبه شده است. در ادامه به بررسی اثر افزایش ζ بر تنش محوری و وان میسز در زمینه (ناحیه A) برای مقادیر مختلف تنش σ پرداخته شده است. ناحیه A در شکل 9 نشان داده شده است و به دلیل این‌که این ناحیه نقش کلیدی در انتقال بار دارد، برای این بررسی در نظر گرفته می‌شود.

نمودار تغییرات تنش محوری برحسب تغییر ζ در ناحیه A برای نانوکامپوزیت با زمینه اپوکسی و 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره در شکل 10 ارائه شده است. با توجه به نمودار شکل 10 مشاهده می‌شود که نمودار تنش محوری در مقادیر منفی (تنش فشاری) از ζ=0 تا ζ=0/5 به‌صورت خط راست ادامه دارد. پس از این نقطه که در آن مدول الاستیک تئوری و آزمایشگاهی با هم برابر می‌شوند، نمودار به سمت صفر نزدیک شده و در ζ=0/62 مقدار آن مثبت شده و سپس با شیب زیادی به مقدار تنش اعمال شده σ نزدیک می‌شود و نانو لوله در تحمل تنش نقشی نداشته و کل تنش به زمینه وارد می‌شود. نمودار تغییرات تنش وان میسز نیز همین مطلب را تأیید می‌کند زیرا با توجه به شکل 11 مقدار تنش تا ζ= 0/5 به صورت خط راست با مقدار تقریباً ثابت است (نقطه برابری مدول تئوری و آزمایشگاهی) و پس از آن مقدار تنش به تدریج افزایش می‌یابد تا در حالت گسستگی کامل با مقدار تنش وارد شده به انتهای تک سلول برابر شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود با تحلیل نمودار تغییرات تنش محوری و وان میسز بر حسب افزایش گسستگی در زمینه می‌توان با دقت خوبی محدوده ζ برابری مدول الاستیک تئوری و آزمایشگاهی و ζ گسستگی بحرانی را تعیین کرد. این روش در صورت در دسترس نبودن اطلاعات آزمایشگاهی برای نانوکامپوزیت‌های جدید می‌تواند راه‌گشای محققان در تعیین محدوده مدول الاستیک واقعی نانوکامپوزیت‌ها باشد.

4- نتیجه گیری

همان‌طور که گفته شد هدف از انجام این تحقیق ارائه یک مدل تمام پیوسته جهت تعیین یک باند بالا و پایین با تغییرات کم برای مدول الاستیک نانوکامپوزیت پلیمری تقویت‌شده با نانولوله کربنی است به گونه‌ای که نتایج آزمایشگاهی همواره در این بازه قرار بگیرد. برای رسیدن به این هدف معادلات الاستیسیته حاکم برای المان حجمی نانوکامپوزیت با استفاده از

تئوری عقب‌افتادگی برشی حل شد و معادلات تنش محوری و برشی در دو فاز زمینه و تقویت‌کننده به‌دست آمد و سپس با استفاده از این معادلات، جابه‌جایی محوری کل المان حجمی و مدول الاستیک نانوکامپوزیت در حالت اتصال کامل دو فاز محاسبه شد. پس از محاسبه مدول الاستیک در این حالت با وارد کردن اثر نواقص موجود در نمونه‌های آزمایشگاهی به معادلات تئوری عقب‌افتادگی برشی با استفاده از پارامتر گسستگی ζ (1≤ ζ ≤0) که بیانگر وجود گسستگی در ناحیه بین وجهی است و با استفاده از مدل المان محدود نرم‌افزار انسیس، مدول الاستیک با وجود گسستگی بین دو فاز محاسبه شد. سپس مدول الاستیک به‌دست آمده با روش‌های بالا با نتایج آزمایشگاهی موجود برای نانوکامپوزیت پلیمری با زمینه اپون اپوکسی که حاوی 1و 4 درصد وزنی نانولوله کربنی تک‌جداره است، مقایسه شده که نتایج مهم حاصل از این بررسی‌ها عبارتند از:

1. معادلات تحلیلی تئوری عقب‌افتادگی برشی در حالت اتصال کامل بین نانولوله و زمینه همواره مقدار مدول الاستیک را بیشتر از نتایج آزمایشگاهی محاسبه می‌کنند که این مقدار همان باند بالا برای مدول الاستیک نانوکامپوزیت است.

2. مقدار مدول الاستیک متناظر با ζ گسستگی بحرانی دو فاز که با استفاده از روش المان محدود محاسبه می‌شود همواره کمتر از نتایج آزمایشگاهی است که این مقدار همان باند پایین برای مدول الاستیک نانوکامپوزیت است.

3. یک باند بالا و پایین برای مدول الاستیک نانوکامپوزیت پلیمری با استفاده از روش تحلیلی و المان محدود محاسبه شد و نشان داده شد که نتایج آزمایشگاهی همواره در این محدوده قرار دارند.

4. باتوجه به وقت گیر و هزینه بر بودن انجام آزمایش برای تعیین مدول الاستیک نانوکامپوزیت‌های جدید محققین به دنبال یافتن مدول الاستیک با استفاده از روش‌های تحلیلی می‌باشند. علاوه‌بر تعیین محدوده مدول الاستیک نانوکامپوزیت‌ها با روش تحلیلی و المان محدود در این تحقیق، نشان داده شد که با تحلیل و بررسی تغییرات تنش محوری و وان میسز بر حسب تغییر ζ برای زمینه و نانولوله در نقاطی از المان حجمی که نقش اساسی در انتقال بار دارند، می‌توان محدوده ζ برابری مقادیر مدول الاستیک تئوری و آزمایشگاهی را با دقت خوبی بدون انجام آزمایش تعیین کرد و براساس آن مقدار مدول الاستیک را با استفاده از روابط و روش المان محدود محاسبه کرد.

5- علایم و نشانه‌ها

فهرست علائم

a	شعاع نانولوله (nm)
b	شعاع المان حجمی (nm)
E	مدول الاستیک (Pa)
E_f	مدول الاستیک نانولوله (Pa)
E_m	مدول الاستیک زمینه (Pa)
G	مدول برشی
G_f	مدول برشی نانولوله
G_m	مدول برشی زمینه
L	نصف طول المان حجمی (nm)
l	نصف طول نانولوله (nm)
u	مولفه جابه‌جایی شعاعی (m)
w	مولفه جابه‌جایی محوری
w'	متوسط جابه‌جایی محوری در ناحیه II (m)
w^f	جابه‌جایی محوری نانولوله (m)
w^m	جابه‌جایی محوری زمینه (m)
w_T	جابه‌جایی محوری کل تک‌سلول (m)

علایم یونانی

σ	تنش اعمالی به انتهای المان حجمی (Pa)
ν	نسبت پواسون
$\overline{\sigma_{zz}^f}$	متوسط تنش محوری در نانو لوله (Pa)
$\overline{\sigma_{zz}^m}$	متوسط تنش محوری در زمینه (Pa)
ε_{rr}	مولفه کرنش شعاعی
σ_{rr}	مولفه تنش شعاعی (Pa)
γ_{rz}	مولفه کرنش برشی
ε_{zz}	مولفه کرنش محوری
$\varepsilon_{\theta\theta}$	مولفه کرنش زاویه ای
σ_i^m	تنش محوری در اینترفیس (Pa)
σ_{zz}^{fm}	مولفه تنش محوری در تقویت کننده مجازی (Pa)
σ_{zz}^m	مولفه تنش محوری در زمینه (Pa)
$\sigma_{\theta\theta}$	مولفه تنش زاویه‌ای (Pa)

6- مراجع

[1] R. Saito, M.S. Dresselhaus, *Physical Properties of carbon nanotubes*, Imperial College Press, pp. 35-40, 1998.

[2] I. Dinca, A. Stefan, *Nanocomposites and Nanotechnologies in Aerospace Research*, National Institute for Aerospace Research & Development "Elie Carafoli"– INCAS, pp. 2-5.

[3] X.-L. Gao, K.Li, A shear-lag model for carbon nanotube-reinforced polymer composites, *International Journal of Solids and Structures Vol. 42*, pp. 1649-1667, 2005.

[4] R. Guzma´n de Villoria, A. Miravete, Mechanical model to evaluate the effect of the dispersion in nanocomposites, *Acta Materialia Vol. 55*, pp. 3025-3031, 2007.

[5] M. Mahmood. Shokrieh, R. Rafiee, On the tensile behavior of an embedded carbon nanotube in polymer matrix with non-bonded interphase region, *Composite Structures Vol. 92*, pp. 647-652, 2010.

[6] M.M. Shokrieh, S.M. Mahdavi, Micromechanical model to evaluate the effects of dimensions and interphase region on the elastic modulus of CNT/polymer composites, *Modares mechanics journal 11 Vol. 3*, pp. 13-25, 2011. (In Persian)

[7] M. Zakeri, M. Shayanmehr, M.M. Shokrieh, Interface modeling of nanotube reinforced nanocomposites by using multi-scale modeling method, *Modares mechanics journal 12 Vol. 5*, pp. 1-11, 2012. (In Persian)

[8] G.I. Giannopoulos, S.K. Georgantzinos, N.K. Anifantis, A semi-continuum finite element approach to evaluate the Young's modulus of single-walled carbon nanotube reinforced composites, *Composites: Part B 41*, pp. 594-601, 2010.

[9] L. Ci, J. Bai, The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness, *Composites Science and Technology Vol. 66*, pp. 599–603, 2006.

[10] Md. A. Bhuiyan, V. Pucha. Raghuram, M. Karevan, K. Kalaitzidou, Tensile modulus of carbon nanotube/polypropylene composites – A computational study based on experimental characterization, *Computational Materials Science Vol. 50*, pp. 2347–2353, 2011.

[11] H.L. Cox, The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *Brit. J. Appl. Phys. Vol. 3*, pp. 72–79, 1952.

[12] L.N. McCartney, Analytical models of stress transfer in unidirectional composites and cross-ply laminates, and their application to the prediction of matrix/transverse cracking. In: Reddy, J.N., Reifsnider, K.L. (Eds.), Local Mechanics Concepts for Composite Material Systems, Proceedings of IUTAM Symposium, Blacksburg, VA, October 28–31, Springer-Verlag, Berlin, pp. 251–282, 1991.

[13] J.A. Nairn, On the use of shear-lag methods for analysis of stress transfer in unidirectional composites, *Mech. Mater. Vol. 26*, pp. 63–80, 1997.

[14] A. Chaboki Khiabani, S.A. Sadrnejad, M. Yahyaeii, Stress transfer modeling in CNT reinforced composites using continuum mechanics, *IJE Transactions B: Applications* Vol.21, No.3, pp. 227–234, 2008.

[15] H. Sadd Martin, *Elasticity,* Elsevier Inc., pp. 437-440, 2005.

[16] Chun-Hway. Hsueh, Young's modulus of unidirectional discontinuous-fiber composites, *Composites Science and Technology Vol.60,* pp. 2671-2680, 2000.

[17] M. Mondali, A. Abedian, *The study of mechanical properties and stress analysis of composites with short discontinuous fiber in elastic and stable creep situations*, Sharif university of thecnology, aerospace faculty, pp. 40-45, 2008. (In Persian)

[18] M. Mondali, A. Abedian, S. Adibnazari, FEM study of the second stage creep behavior of Al6061/SiC metal matrix composite, *Computational Materials Science Vol. 34,* pp. 140–150, 2005.

[19] Z. Yang, K. McElrath, J. Bahr, N. Anne. D'Souza, Effect of matrix glass transition on reinforcement efficiency of epoxy-matrix composites with single walled carbon nanotubes, multi-walled carbon nanotubes, carbon nanofibers and graphite, *Composites: Part B Vol. 43* , pp. 2079-2086, 2012.

[20] *Epon Resin 828 product description,* Accessed on 3 March 2012 http://www.Momentiv.com-EPON resin828.mht.

[21] *Epon ® Resin Structural Reference Manual*, Appendix 1 Epon Resin Curing Agent Systems, pp. 12-17, 2001.