



بررسی ارتعاشات آزاد گرافن‌های دولایه با در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای

رضا ناظم‌نژاد^۱، شاهرخ حسینی‌هاشمی^{۲*}، حسن شکراللهی^۳

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

* صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۶۵، shh@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۸ شهریور ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۲ مهر ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۵ مرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:

گرافن دولایه

برش بین لایه‌ای

تیر ساندویچی

ارتعاشات آزاد

چکیده

در این مقاله، برای بررسی ارتعاشات گرافن دو لایه با در نظر گرفتن اثر برش بین لایه‌ای، مدل تیر ساندویچی ارائه شده است. با توجه به تشابه گرافن دولایه به یک سازه ساندویچی، که در بالا و پایین آن یک لایه گرافن قرار گرفته و بین لایه‌های گرافن پیوندهای واندوالسی وجود دارد، گرافن دولایه بصورت یک تیر ساندویچی مدل شده و ارتعاشات آزاد آن برای شرایط مرزی آزاد-گیردار بررسی شده است. برای بدست آوردن معادله حاکم، هر لایه گرافن بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی مدل شده و جابجایی‌های درون صفحه‌ای علاوه بر جابجایی عرضی در نظر گرفته شده و فرض شده است که لایه‌های گرافن در حین ارتعاش، در فاصله نسبی مشخصی از یکدیگر قرار داشته باشند. اثر پیوندهای واندوالسی نیز بصورت مدول برشی در معادلات حرکت لحاظ شده است. نتایج بدست آمده از مدل تیر ساندویچی ارائه شده در این مقاله، که شامل دو فرکانس اول گرافن دولایه با طول‌های ۷ تا ۲۰ نانومتر می‌باشد، با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مدل تیر چندگانه برشی مقایسه شده و صحت و دقت مدل فوق تأیید شده است.

Free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect

Reza Nazemnezhad¹, Shahrokh Hosseini-Hashemi^{1*}, Hassan Shokrollahi²

1- Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 16765-163 Tehran, Iran, shh@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 09 September 2013
Accepted 14 October 2013
Available Online 16 August 2014

Keywords:

Bilayer Graphene
Interlayer Shear
Sandwich Beam Model
Free Vibration

ABSTRACT

In this paper, for the free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect the sandwich beam model is introduced. Because of the similarity between the bilayer graphene and the sandwich structures, in which at the top and the bottom of the bilayer graphene there is a single layer graphene and between them there is Vander walls bindings, the bilayer graphene is modeled as a sandwich beam and its free vibration is investigated for free-clamp end condition. To obtain the governing equations, each graphene layer is modeled based on the Euler-Bernoulli theory and in-plane displacements are also considered in addition to the transverse displacement. It is also assumed that the graphene layers do not have relative displacement during vibration. The effect of the Vander walls bindings is introduced in the governing equations as the shear modulus. The results obtained by the sandwich beam model, presented in this paper for the first time, include the first five natural frequencies of the bilayer graphenes with 7 to 20 nanometer lengths. These results are validated by the molecular dynamic and the Multi-Beam-Shear model results.

۱- مقدمه

گرافن، نازک‌ترین سازه که در آن اتم‌های کربن توسط پیوند sp^2 و بصورت ساختار لانه زنبوری در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند، به دلیل دارا بودن خواص ویژه مکانیکی، الکتریکی، اپتیکی و حرارتی، و از طرفی هزینه تولید پایین نسبی آن، مورد توجه ویژه پژوهشگران قرار گرفته است [۱]. آزمایش‌ها نشان داده‌اند که گرافن قوی‌ترین سازه شناخته شده تاکنون بوده و دارای مدول الاستیک درون صفحه‌ای برابر با ۱ تراپاسکال می‌باشد [۲]. هم‌چنین نشان داده شده است که گرافن ضرایب انتقال حرارت و الکتریسیته پایینی در راستای بردار عمود بر صفحه داشته و دارای ضرایب انتقال حرارت و الکتریسیته بالایی در راستای درون صفحه می‌باشد. این ویژگی سبب شده

است گرافن به عنوان واشر برای محیط‌های با حرارت بالا مناسب باشد [۳]. ویژگی‌های منحصر بفرد ذکر شده برای گرافن، این قابلیت را برای آن ایجاد کرده است تا در سنسورهای جرم و گاز، ژنراتورهای مکانیکی، نانو کامپوزیت‌ها، ترازستورها و نیمه‌هادی‌ها کاربرد داشته باشد. صفحات گرافن می‌توانند بصورت تک لایه و چند لایه وجود داشته باشند.

لایه‌های گرافن در گرافن‌های چندلایه، توسط پیوندهای واندوالسی در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. وجود این پیوندهای واندوالسی می‌تواند رفتار استاتیکی و دینامیکی و هم‌چنین خواص مکانیکی و الکتریکی گرافن‌های چندلایه را تغییر دهد. در بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی گرافن‌های چندلایه، از روش‌های مختلفی مانند شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، مکانیک

Please cite this article using:

R. Nazemnezhad, Sh. Hosseini-Hashemi, H. Shokrollahi, Free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 131-138, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

هریک از لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود.

باید توجه داشت که استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک سبب پیچیده‌تر شدن تحلیل می‌شود. از طرفی برای بررسی رفتار کلی تیر ساندویچی، بدون وجود اثرات محلی و نیز برای تیرهای ساندویچی با لایه میانی نسبتاً تراکم ناپذیر، ضرورتی برای استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا وجود ندارد. با توجه به ضخامت کم لایه‌های گرافن، هر لایه گرافن بر اساس تئوری اویلر-برنولی مدل شده و با فرض اینکه لایه‌های گرافن در حین ارتعاش در راستای عرضی جابجایی نسبی نداشته باشند، اثرات پیوندهای بین لایه‌ای بر اساس مدل تیر ساندویچی در معادلات حرکت لحاظ شده است. استفاده از مدل سازه‌های ساندویچی برای تحلیل گرافن‌های دولایه و بطور خاص بررسی تأثیر برش بین لایه‌ای با در نظر گرفتن جابجایی درون صفحه‌ای، ایده اصلی این مقاله می‌باشد که برای اولین بار پیشنهاد شده است.

۲- فرمولاسیون تیر ساندویچی

۲-۱- چیدمان و فرضیات

به منظور استفاده از مدل تیر ساندویچی، فرض می‌کنیم که گرافن دولایه، شامل دو لایه جانبی و یک لایه میانی است که این لایه میانی همان پیوندهای واندروالسی بوده و فقط به برش حساسیت نشان می‌دهد (فرض اساسی ساختارهای ساندویچی [۲۰، ۱۶]) و بدلیل داشتن چگالی ناچیز، از اینرسی آن صرف‌نظر می‌شود.

شماتیک یک تیر ساندویچی در شکل ۱ نشان داده شده است. این تیر ساندویچی شامل لایه بالایی، لایه پایینی و لایه میانی (هسته) است. همچنین، L طول تیر، b عرض تیر، h_f و h_c ضخامت لایه‌های جانبی و میانی هستند. لایه‌های بالایی و پایینی از مواد همسانگرد بوده و با تئوری تیراویلر-برنولی مدل می‌شوند. همچنین لایه میانی فقط قادر به تحمل نیروهای برشی بوده و ضخامت آن در حین تغییر شکل ثابت فرض می‌شود.

۲-۲- روابط کرنش-جابجایی و تنش-کرنش

برای لایه بالایی، جابجایی‌ها به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$w_t(x, z, t) = w_1(x, t) \quad (1)$$

$$u_t(x, z, t) = u_1(x, t) - \left(z - \frac{h_c + h_f}{2} \right) \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x}$$

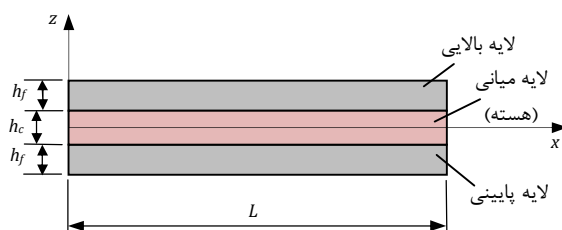
که در آن $h_c/2 \leq z \leq h_c/2 + h_f$ است و w_1 و u_1 جابجایی‌های مربوط به نقاط واقع در تار میانی لایه بالایی می‌باشند و برای لایه پایینی، جابجایی‌ها به صورت رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شوند.

$$w_b(x, z, t) = w_2(x, t) \quad (2)$$

$$u_b(x, z, t) = u_2(x, t) - \left(z + \frac{h_c + h_f}{2} \right) \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial x}$$

که در آن $-h_c/2 - h_f \leq z \leq -h_c/2$ بوده و w_2 و u_2 جابجایی‌های مربوط به نقاط واقع در تار میانی لایه پایینی می‌باشند.

با فرض ثابت ماندن ضخامت لایه میانی در حین تغییر شکل، طبق رابطه (۳) باید جابجایی‌های جانبی هر سه لایه با هم برابر باشند:



شکل ۱ شماتیک تیر ساندویچی (گرافن دولایه)

مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته، استفاده می‌شود. به دلیل محدودیت‌های سخت‌افزاری و صرف زمان زیاد برای انجام شبیه‌سازی در مقیاس نسبتاً بزرگ، استفاده از روش‌های تحلیلی بیشتر مورد توجه پژوهشگران می‌باشد.

در روش‌های تحلیلی معمولاً، هر لایه گرافن بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی یا تیموشنکو و تئوری‌های کلاسیک و میندیلین صفحات مدل شده و نیروهای ناشی از پیوندهای واندروالسی بین لایه‌ای، بصورت ترم فشار که متناسب با جابجایی نسبی بین لایه‌های مجاور می‌باشد مدل می‌شود [۴-۶]. تعریف این مدل، فقط می‌تواند اثرات فشاری و کششی پیوندهای واندروالسی را مدل‌سازی نماید. در حالی که آزمایش‌ها نشان دادند صفحات گرافن قابلیت لغزش بر روی یکدیگر را داشته و نیروی‌های واندروالسی در برابر لغزش بین لایه‌ها، از خود اثر مقاومتی بصورت برش نشان می‌دهند [۷-۱۰]. بنابراین در این نوع تحلیل‌ها، اثر برشی بین لایه‌های گرافن چندلایه ناشی از نیروهای واندروالسی بین لایه‌ها، در نظر گرفته نمی‌شود. پژوهش‌ها نشان دادند که مقدار مدول برشی بین لایه‌ای در گرافن‌های چند لایه در حدود 0.25 گیگاپاسکال [۸] می‌باشد. گرچه مقدار مدول برشی بین لایه‌ای در مقایسه با مدول الاستیک درون صفحه‌ای، پایین می‌باشد اما همین مقدار مدول برشی بین لایه‌ای در مقایسه با صلبیت خمشی پایین گرافن (انعطاف‌پذیر بودن آن) می‌تواند بر رفتار استاتیکی و دینامیکی گرافن چندلایه تأثیرگذار باشد.

برهم‌کنش بین لایه‌ای و جابجایی نسبی لایه‌های گرافن چندلایه، هنوز بطور کامل بررسی و مشخص نشده است. در یکی از معدود پژوهش‌های انجام گرفته، به منظور بررسی اثر برش بین لایه‌ای، مدل تیر چندگانه برشی^۱ توسط لیو و همکارانش [۸] پیشنهاد شده است. آنها با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، و با صرف‌نظر کردن از جابجایی‌های درون صفحه‌ای و در نظر گرفتن صرفاً جابجایی عرضی یکسان برای تمامی لایه‌های گرافن چندلایه، ترم برش را در معادلات حرکت تیر اویلر-برنولی اعمال نموده و مدل جدیدی بنام مدل تیر چندگانه برشی را ارائه نمودند که نتایج حاصل از روش فوق، همخوانی خوبی با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دارد. با استفاده از مدل فوق، رکنی و لیو [۱۱]، مدل مکانیک محیط پیوسته‌ای را برای تحلیل استاتیکی نانوریون‌ها با در نظر گرفتن اثرات سطحی و اثر برش بین لایه‌ای ارائه نمودند. در پژوهش دیگری، لیو و همکارانش [۱۲] معادلات حاکم بر خمش نانوریون‌های چندلایه را با در نظر گرفتن اثر جابجایی‌های درون صفحه‌ای و اثر برش بین لایه‌ای بر اساس تئوری تیر کامپوزیتی نیومارکارانه نمودند. نتایج روش فوق با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی همخوانی بسیار خوبی داشته و نشان داده شد که برای تفسیر صحیح خمش نانوریون‌ها، در نظر گرفتن جابجایی‌های درون صفحه‌ای علاوه بر اثر برش بین لایه‌ای اهمیت بالایی دارد.

باتوجه به ساختار گرافن دو لایه که مشابهت زیادی به یک سازه ساندویچی دارد، در این مقاله از مدل تیر ساندویچی برای مدل‌سازی ارتعاشی آن استفاده شده است. مرور کارهای اولیه در زمینه تیرها و پل‌های ساندویچی را می‌توان در کتاب‌های نوشته شده توسط پلاتما^۲ [۱۳]، آلن^۳ [۱۴] و زنکرت^۴ [۱۵] یافت. همچنین اطلاعات مفیدی در برخی کارهای مروری جدیدتر نظیر مراجع [۱۶-۱۹] قابل دست‌یابی است. یک سازه ساندویچی، از سه لایه متصل به هم شکل می‌گیرد؛ دو لایه جانبی و یک لایه میانی. در تئوری‌های کلاسیک، جابجایی عرضی هر سه لایه یکسان فرض می‌شود اما در تئوری‌های مرتبه بالا (تیرهای ساندویچی با لایه میانی انعطاف‌پذیر) جابجایی عرضی متفاوتی برای

1- MultiBeam Shear model (MBSM)

2- Plantema

3- Allen

4- Zenkert

(HDQM) استفاده می‌شود. تفاوت این روش با روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۲ (GDQM) در توابع وزنی تعریف شده در آن است که تاحدودی سبب همگرایی سریع‌تر آن می‌شود [۲۱]. در این روش، مشتق جزئی یک تابع نسبت به متغیر مکانی در یک نقطه گسسته، با جمع خطی مقادیر تابع وزنی در تمام نقاط مجزا در میدان متغیر تقریب زده می‌شود. به عنوان مثال، اگر $F(x)$ یک تابع در محدوده $0 < x < L$ باشد و در این محدوده N نقطه گسسته تعریف شده باشد، مشتق مرتبه n ام در نقطه x_i بصورت رابطه (۱۵) بیان می‌شود.

$$\frac{d^n F(x_i)}{dx^n} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(n)} F(x_k); \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

که در آن $A_{ik}^{(n)}$ ضریب وزنی مربوط به مشتق مرتبه n ام تابع $F(x)$ است. جزئیات بیشتر در رابطه با روش HDQ و چگونگی انتخاب نقاط گرهی با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشف^۳، در مرجع [۲۱] ارائه شده است. اکنون با اعمال روش HDQ، معادلات حاکم به صورت گسسته‌سازی شده بدست می‌آید. البته، قبل از این کار، از پارامترهای بی‌بعد و به صورت رابطه (۱۶) برای جابجایی‌ها و طول تیر در معادلات حاکم و شرایط مرزی استفاده می‌شود:

$$W = \frac{w}{h}, U_1 = \frac{u_1}{h}, U_2 = \frac{u_2}{h}, X = \frac{x}{L} \quad (16)$$

که در آن $h = h_c + 2h_f$ است.

به منظور انجام تحلیل ارتعاشات آزاد، توابع جابجایی به صورت رابطه (۱۷) در نظر گرفته می‌شوند.

$$\{U_1(x, t), U_2(x, t), W(x, t)\} = \{\bar{U}_1(x), \bar{U}_2(x), \bar{W}(x)\} e^{j\omega t} \quad (17)$$

که در آن $j = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس طبیعی است. نهایتاً فرم گسسته معادلات حاکم، برای نقطه گرهی $X_i = x_i/L$ به صورت روابط (۱۸) تا (۲۰) بدست می‌آید.

$$\frac{GA_c h^2}{EA_f h_c^2} \left(\bar{U}_1(X_i) - \bar{U}_2(X_i) + \frac{(h_c + h_f)}{L} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}(X_k) \right) - \frac{h^2}{L^2} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{U}_1(X_k) - \frac{\rho h^2 \omega^2}{E} \bar{U}_1(X_i) = 0 \quad (18)$$

$$- \frac{GA_c h^2}{EA_f h_c^2} \left(\bar{U}_1(X_i) - \bar{U}_2(X_i) + \frac{(h_c + h_f)}{L} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{W}(X_k) \right) - \frac{h^2}{L^2} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{U}_2(X_k) - \frac{\rho h^2 \omega^2}{E} \bar{U}_2(X_i) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{2I_f h^2}{A_f L^4} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} \bar{W}(X_k) - \frac{GA_c h^2 (t_c + t_f)}{EA_f h_c^2 L} \left(\sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_1(X_k) - \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} \bar{U}_2(X_k) + \frac{(h_c + h_f)}{L} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} \bar{W}(X_k) \right) - 2 \frac{\rho h^2 \omega^2}{E} \bar{W}(X_i) = 0 \quad (20)$$

به همین ترتیب، فرم گسسته شرایط مرزی نیز از روابط (۱۴) برای حالت‌های مختلف، قابل استخراج است. در این مقاله شرایط مرزی یک سرگیردار- یک سر آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای حالتی که نقطه گرهی X_1 گیردار و X_N آزاد باشد، شرایط مرزی بر اساس رابطه (۲۱) می‌باشند.

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(X_1) = \bar{U}_2(X_1) = \bar{W}(X_1) = \sum_{k=1}^N A_{1k}^{(1)} \bar{W}(X_k) = 0 \\ \sum_{k=1}^N A_{Nk}^{(1)} \bar{U}_1(X_k) = \sum_{k=1}^N A_{Nk}^{(1)} \bar{U}_2(X_k) = - \frac{2I_f h}{A_f L^3} \sum_{k=1}^N A_{Nk}^{(3)} \bar{W}(X_k) \\ + \frac{GA_c h (h_c + h_f)}{EA_f h_c^2} \left(\bar{U}_1(X_N) - \bar{U}_2(X_N) \right) \\ + \frac{h_c + h_f}{L} \sum_{k=1}^N A_{Nk}^{(1)} \bar{W}(X_k) = \sum_{k=1}^N A_{Nk}^{(2)} \bar{W}(X_k) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$w_c(x, z, t) = w_t(x, z, t) = w_b(x, z, t) = w(x, t) \quad (3)$$

همچنین با در نظر گرفتن توزیع خطی برای جابجایی در راستای طولی لایه میانی، رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$u_c(x, z, t) = \frac{u_1(x, t) + u_2(x, t)}{2} + \frac{2z}{h_c} \left(\frac{u_1(x, t) - u_2(x, t)}{2} + \frac{h_f}{2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \quad (4)$$

بر اساس تئوری تیر اویلر- برنولی، روابط کرنش- جابجایی لایه‌های جانبی، به صورت رابطه (۵) ارائه می‌شود:

$$\varepsilon_x^i = \frac{\partial u_i(x, z, t)}{\partial x}; \quad i = t, b \quad (5)$$

و برای لایه میانی به صورت رابطه (۶) ارائه می‌شود.

$$\gamma_{xz}^c = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_c(x, z, t)}{\partial z} \quad (6)$$

با در نظر گرفتن رفتار الاستیک برای هر سه لایه، روابط تنش- کرنش به صورت روابط (۷) ارائه می‌شود.

$$\tau_{xz}^c = G \gamma_{xz}^c; \quad \sigma_x^i = E_i \varepsilon_x^i; \quad i = t, b \quad (7)$$

که در آن E مدول الاستیک لایه‌های جانبی و G مدول برشی لایه میانی است.

۳- استخراج معادلات حاکم و روش حل

به منظور بدست آوردن معادلات حاکم، از اصل همپلتون استفاده می‌شود

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (8)$$

در رابطه (۸)، U انرژی پتانسیل، T انرژی جنبشی و t زمان است. δU و δT نیز بصورت روابط (۹) و (۱۰) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \delta T = \int_{V_t} \rho_t \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} \delta u_t + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV_t \\ + \int_{V_b} \rho_b \left(\frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} \delta u_b + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV_b \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta U = \int_{V_t} \sigma_x^t \delta \varepsilon_x^t dV_t + \int_{V_b} \sigma_x^b \delta \varepsilon_x^b dV_b + \int_{V_c} \tau_{xz}^c \delta \gamma_{xz}^c dV_c \quad (10)$$

که در این روابط، ρ چگالی، V حجم و زیرنویس‌های t ، b و c به ترتیب بیانگر لایه بالایی، میانی و پایینی می‌باشند.

با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۸) و استفاده از روابط تنش- کرنش و کرنش- جابجایی، روابط (۵) تا (۷)، و انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء، در نهایت معادلات حاکم به صورت روابط (۱۱) تا (۱۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{GA_c}{h_c^2} \left(u_1(x, t) - u_2(x, t) + (h_c + h_f) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \\ - EA_f \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + \rho A_f \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} - \frac{GA_c}{h_c^2} \left(u_1(x, t) - u_2(x, t) + (h_c + h_f) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) \\ - EA_f \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + \rho A_f \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} 2EI_f \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \frac{GA_c (h_c + h_f)}{h_c^2} \left(\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \right) \\ + (h_c + h_f) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2\rho A_f \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

در روابط (۱۱) تا (۱۳)، A_c و A_f به ترتیب سطح مقطع‌های لایه میانی و جانبی هستند و I_f ممان دوم سطح لایه جانبی است. و شرایط مرزی در $x=0, L$ به صورت رابطه (۱۴) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta u_1 = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \delta u_2 = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \\ \left[-2EI_f \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{GA_c (h_c + h_f)}{h_c^2} \left(u_1 - u_2 + (h_c + h_f) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \delta w = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

برای حل معادلات (۱۱) تا (۱۳)، از روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک^۱

جدول ۱ صلبیت خمشی گرافن

روش	صلبیت خمشی (eV)
دی.اف.تی [۲۴]	۱/۴۴
دی.اف.تی [۲۵]	۱/۵۲
دی.اف.تی [۲۶]	۱/۴-۱/۴۶
دی.اف.تی [۲۷]	۱/۴۸
دی.اف.تی [۲۸]	۱/۶۱
تابع پتانسیل ایربو [۲۹]	۱/۰۲
تابع پتانسیل ایربو [۳۰]	۱/۱۷
تابع پتانسیل ایربو [۳۱]	۰/۸۳
تابع پتانسیل ایربو [۳۲]	۱/۴
آزمایشگاهی [۳۳]	۱/۲
تابع پتانسیل دریدینگ [۸]	۲/۱۴

جدول ۲ خواص مکانیکی و هندسی گرافن دولایه

ویژگی	مقدار
ارتفاع کل گرافن دولایه	۲×۰/۳۳۵ (nm)
چگالی [۸]	۲۲۶۰ (kg/m³)
مدول الاستیسیته (E) [۸]	۱ (TPa)
مدول برشی (G) [۸]	۰/۲۵ (GPa)
کابریلیتی [۸]	آرمچیر

 جدول ۳ همگرایی دو فرکانس اول گرافن دولایه به طول ۱۰ نانومتر و $h_f = 2/3 h$

تعداد نقاط گرهی	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳	۲۵
فرکانس اول (GHz)	۷/۶۷	۷/۶۴	۷/۶۴	۷/۶۵	۷/۶۵	۷/۶۵
فرکانس دوم (GHz)	۳۲/۷۹	۳۲/۴۶	۳۲/۳۴	۳۲/۳۰	۳۲/۲۹	۳۲/۲۹

از شکل‌های ۲ تا ۷ مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر متفاوت صلبیت خمشی، با تغییر ضخامت لایه‌های گرافن می‌توان به نتایج مشابه با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دست یافت. نکات قابل توجهی که از شکل‌های فوق نتیجه می‌شود عبارتند از: الف) به ازای مقادیر پایین صلبیت خمشی، ضخامت‌های معادلی که در آن‌ها فرکانس‌های اول و دوم مدل تیر ساندویچی با نتایج روش دینامیک مولکولی همخوانی داشته باشند، اختلاف فاحشی از یکدیگر دارند. با افزایش صلبیت خمشی، مقدار این اختلاف کاهش یافته بطوریکه به ازای مقدار بسیار زیاد صلبیت خمشی (۲/۱۴) این اختلاف به حداقل می‌رسد. ب) به ازای صلبیت خمشی زیاد (۲/۱۴)، منحنی تغییرات فرکانس دوم مدل تیر ساندویچی با نتیجه حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی تلاقی ندارد (به جدول ۴ مراجعه شود) به این معنی که در این حالت، به ازای هیچ ضخامت معادلی نمی‌توان با استفاده از مدل تیر ساندویچی به نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دست یافت و انتظار می‌رود اختلاف بین نتایج این دو روش در فرکانس‌های بالاتر مشهودتر باشد. ج) به ازای صلبیت خمشی برابر با ۱/۴ و ۱/۶۱ الکترون ولت، می‌توان ضخامت‌های معادل یکسانی برای فرکانس‌های اول و دوم در نظر گرفت.

در جدول ۴، ضخامت معادل لایه‌های گرافن در مدل تیر ساندویچی، به ازای مقادیر مختلف صلبیت خمشی آورده شده است. همچنین به منظور بررسی دقیق‌تر دقت مدل تیر ساندویچی، فرکانس‌های اول و دوم گرافن دولایه که با استفاده از مدل‌های تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی (تنها مدل موجود که اثر برش بین لایه‌ای را شامل می‌شود و مدل کاهش یافته تئوری نیومارک می‌باشد که در آن از جایجایی‌های درون صفحه‌ای صرف‌نظر شده است) بدست آمده‌اند با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مقایسه شده‌اند.

اعمال شرایط مرزی فوق در معادلات (۱۸) تا (۲۰)، به معادلات کوپل شده مطابق رابطه (۲۲) منتهی می‌شود.

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^b \\ d^d \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ d^d \end{Bmatrix} \quad (22)$$

که در آن $\{d^b\}$ و $\{d^d\}$ درجات آزادی نقاط مرزی و نقاط درونی تیر هستند که به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \{d^b\} &= \{\bar{U}_1(X_1), \bar{U}_2(X_1), \bar{W}(X_1), \bar{W}(X_2), \bar{U}_1(X_N), \bar{U}_2(X_N), \\ &\quad \bar{W}(X_{N-1}), \bar{W}(X_N)\} \\ \{d^d\} &= \{\bar{U}_1(X_2), \bar{U}_1(X_3), \dots, \bar{U}_1(X_{N-1}), \\ &\quad \bar{U}_2(X_2), \bar{U}_2(X_3), \dots, \bar{U}_2(X_{N-1}), \\ &\quad \bar{W}(X_3), \bar{W}(X_4), \dots, \bar{W}(X_{N-2})\} \end{aligned} \quad (23)$$

با ساده‌سازی معادله (۲۲)، یک مسأله مقدار ویژه استاندارد بدست می‌آید:

$$[K_{dd}] - [K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}]\{d^d\} = \omega^2\{d^d\} \quad (24)$$

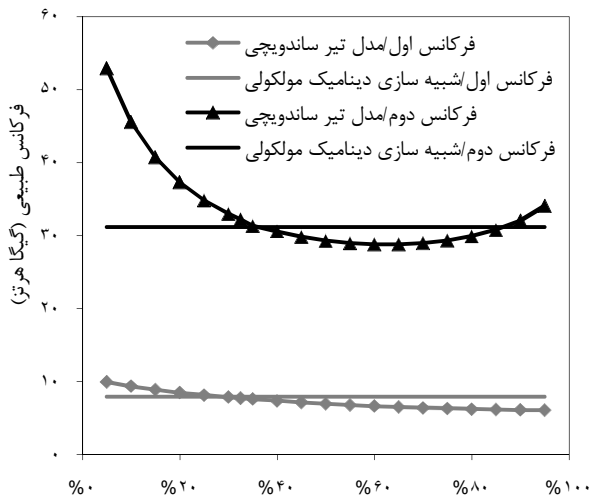
با حل معادله (۲۴)، فرکانس‌های طبیعی تیر ساندویچی (گرافن دولایه) بدست می‌آید. بر مبنای فرمول‌بندی ارائه شده، یک برنامه کامپیوتری در نرم‌افزار متلب نوشته شده است که خروجی آن فرکانس‌های طبیعی گرافن دولایه مورد مطالعه است.

۴- نتایج

قبل از ارائه نتایج و بحث در مورد آنها، اشاره به دو نکته ضروری بنظر می‌رسد. نکته اول اینکه در مراجع بسیاری، فاصله بین صفحات گرافنی برابر با ضخامت آنها در نظر گرفته شده است. اما ضخامت کل گرافن چندلایه فقط شامل ضخامت لایه‌های آن بوده و برابر با مجموع ضخامت آنها در نظر گرفته می‌شود. به بیان دیگر، ضخامت گرافن n لایه برابر nh می‌باشد که h ضخامت هر لایه گرافن می‌باشد. از طرفی، در تحلیل سازه‌های ساندویچی، برای هر یک از لایه‌های سازه، ضخامتی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین در تحلیل گرافن‌های دو لایه با استفاده از مدل تیر ساندویچی، در نظر گرفتن ضخامت مناسب برای لایه‌های گرافن و فاصله بین آنها اهمیت بالایی در استخراج نتایج صحیح دارد. نکته دوم اینکه در تحلیل ارتعاشات هر سازه‌ای، مقدار صلبیت خمشی پارامتر مهمی در مقدار فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشد. در مراجع اشاره شده است که مقدار صلبیت خمشی گرافن به دما [۲۲] و ابعاد [۲۳] آن وابسته می‌باشد به همین دلیل مقادیر متفاوتی برای صلبیت خمشی گزارش شده است که تعدادی از آنها در جدول ۱ لیست شده‌اند. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که تفاوت قابل توجهی بین نتایج گزارش شده وجود دارد به طوری که صلبیت خمشی مقداری در محدوده ۰/۸۳-۲/۱۴ الکترون ولت دارد.

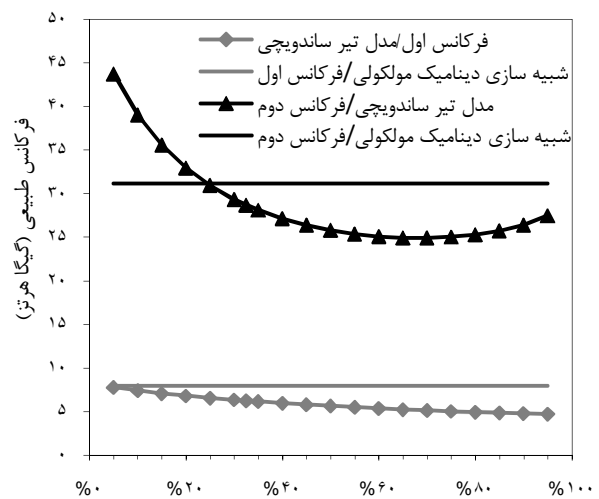
با توجه به نکات اشاره شده در پاراگراف قبل، در ابتدا تأثیر ضخامت لایه‌های گرافن و فاصله بین آنها و همچنین مقدار صلبیت خمشی بر نتایج مدل تیر ساندویچی بررسی شده است. بدین منظور، فرکانس‌های طبیعی اول و دوم گرافن دولایه‌ای به عرض ۲ نانومتر و طول ۱۰ نانومتر که دارای شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر آزاد می‌باشد به ازای ضخامت‌های متفاوت لایه‌های گرافن و همچنین صلبیت خمشی متفاوت با مقادیر بدست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی [۸] مقایسه شده است (شکل‌های ۲ تا ۷). دلیل انتخاب این نوع شرط مرزی این است که به دلیل آزاد بودن یکسر گرافن دولایه، لغزش لایه‌های گرافن بر روی یکدیگر محسوس‌تر بوده و از این طریق بهتر می‌توان تأثیر برش بین لایه‌ای را بر روی ارتعاشات گرافن دولایه مشاهده نمود. خواص مکانیکی و هندسی گرافن دو لایه در جدول ۲ آورده شده است.

به منظور نمایش سرعت همگرایی روش مورد استفاده برای استخراج نتایج، در جدول ۳ همگرایی دو فرکانس طبیعی اول گرافن دولایه به طول ۱۰ نانومتر بر حسب تعداد نقاط گرهی نشان داده شده است. همان طور که از این جدول مشاهده می‌شود نتایج با سرعت قابل قبولی همگرا می‌شوند.



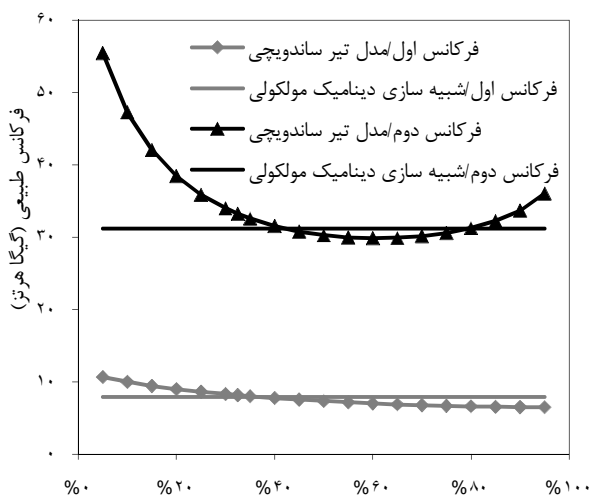
ضخامت لایه های گرافن بر حسب درصدی از ضخامت کل

شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب ضخامت لایه‌های آن در مدل تیر ساندویچی به ازای صلبیت خمشی $1/40$ الکترون ولت



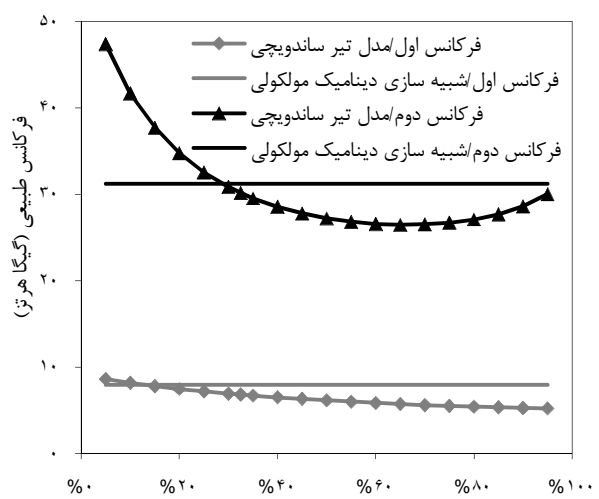
ضخامت لایه های گرافن بر حسب درصدی از ضخامت کل

شکل ۲ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب ضخامت لایه‌های آن در مدل تیر ساندویچی به ازای صلبیت خمشی $0/83$ الکترون ولت



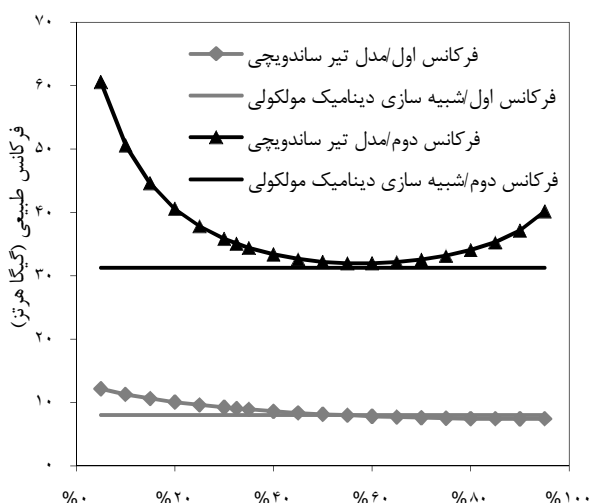
ضخامت لایه های گرافن بر حسب درصدی از ضخامت کل

شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب ضخامت لایه‌های آن در مدل تیر ساندویچی به ازای صلبیت خمشی $1/61$ الکترون ولت



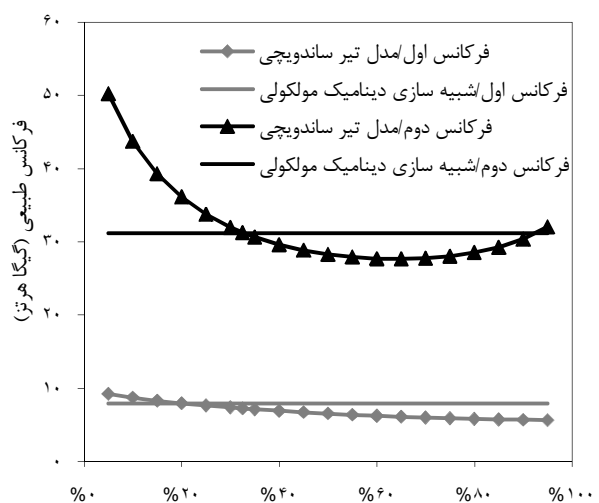
ضخامت لایه های گرافن بر حسب درصدی از ضخامت کل

شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب ضخامت لایه‌های آن در مدل تیر ساندویچی به ازای صلبیت خمشی $1/02$ الکترون ولت



ضخامت لایه های گرافن بر حسب درصدی از ضخامت کل

شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب ضخامت لایه‌های آن در مدل تیر ساندویچی به ازای صلبیت خمشی $2/14$ الکترون ولت



ضخامت لایه های گرافن بر حسب درصدی از ضخامت کل

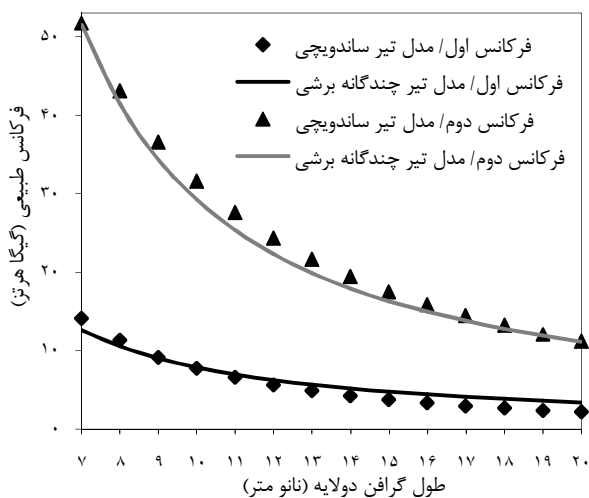
شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب ضخامت لایه‌های آن در مدل تیر ساندویچی به ازای صلبیت خمشی $1/20$ الکترون ولت

جدول ۴ مقایسه دقت مدل‌های تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی به ازای مقادیر متفاوت صلبیت خمشی و ضخامت معادل لایه‌های گرافن

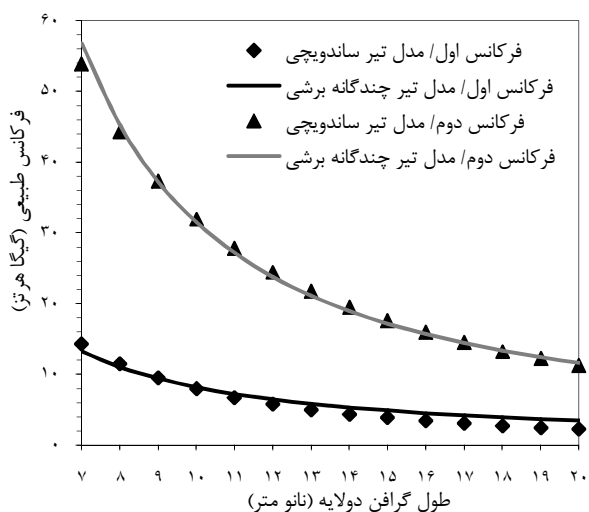
ضخامت معادل برای لایه‌های مدل تیر ساندویچی*				فرکانس طبیعی اول (GHz)				فرکانس طبیعی دوم (GHz)			
درصد خطا	مدل تیر ساندویچی	درصد خطا	مدل تیر چندگانه برشی	درصد خطا	مدل تیر ساندویچی	درصد خطا	مدل تیر چندگانه برشی	درصد خطا	مدل تیر ساندویچی	درصد خطا	مدل تیر چندگانه برشی
۰/۸۳	$h_0/2h_f =$	۶/۸۲	۱۴/۲	۷/۲۷	۸/۸	۳۲/۹۸	۵/۷	۲۵/۱۶	۱۹/۴		
۱/۰۲	$h_0/25h_f =$	۷/۲۰	۹/۴	۷/۴۴	۶/۴	۳۲/۵۵	۴/۳	۲۶/۲۵	۱۵/۹		
۱/۲۰	$h_0/3h_f =$	۷/۴۲	۶/۷	۷/۵۸	۴/۷	۳۱/۹۷	۲/۵	۲۷/۱۹	۱۲/۹		
۱/۴۰	$h_0/325h_f =$	۷/۷۵	۲/۵	۷/۷۴	۲/۶	۳۲/۲۹	۳/۵	۲۸/۱۹	۹/۶		
۱/۶۱	$h_0/4h_f =$	۷/۷۸	۲/۱	۷/۸۸	۰/۹	۳۱/۵۴	۱/۱	۲۹/۲۰	۶/۴		
۲/۱۴	$h_0/55h_f =$	۷/۹۶	۰/۱	۸/۲۲	۳/۴	۳۲/۰۰	۲/۶	۳۱/۵۳	۱/۱		

* ضخامت لایه میانی از رابطه $h_c = 2(h-h_f)$ بدست می‌آید.

** درصد خطا عبارت است از قدرمطلق اختلاف بین نتایج مدل‌های تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی با روش شبیه‌سازی دینامیک مولکولی. فرکانس اول ۷/۹۵ و فرکانس دوم ۳۱/۲ گیگاهرتز بدست آمده است.



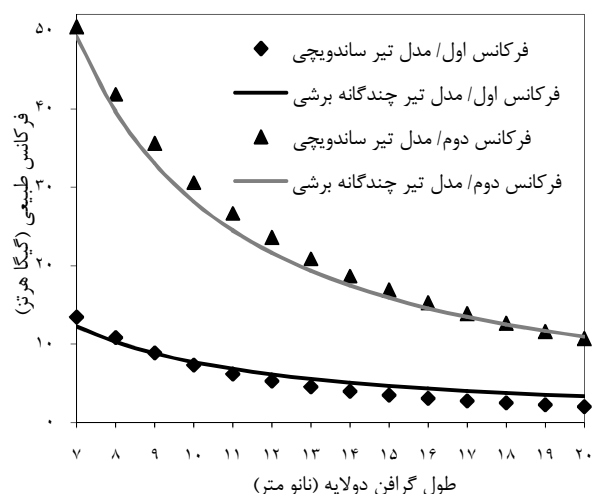
شکل ۹ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب طول آن به ازای صلبیت خمشی برابر با ۱/۶۱ الکترون ولت.



شکل ۱۰ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب طول آن به ازای صلبیت خمشی برابر با ۲/۱۴ الکترون ولت.

همان‌طور که از شکل‌های ۸ تا ۱۰ مشاهده می‌شود دو مدل تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی، نتایج بسیار نزدیکی را، مخصوصاً به ازای صلبیت خمشی زیاد، برای فرکانس‌های طبیعی اول و دوم نتیجه می‌دهند. به ازای صلبیت خمشی پایین‌تر، اندکی اختلاف بین نتایج دو مدل مشاهده می‌شود که ناشی

از جدول فوق مشاهده می‌شود که مدل تیر چندگانه برشی، فرکانس اول را با خطای کمتر از ۵ درصد به ازای مقادیر صلبیت خمشی مساوی و بیشتر از ۱/۲ الکترون ولت، و فرکانس دوم را فقط به ازای صلبیت خمشی برابر با ۲/۱۴ الکترون ولت نتیجه می‌دهد. اما مدل تیر ساندویچی، فرکانس اول را با خطای کمتر از ۵ درصد به ازای صلبیت خمشی مساوی و بیشتر از ۱/۴ الکترون ولت، و فرکانس دوم را تقریباً به ازای تمامی مقادیر صلبیت خمشی نتیجه می‌دهد. در حالت کلی می‌توان گفت مدل تیر ساندویچی به دلیل دارا بودن این ویژگی که دقت آن به دو عامل صلبیت خمشی و ضخامت معادل لایه‌ها بستگی دارد نتایج قابل قبول را در محدوده وسیع‌تری از مقادیر صلبیت خمشی ارائه می‌نماید در حالی که چون دقت مدل تیر چندگانه برشی فقط به مقدار صلبیت خمشی بستگی دارد نتایج قابل قبول آن فقط به ازای مقادیر بالای صلبیت خمشی قابل حصول می‌باشد. علاوه بر این می‌توان نتیجه‌گیری نمود که فرکانس اول در مدل تیر ساندویچی نسبت به فرکانس دوم به مقدار صلبیت خمشی حساس‌تر می‌باشد این در حالیست که شرایط فوق برای مدل تیر چندگانه برشی برعکس می‌باشد. نهایتاً برای مقایسه بهتر نتایج حاصل از مدل‌های تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی، در شکل‌های ۸ تا ۱۰، فرکانس‌های اول و دوم گرافن دولایه بر حسب طول آن به ازای سه مقدار متفاوت صلبیت خمشی (۱/۴۰، ۱/۶۱ و ۲/۱۴ الکترون ولت) که به ازای آنها مدل‌های فوق دقت قابل قبولی ارائه نمودند نمایش داده شده است.



شکل ۸ تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه بر حسب طول آن به ازای صلبیت خمشی برابر با ۱/۴۰ الکترون ولت.

از وابستگی نتایج مدل تیر چندگانه برشی به مقدار صلبیت خمشی می‌باشد. از یک طرف، به دلیل محدود بودن نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، نتیجه‌گیری بر روی اینکه کدام یک از مدل‌های فوق نتایج بهتر و دقیق‌تری ارائه می‌دهند مشکل بوده و از طرفی دیگر، ارائه مدلی بر اساس مکانیک محیط پیوسته برای نانو ساختارها که ویژگی‌های مکانیکی آنها وابسته به ابعاد می‌باشد نیاز به بررسی‌های بیشتر دارد.

در پایان، اشاره به این نکته به منظور راهنمایی در انتخاب روش بهتر ضروری بنظر می‌رسد که شن و وو [۳۴] برای تعیین مقدار پارامتر برش بین لایه‌ای در گرافن‌های چند لایه تحت خمش با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، به‌گونه‌ای که مقدار آن همخوانی مناسبی با مقادیر آزمایشگاهی داشته باشد تغییراتی در تابع پتانسیل اربو ایجاد کرده‌اند. برای استخراج مقدار پارامتر برش بین لایه‌ای بر مبنای شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، از مدل تیر چندگانه برشی استفاده شده است. نتایج گزارش شده نشان دادند که برای گرافن چندلایه با تعداد لایه‌های کمتر از ۵ لایه، نتایج شبیه‌سازی با نتایج مدل تیر چندگانه برشی همخوانی ندارد و این مدل نمی‌تواند مقدار پارامتر برش بین لایه‌ای را برای گرافن با کمتر از ۵ لایه بخوبی نتیجه دهد. از طرفی، اگر تعداد لایه‌های گرافن بیشتر از ۵ لایه باشد نتایج قابل قبولی بین مدل تیر چندگانه برشی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مشاهده شده است.

در پژوهش دیگری [۱۲] که هدف آن توسعه پژوهش انجام شده توسط شن و وو [۳۴] بوده است برای استخراج مقدار پارامتر برش بین لایه‌ای از نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، هر لایه گرافن توسط تئوری تیر اویلر-برنولی مدل شده و بین لایه‌ها، شرایط سازگاری در نظر گرفته شده است. علاوه بر تفاوت‌های ذکر شده، در مرجع [۱۲] جابجایی‌های درون صفحه‌ای نیز در معادلات حرکت لحاظ شده است. نتایج این پژوهش که همخوانی بسیار خوبی با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی برای گرافن با هر لایه داشته، نشان داد که در نظر گرفتن جابجایی درون صفحه‌ای برای بررسی اثر برش بین لایه‌ای و تعیین مقدار آن بسیار تأثیرگذار می‌باشد.

با توجه به نتایج مراجع [۳۴، ۱۲] می‌توان مدل ارائه و استفاده شده در این پژوهش را بعنوان یک ایده و مسیر جدید برای بررسی ارتعاشات گرافن‌های چندلایه در نظر گرفت که اثر برش بین لایه‌ای را هم در معادلات خود لحاظ می‌نماید.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای بررسی ارتعاشات آزاد گرافن دولایه‌ای که اثر برش بین لایه‌های آن نیز در نظر گرفته شده است مدل تیر ساندویچی ارائه شده است. در این مدل فرض شده است که لایه‌های گرافن در حین ارتعاش در فاصله نسبی ثابتی از یکدیگر قرار داشته باشند. هر لایه گرافن بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی مدل شده و برای در نظر گرفتن اثر پیوندهای واندروالسی بین لایه‌ها، مدول برشی معادلی در نظر گرفته شده است. هم چنین، جابجایی‌های درون صفحه‌ای علاوه بر جابجایی عرضی برای هر لایه گرافن لحاظ شده است. مقایسه نتایج مدل تیر ساندویچی ارائه شده در این مقاله با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و مدل تیر چندگانه برشی، صحت و دقت مدل ارائه شده را تایید کرده است. هر چند تفاوت‌هایی بین نتایج مدل جدید و مدل تیر چندگانه برشی برای گرافن‌های دولایه با طول‌های مختلف نیز مشاهده شده است. با توجه به نتایج محدود آزمایشگاهی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی در این مورد، تصمیم‌گیری در مورد مدل بهتر نیاز به

بررسی‌های بیشتری دارد.

۶- فهرست علائم

A	مساحت (nm^2)
$A_{lk}^{(n)}$	ضریب وزنی مربوط به مشتق مرتبه n تابع $F(x)$
b	عرض گرافن (nm)
d^b	بردار درجات آزادی نقاط مرزی سیستم
d^d	بردار درجات آزادی نقاط درونی سیستم
E	مدول الاستیسیته لایه‌های گرافن (Pa)
$F(x)$	تابع دلخواه
G	مدول برشی هسته (Pa)
h	ضخامت (nm)
I	ممان دوم سطح (nm^4)
j	متغیر موهومی
K_{dd}	ماتریس سختی نقاط درونی سیستم
K_{db}	ماتریس سختی ترکیبی از نقاط درونی و مرزی سیستم
K_{bd}	ماتریس سختی ترکیبی از نقاط مرزی و دورنی سیستم
K_{bb}	ماتریس سختی نقاط مرزی سیستم
L	طول گرافن دو لایه (nm)
T	انرژی جنبشی سیستم (J)
U	انرژی پتانسیل سیستم (J)
u	جابجایی طولی (nm)
V	حجم (nm^3)
W	جابجایی عرضی (nm)
X	متغیر بی‌بعد در راستای x

علائم یونانی

γ	کرنش برشی
ε	کرنش محوری
ρ	چگالی لایه‌های گرافن (kg/m^3)
σ	تنش محوری (Pa)
τ	تنش برشی (Pa)
ω	فرکانس طبیعی سیستم

بالانویس‌ها

n	مشتق مرتبه n ام
-----	-------------------

زیرنویس‌ها

1	تار خنثی گرافن بالایی
2	تار خنثی گرافن پایینی
t	گرافن لایه بالایی
b	گرافن لایه پایینی
c	لایه میانی گرافن دو لایه
f	لایه‌های بالایی و پایینی در مدل ساندویچ
N	تعداد نقاط گسسته

۷- مراجع

- [1] D. D. Chung, Flexible graphite for gasketing, adsorption, electromagnetic interference shielding, vibration damping, electrochemical applications, and stress sensing, *Journal of materials engineering and performance*, Vol. 9, No. 2, pp. 161-163, 2000.

- [18] A. K. Noor, W. S. Burton, C. W. Bert, Computational models for sandwich panels and shells, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, pp. 155, 1996.
- [19] J. R. Vinson, Sandwich structures, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 54, pp. 201, 2001.
- [20] H. Altenbach, J. W. Altenbach, W. Kissing, *Mechanics of composite structural elements*: Springer, 2004.
- [21] Ö. Civalek, Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns, *Engineering Structures*, Vol. 26, No. 2, pp. 171-186, 2004.
- [22] P. Liu, Y. Zhang, Temperature-dependent bending rigidity of graphene, *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 23, pp. 231912-3, 2009.
- [23] J. W. Kang, S. Lee, Molecular dynamics study on the bending rigidity of graphene nanoribbons, *Computational Materials Science*, Vol. 74, pp. 107-113, 2013.
- [24] Y. Wei, B. Wang, J. Wu, R. Yang, M. L. Dunn, Bending rigidity and Gaussian bending stiffness of single-layered graphene, *Nano letters*, Vol. 13, No. 1, pp. 26-30, 2012.
- [25] D. Sánchez-Portal, E. Artacho, J. M. Soler, A. Rubio, P. Ordejón, Ab initio structural, elastic, and vibrational properties of carbon nanotubes, *Physical Review B*, Vol. 59, No. 19, pp. 12678, 1999.
- [26] K. N. Kudin, G. E. Scuseria, B. I. Yakobson, C₂F, BN, and C nanoshell elasticity from ab initio computations, *Physical Review B*, Vol. 64, No. 23, pp. 235406, 2001.
- [27] E. Muñoz, A. K. Singh, M. A. Ribas, E. S. Penev, B. I. Yakobson, The ultimate diamond slab: Graphene versus graphene, *Diamond and Related Materials*, Vol. 19, No. 5, pp. 368-373, 2010.
- [28] P. Koskinen, O. O. Kit, Approximate modeling of spherical membranes, *Physical Review B*, Vol. 82, No. 23, pp. 235420, 2010.
- [29] J. Tersoff, Energies of fullerenes, *Physical Review B*, Vol. 46, No. 23, pp. 15546, 1992.
- [30] Z.-c. Tu, Z.-c. Ou-Yang, Single-walled and multiwalled carbon nanotubes viewed as elastic tubes with the effective Young's moduli dependent on layer number, *Physical Review B*, Vol. 65, No. 23, pp. 233407, 2002.
- [31] M. Arroyo, T. Belytschko, Finite crystal elasticity of carbon nanotubes based on the exponential Cauchy-Born rule, *Physical Review B*, Vol. 69, No. 11, pp. 115415, 2004.
- [32] Q. Lu, M. Arroyo, R. Huang, Elastic bending modulus of monolayer graphene, *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 42, No. 10, pp. 102002, 2009.
- [33] R. Nicklow, N. Wakabayashi, H. Smith, Lattice dynamics of pyrolytic graphite, *Physical Review B*, Vol. 5, No. 12, pp. 4951, 1972.
- [34] Y. Shen, H. Wu, Interlayer shear effect on multilayer graphene subjected to bending, *Applied Physics Letters*, Vol. 100, No. 10, pp. 101909-101909-3, 2012.
- [2] S. Hosseini Kordkheili, H. Moshrefzadeh-Sani, Mechanical properties of double-layered graphene sheets, *Computational Materials Science*, Vol. 69, pp. 335-343, 2013.
- [3] X. Luo, D. Chung, Vibration damping using flexible graphite, *Carbon*, Vol. 38, No. 10, pp. 1510-1512, 2000.
- [4] Y. Chandra, R. Chowdhury, F. Scarpa, S. Adhikaricor, Vibrational characteristics of bilayer graphene sheets, *Thin solid films*, Vol. 519, No. 18, pp. 6026-6032, 2011.
- [5] T. Natsuki, J.-X. Shi, Q.-Q. Ni, Vibration analysis of circular double-layered graphene sheets, *Journal of Applied Physics*, Vol. 111, No. 4, pp. 044310-044310-6, 2012.
- [6] J.-X. Shi, Q.-Q. Ni, X.-W. Lei, T. Natsuki, Nonlocal elasticity theory for the buckling of double-layer graphene nanoribbons based on a continuum model, *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 11, pp. 3085-3090, 2011.
- [7] Y. Liu, B. Xie, Z. Zhang, Q. Zheng, Z. Xu, Mechanical properties of graphene papers, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 60, No. 4, pp. 591-605, 2012.
- [8] Y. Liu, Z. Xu, Q. Zheng, The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 59, No. 8, pp. 1613-1622, 2011.
- [9] L. Xu, T.-b. Ma, Y.-z. Hu, H. Wang, Molecular dynamics simulation of the interlayer sliding behavior in few-layer graphene, *Carbon*, Vol. 50, No. 3, pp. 1025-1032, 2012.
- [10] Y. Zhang, C. Wang, Y. Cheng, Y. Xiang, Mechanical properties of bilayer graphene sheets coupled by sp³ bonding, *Carbon*, Vol. 49, No. 13, pp. 4511-4517, 2011.
- [11] H. Rokni, W. Lu, A continuum model for the static pull-in behavior of graphene nanoribbon electrostatic actuators with interlayer shear and surface energy effects, *Journal of Applied Physics*, Vol. 113, No. 15, pp. 153512-10, 2013.
- [12] D. Liu, W. Chen, C. Zhang, Improved beam theory for multilayer graphene nanoribbons with interlayer shear effect, *Physics Letters A*, Vol. 377, pp. 1297-1300, 2013.
- [13] F. J. Plantema, *Sandwich construction*: Wiley, New York, 1966.
- [14] H. G. Allen, *Analysis and design of structural sandwich panels*: Pergamon press Oxford, 1969.
- [15] D. Zenkert, *An introduction to sandwich construction*: Engineering Materials Advisory Services, 1997.
- [16] H. Altenbach, Mechanics of advanced materials for lightweight structures, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 225, No. 11, pp. 2481-2496, 2011.
- [17] L. Librescu, T. Hause, Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey, *Composite structures*, Vol. 48, No. 1, pp. 1-17, 2000.