



محاسبه ضرایب شدت تنش مود سه در صفحه بی نهایت حاوی چند ترک بر اساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش

ایمان کریمی پور^۱، علیرضا فتوحی^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

* صندوق پستی ۷۴۱-۸۹۱۹۵ afotuhi@yazduni.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۱ اسفند ۱۳۹۲

پذیرش: ۲۹ اسفند ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۵ مرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:

تئوری گرادیان کرنش

پارامتر اثر طول

نابجایی پادصفحه‌ای

ضریب شدت تنش

تکینگی مرتبه بالا

در این مقاله با استفاده از روش توزیع نابجایی تحلیل تنش در یک صفحه الاستیک بی نهایت حاوی مجموعه‌ای از ترک‌ها تحت بار پادصفحه‌ای بر اساس تئوری گرادیان کرنش انجام می‌گردد. ابتدا حل نابجایی پادصفحه‌ای در صفحه با حل معادله بای هارمونیک، اعمال شرایط مرزی و پیوستگی مربوط به نابجایی پادصفحه‌ای با استفاده از تبدیل فوریه انجام می‌گردد و میدان تنش در اثر نابجایی پادصفحه‌ای به صورت انتگرالی به دست آمده است. مؤلفه‌های تنش دارای تکینگی از نوع مرتبه بالا در نوک ترک هستند. با استفاده از این حل، معادلات انتگرالی برای تحلیل مسئله چندین ترک به دست می‌آید. این معادلات انتگرالی از نوع تکین مرتبه بالا هستند. برای حل معادلات تکین از نوع مرتبه بالا از سری‌های چیشیف استفاده می‌شود. بعد از به دست آوردن توزیع نابجایی روی ترک‌ها می‌توان ضریب شدت تنش برای ترک‌ها را به دست آورد. در این مطالعه به بررسی اثرات اندازه و تأثیر موقعیت ترک‌ها بر روی ضریب شدت تنش نوک آن‌ها پرداخته می‌شود. مثالی جهت صحت‌سنجی روش انجام شده و تطابق خوبی حاصل شده است و سپس چند مسئله جدید جهت نمایش قابلیت روش توزیع نابجایی ارائه شده است.

Analysis of mode III in infinite plane with multiple cracks based on strain gradient elasticity

Iman Karimipour, Ali Reza Fotuhi*

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

* P.O.B. 89195-741 Yazd, Iran, afotuhi@yazduni.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 February 2014
Accepted 20 March 2014
Available Online 16 August 2014

Keywords:

Strain gradient theory
Size effect parameter
Screw dislocation
Stress intensity factor
Hypersingularity

ABSTRACT

In this paper, the anti-plane stress analysis in an infinite elastic plane with multiple cracks is carried out by using the distributed dislocation technique. The solution is obtained for an infinite plane containing the screw dislocation via Fourier transform of biharmonic equation for the analysis of infinite plane in gradient elasticity. These solutions are used to perform integral equations for an infinite plane weakened by multiple straight cracks. Integral equations are hypersingular type which are solved numerically for density of dislocation on the cracks surfaces. The numerical method in Chebyshev series form are used to solve the hypersingular integral equations. The solution of integral equations leads to dislocation density functions. The stress intensity factor for cracks tips are formulated in terms of density of dislocation. The definition of dislocation density, stress intensity factors for cracks tips are calculated. The influence of size-effect and crack location on the stress intensity factors are studied. To confirm the validity of formulations, numerical values of stress intensity factors are compared with the results in the literature. The results of the present approach are in excellent agreement with those in the literature. Some new examples with different geometries of cracks are solved to illustrate the applicability of procedure.

۱- مقدمه

گسترش تئوری‌های الاستیسیته غیرکلاسیک برای پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به اینکه تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش با وارد کردن طول مشخصه ماده در معادلات ساختاری خصوصیات ماده را نیز در نظر می‌گیرد، نتایج متفاوتی نسبت به تئوری‌های کلاسیک دارد. در نانوساختارها، فضای خالی بین اتم‌ها نسبت به ابعاد نانوساختار شایان توجه بوده و نمی‌توان آن را نادیده گرفت. ضمناً، طول

محققان زیادی از تئوری گرادیان کرنش برای تحلیل رفتار مواد استفاده کرده‌اند، ولی کاربرد این تئوری در پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو است. مطالعات تجربی نشان داده است که وقتی ابعاد جسم در مقیاس میکرو باشد تئوری الاستیسیته کلاسیک قادر به پیش‌بینی رفتار مواد نخواهد بود. از این رو با توجه به گسترش روزافزون کاربرد مواد در ابعاد میکرو، بسط و

Please cite this article using:

I. Karimipour, A.R. Fotuhi, Analysis of mode III in infinite plane with multiple cracks based on strain gradient elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 139-149, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مختلف نابجایی را بررسی کردند. گاتکین در سال ۲۰۰۰ [۱۰] به بررسی نانوسکوپیک نابجایی‌ها پرداخت.

بررسی مسئله پادصفحه‌ای با در نظر گرفتن گرادیان الاستیسیته و انرژی سطحی توسط واردیولاکیس و جئورجیادیس [۱۱] در سال ۱۹۹۸ انجام گرفت. در مقاله حاضر حل تحلیلی مسئله صفحه بی‌نهایت تضعیف‌شده به وسیله چندین ترک مستقیم تحت بارگذاری پادصفحه‌ای براساس تئوری الاستیسه گرادیان کرنش، با استفاده از روش نابجایی مورد بررسی قرار گرفته است و تأثیر اثر اندازه، طول ترک و چیدمان ترک‌ها بر روی ضرایب شدت تنش ارائه شده است. می‌توان گفت این تحقیق برای اولین بار با روش نابجایی حل مسائل چندین ترک در مقیاس نانو با تئوری گرادیان کرنش را به کار می‌گیرد. همان طور که مشاهده می‌شود بررسی پدیده اثر اندازه با تئوری گرادیان کرنش در تحقیقات قبلی برای مسائل چندین ترک انجام نشده است، لذا در این مقاله، تئوری گرادیان کرنش به کار گرفته می‌شود تا اثرات اندازه بر روی ضریب شدت تنش این مسائل بررسی شود.

۲- حل نابجایی پادصفحه‌ای بر اساس تئوری گرادیان کرنش

با فرض تغییرشکل پادصفحه‌ای، تنها مؤلفه غیر صفر بردار تغییرمکان، تغییرمکان عمود بر صفحه $w(x, y)$ است و مؤلفه‌های تنش σ_{xz} و σ_{yz} و کوپل تنش μ_{yyz} در تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش به صورت روابط (۱) تا (۳) قابل بیان هستند [۱۳، ۱۲].

$$\sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) - GL^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - GL^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (2)$$

$$\mu_{yyz} = GL^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

که در روابط بالا L طول مشخصه یا ترم وابسته به انرژی حجمی گرادیان کرنش و G مدول برشی ماده است. تبدیل فوریه برای تابع $f(x)$ به فرم رابطه (۴) و معکوس آن به فرم رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$f^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f^*(\xi) d\xi \quad (5)$$

معادله تعادل استاتیکی در تئوری گرادیان کرنش با فرض نیروی جسمی صفر به صورت رابطه (۶) است [۱۲].

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

با جایگذاری روابط (۱) و (۲) در رابطه (۶) معادله ناویر بصورت رابطه (۷) به دست می‌آید.

$$\nabla^2 w - L^2 \nabla^4 w = 0 \quad (7)$$

با اعمال تبدیل فوریه (۴) به رابطه (۷)، رابطه (۸) حاصل می‌شود:

$$L^2 \frac{d^4 w^*}{dy^4} - (2L^2 \xi^2 + 1) \frac{d^2 w^*}{dy^2} + (L^2 \xi^4 + \xi^2) w^* = 0 \quad (8)$$

که w^* تبدیل فوریه w است. پاسخ معادله دیفرانسیل (۸) با حل معادله مشخصه (۹) به دست می‌آید.

$$L^2 \lambda^4 - (2L^2 \xi^2 + 1) \lambda^2 + (L^2 \xi^4 + \xi^2) = 0 \quad (9)$$

مشخصه داخلی نانوساختارها در مرتبه طول مشخصه خارجی آن‌ها است. بنابراین توجه استفاده از تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک برای مدل‌سازی نانوساختارها که اساساً بر فرض پیوستگی استوار است، مبهم است. برای رفع این ابهام، برخی محققین به جای تئوری کلاسیک از تئوری‌های محیط پیوسته غیر کلاسیکی که می‌توانند تأثیرات ابعاد کوچک (در حد نانومتر) و ناپیوستگی ذاتی نانوساختارها را در نظر بگیرد، بهره می‌برند. تئوری گرادیان کرنش، یکی از تئوری‌های محیط پیوسته غیر کلاسیک است که تأثیرات مقیاس‌های کوچک و عدم پیوستگی محیط مادی در معادلات مشخصه این تئوری لحاظ شده است.

ایده اصلی، وارد کردن مشتقات کرنش در رابطه انرژی کرنش برای اولین بار توسط برنولی^۱ و اوپلر^۲ ارائه شده است [۱] ولی برای مدت زیادی رابطه ارائه‌شده توسط آن‌ها مورد توجه محققان قرار نگرفت. بعد از اینکه ویجت^۳ به طور مختصر تأثیرات گرادیان کرنش را در روابط الاستیسیته بیان کرد، برادران کوسرات [۲] برای اولین بار فرمولاسیونی برای این منظور بیان کردند و مفهوم کوپل تنش را بیان کردند؛ لذا برادران کوسرات در بیان رفتار مواد اقدام به در نظر گرفتن شش درجه آزادی (سه درجه آزادی جابجایی و سه درجه آزادی دورانی) در هر نقطه از جسم نمودند. نکته جالبی که در این تئوری می‌توان مشاهده کرد، وجود کوپل تنش علاوه بر تنش کوشی در معادلات حرکت است. همچنین تانسور تنش در تئوری کوسرات متقارن نیست. جارامیلو [۳] با فرض وابستگی تابع چگالی انرژی کرنش به مشتقات مرتبه اول و دوم جابجایی و مشتقات مرتبه اول سرعت، به ارائه یک فرم جدید برای تابع چگالی انرژی کرنش پرداخت. وی در این فرمولاسیون، تنش کوشی را به صورت فرم کلاسیک فرض کرد و کوپل تنش را در نظر نگرفت. توپین [۴] به ارائه معادلات ساختاری در تئوری محیط پیوسته کوسرات برای تغییرشکل‌های محدود پرداخت. میندلین و ترستین [۵] به ارائه فرمولاسیون محیط پیوسته کوسرات برای تغییرشکل‌های بزرگ و کوچک پرداختند و مطالعات قبلی در این زمینه را کاملاً مورد نقد و بررسی قرار دادند. همچنین آن‌ها در این مطالعه به تحلیل چندین مسئله کلاسیک الاستیسیته با استفاده از تئوری کوسرات پرداختند. در سال ۱۹۶۳ میندلین با استفاده از تئوری کوسرات یک فرمولاسیون خطی برای تحلیل سه بعدی اجسام الاستیک ارائه کرد که معادلات ساختاری استخراج شده در این مطالعه با معادلات استخراج‌شده توسط توپین مطابقت دارد. دو سال بعد میندلین با وارد کردن مشتقات مرتبه دوم کرنش در فرم خطی سازی شده از تئوری کوسرات که ارائه کرده بود، فرم جدیدی از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش را ارائه کرد. در این فرم جدید اثرات کشش سطحی نیز در معادلات قابل بررسی بود. وی به همراه اشل [۶] در سال ۱۹۶۸ به جمع‌بندی سه فرم تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش و رابطه بین این سه فرم پرداخت که این سه فرم ارائه‌شده در سال‌های بعد مورد استفاده محققان برای تحلیل رفتار الاستیک مواد قرار گرفت.

آلتان و ایفانتیس [۷] و رو و ایفانتیس [۸] یک روش برای حل مسئله مقدار مرزی که از ساده‌سازی مدل میندلین با فرض $I_1 = I_2$ به دست می‌آید ارائه کردند. این روش که با نام الاستیسیته گرادیان کرنش تقریبی، شناخته می‌شود با تغییر دادن میدان تغییرمکان حاصل از الاستیسیته معمولی به وسیله یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای هلمهولتز جواب‌ها را بهبود می‌بخشد. آلتان و ایفانتیس و همچنین رو و ایفانتیس این روش را برای مسائل ترک در مواد الاستیک به کار بردند. گاتکین و ایفانتیس [۹] به کمک این روش مسائل

1- Bernoulli
2- Euler
3- Voigt

$$A(\xi) = \frac{b_z}{2\xi} (\pi\delta(\xi)\xi + i)(L^2\xi^2 + 1) \quad (17)$$

$$B(\xi) = \frac{-b_z}{2} L^2 \xi (\pi\delta(\xi)\xi + i) \quad (18)$$

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۸) در رابطه (۱۰) و استفاده از تبدیل فوریه معکوس میدان جابجایی به دست می‌آید. طبق رابطه (۱۹) داریم:

$$w(x, y) = \frac{b_z}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\pi\delta(\xi)\xi + i)(L^2\xi^2 + 1)}{\xi} e^{-|\xi|y} \right) e^{-i\xi x} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} L^2 \xi (\pi\delta(\xi)\xi + i) e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{L^2}} y} e^{-i\xi x} d\xi \right\} \quad (19)$$

با استفاده از رابطه (۱) و پس از ساده‌سازی، رابطه (۲۰) به دست می‌آید:

$$\sigma_{xz} = \frac{-iGb_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\pi\delta(\xi)\xi + i)(L^2\xi^2 + 1) e^{-|\xi|y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (20)$$

با استفاده از خاصیت تابع دلتای دیراک و جداسازی قسمت زوج و فرد انتگرال، رابطه (۲۰) به صورت روابط (۲۱) تا (۲۳) ساده می‌شود:

$$\sigma_{xz} = \frac{Gb_z}{2\pi} \int_0^{\infty} (L^2\xi^2 + 1) e^{-\xi y} \cos(x\xi) d\xi \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi y} \cos(x\xi) d\xi = \frac{y}{r^2} \quad (22)$$

$$\int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi y} \cos(x\xi) d\xi = -\frac{2y(3x^2 - y^2)}{r^6} \quad (23)$$

با استفاده از روابط (۲۲) و (۲۳) می‌توان رابطه تنش σ_{xz} را به صورت رابطه (۲۴) نوشت.

$$\sigma_{xz}(x, y) = \frac{-Gb_z}{2\pi} \left\{ -\frac{y}{r^2} + L^2 \frac{6yx^2 - 2y^3}{r^6} \right\} \quad y > 0 \quad (24)$$

طبق روابط (۲۵) و (۲۶) داریم:

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi y} \sin(x\xi) d\xi = \frac{x}{r^2} \quad (25)$$

$$\int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi y} \sin(x\xi) d\xi = -\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{r^6} \quad (26)$$

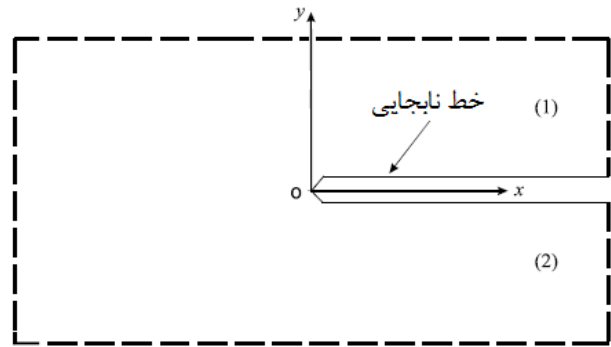
با استفاده از روندی مشابه برای مؤلفه تنش σ_{yz} و استفاده از روابط (۲) و (۲۵) و

(۲۶) معادله تنش σ_{yz} به صورت رابطه (۲۷) در خواهد آمد که $r^2 = x^2 + y^2$ فاصله از محل نایجایی است. روابط (۲۴) و (۲۷) نشان می‌دهد که میدان تنش در نوک نایجایی، بر خلاف تئوری الاستیسیته کلاسیک که دارای تکینگی کوشی است، تکین از مرتبه بالا ($1/r^3$) است. با فرض حالت $L=0$ در روابط (۲۴) و (۲۷) میدان تنش در اثر نایجایی پادصفحه‌ای در الاستیسیته کلاسیک حاصل می‌شود که با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۴] تطابق دارد.

$$\sigma_{yz}(x, y) = \frac{Gb_z}{2\pi} \left\{ \frac{-x}{r^2} + L^2 \frac{2x^3 - 6xy^2}{r^6} \right\} \quad y > 0 \quad (27)$$

۳- فرمول بندی ترک

برای بدست آوردن معادلات انتگرالی مسائل ترک، روش توزیع نایجایی به کار برده می‌شود. فرض می‌شود نایجایی پادصفحه‌ای با چگالی b_z روی ترک با معادلات پارامتری $x = \alpha(s)$ و $y = \beta(s)$ که $-1 \leq s \leq 1$ توزیع شده



شکل ۱ صفحه بی‌نهایت شامل نایجایی پادصفحه‌ای

که جواب‌های آن با شرط محدود ماندن تنش در $(y \rightarrow \infty)$ برای منطقه $(y > 0)$ ایجاب می‌کند که نهایتاً جواب معادله دیفرانسیل (۸) به صورت رابطه (۱۰) باشد.

$$w^*(\xi, y) = A(\xi) e^{-|\xi|y} + B(\xi) e^{-\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{L^2}} y} \quad (10)$$

صفحه بی‌نهایت همگن و الاستیک شامل نایجایی پادصفحه‌ای با خط نایجایی مطابق شکل ۱ را در نظر بگیرید که مبدأ مختصات در محل نایجایی قرار دارد.

شرایط پیوستگی تنش، کوپل تنش و چند مقداری بودن تغییر مکان به دلیل وجود نایجایی در $y=0$ طبق رابطه (۱۱) عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} w(x, 0^+) - w(x, 0^-) &= b_z H(x) \\ \sigma_{yz}(x, 0^+) &= \sigma_{yz}(x, 0^-) \\ \mu_{yyz}(x, 0^+) &= \mu_{yyz}(x, 0^-) \end{aligned} \quad (11)$$

که $H(x)$ در روابط بالا تابع هویساید و b_z مؤلفه بردار برگرز نایجایی پادصفحه‌ای است. با توجه به خاصیت پادتقارنی مسئله، نیمه بالایی صفحه لحاظ می‌گردد (ناحیه (۱) در شکل ۱). در نتیجه شرایط مرزی مسئله به دلیل پادتقارنی نسبت به محور x به صورت رابطه (۱۲) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \frac{1}{2} b_z H(x) \\ \mu_{yyz}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

با اعمال تبدیل فوریه به شرایط مرزی (۱۲) و به کمک رابطه (۳)، روابط (۱۳) و (۱۴) به دست خواهد آمد:

$$w^*(\xi, 0) = \frac{1}{2} b_z (\pi\delta(\xi) + \frac{i}{\xi}) \quad (13)$$

$$\mu_{yyz}^*(\xi, 0) = GL^2 \frac{d^2 w^*}{dy^2} \Big|_{y=0} = 0 \quad (14)$$

که μ_{yyz}^* تبدیل فوریه μ_{yyz} است.

با جایگذاری رابطه (۱۰) در (۱۴) می‌توان رابطه بین ثابت‌های $A(\xi)$ و $B(\xi)$ را به صورت رابطه (۱۵) پیدا کرد.

$$B(\xi) = \frac{-L^2 \xi^2}{1 + L^2 \xi^2} A(\xi) \quad (15)$$

با قرار دادن $y=0$ در رابطه (۱۰) و استفاده از رابطه (۱۳)، رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$A(\xi) + B(\xi) = \frac{b_z}{2} (\pi\delta(\xi) + \frac{i}{\xi}) \quad (16)$$

با حل دو معادله (۱۵) و (۱۶) ثوابت $A(\xi)$ و $B(\xi)$ به صورت روابط (۱۷) و (۱۸) محاسبه می‌شوند.

محل سطوح فرضی ترک محاسبه می‌شوند. در مسئله دوم جسم حاوی ترک بوده و بار خارجی وجود ندارد. با اعمال مؤلفه‌های تنش به دست آمده از مسئله اول در جهت عکس بر روی سطوح ترک‌ها، میدان تنش در کل جسم به دست می‌آید. با حاصل جمع دو مسئله مذکور، مؤلفه‌های تنش در سطح ترک صفر شده و حل مسئله مکانیک شکست ارائه می‌گردد؛ بنابراین در این مقاله حل مسئله دوم مد نظر بوده و فرض می‌شود که بارگذاری خارجی، بارگذاری تعریف شده در بخش دو روی سطح ترک باشد. در این صورت بردارهای ترکشن در سطوح آزاد ترک ایجاد می‌گردد که با استفاده از روابط بیان شده برای σ_{yz} می‌توانند محاسبه گردند [۱۸]. پس سمت چپ معادله (۳۰) تعیین می‌شود. با به کار بردن تعریف تابع چگالی نابیایی، معادله برای جابجایی بازشدگی دهانه ترک z ام به صورت رابطه (۳۵) خواهد شد:

$$w_j^-(r) - w_j^+(r) = \int_{-1}^r \sqrt{(\alpha_j'(s))^2 + (\beta_j'(s))^2} B_{zj}(s) ds \quad \& \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

میدان جابجایی در خارج سطح ترک تک مقداری است، بنابراین چگالی نابیایی نیازمند اعمال شرط بسته شدن در نوک‌های ترک را دارد. طبق رابطه (۳۶) داریم:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{(\alpha_j'(s))^2 + (\beta_j'(s))^2} B_{zj}(s) ds = 0 \quad \& \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

نحوه انتخاب تابع چگالی وابسته به درجه تکنیکی مسئله و تکنیکی نتایج حاکم بر مسئله است. روش حل معادلات انتگرالی با تکنیکی مرتبه بالا بر پایه سری‌های چبیشف ارائه شده و در پیوست محاسبه چند نمونه از این انتگرال‌ها با توابع چبیشف بیان شده است. از آن‌جا که میدان تنش دارای تکنیکی مرتبه سوم در نوک ترک است، لذا چگالی نابیایی به صورت زیر انتخاب می‌شود [۱۲]. طبق روابط (۳۷) تا (۳۹) داریم:

$$B_{zj}(s) = \sqrt{1-s^2} g_{zj}(s), \quad -1 \leq s \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (37)$$

$$g_{zj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj} U_n(s) \quad (38)$$

$$U_n(s) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}(s)]}{\sin[\cos^{-1}(s)]} \quad (39)$$

که در رابطه (۳۹)، $U_n(s)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم است. برای به دست آوردن چگالی نابیایی، معادلات انتگرالی (۳۰) و (۳۶) باید به طور همزمان حل گردند. باید توجه داشت که با جایگذاری مستقیم روابط (۳۷) تا (۳۹) در رابطه (۳۶) و با توجه به رفتار تابع $U_n(s)$ معادله (۳۶) زمانی ارضا خواهد شد که $A_0 = 0$ باشد [۱۳]. پس می‌توان حدود سری (۳۸) را به جای $n=0$ از یک شروع کرد و به جای حل همزمان معادلات (۳۰) و (۳۶) تنها معادله (۳۰) را با اعمال شرط ذکر شده محاسبه کرد.

با استفاده از روابط (۳۲) تا (۳۴) و (۳۷) تا (۳۹) و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۳۰)، معادله (۴۰) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(\alpha_i(r), \beta_i(r)) = & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \left\{ A_{nj} \left[\frac{a_{-3j}(r)}{(r-s)^3} + \frac{a_{-1j}(r)}{(r-s)} \right] \right. \\ & + \left. \left(K_{jj}(r, s) - \frac{a_{-3j}(r)}{(r-s)^3} - \frac{a_{-1j}(r)}{(r-s)} \right) \right\} \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N A_{nj} K_{ij}(r, s) \} \times U_n(s) \sqrt{1-s^2} ds \\ & -1 \leq r \leq 1 \quad \& \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (40) \end{aligned}$$

باشد. با استفاده از معادله (۲۷) میدان تنش ایجاد شده در هر نقطه با توجه به توزیع نابیایی ذکر شده در بالا به صورت رابطه (۲۸) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(x, y) = & \frac{G}{2\pi} \times \int_{-1}^1 \left\{ \frac{-(x-\alpha(s))}{r_1^2} \right. \\ & + \frac{L^2}{r_1^6} (2(x-\alpha(s))^3 - 6(x-\alpha(s))(y-\beta(s))^2) \} \\ & \times \sqrt{(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2} b_z(s) ds \quad (28) \end{aligned}$$

باید توجه داشت که در رابطه فوق نماد پریم، نشان‌دهنده مشتق نسبت به پارامتر s است و $r_1 = \sqrt{(x-\alpha(s))^2 + (y-\beta(s))^2}$. فرض کنید N ترک در صفحه بی‌نهایت باشد، معادلات پارامتری ترک‌ها نسبت به سیستم مختصات دکارتی x, y به صورت رابطه (۲۹) توصیف می‌شوند [۱۵].

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i(s) \\ y_i &= \beta_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad -1 \leq s \leq 1 \quad (29) \end{aligned}$$

اگر نابیایی با چگالی مجهول $B_{zj}(s)$ روی المان بی‌نهایت کوچک $\sqrt{(\alpha_j'(s))^2 + (\beta_j'(s))^2} ds$ روی سطح z امین ترک قرار داشته باشد ($-1 \leq s \leq 1$)، ترکشن پادمفحه‌ای روی سطح ترک نام به دلیل توزیع نابیایی‌های ذکر شده در بالا روی تمامی N ترک نتیجه می‌دهد. طبق رابطه (۳۰) داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(\alpha_i(r), \beta_i(r)) = & \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 K_{ij}(r, s) B_{zj}(s) ds \\ & -1 \leq r \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (30) \end{aligned}$$

در رابطه (۳۰) تابع $K_{ij}(r, s)$ به صورت معادله (۳۱) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} K_{ij}(r, s) = & k_{yz}(\alpha_i(r), \beta_i(r), \alpha_j(s), \beta_j(s)) = \\ & \frac{G}{2\pi} \sqrt{(\alpha_j'(s))^2 + (\beta_j'(s))^2} ds \times \\ & \left\{ \frac{-(\alpha_i(r) - \alpha_j(s))}{R^2} + \frac{L^2}{R^6} \times [2(\alpha_i(r) - \alpha_j(s))^3 - \right. \\ & \left. 6(\alpha_i(r) - \alpha_j(s))(\beta_i(r) - \beta_j(s))^2] \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

که در آن $R = \sqrt{(\alpha_i(r) - \alpha_j(s))^2 + (\beta_i(r) - \beta_j(s))^2}$ و متغیرهای با اندیس i تابعی از r و متغیرهای با اندیس j تابعی از s می‌باشند. رفتار کرنل معادله (۳۰) وقتی که $i = j$ و $s \rightarrow r$ دارای تکنیکی مرتبه بالا خواهد بود که چنین رفتاری متمایز از تئوری کلاسیک با کرنل دارای تکنیکی کوشی است؛ بنابراین معادله (۳۰) یک معادله انتگرالی با تکنیکی مرتبه بالا برای چگالی نابیایی است. برای نشان دادن ترم‌های تکنیک رابطه (۳۱)، از بسط سری تیلور $\alpha_j(s)$ و $\beta_j(s)$ در مجاورت r استفاده می‌شود [۱۶]. طبق معادلات (۳۲) تا (۳۴) داریم:

$$K_{jj}(r, s) = \frac{a_{-3j}(r)}{(r-s)^3} + \frac{a_{-1j}(r)}{(r-s)} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{mj}(r-s)^m \quad (32)$$

$$a_{-3j}(r) = \frac{G}{\pi} L^2 \frac{\alpha_j'(r)(\alpha_j'^2(r) - 3\beta_j'^2(r))}{(\alpha_j'^2(r) + \beta_j'^2(r))^{\frac{5}{2}}} \quad (33)$$

$$a_{-1j}(r) = \frac{-G}{2\pi} \frac{\alpha_j'(r)}{(\alpha_j'^2(r) + \beta_j'^2(r))^{\frac{1}{2}}} \quad (34)$$

ضرایب ترم‌های تکنیک رابطه (۳۲) به صورت روابط (۳۳) و (۳۴) خواهند بود. با استفاده از اصل باکتر [۱۷] مسئله صفحه تضعیف شده توسط چندین ترک را می‌توان به دو مسئله تفکیک نمود. در مسئله اول میدان تنش در جسم بدون ترک تحت بارگذاری خارجی به دست می‌آید و مؤلفه‌های تنش در

و ضریب شدت تنش در نوک آن محاسبه می‌شود. این مسئله توسط چان و همکاران [۲۱] نیز حل شده و نتایج در جدول ۱ جهت مقایسه بین ضرایب شدت تنش ارائه شده است که تطابق خوبی دارد.

مقایسه نتایج، صحت روش حل نابجایی را برای مسئله ترک نشان می‌دهد. حال در ادامه به بررسی ضریب شدت تنش برای حالت چند ترک می‌پردازیم.

۴-۲- صفحه شامل دو ترک:

مطابق شکل ۲، دو ترک به طول‌های $2a$ روی محور x ها که به صورت متقارن نسبت به محور y از هم می‌باشند و تحت تنش یکنواخت قرار گرفته‌اند بررسی می‌شود. فاصله اولیه دو نوک B از دو ترک (دو نوک داخلی) 0.2 فرض شده است ($X = 0.2$). معادله پارامتری دو ترک به صورت رابطه (۴۷) است.

$$\alpha_i(r) = x_{0i} + a_i r, \quad -1 \leq r \leq 1 \text{ \& } i = 1, 2$$

$$\beta_i(r) = 0 \quad (47)$$

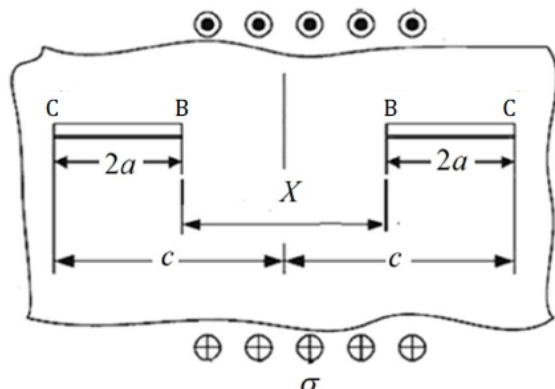
که a_i نصف طول ترک i ام است. دو ترک را از یکدیگر دور کرده و اثر دور شدن ترک‌ها را روی ضریب شدت تنش نوک دو ترک بررسی می‌کنیم. باید توجه داشت که به دلیل تقارن، ضرایب شدت تنش نوک B و C از ترک اول با ضرایب شدت تنش نوک B و C از ترک دوم برابر است. شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب ضریب شدت تنش بی بعد شده بر حسب فاصله بین نوک آن‌ها را برای نوک B و C نشان می‌دهند. همچنین ضریب شدت تنش در حالت کلاسیک برای آرایش متنوع قرار گرفتن ترک‌ها از مرجع [۲۲] قابل دسترسی است.

از شکل‌های بالا مشاهده می‌شود که با افزایش اثر اندازه، ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد و نیز با افزایش فاصله دو ترک، اثر دو ترک بر یکدیگر کاهش یافته و مقدار ضریب شدت تنش برای دو ترک به مقدار ضریب شدت تنش یک ترک در صفحه بی‌نهایت میل می‌کند.

حالتی را در نظر بگیرید که ترک سمت چپ روی محور افقی باشد و ترک سمت راست در موقعیت ($\alpha_y = 0.2$) قرار داشته باشد (شکل ۵). مجدداً دو ترک از هم دور می‌شوند. شکل‌های ۶ و ۷ به ترتیب ضریب شدت تنش مربوط به نوک B و C از دو ترک را نشان می‌دهند.

جدول ۱ مقایسه نتایج عددی ضریب شدت تنش

مقدار اثر اندازه	مرجع [۲۱]	بررسی حاضر
$\tilde{L} = 0.8$	۰/۵۲۸۰	۰/۵۲۸۰
$\tilde{L} = 0.5$	۰/۶۹۷۸	۰/۶۹۷۸
$\tilde{L} = 0.2$	۰/۸۹۳۴	۰/۸۹۳۴
$\tilde{L} = 0.1$	۰/۹۴۸۶	۰/۹۴۸۶
$\tilde{L} = 0.05$	۰/۹۷۴۷	۰/۹۷۴۷



شکل ۲ صفحه بی‌نهایت شامل دو ترک

با استفاده از روابط (۴۹) و (۵۰) پیوست، انتگرال قسمت‌های تکین را می‌توان تحلیلی محاسبه کرد. در نتیجه معادله (۴۰) به صورت رابطه (۴۱) نوشته می‌شود.

$$\sigma_{yz}(\alpha_i(r), \beta_i(r)) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_{nj} F_n(r) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{nj} G_{nij}(r))$$

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ \& } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (41)$$

که مقادیر $F_n(r)$ و $G_{nij}(r)$ در رابطه (۴۱) به صورت رابطه (۴۲) بیان می‌شوند.

$$F_n(r) = \frac{-\pi a_{-3j}(r)}{4(1-r^2)} [-(n^2+3n+2)U_{n-1}(r) + (n^2+n)U_{n+1}(r)]$$

$$-\frac{\pi a_{-1j}(r)}{2} [U_{n-1}(r) - U_{n+1}(r)] +$$

$$\int_{-1}^1 \left(K_{jj}(r,s) - \frac{a_{-3j}(r)}{(r-s)^3} - \frac{a_{-1j}(r)}{(r-s)} \right) U_n(s) \sqrt{1-s^2} ds$$

$$G_{nij}(r) = \int_{-1}^1 K_{ij}(r,s) U_n(s) \sqrt{1-s^2} ds \quad (42)$$

محاسبه انتگرال‌ها در (۴۲) با روش عددی تربیع گوس چپیشف انجام می‌پذیرد [۱۹]. برای محاسبه ضرایب سری در (۴۱) می‌توان به مقدار داد و دستگاه معادلات خطی را حل نمود؛ بنابراین با تقسیم ناحیه در بازه $-1 \leq r \leq 1$ ، یک سیستم معادله جبری خطی تولید می‌شود که نقاط نظم یافته در بازه (۱ و -۱) دارای ضابطه زیر هستند [۲۰]. طبق رابطه (۴۳) داریم:

$$r_e = \cos \left[\frac{(2e-1)\pi}{2m} \right], \quad e = 1, 2, \dots, m \quad (43)$$

میدان تنش در مسائل ترک براساس تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش دارای تکینگی مرتبه بالا در نوک ترک هستند لذا نمی‌توان از تعریف بیان‌شده در تئوری کلاسیک استفاده کرد و باید تعریف جامع‌تری از آن بیان شود [۱۲-۱۳].

در تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش ضریب شدت تنش برای نوک (a) و ($-a$) به ترتیب به صورت روابط (۴۴) و (۴۵) بیان می‌شود.

$$K_{III}(a) = \sum_{n=1}^N \frac{L G n \sqrt{\pi a} + L G \sqrt{\pi a}}{2a} = \frac{\tilde{L}}{2} G \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^N A_n(n+1) \quad (44)$$

$$K_{III}(-a) = \frac{\tilde{L}}{2} G \sqrt{\pi a} \sum_{n=1}^N A_n(n+1)(-1)^n \quad (45)$$

باید توجه داشت در این دو رابطه $\tilde{L} = L/a$ است. با حل معادله (۴۱) مؤلفه‌های مجهول بردار برگز پیدا می‌شوند و با جایگذاری آن‌ها در رابطه (۴۴) و (۴۵) می‌توان ضریب شدت تنش را محاسبه نمود.

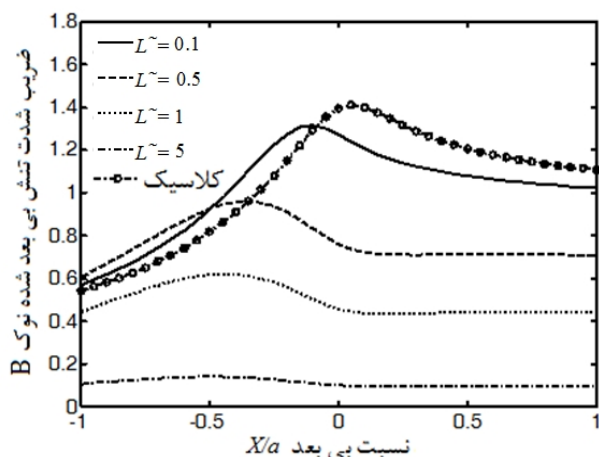
۴- مثال‌های عددی

در این قسمت یک مثال جهت صحت‌سنجی روش حل و چند مثال بررسی‌شده تا قابلیت استفاده از روش توزیع نابجایی نشان داده شود. در تمامی این مثال‌ها ابعاد توسط طول ترک بی بعد گردیده و صفحه بی‌نهایت تحت تنش ثابت $\sigma_{yz} = \sigma_0$ قرار می‌گیرد. ضریب شدت تنش بی بعد شده به صورت رابطه (۴۶) در نظر گرفته می‌شود که a نصف طول ترک است.

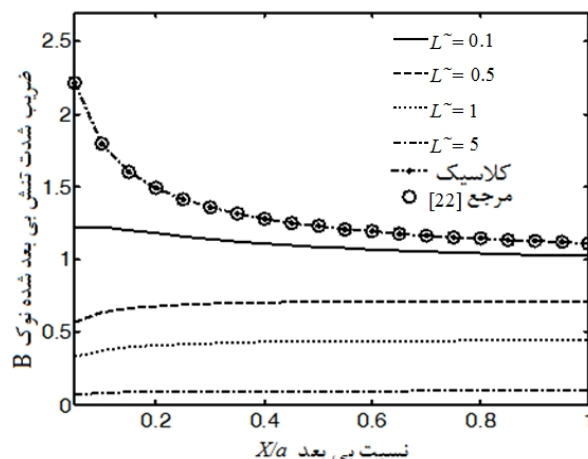
$$\frac{K_{III}(a)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = -\frac{\tilde{L} G}{2\sigma_0} \sum_{n=1}^N A_n(n+1) \quad (46)$$

۴-۱- صحت‌سنجی

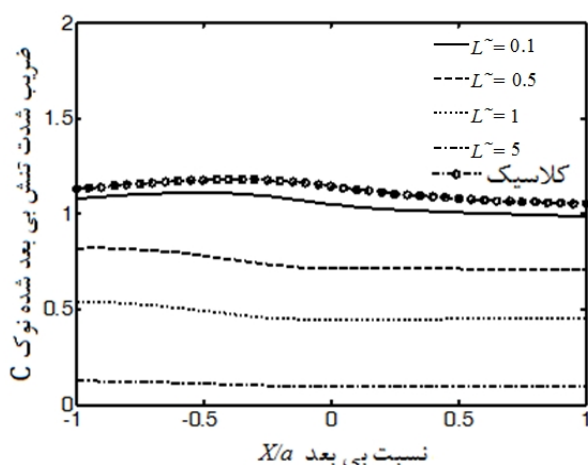
در این مثال نتایج عددی برای یک ترک افقی مستقیم که به صورت متقارن روی محور x قرار گرفته بررسی می‌شود. ترک تحت تنش یکنواخت σ_0 بوده



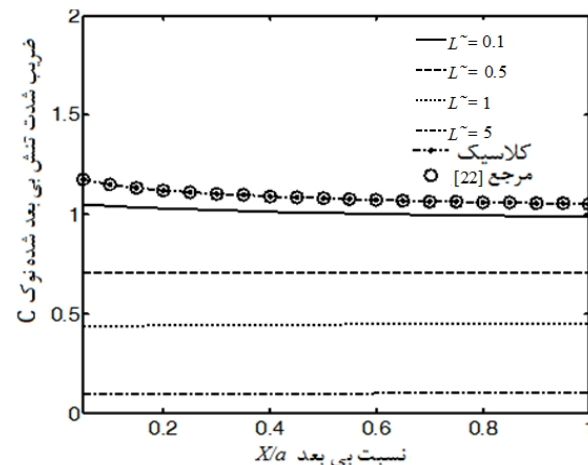
شکل ۶ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف



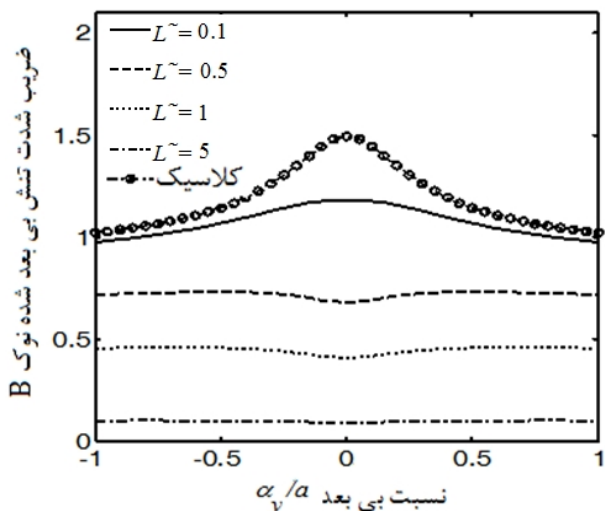
شکل ۳ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف



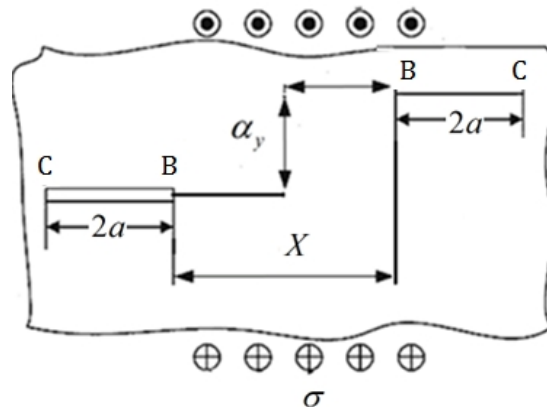
شکل ۷ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۴ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۸ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف



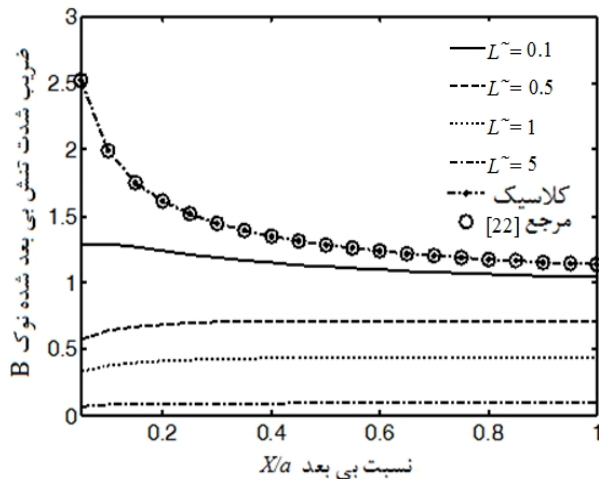
شکل ۵ آرایش دو ترک غیر هم راستا در صفحه بی‌نهایت

از شکل‌های بالا مشاهده می‌شود که وقتی پارامتر اثر اندازه به سمت صفر میل می‌کند، ضریب شدت تنش بی بعد شده به نتایج ضریب شدت تنش حالت کلاسیک نزدیک می‌شود و با افزایش پارامتر اثر اندازه ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد [۲۳].

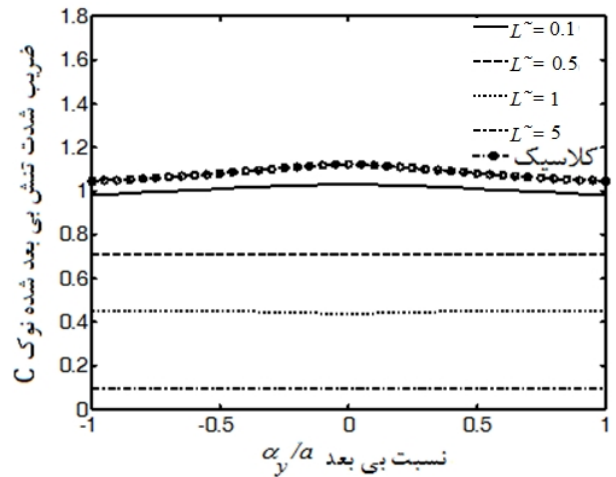
در مثالی دیگر برای مسئله دو ترک حالتی که ترک چپ روی محور افق ثابت بوده و ترک سمت راست که فاصله افقی نوک آن (B) با نوک ترک مجاورش 0.2 ($X=0.2$) است را در نظر بگیرید که در راستای محور قائم جابجا می‌شود. شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب ضریب شدت تنش بی بعد شده مربوط به نوک B و C ترک‌ها را نشان می‌دهند.

۴-۳- صفحه شامل سه ترک:

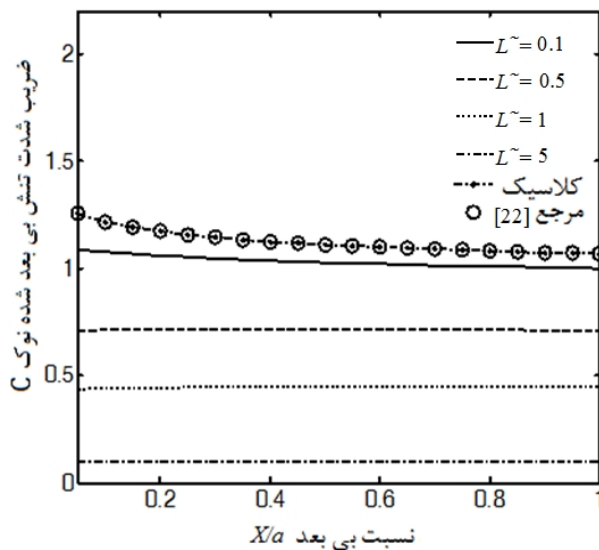
مطابق شکل ۱۰، حالتی که سه ترک روی محور x ها و به صورت متقارن از هم می‌باشند بررسی می‌شود. فاصله اولیه نوک‌های A از ترک وسط با نوک‌های B از ترک‌های مجاور خود 0.2 فرض شده است ($b-a=X=0.2$). حال ترک‌های سمت راست و چپ را از ترک وسط دور کرده و اثر دور شدن ترک‌ها را روی ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک آن‌ها بررسی می‌کنیم.



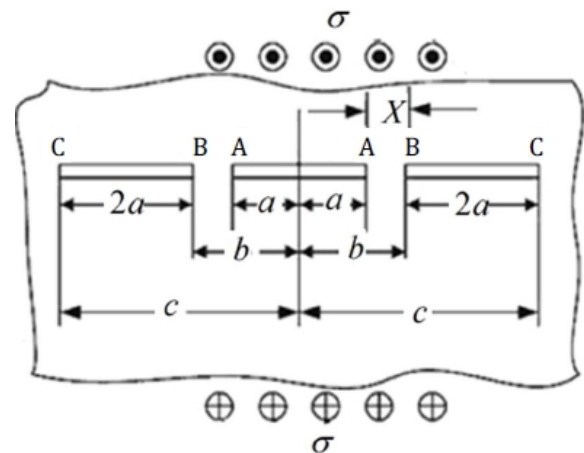
شکل ۱۲ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۹ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف



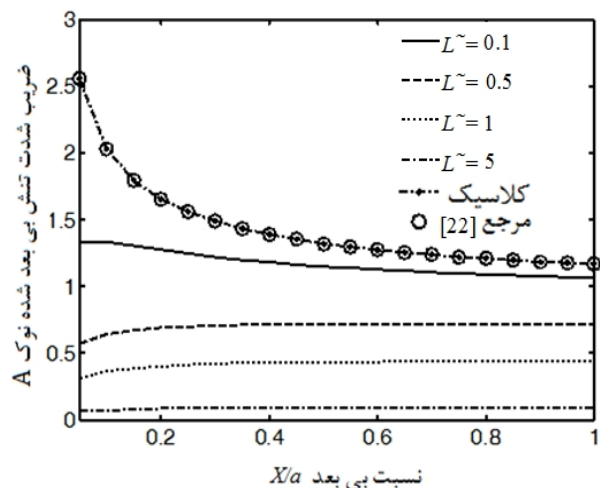
شکل ۱۳ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۱۰ صفحه بی‌نهایت شامل سه ترک هم راستا

همچنین در نوک‌هایی که گرا دیان تنش بیشتر است، ضریب شدت تنش زودتر یکنواخت می‌شود و مجدداً زمانی که $\tilde{L} \rightarrow 0$ شود، پاسخ ضرایب شدت تنش بی بعد شده به دست آمده در نمودارهای بالا به نتیجه ضریب شدت تنش حالت کلاسیک نزدیک خواهد شد [۲۳].

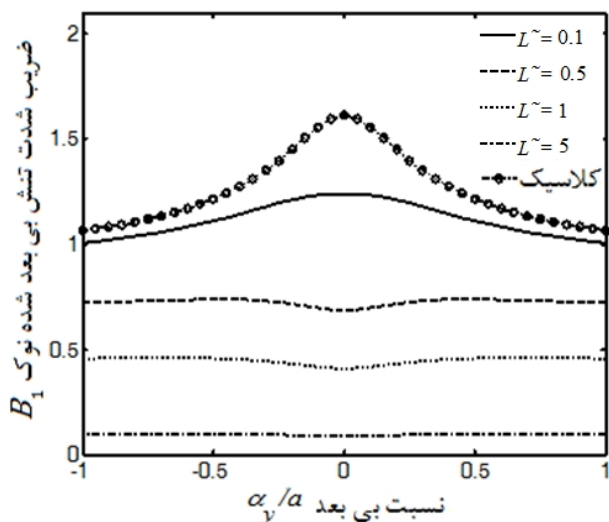
به طور مشابه با آنچه در مورد مسئله دو ترک بیان شد با افزایش اثر اندازه، مقدار ضریب شدت تنش بی بعد شده کاهش می‌یابد و نیز مقدار ضریب شدت تنش بی بعد شده با افزایش فاصله ترک‌ها از یکدیگر کاهش می‌یابد. اگر فاصله دو نوک ترک از هم بیشتر شود این باعث می‌شود که تأثیر متقابل ترک‌ها بر هم کمتر شده و ضرایب شدت تنش بی بعد دو نوک مجاور و دو نوک غیر مجاور کاهش یابند و نهایتاً مقدار ضریب شدت تنش برای ترک‌ها به مقدار ضریب شدت تنش یک ترک در صفحه بی‌نهایت میل می‌کند. پس می‌توان گفت که ضرایب شدت تنش برای نوک‌های مجاور نزدیک شونده دو ترک به دلیل تأثیر متقابل آن‌ها بر یکدیگر افزایش می‌یابند. دلیل این ویژگی را می‌توان این‌طور بیان کرد که تنشی که با توجه به اصل باکنر بر روی سطح ترک‌ها در نظر گرفته شده با نزدیک شدن دو نوک ترک به هم در فاصله کمی به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد و به عبارت دیگر تغییرات تنش شدیدتری را نسبت به حالتی که دو نوک ترک از هم دور می‌شوند پدید می‌آورد و لذا ضرایب شدت تنش بزرگ‌تری را ایجاد نموده است [۱۸].



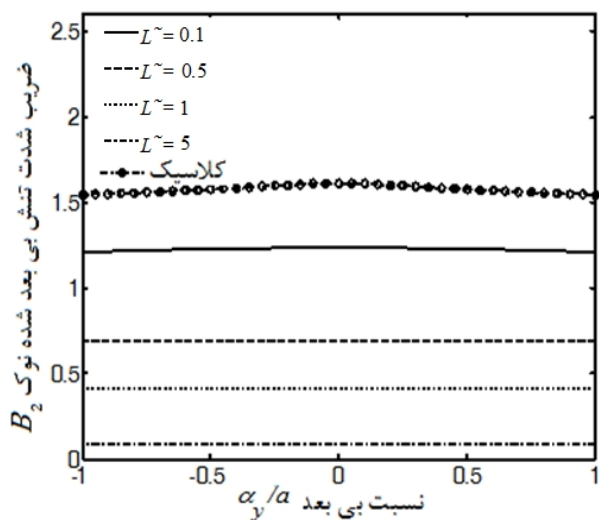
شکل ۱۱ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک A برای اثر اندازه‌های مختلف

باید توجه داشت که به دلیل تقارن موجود ضرایب شدت تنش بی بعد شده نوک B و C از ترک سمت راست با ضرایب شدت تنش نوک‌های همتای خود (B و C) از ترک سمت چپ برابر است. در مورد نوک A نیز این تقارن برقرار است. شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ به ترتیب ضریب شدت تنش بی بعد شده مربوط به نوک‌های A، B و C از ترک‌ها را نشان می‌دهند. در نمودارهای بالا مشاهده می‌شود که ضریب شدت تنش نوک A بیشتر از دو نوک دیگر است.

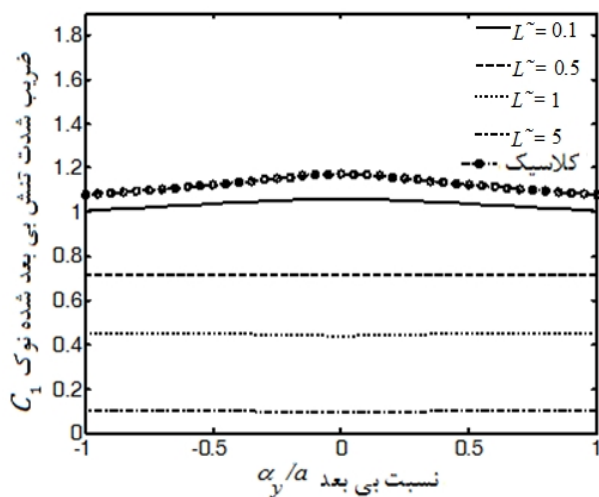
هستند. شکل‌های ۱۵ تا ۲۰ به ترتیب ضرایب شدت تنش بی بعد شده مربوط به نوک‌های A، B و C از ترک‌ها را نشان می‌دهند. باید توجه داشت در این حالت دیگر ضرایب شدت تنش برای نوک‌های هم نام ترک‌ها برابر نیستند.



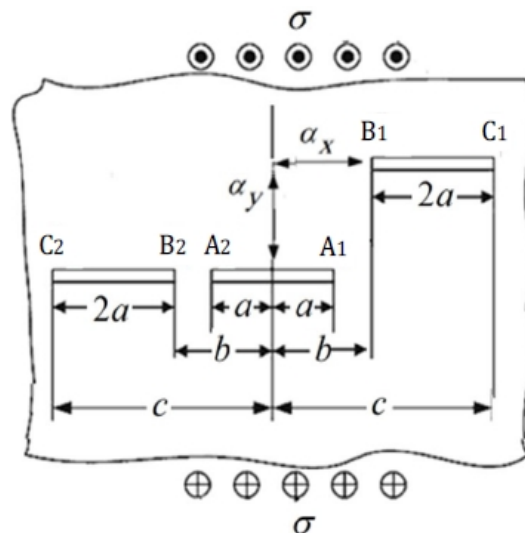
شکل ۱۷ ضرایب شدت تنش بی بعد شده نوک B₁ برای اثر اندازه‌های مختلف



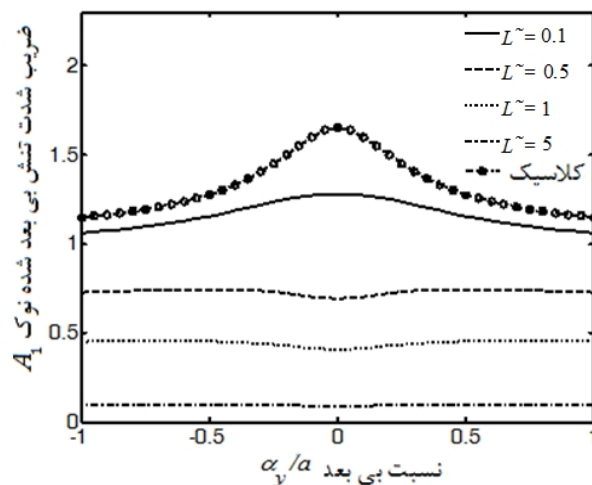
شکل ۱۸ ضرایب شدت تنش بی بعد شده نوک B₂ برای اثر اندازه‌های مختلف



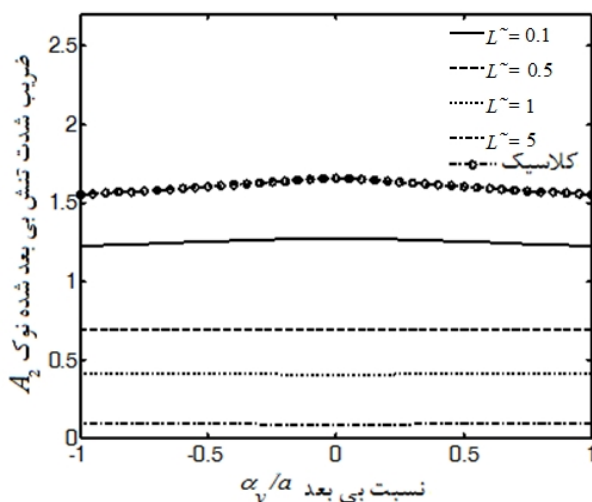
شکل ۱۹ ضرایب شدت تنش بی بعد شده نوک C₁ برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۱۴ آرایش صفحه بی‌نهایت حاوی سه ترک غیر هم راستا

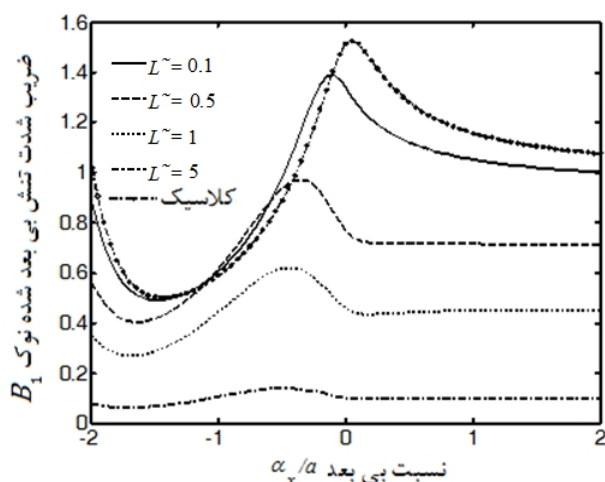


شکل ۱۵ ضرایب شدت تنش بی بعد شده نوک A₁ برای اثر اندازه‌های مختلف

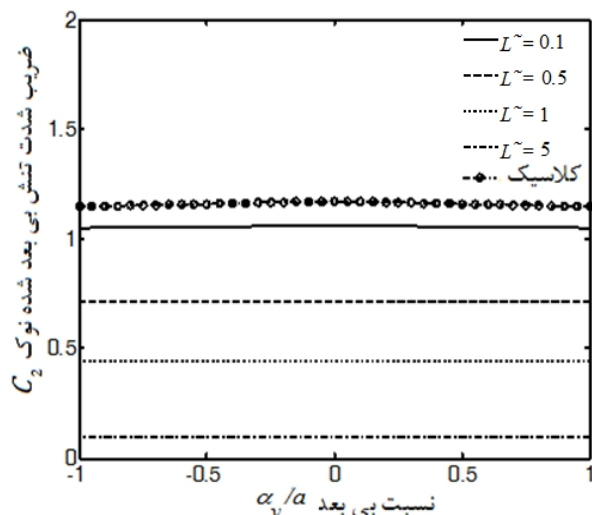


شکل ۱۶ ضرایب شدت تنش بی بعد شده نوک A₂ برای اثر اندازه‌های مختلف

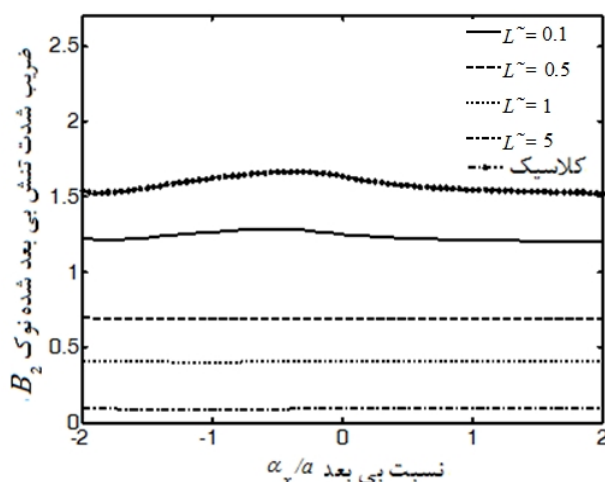
مسئله سه ترک که ترک وسط و سمت چپ روی محور افقی ثابت بوده را در نظر بگیرید. رابطه $b - a = 0.2$ بین نوک‌های A از ترک وسط و نوک‌های B از ترک‌های مجاور آن برقرار است (شکل ۱۴). در این حالت ترک سمت راست در راستای محور عمودی جابجا می‌شود درحالی‌که دو ترک دیگر ثابت



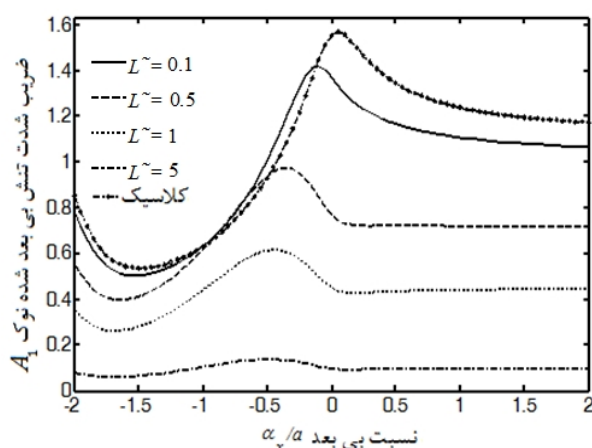
شکل ۲۳ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک B_1 برای اثر اندازه‌های مختلف



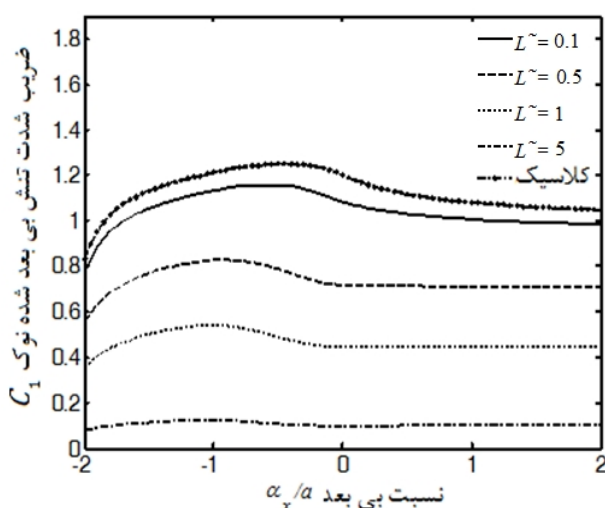
شکل ۲۰ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C_2 برای اثر اندازه‌های مختلف



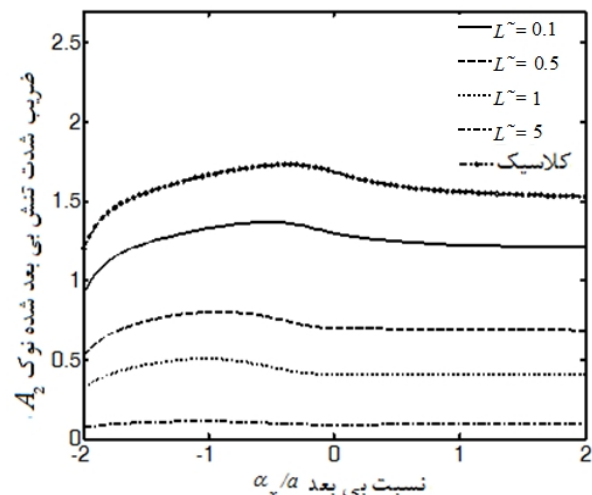
شکل ۲۴ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک B_2 برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۲۱ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک A_1 برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۲۵ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C_1 برای اثر اندازه‌های مختلف

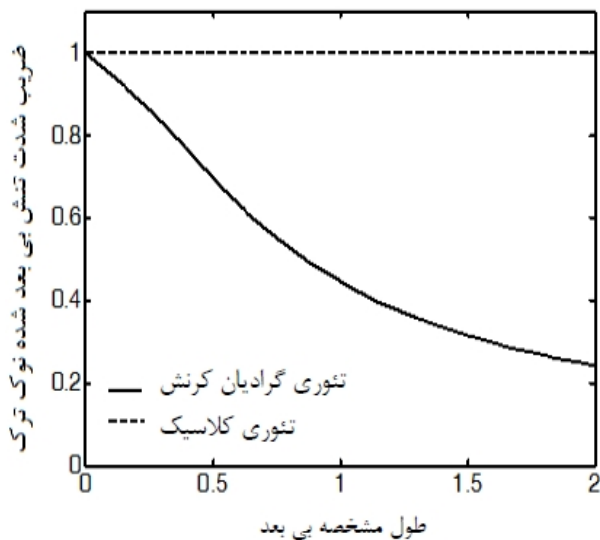


شکل ۲۲ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک A_2 برای اثر اندازه‌های مختلف

۴-۴- مطالعه موردی اثر اندازه بر روی ضریب شدت تنش و میزان بازشدگی دهانه ترک

در این قسمت به بررسی اثر اندازه بر روی ضریب شدت تنش و میزان بازشدگی دهانه ترک پرداخته می‌شود. مطابق شکل ۲۷ صفحه بی‌نهایت حاوی ترک به طول $2a$ که تحت تنش پادصفحه‌ای قرار گرفته است را در نظر بگیرید.

در مثالی دیگر مسئله سه ترک که ترک وسط و چپ روی محور افقی ثابت بوده را در نظر بگیرید. رابطه $b-a=0.2$ بین نوک A_2 از ترک وسط و نوک B_2 از ترک سمت چپ برقرار است (شکل (۱۴)). ترک سمت راست در راستای محور افقی جابجا می‌شود درحالی‌که دو ترک دیگر ثابت هستند. شکل‌های ۲۱ تا ۲۶ به ترتیب ضریب شدت تنش بی بعد شده مربوط به نوک‌های A, B و C از ترک‌ها را نشان می‌دهند.



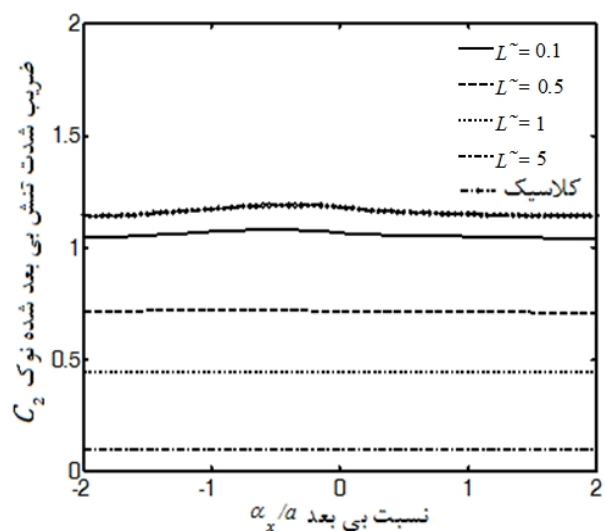
شکل ۲۵ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک ترک با تغییر اثر اندازه

به نحوی که مطابق شکل برای تئوری گرادیان کرنش این پروفیل در نوک ترک دارای شیب کم بوده درحالی‌که در تئوری کلاسیک دارای شیب زیاد است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که تئوری گرادیان کرنش میزان بازشدگی دهانه ترک را نسبت به تئوری کلاسیک کمتر پیش‌بینی می‌کند [۲۴].

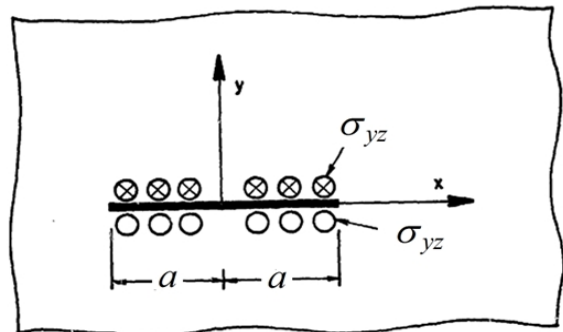
شکل ۲۹ تأثیر وجود طول مشخصه در معادلات حاکم تئوری گرادیان کرنش را به خوبی نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل دیده می‌شود، هر چه طول ترک در مقایسه با طول‌های مشخصه مواد کوچک‌تر باشد، اثر اندازه نقش بیشتری را در حل مسئله ایفا خواهد کرد. همین‌طور که از شکل مشخص است از آنجا که در معادلات تئوری کلاسیک اثر اندازه وارد نمی‌شود این تئوری نسبت به تغییرات طول مشخصه حساس نیست.

۵- نتیجه‌گیری

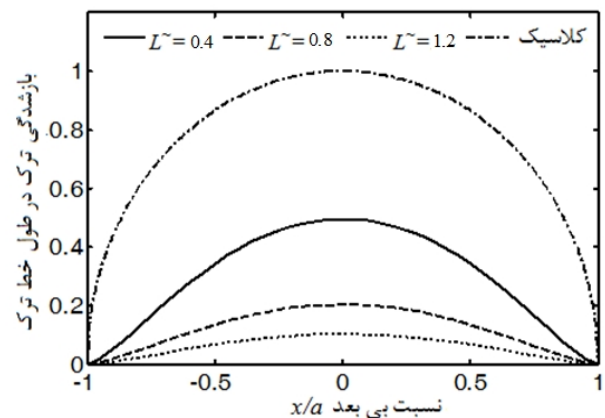
در این مقاله نتایج تحلیلی محاسبه ضریب شدت تنش برای چند اثر اندازه بر پایه تئوری گرادیان کرنش ارائه شد. مشاهده شد که وقتی پارامتر اثر اندازه به سمت صفر میل می‌کند، میزان ضریب شدت تنش بی بعد شده به مقدار آن در حالت کلاسیک میل می‌کند [۲۳] و با افزایش پارامتر اثر اندازه میزان تنش قابل تحمل برای صفحه بی‌نهایت افزایش می‌یابد که این همان اثر سخت‌شوندگی را در معادلات حاکم گرادیان کرنش نشان می‌دهد [۲۵ و ۲۶]. همچنین با به دست آوردن معادلات تنش مشاهده می‌شود که تنش در تئوری الاستیسیته گرادیان کرنش دارای تکیگی از مرتبه بالا ($1/r^3$) بوده در صورتی که در تئوری کلاسیک این تکیگی از نوع کوشی است. در شکل‌های تغییرات ضریب شدت تنش در صفحه حاوی چند ترک دیده شد که اختلاف بین ضریب شدت تنش محاسبه‌شده توسط تئوری‌های کلاسیک و گرادیان کرنش قابل ملاحظه است و می‌توان گفت که در مقیاس نانو به کار گرفتن تئوری‌های مناسب امکان تحلیل دقیق‌تر را به همراه خواهد داشت و در صورت استفاده از تئوری‌های کلاسیک نتایج مناسبی به دست نخواهد آمد [۲۷]. همچنین مشاهده شد هرچه طول ترک در مقایسه با طول‌های درونی مواد کوچک‌تر باشد، اثر اندازه نقش بیشتری را در حل مسئله ایفا خواهد کرد. همان‌طور که در نمودارها دیده شد، هر چه به میزان اثر اندازه افزوده می‌شود، میزان ضریب شدت تنش هم کاهش می‌یابد [۲۸]. این در واقع بدان معناست که با افزایش اثر اندازه سختی دامنه افزایش می‌یابد و در نتیجه جابجایی‌ها محدود می‌شود. به بیان دیگر هرچه اثر اندازه بیشتر می‌شود،



شکل ۲۶ ضریب شدت تنش بی بعد شده نوک C_2 برای اثر اندازه‌های مختلف



شکل ۲۷ صفحه بی‌نهایت حاوی یک ترک تحت تنش پادصفحه‌ای



شکل ۲۸ میزان بازشدگی ترک در طول خط ترک برای اثر اندازه‌های مختلف

از آنجا که تابع چگالی $B_z(s)$ در معادله (۳۷) به صورت مشتق اول تابع جابجایی در نظر گرفته شده است، پس میزان بازشدگی دهانه ترک از رابطه (۴۸) بدست می‌آید [۱۳].

$$w(r, 0) = \frac{r}{a} \int_{-1}^1 B_z(s) ds = \frac{r}{a} \int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} \sum_{n=0}^N A_n U_n(s) ds \quad (48)$$

در شکل ۲۸ میزان بازشدگی دهانه ترک در راستای خط ترک برای تئوری کلاسیک و گرادیان کرنش (همراه با چند اثر اندازه) آورده شده است. نتیجه مهمی که این شکل بیانگر آن است، در مورد شکل پروفیل جابجایی در نوک ترک برای این دو تئوری است.

- [12] Y. S. Chan, G. H. Paulino, A. C. Fannjiang, Change of Constitutive Relations Due to Interaction Between Strain-gradient Effect and Material Gradation, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 73, No. 5, 2006.
- [13] G. H. Paulino, Y. S. Chan, A. C. Fannjiang, Gradient Elasticity Theory for Mode III Fracture in Functionally graded Materials – Part I: Crack Perpendicular to the Material Gradation, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 4, pp. 531-542, 2003.
- [14] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Academic Press Elsevier Inc, 2009.
- [15] R. T. Faal, A. R. Fotuhi, S. J. Fariborz, H. R. Daghyani, Anti-plane stress analysis of an isotropic wedge with multiple cracks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, No. 16-17, pp. 4535-4590, 2004.
- [16] R. Fotuhi, S. J. Fariborz, In-plane stress analysis of an orthotropic plane containing multiple defects, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 4167-4183, 2007.
- [17] D. A. Hills, P. A. Kelly, D. N. Dai, A. M. Korsunsky, *Solution of Crack Problems: The Distributed Dislocation Technique*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996.
- [18] M. Ayatollahi, R. T. Faal, O. Tarkian, Anti-plane analysis of an orthotropic strip weakened by several moving cracks, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, pp. 596-604, 2012.
- [19] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables*, Dover Publications, 1972.
- [20] R. Fotuhi, S. J. Fariborz, Anti-plane analysis of a functionally graded strip with multiple cracks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 5, pp. 1239-1252, 2006.
- [21] Y. S. Chan, A. C. Fannjiang, G. H. Paulino, Integral Equations with Hypersingular Kernels – Theory and Application to Fracture Mechanics, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, No. 7, pp. 683-720, 2003.
- [22] H. Tada, P. Paris, G. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 2.1-2.5, 1973.
- [23] C. Fannjiang, Y. S. Chan, G. H. Paulino, Strain Gradient Elasticity for Antiplane Shear Cracks: A Hypersingular Integrodifferential Equation Approach, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 62, No. 3, pp. 1066-1091, 2002.
- [24] S. A. Papanicolopoulos, A. Zervos, numerical solution of crack problems in gradient elasticity, *Engineering and Computational Mechanics*, Vol. 163, No. EM2, pp. 73-82, 2010.
- [25] Y. Huang, H. Gao, K. C. Hwang, Strain-gradient plasticity at the micron scale. In: Ellyin, F., Provan, J. W. (Eds.), *Progress in Mechanical Behavior of Materials*, Vol. III, pp. 1051-1056, 1999b.
- [26] Y. Tadi Beni, I. Karimipour, Static pull-in instability analysis of beam type NEMS under molecular force using strain gradient theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 37-49, 2012. (In Persian)
- [27] Karami mohammadi, M. Abbasi, Investigation of the size effect on the vibrational behavior of an AFM microcantilever with a sidewall probe, using strain gradient elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 90-99, 2013. (In Persian)
- [28] Y. S. Chan, G. H. Paulino, A. C. Fannjiang, Gradient Elasticity Theory for Mode III Fracture in Functionally graded Materials – Part II: Crack Parallel to the Material Gradation, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, No. 6, 2008.
- [29] H. Jiang, Y. Huang, Z. Zhuang, K. C. Hwang, Fracture in mechanism-based strain gradient Plasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 49, pp. 979 - 993, 2001.
- [30] H. G. Georgiadis, The Mode III Crack Problem in Microstructured Solids Governed by Dipolar Gradient Elasticity: Static and Dynamic Analysis, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 70, No. 4, pp. 517-530, 2003.

دامنه مسئله کمتر حضور ترک را حس می کند. نتیجه به دست آمده همان نتیجه ای است که ما از حل مسئله با روش الاستیسیته گرادیان کرنش به دست آورده ایم. در سایر روش هایی که برای حل مسائل نانو ترک به کار برده می شود، نیز همین نتایج به دست آمده است. از جمله آن ها می توان به روش اتمیستیک اشاره کرد [۲۹ و ۳۰] لذا هر چه نسبت طول مشخصه ماده به اندازه ترک بزرگ تر می شود کانتورهای جابجایی به حالتی که دامنه ترکی در خود ندارند نزدیک تر می شود.

۶- پیوست

انتگرال های با تکیه بر مرتبه بالا مطابق روابط (۴۹) و (۵۰) محاسبه می شوند [۲۱].

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(s)\sqrt{1-s^2}}{(r-s)^3} ds = \begin{cases} -\pi & n=0 \\ -\frac{\pi}{4(1-r^2)} \times \\ [-(n^2+3n+2)U_{n-1}(r) + (n^2+n)U_{n+1}(r)] & 1 \leq n \end{cases} \quad (49)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(s)\sqrt{1-s^2}}{r-s} ds = -\frac{\pi}{2} [U_{n-1}(r) - U_{n+1}(r)] \quad (50)$$

۷- مراجع

- [1] B. Altan, E. Aifantis, On some aspects in the special theory of gradient elasticity, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 231-282, 1997.
- [2] E. Cosserat, F. Cosserat, *Theorie des corp deformables*. Herman, Paris, 1909.
- [3] T. J. Jaramillo, *A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory*, ProQuest LLC, 1929.
- [4] R. A. Toupin, Elastic materials with couple stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [5] R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.
- [6] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, No. 1, pp. 109 - 124, 1968.
- [7] S. Altan, E. Aifantis, On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity, *Scripta Metallurgica*, Vol. 26, No. 2, pp. 319-324, 1992.
- [8] C. Ru, E. Aifantis, A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 101, No. 1-4, pp. 59-68, 1993.
- [9] M. Gutkin, E. Aifantis, Screw dislocation in gradient elasticity, *Scripta Materialia*, Vol. 35, No. 11, pp. 1353-1358, 1996.
- [10] M. Gutkin, Nanoscopies of dislocations and disclinations in gradient elasticity, *Science and Technology of Advanced Materials*, Vol. 1, pp. 27-60, 2000.
- [11] H. G. Georgiadis, I. Vardoulakis, G. Lykotrakis, Torsional surface waves in a gradient-elastic half-space, *Wave Motion*, Vol. 31, No. 4, pp. 333-348, 1998.