



تخمین دقیق فرکانس‌های طبیعی به کمک روش حذف اثر جرم در آزمایش مودال محیطی

محمد مهدی خطیبی¹، محمدرضا آشوری^{2*}

1- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* سمنان، صندوق پستی 35195363، m_ashoori@semnan.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 آبان 1392

پذیرش: 16 بهمن 1392

ارائه در سایت: 30 شهریور 1393

کلید واژگان:

فرکانس‌های طبیعی

اثر جرمی شتاب‌سنج

آنالیز مودال محیطی

آزمایش مودال کلاسیک ابزار قدرتمندی برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها می‌باشد ولی در برخی از سازه‌ها به دلیل عدم امکان تحریک یا اندازه‌گیری نیروهای وارد به آن‌ها انجام این آزمایش دشوار یا غیرممکن است. بنابراین برای شناسایی رفتار دینامیکی این نوع سازه‌ها باید از روش‌های آنالیز مودال محیطی استفاده کرد. در عمل مدل‌هایی که به وسیله آزمایش مودال محیطی ایجاد می‌شوند، با مشکلات زیادی مواجه هستند. یکی از این مشکلات، خطاهایی است که به دلیل استفاده از وسایلی مانند شتاب‌سنج‌ها ایجاد می‌شود و موجب کاهش دقت نتایج حاصل می‌گردد. معمولاً نصب شتاب‌سنج‌ها بر روی سازه، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش با مقادیر دقیق اختلاف خواهند داشت. در این مقاله، یک روش جدید برای حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی ارائه شده است. به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی، از مدل یک سیستم جرم-فنر-دمپر استفاده شده است. همچنین با انجام آزمایش‌های مودال کلاسیک و مودال محیطی بر روی یک صفحه فلزی، روش تحت ارزیابی تجربی قرار گرفته است. نتایج حاصل، نشان دهنده کارایی روش پیشنهادی در حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها و تخمین دقیق فرکانس‌های طبیعی سازه است.

Estimation of natural frequencies using mass-cancellation method in operational modal testing

Mohammad Mahdi Khatibi¹, Mohammad Reza Ashory^{2*}

1- Department of Mechanical Engineering, Semnan Univ., Semnan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Tehran Univ., Tehran, Iran

* P.O.B. 35195363 Semnan, Iran, m_ashoori@semnan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 November 2013
Accepted 05 February 2014
Available Online 21 September 2014

Keywords:
Natural Frequencies
Mass-loading Effect of Accelerometer
Operational Modal Analysis

ABSTRACT

Conventional modal testing is known as a powerful tool for dynamic analysis of structures. However, for some engineering structures, conventional modal testing is difficult or even impossible to conduct due to the problems associated with the artificial excitation of structure. Operational Modal Analysis (OMA) is one solution to deal with these cases. In OMA the structure is excited by ambient forces and only the responses are measured and taken into account. Accelerometers are the traditional tools for measuring the responses of structure. It is well known that the measured responses are contaminated by bias errors corresponding to the mass-loading effect of accelerometers. This causes the natural frequencies of structure are measured lower than the real values. In this paper a new method is proposed for eliminating the mass-loading effects of accelerometers from measured responses in OMA. A numerical model of a mass-spring-damper system is used for validation of the method. Also a steel plate is used for experimental validation of the proposed approach. The results are confirmed by those of conventional modal testing. Both numerical and experimental results show that the proposed method can effectively eliminate the mass-loading effects of accelerometers from measured responses in OMA. Also, the method has the ability to correct the measured natural frequencies from OMA accurately.

1- مقدمه

می‌آید [1]. با توجه به خطاهایی که در فرایند اندازه‌گیری وجود دارد، مدلی که از داده‌های اندازه‌گیری شده ساخته می‌شود، ممکن است رفتار واقعی سازه را بطور دقیق نشان ندهد [2]. ماهیت خطاهای آزمایش مودال در تحقیقات گذشته بررسی شده است [3،4]. یکی از دلایل ایجاد خطا در داده‌های اندازه‌گیری شده، خطاهای سیستماتیک می‌باشند که به علت اضافه شدن اجزای مکانیکی، مانند فنرها، مبدل‌ها و شتاب‌سنج‌ها به سازه ایجاد می‌شوند. هنگامی که یک شتاب‌سنج بر روی سازه قرار می‌گیرد؛ به عنوان جرم

آزمایش مودال، روشی تجربی برای مدل کردن رفتار دینامیکی سازه‌ها و شناسایی رفتار ارتعاشی سازه از طریق اندازه‌گیری است. از آنجا که در آزمایش، فرضیات اندکی برای سازه در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نتایج قابل اعتمادتری نسبت به مدل‌های عددی مانند مدل اجزای محدود¹ بدست

1- Finite Element Model

Please cite this article using:

M.M. Khatibi, M.R. Ashory, Estimation of natural frequencies using mass-cancellation method in operational modal testing, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 183-192, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

می‌شود و به منظور حذف جرم سایر شتاب‌سنج‌ها باید الگوریتم فوق از بند 3 برای هر شتاب‌سنج تکرار شود و در نهایت با استفاده از نتایج حاصل و با فرض خطی بودن رفتار سازه اثر جرمی تمامی شتاب‌سنج‌ها را حذف کرد [16]. تمامی روش‌های حذف اثر جرم از الگوریتمی مشابه آنچه ذکر شد استفاده می‌کنند و تفاوت آن‌ها در روابطی است که در بند 6 بکار می‌گیرند. همچنین همه این روش‌ها از توابع پاسخ فرکانسی استفاده می‌کنند که به منظور محاسبه این توابع باید نیروی وارد به سازه و پاسخ حاصل از آن اندازه‌گیری شود [6].

بسیاری از سازه‌های صنعتی موجود در محیط پیرامون ما نظیر خودروها، پمپ‌ها، دستگاه‌های ماشین‌کاری و غیره سازه‌هایی پیچیده‌اند که طراحی و تعمیر و نگهداری آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بنابراین تحلیل دینامیکی چنین سازه‌هایی به منظور محاسبه خصوصیات دینامیکی از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. این سازه‌ها معمولاً تحت تحریک نیروهای داخلی یا محیطی هستند که اندازه‌گیری چنین نیروهایی دشوار یا غیرممکن است. در نتیجه استفاده از آنالیز مودال کلاسیک برای چنین سازه‌هایی امکان‌پذیر نخواهد بود. وجود چنین مشکلاتی محققان را بر آن داشت تا به ارائه روش‌های نوین آنالیز مودال، بر مبنای اندازه‌گیری فقط پاسخ بپردازند. این روش‌ها، آنالیز مودال محیطی⁴ نامیده می‌شوند. در این روش‌ها، سازه توسط بارهای محیطی تحریک می‌شود و فقط با استفاده از آنالیز پاسخ سازه پارامترهای مودال محاسبه می‌شوند [17].

از آنجا که در آزمایش مودال محیطی، سازه توسط محیط تحریک می‌شود و امکان اندازه‌گیری نیرو وجود ندارد. در نتیجه امکان محاسبه توابع پاسخ فرکانسی بطور مستقیم وجود نخواهد داشت و در نتیجه نمی‌توان از روش‌هایی که تاکنون برای حذف اثر جرم ارائه شده‌اند استفاده نمود و به اصلاح فرکانس‌های طبیعی پرداخت. البته می‌توان با استفاده از پارامترهای مودالی که از آنالیز پاسخ بدست می‌آیند، توابع پاسخ فرکانسی را محاسبه کرد [6] ولی از آنجا که نیروی تحریک، اندازه‌گیری نشده است، شکل مودهای محاسبه شده از آنالیز پاسخ، نرمال شده جرمی نیستند [18] و در نتیجه تابع پاسخ فرکانسی به طور صحیح قابل محاسبه نیست. برای محاسبه صحیح تابع پاسخ فرکانسی باید ابتدا شکل مودهای نرمال شده جرمی را محاسبه کرد، بدین منظور باید هر مود را در ضریبی ضرب نمود که اصطلاحاً ضریب میزان‌سازی⁵ نامیده می‌شود و البته مجهول است. محاسبه ضرایب میزان‌سازی نیازمند اجرای فرایند دیگری است. این موضوع تاکنون توسط محققان مختلف بررسی شده است و روش‌هایی نیز برای اصلاح و محاسبه ضرایب میزان‌سازی ارائه شده‌اند [18]. در این روش‌ها پس از انجام آزمایش اصلی، جرم‌هایی بر روی سازه نصب می‌شوند و آزمایش تکرار می‌شود و با استفاده از نتایج آزمایش اصلی و آزمایش سازه با جرم، ضرایب میزان‌سازی محاسبه می‌شوند. اما از آنجا که برای حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها باید در هر مرحله فقط یک جرم بر روی سازه نصب شود، در نتیجه نمی‌توان از نتایج آزمایش میزان‌سازی برای اصلاح اثر جرمی شتاب‌سنج‌ها استفاده کرد و باید الگوریتم حذف اثر جرم که در ابتدا به آن اشاره شد، اجرا شود.

از آنجا که در هر دو روش میزان‌سازی و حذف اثر جرم، از اعمال تغییر جرم به سازه و تکرار آزمایش استفاده می‌شود، به نظر رسید که می‌توان با توسعه روابط حذف اثر جرم به روابط جدیدی دست یافت که به کمک آن‌ها، هم ضرایب میزان‌سازی محاسبه شوند و هم فرکانس‌های طبیعی اصلاح شوند.

اضافی در نتایج حاصل از آزمایش خطا ایجاد می‌کند [5]. یک شتاب‌سنج سبک، اثر بارگذاری کمی روی سازه دارد ولی دارای حساسیت پایین است و از طرفی این نوع شتاب‌سنج‌ها همیشه در دسترس نیستند. بنابراین شتاب‌سنجی با جرم حداقل که قادر به اندازه‌گیری پاسخ‌های سازه در محدوده فرکانسی مدنظر باشد، بهترین گزینه برای انتخاب است.

بنابراین، اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج به عنوان منبعی از خطا در آزمایش مودال اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. شتاب‌سنج سوار شده بر روی یک سیستم ارتعاشی، دینامیک سازه را تغییر می‌دهد و خطاهایی را در توابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده ایجاد می‌کند که موجب ایجاد نتایج غیرواقعی خواهد شد، بطوری که فرکانس‌های تشدید اندازه‌گیری شده کمتر از مقادیر واقعی بدست می‌آیند. در سازه‌هایی که محاسبه دقیق پاسخ فرکانسی سازه مدنظر باشد، مانند صنایع نظامی و یا پزشکی، حذف چنین خطاهایی به شدت حائز اهمیت خواهد بود [5]. بنابراین روش‌هایی که به حذف اثر جرم اضافی از سازه پرداخته‌اند؛ روش‌هایی مهم و مناسب برای غلبه بر این مشکل می‌باشند.

روش حذف جرم شتاب‌سنج‌ها در نقاط تحریک سازه، توسط ایوینز در مرجع [6] شرح داده شده است. همچنین انتشاراتی درباره اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج در نقاط تحریک نشده نیز، وجود دارد [6-8]. بطور کلی، تاکنون روش‌های اندکی جهت حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها ارائه شده است، از جمله روشی که دکر و ویتفلد در مرجع [9] و سیلوا و همکارانش در مرجع [10,11] ارائه داده‌اند. کلاسترمن نیز به کمک روش اصلاح سازه بر مبنای توابع پاسخ فرکانسی تجربی¹ یک راه حل کلی برای تصحیح اثرات بارگذاری جرم شتاب‌سنج‌ها ارائه کرده است [12]. همچنین سانلیترک و کاکار نیز به حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها پرداخته‌اند و اثرات نامطلوب نویز اندازه‌گیری را در روش‌های قبلی کاهش داده‌اند [13,14]. سیلوا و همکارانش نیز روشی برای تعیین توابع پاسخ فرکانسی² غیر قابل اندازه‌گیری با استفاده از یک مجموعه از داده‌های اندازه‌گیری شده سازه همراه با جرم اضافی ارائه کرده‌اند [15]. علاوه بر روش‌های فوق، در مرجع [16] روشی برای تعیین کیفیت اندازه‌گیری‌ها در آزمایش مودال در ارتباط با اثرات بارگذاری جرم شتاب‌سنج‌ها پیشنهاد شده است. تمامی روش‌هایی که تاکنون ارائه شده‌اند بر اساس توابع پاسخ فرکانسی حاصل از آزمایش به حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها می‌پردازند [14]. الگوریتم کلی این روش‌ها را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

- 1- اجرای آزمایش مودال کلاسیک سازه.
- 2- محاسبه توابع پاسخ فرکانسی برای آزمایش بند 1.
- 3- نصب جرم بر روی سازه در محل نصب یکی از شتاب‌سنج‌ها.
- 4- تکرار آزمایش مودال کلاسیک برای سازه‌ی با جرم اضافی.
- 5- محاسبه توابع پاسخ فرکانسی جدید برای آزمایش بند 4.
- 6- بکارگیری یکی از روش‌های حذف اثر جرم به منظور محاسبه تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده با استفاده از توابع پاسخ فرکانسی بدست آمده در بندهای 2 و 5.
- 7- تخمین فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده با اجرای روش انتخاب قله³ بر روی تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده بند 6.

با اجرای الگوریتم فوق، اثر جرم شتاب‌سنج متناظر با موقعیت نصب جرم اضافی از توابع پاسخ فرکانسی و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی حذف می‌شود. به عبارت دیگر فقط اثر جرم یک شتاب‌سنج از فرکانس‌های طبیعی حذف

1- Structural Modifications using Experimental Frequency Response Functions (SMURF)
2- Frequency Response Functions (FRFs)
3- Peak Picking Method

4- Operational Modal Analysis (OMA)
5- Scaling Factor

روابط (4) و (5) محاسبه می‌شوند.

$$O = US^{1/2}T \quad (4)$$

$$C = O(1:l,:,:) \quad (5)$$

ماتریس C معادل با l سطر ابتدایی ماتریس O است و l تعداد کانال‌های اندازه‌گیری می‌باشد. با استفاده از ماتریس مشاهده‌پذیری مبسوط می‌توان ماتریس سیستم را محاسبه کرد (رابطه (6)).

$$A = O(1:l(i-1),:)+O(l+1:l,i,:) \quad (6)$$

ماتریس A بیانگر ماتریس سیستم و بالا نویس⁺ نشان دهنده شبه معکوس است. در رابطه (6) عبارت $O(1:l(i-1),:)$ ، l سطر انتهایی و عبارت $O(l+1:l,i,:)$ ، l سطر ابتدایی ماتریس مشاهده‌پذیری را حذف می‌کند.

با استفاده از تجزیه مقدار ویژه ماتریس سیستم (رابطه (7)) قطب‌های سیستم (μ) و بردارهای ویژه متناظر با هر قطب (ψ) بدست می‌آیند. این قطب‌ها در نموداری به نام نمودار پایداری⁷ ترسیم می‌شوند [20].

$$A = [\psi] [\mu] [\psi]^{-1} \quad (7)$$

در هر مرتبه از مدل در نمودار پایداری، قطب‌های پایدار، ناپایدار و نویزی با توجه به معیارهای ذکر شده (برای تشخیص نوع قطب) در مرجع [19] از یکدیگر متمایز می‌شوند. سپس با انتخاب مرتبه بهینه برای مدل [21] و بر اساس قطب‌های پایدار؛ فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و شکل مودهای سیستم طبق روابط (8) تا (11) محاسبه می‌شوند [20].

$$\lambda = \frac{\ln(\mu)}{\Delta T} \quad (8)$$

$$\omega = |\lambda| \quad (9)$$

$$\zeta = \frac{\text{Re}(\lambda)}{|\lambda|} \quad (10)$$

$$[\phi] = C[\psi] \quad (11)$$

ΔT دوره نمونه‌برداری، λ فرکانس مختلط، ω فرکانس طبیعی، ζ نسبت میرایی و $[\phi]$ ماتریس شکل مود است.

2-2- روش پیشنهادی حذف اثر جرم

همان‌طور که در مقدمه بیان شد، روش‌هایی که تاکنون برای حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها ارائه شده‌اند فقط برای آنالیز مودال کلاسیک قابل استفاده‌اند، زیرا همگی بر اساس توابع پاسخ فرکانسی عمل می‌کنند [14] و از آنجا که در آزمایش مودال محیطی نیروی تحریک اندازه‌گیری نمی‌شود، امکان محاسبه مستقیم توابع پاسخ فرکانسی وجود ندارد و در نتیجه نمی‌توان از روش‌هایی که تاکنون برای حذف اثر جرم ارائه شده‌اند استفاده نمود و به اصلاح فرکانس‌های طبیعی پرداخت. البته می‌توان با استفاده از پارامترهای مودالی که از آنالیز پاسخ بدست می‌آیند، توابع پاسخ فرکانسی را محاسبه نمود ولی از آنجایی که نیروی تحریک، اندازه‌گیری نشده است، شکل مودهای مودال محیطی، نرمال شده جرمی نیستند [18] و در نتیجه تابع پاسخ فرکانسی به طور صحیح قابل محاسبه نیست و ابتدا باید شکل مودهای نرمال شده جرمی را محاسبه کرد که این امر می‌بایست در فرایند دیگری صورت بگیرد و پس از آن به اصلاح فرکانس‌های طبیعی پرداخته شود. بنابراین در این بخش روش و الگوریتمی ارائه می‌شود که به کمک آن می‌توان با استفاده از نتایج حاصل از آنالیز مودال محیطی بطور همزمان، ضمن اصلاح شکل مودهای سازه به حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از فرکانس‌های طبیعی پرداخت.

بنابراین در این مقاله، روابط و الگوریتم جدیدی ارائه می‌شود که بر مبنای آن می‌توان ضمن اصلاح شکل مودهای سازه به حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از فرکانس‌های طبیعی در آزمایش مودال محیطی پرداخت.

به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی، از مدل یک سیستم جرم-فنر-دمپر پنج درجه آزادی¹ استفاده شده است. برای اجرای یک آزمایش شبیه‌سازی شده در نرم‌افزار متلب، شتاب‌سنج‌هایی فرضی بر روی هر یک از جرم‌ها نصب شده‌اند. سپس مدل در محیط نرم‌افزار متلب در تمام درجات آزادی تحت تحریک اتفاقی قرار گرفته و پاسخ آن اندازه‌گیری شده است. با اجرای روش زیرفضاهای اتفاقی بر مبنای کواریانس بر روی پاسخ‌های اندازه‌گیری شده، پارامترهای مودال محاسبه و با مقادیر دقیق مقایسه شده‌اند. به دلیل قرار گرفتن چندین شتاب‌سنج بر روی سازه، فرکانس‌های طبیعی حاصل با مقادیر دقیق اختلاف خواهند داشت. بنابراین با بکارگیری روش پیشنهادی فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده‌اند. همچنین، برای ارزیابی تجربی روش، آزمایش‌های مودال کلاسیک و مودال محیطی بر روی یک صفحه فلزی انجام شده‌اند و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده‌اند. از آنجا که برای اندازه‌گیری پاسخ از تعدادی شتاب‌سنج استفاده شده است، فرکانس‌های طبیعی حاصل با مقادیر دقیق اختلاف خواهند داشت. بنابراین به کمک روش پیشنهادی، فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده‌اند. نتایج حاصل از بررسی‌های عددی و تجربی، دقت و کارایی مناسب روش و الگوریتم پیشنهادی را در اصلاح فرکانس‌های طبیعی سازه نشان می‌دهد.

2- تنوری

1- روش زیرفضاهای اتفاقی بر مبنای کواریانس

در این روش، کواریانس بین پاسخ‌های زمانی در ماتریسی به نام ماتریس بلوکی تنوپلیتز² (رابطه (1)) جمع‌آوری می‌شود [19].

$$T_1|_i = \begin{bmatrix} R_i & R_{i-1} & \dots & R_1 \\ R_{i+1} & R_i & \dots & R_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2i-1} & R_{2i-2} & \dots & R_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

R_i کواریانس بین پاسخ‌ها است و از رابطه (2) محاسبه می‌شود [19].

$$R_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{k+i} y_k^T \quad (2)$$

که N تعداد نمونه‌برداری، y_k بردار خروجی سیستم در زمان k ، y_{k+i} بردار T نماد ترانهاده³ و i تأخیر زمانی ایجاد شده است.

تجزیه مقادیر تکین یک ابزار معتبر عددی برای تخمین مرتبه یک ماتریس است، این ابزار برای ماتریس بلوکی تنوپلیتز در رابطه (3) بکار گرفته می‌شود [19].

$$T_1|_i = USV^T \quad (3)$$

ماتریس‌های U و V در رابطه (3) ماتریس‌های متعامد هستند و S یک ماتریس قطری است که شامل مقادیر ویژه مثبت است.

با استفاده از تجزیه مقادیر تکین⁴ ماتریس تنوپلیتز، ماتریس مشاهده‌پذیری مبسوط⁵ و ماتریس کنترل‌پذیری اتفاقی مبسوط برگردان⁶ به ترتیب از

1- Degree of Freedom

2- Toeplitz

3- Transpose

4- Singular Value Decomposition (SVD)

5- Extended Observability Matrix

6- Reversed Extended Stochastic Controllability Matrix

7- Stabilization Diagram

که A_{ij} ، A_{ji} ، A_{ii} و A_{jj} اکسلرنس‌های اصلی و $A_{ij}^{(j)}$ اکسلرنس ناشی از جرم اضافی در نقطه j است.

رابطه (18) رابطه کلی برای اصلاح سیستمی است که جرم m به آن اضافه شده است. شرایط مختلفی را می‌توان برای رابطه (18) در نظر گرفت. اگر نقطه اعمال نیرو، محل اتصال شتاب‌سنج و نقطه پاسخ با هم یکی باشند $(i = j = l)$ ، رابطه (19) بدست می‌آید [5,9].

$$A_{ii}^{(l)} = \frac{A_{ii}}{1 + m A_{ii}} \quad (19)$$

که در آن $A_{ii}^{(l)}$ تابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده است. اگر رابطه (19) بر حسب تابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده، مرتب و بازنویسی شود، رابطه (20) حاصل می‌شود.

$$A_{ii} = \frac{A_{ii}^{(l)}}{1 - m A_{ii}^{(l)}} \quad (20)$$

با توجه به رابطه (20)، اگر جرم m' بر روی سازه قرار گیرد، رابطه (21) بدست خواهد آمد.

$$A_{ii} = \frac{\bar{A}_{ii}^{(l)}}{1 - m' \bar{A}_{ii}^{(l)}} \quad (21)$$

که در آن $\bar{A}_{ii}^{(l)}$ تابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شده پس از قرارگیری جرم m' بر روی سازه است.

می‌توان توابع پاسخ فرکانسی $A_{ii}^{(l)}$ و $\bar{A}_{ii}^{(l)}$ را بر حسب پارامترهای مودال بیان کرد (روابط (22) و (23)).

$$A_{ii}^{(l)} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r^2 \psi_{lr}^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r \omega \omega_r} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega) \quad (22)$$

$$\bar{A}_{ii}^{(l)} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \frac{\beta_r^2 \psi_{lr}^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\zeta_r' \omega \omega_r} = -\omega^2 \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega) \quad (23)$$

که ψ_{lr} و ψ_{lr}' درایه l شکل مودهای نامیزان، α_r و β_r ضرایب میزان‌سازی مود r ام، ω_r و ω_r' فرکانس‌های طبیعی مود r ام، ζ_r و ζ_r' ضرایب دمپینگ مود r ام می‌باشند.

با مقایسه روابط (20) و (21) و با استفاده از روابط (22) و (23)، رابطه (24) بدست می‌آید.

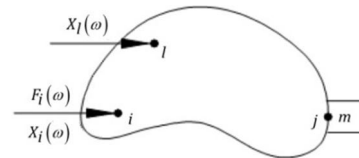
$$\frac{\sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega)}{1 + m \omega^2 \sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega)} = \frac{\sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega)}{1 + m' \omega^2 \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega)} \quad (24)$$

با ساده‌سازی رابطه (24)، رابطه (25) حاصل می‌شود.

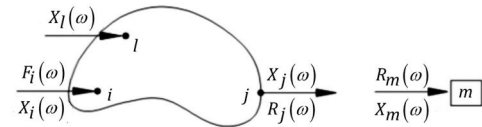
$$\sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega) - \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega) = -\omega^2 (m' - m) \sum_{r=1}^n \alpha_r^2 A_r(\omega) \sum_{r=1}^n \beta_r^2 B_r(\omega) \quad (25)$$

رابطه (25)، رابطه اساسی برای حذف اثر جرم و اصلاح فرکانس‌های طبیعی است. در این رابطه فقط ضرایب α_r و β_r مجهول هستند. با بسط رابطه (25) به ازای فرکانس‌های مختلف، ضرایب مذکور محاسبه می‌شوند. پس از محاسبه ضرایب با استفاده از رابطه (20) یا (21) اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از نتایج حاصل از آزمایش حذف خواهند شد.

برای توضیح بهتر نحوه عملکرد رابطه (25)، این رابطه بازای دو مود



شکل 1 مدل شماتیک سیستم با جرم اضافی



شکل 2 دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر سیستم

بدین منظور، شکل 1 در نظر گرفته شده و جرم ثانویه m ، در نقطه j به سازه متصل شده است. نیرو سازه را در نقطه i تحریک کرده و پاسخ در نقطه l اندازه‌گیری می‌شود.

به منظور جداسازی اثر جرم، دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر سیستم ترسیم شده است (شکل 2).

روابط (12) تا (14) بیانگر معادلات حاکم بر سیستم شکل (2) می‌باشند.

$$X_l = \alpha_{li} F_i + \alpha_{lj} R_j \quad (12)$$

X_l پاسخ فرکانسی در نقطه l ، α_{li} و α_{lj} رسپتنس¹ بین نقاط l و به ترتیب i و j ، F_i نیروی تحریک در نقطه i و R_j نیروی عکس‌العمل در نقطه j است.

$$X_j = \alpha_{ji} F_i + \alpha_{jj} R_j \quad (13)$$

X_j پاسخ فرکانسی در نقطه j ، α_{ji} و α_{jj} رسپتنس بین نقاط j و به ترتیب i و j می‌باشد.

همچنین برای جرم ثانویه m ، پس از جداسازی از سازه اصلی (شکل 2)، رابطه (14) برقرار است.

$$X_m = \alpha_{mm} R_m \quad (14)$$

که X_m پاسخ فرکانسی در نقطه m ، α_{mm} رسپتنس در نقطه m و R_m نیرو در نقطه m می‌باشد. همچنین برای α_{mm} در رابطه (14)، رابطه (15) برقرار است.

$$\alpha_{mm} = -\frac{1}{m\omega^2} \quad (15)$$

با حذف نیروهای عکس‌العمل و جابجایی در نقطه اتصال جرم به سازه، رابطه (16) بدست آمده است [16].

$$X_l = (\alpha_{li} - \frac{\alpha_{ji}\alpha_{lj}}{\alpha_{mm} + \alpha_{jj}}) F_i = \alpha_{li}^{(j)} F_i \quad (16)$$

که $\alpha_{li}^{(j)}$ رسپتنس ناشی از جرم اضافی در نقطه j و بین دو نقطه l و i می‌باشد. از رابطه (16)، $\alpha_{li}^{(j)}$ با رسپتنس‌های اصلی مرتبط می‌شود و رابطه (17) حاصل می‌شود.

$$\alpha_{li}^{(j)} = \alpha_{li} - \frac{\alpha_{ji}\alpha_{lj}}{\alpha_{mm} + \alpha_{jj}} \quad (17)$$

α_{li} ، α_{ji} ، α_{jj} و α_{mm} رسپتنس‌های اصلی هستند. با ضرب طرفین رابطه (17) در $-\omega^2$ ، رابطه بین اکسلرنس‌ها² بدست می‌آید (رابطه (18)).

$$A_{li}^{(j)} = A_{li} - \frac{A_{ji}A_{lj}}{A_{mm} + A_{jj}} \quad (18)$$

1- Receptance
2- Accelerance

نوشته شده است (رابطه (26)).

$$\alpha_1^2 A_1(\omega) + \alpha_2^2 A_2(\omega) - \beta_1^2 B_1(\omega) - \beta_2^2 B_2(\omega) = -\omega^2(m' - m)(\alpha_1^2 A_1(\omega) + \alpha_2^2 A_2(\omega)) - (\beta_1^2 B_1(\omega) - \beta_2^2 B_2(\omega)) \quad (26)$$

با ساده‌سازی رابطه (26)، و تقسیم طرفین این رابطه بر β_1^2 رابطه (27) بدست آمده است.

$$\frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} A_1(\omega) + \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} A_2(\omega) - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} B_2(\omega) + \alpha_1^2 \omega^2 M A_1(\omega) B_1(\omega) + \alpha_2^2 \omega^2 M A_2(\omega) B_1(\omega) - \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \omega^2 M A_1(\omega) B_2(\omega) - \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \omega^2 M A_2(\omega) B_2(\omega) = B_1(\omega) \quad (27)$$

که در آن M بصورت رابطه (28) تعریف می‌شود.

$$M = (m' - m) \quad (28)$$

در رابطه (27)، ضرایب α_1^2 ، α_2^2 ، β_1^2 و β_2^2 مجهول و سایر عبارات معلوم هستند. از آنجا که رابطه (27) بازای تمامی فرکانس‌ها برقرار است، می‌توان با ایجاد یک دستگاه معادلات (که به ازای تمامی فرکانس‌ها تشکیل می‌شود) ضرایب مجهول را محاسبه کرد (رابطه (29)).

$$[Coeff.] \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \\ \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} \\ \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2} \\ \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \\ \frac{\alpha_2^2}{\beta_1^2} \beta_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) \\ \vdots \\ B_1(\omega_p) \end{bmatrix} \quad (29)$$

p تعداد نقاط فرکانسی مدنظر است و $[Coeff.]$ از رابطه (30) بدست می‌آید.

$$[Coeff.] = \begin{bmatrix} C_1(\omega_1) & C_2(\omega_1) & \cdots & C_6(\omega_1) & C_7(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1(\omega_p) & C_2(\omega_p) & \cdots & C_6(\omega_p) & C_7(\omega_p) \end{bmatrix} \quad (30)$$

مقادیر C_1 تا C_7 در رابطه (31) ارائه شده‌اند.

$$\begin{aligned} C_1(\omega) &= A_1(\omega), \quad C_2(\omega) = A_2(\omega), \quad C_3(\omega) = -B_2(\omega) \\ C_4(\omega) &= \omega^2 M A_1(\omega) B_1(\omega) \\ C_5(\omega) &= \omega^2 M A_2(\omega) B_1(\omega) \\ C_6(\omega) &= -\omega^2 M A_1(\omega) B_2(\omega) \\ C_7(\omega) &= -\omega^2 M A_2(\omega) B_2(\omega) \end{aligned} \quad (31)$$

همان‌طور که اشاره شد، برای بیان بهتر عملکرد رابطه (25)، این رابطه بازای دو مود نوشته شد و در نهایت دستگاه معادلاتی مطابق رابطه (29) بدست آمد. با حل این دستگاه، ضرایب مجهول رابطه (27)، مخصوصاً α_1^2 ، α_2^2 بدست می‌آیند. با استفاده از این دو ضریب می‌توان تابع پاسخ فرکانسی را به

کمک رابطه (22) محاسبه کرد. با استفاده از این تابع پاسخ فرکانسی و به کمک رابطه (20) می‌توان تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده را بدست آورد و فرکانس‌های طبیعی را اصلاح نمود. در نتیجه می‌توان الگوریتم کلی روش جدید را بصورت زیر بیان نمود:

1- اجرای آزمایش مودال محیطی سازه (در این آزمایش تعدادی شتاب‌سنج بر روی سازه نصب شده است).

2- محاسبه پارامترهای مودال به کمک آنالیز پاسخ بند 1.

3- نصب جرم بر روی سازه در محل نصب یکی از شتاب‌سنج‌ها.

4- تکرار آزمایش مودال محیطی برای سازه‌ی با جرم اضافی.

5- محاسبه پارامترهای مودال جدید به کمک آنالیز پاسخ بند 4.

6- محاسبه ضرایب میزان‌سازی شکل موده‌ها به کمک رابطه (25) و پارامترهای مودال بدست آمده در بندهای 2 و 5.

7- محاسبه تابع پاسخ فرکانسی با استفاده از پارامترهای مودال (بند 2) و ضرایب میزان‌سازی (بند 6) به کمک رابطه (22).

8- محاسبه تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی بند 7 به کمک رابطه (20).

9- تخمین فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده با اجرای روش انتخاب قله بر روی تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده بند 8.

با اجرای الگوریتم فوق، اثر جرم شتاب‌سنج متناظر با موقعیت نصب جرم اضافی از فرکانس‌های طبیعی حذف می‌شود. به عبارت دیگر فقط اثر جرم یک شتاب‌سنج از فرکانس‌های طبیعی حذف می‌شود و به منظور حذف جرم سایر شتاب‌سنج‌ها باید الگوریتم فوق از بند 3 برای هر شتاب‌سنج تکرار شود و در نهایت با استفاده از نتایج حاصل و با فرض خطی بودن رفتار سازه اثر جرمی تمامی شتاب‌سنج‌ها حذف خواهد شد.

3- شبیه‌سازی

3-1- مدل عددی

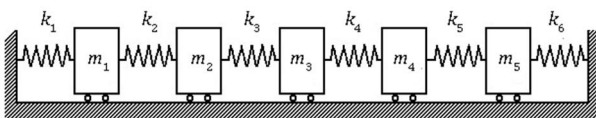
به منظور شبیه‌سازی روش پیشنهادی، از مدل یک سیستم پنج درجه آزادی استفاده شده است (شکل 3).

دمپینگ سیستم به صورت تناسبی در نظر گرفته شده است و ضرایب دمپینگ به همراه سایر پارامترهای سیستم در جدول 1 آمده است.

پس از استخراج معادلات دینامیکی حاکم بر مدل (شکل 3)، ماتریس‌های جرم و سختی سیستم بدست آمده‌اند. به کمک تجزیه مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های جرم و سختی، فرکانس‌های طبیعی محاسبه و در جدول 2 ارائه شده‌اند.

جدول 1 مقادیر جرم، سختی و ضرایب دمپینگ سیستم

شماره	مقدار جرم (kg)	مقدار سختی (N/m)	ضریب دمپینگ (%)
1	2	100000	0/075
2	1/2	101000	0/131
3	1	102000	0/190
4	1/3	103000	0/236
5	1/4	104000	0/286
6	-	109000	-



شکل 3 مدل سیستم 5 درجه آزادی مدنظر

را در مرتبه‌های مختلف نشان می‌دهد و به کمک آن، قطب‌های پایدار، ناپایدار و نویزی قابل تشخیص خواهند بود. به منظور تشخیص قطب‌های نویزی از ضریب دمپینگ استفاده می‌شود. قطب با ضریب دمپینگ بالای 5% به عنوان قطب نویزی شناسایی و در نمودار پایداری با علامت 0 نشان داده می‌شود. سپس قطب‌های هر مرتبه با قطب مرتبه پیش از خود مقایسه می‌شود. قطب‌هایی که اختلاف آن‌ها کمتر از 1% باشد، به عنوان قطب پایدار سیستم شناخته می‌شود و در نمودار پایداری با علامت + مشخص می‌شوند. سایر قطب‌ها نیز به عنوان قطب‌های ناپایدار شناسایی و با علامت x نشان داده می‌شوند [19].

با استفاده از نمودار پایداری، فرکانس‌های طبیعی، ضرایب دمپینگ (جدول 3) و شکل مودها محاسبه و با مقادیر دقیق مقایسه شده‌اند. نتایج حاصل در جدول 3، نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی و ضرایب دمپینگ سیستم با دقت مناسبی محاسبه شده‌اند ولی فرکانس‌های طبیعی با مقادیر دقیق اختلاف دارند که این اختلاف ناشی از اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌های فرضی است. به منظور مقایسه دقیق شکل مودها، از معیار اطمینان مودال استفاده شده است که طبق رابطه (32) تعریف می‌شود [6].

$$MAC(i, j) = \frac{|\{\phi\}_{S_i}^T \{\phi\}_{E_j}|^2}{|\{\phi\}_{S_i}^T \{\phi\}_{S_i}| \times |\{\phi\}_{E_j}^T \{\phi\}_{E_j}|} \quad (32)$$

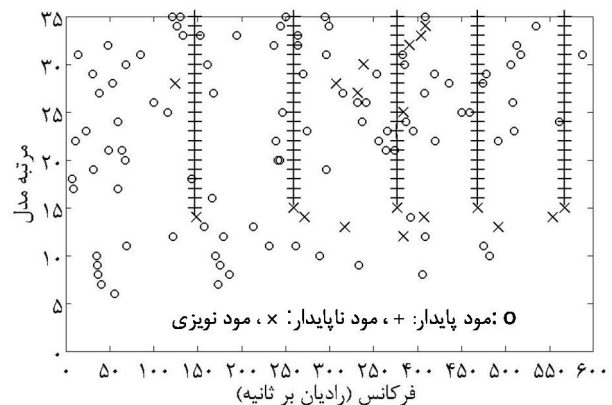
i, j امین شکل مود روش زیرفضاهای اتفاقی-کواریانس و $\{\phi\}_{S_i}, \{\phi\}_{E_j}$ امین شکل مود دقیق است.

بنابراین، مقدار معیار اطمینان مودال برای همه مودهای زیرفضاهای اتفاقی و مقادیر دقیق محاسبه و نمودار آن در شکل 5 ارائه شده است.

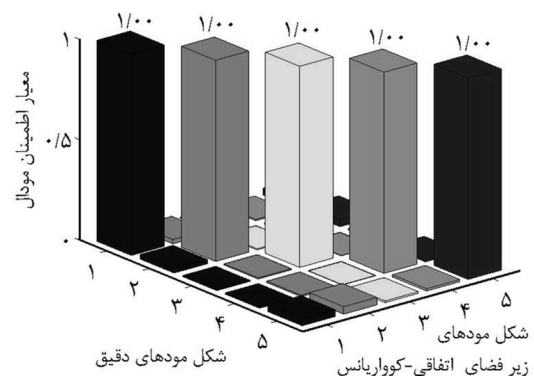
3-3- اجرای روش حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها

مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از روش SSI-COV با مقادیر دقیق (جدول 3)، نشان می‌دهد که جرم شتاب‌سنج‌های نصب شده بر روی سیستم، موجب کاهش مقادیر فرکانس‌های طبیعی شده است. بنابراین به منظور حذف اثر بارگذاری جرمی این شتاب‌سنج‌ها، رابطه (25) بکار گرفته می‌شود. فرایند حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها در 5 مرحله و مطابق الگوریتمی که در بخش 2-2 ارائه شد، صورت می‌گیرد. در هر مرحله یک جرم اضافی، بر روی یکی از نقاط سازه نصب می‌شود و با تکرار آزمایش شبیه‌سازی شده، پاسخ سازه محاسبه می‌شود. مقادیر جرم‌های اضافی که بصورت دلخواه انتخاب شده‌اند در جدول 4 ارائه شده است.

پس از محاسبه پاسخ سازه در هر مرحله، پارامترهای مودال به کمک روش زیر فضاهای اتفاقی-کواریانس مجدداً محاسبه می‌شوند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی حاصل از تمام مراحل در جدول 5 ارائه شده‌اند. به منظور حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از رابطه (25) استفاده شده است. همانطور که در بخش 2-2 بیان شد، در رابطه (25)، فقط ضرایب میزان‌سازی شکل مودها مجهول هستند. بنابراین در هر مرحله پس از قرارگرفتن جرم اضافی بر روی سازه و محاسبه پارامترهای مودال جدید، با استفاده از دستگاه معادلات حاصل از رابطه (25) ضرایب میزان‌سازی محاسبه می‌شوند. به کمک این ضرایب می‌توان تابع پاسخ فرکانسی سازه را ایجاد نمود که اصطلاحاً تابع پاسخ فرکانسی میزان شده نامیده می‌شود. سپس به کمک رابطه (20) می‌توان با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی میزان شده، تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده را محاسبه کرد.



شکل 4 نمودار پایداری حاصل از آزمایش شبیه‌سازی شده



شکل 5 مقایسه شکل مودها به کمک معیار اطمینان مودال

جدول 2 فرکانس‌های طبیعی سیستم (مقادیر دقیق)

شماره مود	1	2	3	4	5
فرکانس طبیعی (رادیان بر ثانیه)	148/89	261/53	380/03	472/63	572/42

جدول 3 مقایسه فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه) و ضرایب دمپینگ (%) حاصل از روش SSI-COV با مقادیر دقیق (جدول 2)

شماره مود	فرکانس طبیعی دقیق	فرکانس طبیعی SSI-COV	ضریب دمپینگ دقیق	ضریب دمپینگ SSI-COV
1	148/89	147/76	0/075	0/072
2	261/53	260/09	0/131	0/135
3	380/04	377/66	0/190	0/188
4	472/63	469/55	0/236	0/239
5	572/42	568/16	0/286	0/281

3-2- تخمین پارامترهای مودال سیستم به کمک اندازه‌گیری پاسخ

به منظور محاسبه پارامترهای مودال سیستم تحت بررسی با اندازه‌گیری فقط پاسخ، آزمایش شبیه‌سازی شده‌ای در نرم‌افزار متلب اجرا شده است. بدین منظور 5 شتاب‌سنج 18 گرمی بر روی جرم‌های سازه قرار داده شد. سپس مدل در محیط نرم‌افزار متلب در تمام درجات آزادی تحت تحریک اتفاقی قرار گرفته است و به کمک شتاب‌سنج‌های فرضی، پاسخ سازه اندازه‌گیری شده است. در فرایند اندازه‌گیری پاسخ، دوره نمونه‌برداری 0/0028 ثانیه و تعداد نمونه‌ها در هر اندازه‌گیری 214 در نظر گرفته شده است.

پس از اندازه‌گیری پاسخ تمام نقاط سازه، ماتریس سیستم با استفاده از روش زیرفضاهای اتفاقی-کواریانس، محاسبه شده است. به کمک تجزیه مقدار ویژه ماتریس سیستم، قطب‌های سیستم بدست می‌آیند و نموداری به نام نمودار پایداری ترسیم می‌شوند (شکل 4). این نمودار، ابزاری است که قطب‌های سیستم

جدول 8 مقایسه فرکانس‌های طبیعی دقیق و اصلاح شده

شماره مود	فرکانس طبیعی دقیق (رادیان بر ثانیه)	فرکانس طبیعی اصلاح شده (رادیان بر ثانیه)
1	148/89	148/84
2	261/53	261/46
3	380/03	380/07
4	472/63	472/56
5	572/42	572/33

در ادامه، به عنوان نمونه تابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای¹ میزان شده و تابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای اصلاح شده با مقدار دقیق آن برای نقطه 1، با یکدیگر مقایسه شده‌اند (شکل 6-الف). همچنین به منظور نمایش بهتر توابع مذکور، در شکل 6-ب، توابع پاسخ فرکانسی در اطراف مود سوم نمایش داده شده‌اند.

همان‌طور که در شکل 6 مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی سازه در تابع پاسخ فرکانسی میزان شده، با مقدار دقیق آن اختلاف دارد، که این اختلاف ناشی از اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌ها است. همان‌طور که در تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده که به کمک رابطه (20) بدست آمده است، مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی نسبت به تابع میزان شده، مقداری افزایش یافته است. به عبارت دیگر در تابع اصلاح شده اثر جرم شتاب‌سنج متناظر با تابع، که در شکل 6 شتاب‌سنج جرم اول می‌باشد، حذف شده است. بدین ترتیب می‌توان برای تمامی مراحل تکرار آزمایش توابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده را محاسبه کرد و سپس اثر جرم شتاب‌سنج متناظر را حذف نمود. فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده به کمک روش انتخاب قله از توابع اصلاح شده استخراج می‌شوند. این فرکانس‌ها در جدول 6 ارائه شده‌اند.

پس از محاسبه فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده، مقدار تغییر فرکانس هر مود نسبت به حالت سازه با شتاب‌سنج قابل محاسبه خواهد بود. با فرض خطی بودن رفتار سازه، با جمع مقادیر تغییر فرکانس هر مود از هر مرحله، مقدار تغییر فرکانس مورد نیاز برای حذف اثر جرم تمامی شتاب‌سنج‌ها بدست خواهد آمد. این مقادیر مطابق رابطه (33) محاسبه و در جدول 7، ارائه شده‌اند.

$$\Delta\omega_r = \sum_{k=1}^q (\omega_{k,r} - \omega_r^{SSI}) \quad (33)$$

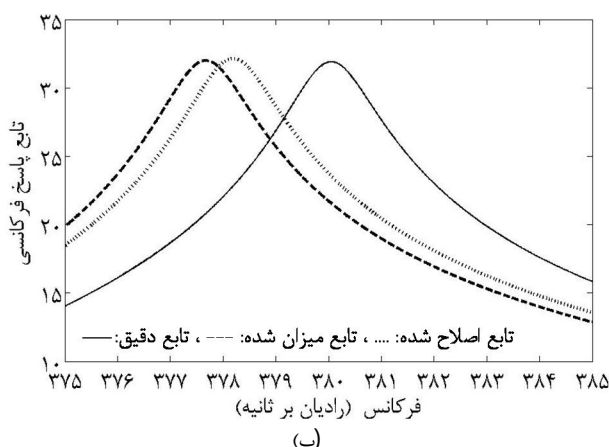
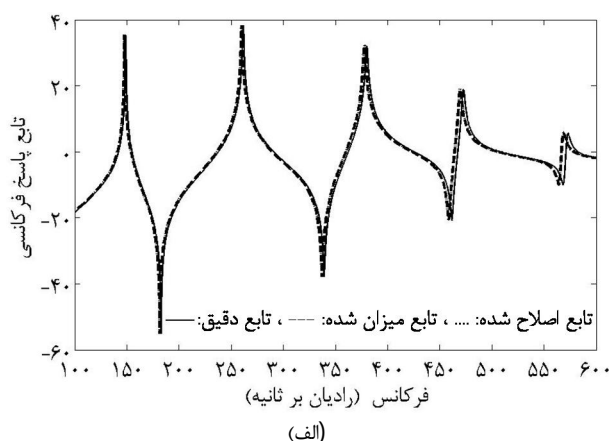
که $\Delta\omega_r$ مقدار تغییر فرکانس مورد نیاز برای اصلاح مود r ام سازه، $\omega_{k,r}$ فرکانس طبیعی اصلاح شده r ام پس از قرار گیری جرم اضافی بر روی نقطه k ام (جدول 6)، ω_r^{SSI} فرکانس طبیعی r ام سازه در حالت اولیه (جدول 3) و q تعداد نقاط سازه است.

اگر مقادیر تغییر فرکانس ارائه شده در جدول 7، به فرکانس‌های طبیعی حالت با شتاب‌سنج (جدول 3) اضافه شوند، اثر جرمی شتاب‌سنج‌ها حذف و فرکانس‌های طبیعی بصورت دقیق بدست خواهند آمد. این مقادیر محاسبه و با مقادیر دقیق مقایسه شده‌اند (جدول 8).

جدول 8 نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، می‌تواند اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌ها را حذف و با دقت مناسبی فرکانس‌های طبیعی دقیق سازه را محاسبه نماید.

4- آزمایش

به منظور ارزیابی تجربی روش پیشنهادی و بررسی تجربی توانایی آن در



شکل 6 الف) مقایسه توابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای متناظر با نقطه 1، ب) مقایسه توابع پاسخ فرکانسی نقطه‌ای متناظر با نقطه 1 در اطراف فرکانس طبیعی سوم سازه

جدول 4 مقادیر جرم‌های اضافی انتخاب شده

شماره	1	2	3	4	5
جرم اضافی (kg)	0/5	0/5	0/5	0/5	0/5

جدول 5 فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه) حاصل از روش SSI-COV پس از نصب هر یک از جرم‌های اضافی

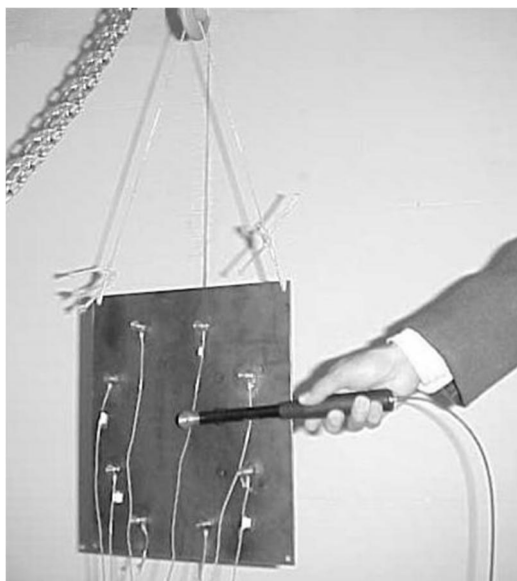
شماره مود	جرم اول	جرم دوم	جرم سوم	جرم چهارم	جرم پنجم
1	144/59	140/55	139/19	141/17	145/47
2	247/27	254/86	259/10	249/43	249/86
3	366/49	367/12	357/43	377/37	357/66
4	466/18	447/95	467/97	448/20	452/48
5	566/89	553/36	524/23	553/25	565/30

جدول 6 فرکانس‌های طبیعی (رادیان بر ثانیه) حاصل از اجرای روش انتخاب قله بر روی توابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده

شماره مود	جرم اول	جرم دوم	جرم سوم	جرم چهارم	جرم پنجم
1	147/88	148/04	148/10	148/01	147/84
2	260/56	260/26	260/08	260/51	260/41
3	378/15	378/02	378/43	377/69	378/44
4	469/77	470/52	469/49	470/42	470/54
5	568/51	568/87	570/46	568/83	568/32

جدول 7 مقدار تغییر فرکانس مورد نیاز ($\Delta\omega_r$) برای حذف اثر جرم از هر مود

شماره مود	1	2	3	4	5
تغییر فرکانس (رادیان بر ثانیه)	1/08	1/37	2/41	3/01	4/17



شکل 8 صفحه فلزی تحت آزمایش مودال کلاسیک - آزمایش 8 شتابسنج

جدول 9 فرکانس‌های طبیعی و ضرایب دمپینگ بدست آمده از آزمایش مودال کلاسیک تک شتابسنج

شماره مود	فرکانس طبیعی (هرتز)	ضریب دمپینگ (%)
1	67/25	0/305
2	89/34	0/370
3	136/52	0/195
4	162/74	0/200
5	186/79	0/205

جدول 10 پارامترهای مودال حاصل از آزمایش مودال کلاسیک با 8 شتابسنج

شماره مود	فرکانس طبیعی (هرتز)	ضریب دمپینگ (%)
1	65/72	0/315
2	86/86	0/350
3	134/75	0/225
4	159/58	0/235
5	181/94	0/185

2-2- تعیین پارامترهای مودال سازه به کمک 8 شتابسنج

از آنجا که در آزمایش مودال محیطی چندین شتابسنج بر روی سازه نصب می‌شوند، بنابراین در این بخش به منظور اطمینان از نتایجی که در آزمایش مودال محیطی بدست خواهند آمد، آزمایش مودال کلاسیک تکرار می‌شود. البته در این آزمایش، برای مشابهت نتایج با نتایج آزمایش مودال محیطی، 8 شتابسنج هر یک به وزن 18 گرم بر روی نمونه تحت آزمایش نصب شده‌اند (شکل 8).

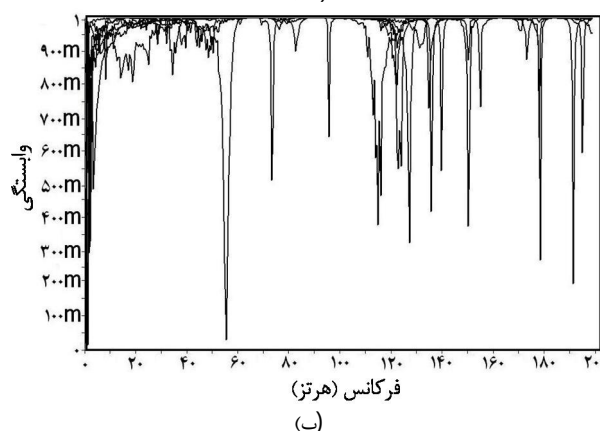
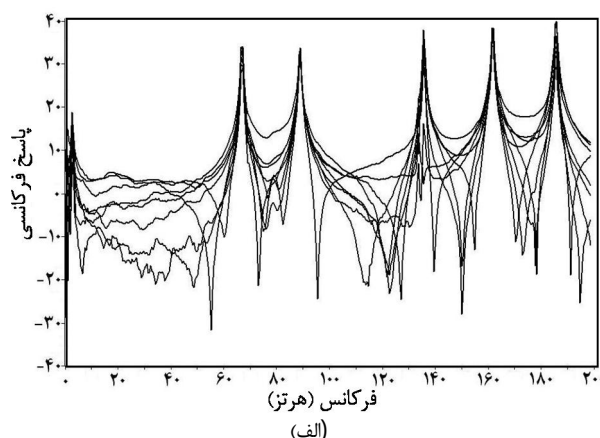
به منظور انجام آزمایش، صفحه توسط یک چکش نوع BK8202 با آمپلی فایر 2674A تحریک شده است. پاسخ‌ها توسط هشت شتابسنج نوع DJB/A120V اندازه‌گیری شده‌اند. محدوده فرکانسی آزمایش 200 هرتز و وضوح فرکانسی در نظر گرفته شده 500 میلی هرتز می‌باشد. نیرو و شتاب‌های اندازه‌گیری شده توسط نرم‌افزار پالس تحلیل شده‌اند [24] و توابع پاسخ فرکانسی و وابستگی بدست آمده‌اند. مشابه بخش 4-1، توابع پاسخ فرکانسی بدست آمده از آزمایش با روش یکپارچه آنالیز و فرکانس‌های طبیعی، ضرایب دمپینگ (جدول 10) و شکل مودهای پنج مود اول الاستیک صفحه بدست آمده‌اند.

حذف اثر جرم شتابسنج‌ها و در نتیجه محاسبه دقیق فرکانس‌های طبیعی سازه، یک صفحه فلزی به ابعاد $0/35 \times 0/3 \times 0/002$ متر تحت آزمایش‌های مودال کلاسیک و مودال محیطی قرار گرفته است. این آزمایش‌ها در چندین مرحله انجام شده‌اند که در ادامه به طور کامل به شرح و توضیح آن‌ها پرداخته می‌شود.

1-4- تعیین پارامترهای مودال دقیق سازه

برای تخمین پارامترهای مودال سازه بصورت دقیق، یک شتابسنج سیک (گرمی) از نوع DJB/A123E بر روی نمونه مورد آزمایش نصب شده است. صفحه با استفاده از یک چکش BK8202 تحریک و سیگنال نیرو از طریق تقویت کننده 2647A تقویت شده است. محدوده فرکانسی آزمایش 200 هرتز و وضوح فرکانسی در نظر گرفته شده 500 میلی هرتز می‌باشد. پس از اندازه‌گیری نیروی تحریک و شتاب، توابع پاسخ فرکانسی¹ و توابع وابستگی² بدست آمده‌اند که در شکل‌های 7- الف و ب به ترتیب ارائه شده‌اند.

همان‌طور که توابع وابستگی (شکل 7- ب) نشان می‌دهند، آزمایش از دقت مناسبی برخوردار است. بنابراین، به منظور تخمین پارامترهای مودال سازه، توابع پاسخ فرکانسی به بخش مودنت نرم‌افزار آیکتس [22] منتقل شده‌اند. در این بخش به منظور آنالیز توابع پاسخ فرکانسی، از روش یکپارچه استفاده شده است [23]. پس از انجام آنالیز با روش یکپارچه، فرکانس‌های طبیعی، ضرایب دمپینگ (جدول 9) و شکل مودهای پنج مود اول الاستیک صفحه بدست آمده‌اند.



شکل 7 الف) توابع پاسخ فرکانسی آزمایش مودال تک شتابسنج، ب) توابع وابستگی آزمایش مودال تک شتابسنج

جدول 12 مقادیر جرم‌های اضافی انتخاب شده

شماره جرم	جرم اضافی (kg)
1	0/1
2	0/343
3	0/343
4	0/1
5	0/093
6	0/055
7	0/093
8	0/055

جدول 13 فرکانس‌های طبیعی (هرتز) صفحه پس از نصب هر یک از جرم‌های اضافی

بر روی سازه

شماره جرم	مود 1	مود 2	مود 3	مود 4	مود 5
1	64/94	85/52	131/70	157/71	178/87
2	63/87	85/75	130/64	154/14	179/95
3	65/30	85/06	131/66	154/52	183/19
4	64/59	85/06	131/82	156/66	179/13
5	65/33	84/83	133/37	158/61	177/93
6	64/78	85/97	134/41	158/72	180/60
7	65/19	85/04	132/90	158/95	177/31
8	64/95	85/66	134/26	158/50	180/74

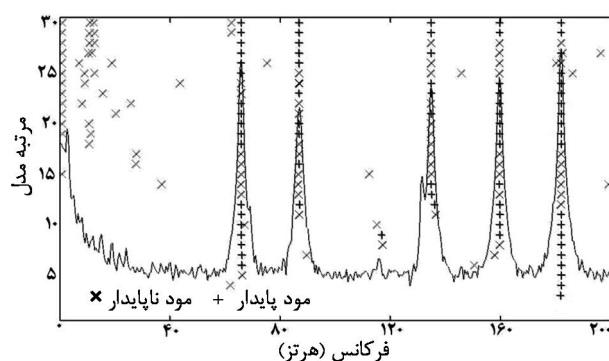
نتایج بدست آمده در جدول 11 نشان می‌دهند که فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از آزمایش مودال محیطی با دقت مناسبی نسبت به آزمایش مودال هشت شتاب‌سنج محاسبه شده‌اند ولی نسبت به آزمایش مودال تک شتاب‌سنج که نتایج دقیق‌تری را دارد، دارای اختلاف می‌باشند. این اختلاف‌ها ناشی از اثر بارگذاری جرمی شتاب‌سنج‌ها می‌باشد.

4-4- اجرای روش حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها

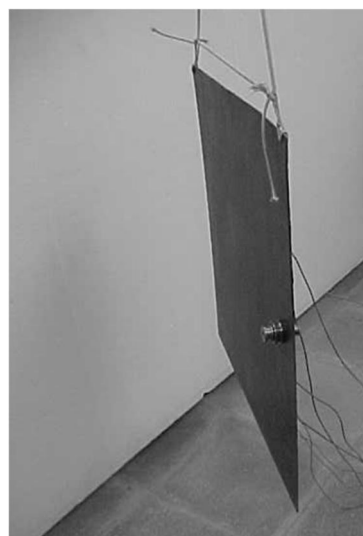
مقایسه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی با مقادیر حاصل از آزمایش تک شتاب‌سنج (جدول 11)، نشان داد که جرم شتاب‌سنج‌های نصب شده بر روی سازه، موجب کاهش مقادیر فرکانس‌های طبیعی شده است. بنابراین به منظور حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها، رابطه (25) به کار گرفته می‌شود. فرآیند حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها در 8 مرحله صورت می‌گیرد. در هر مرحله یک جرم اضافی، بر روی یکی از نقاط سازه نصب می‌شود (شکل 10) و با تکرار آزمایش مودال محیطی، پاسخ سازه مجدداً اندازه‌گیری می‌شود.

مقادیر جرم‌های اضافی که بر روی سازه نصب شده‌اند بر اساس روش ارائه شده در مرجع [25] محاسبه و در جدول 12 ارائه شده‌اند.

پس از محاسبه پاسخ سازه در هر مرحله، پارامترهای مودال متناظر، به کمک روش زیر فضاهای اتفاقی مجدداً محاسبه می‌شوند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی حاصل از تمام مراحل در جدول 13 ارائه شده‌اند. به منظور حذف اثر جرم شتاب‌سنج‌ها از رابطه (25) استفاده شده است و مطابق الگوریتم روش (بخش 2-2) تابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده محاسبه می‌شود. پس از محاسبه توابع پاسخ فرکانسی اصلاح شده برای هر یک از جرم‌های اضافی نصب شده بر روی سازه، فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده از توابع مذکور استخراج می‌شوند (جدول 14). پس از محاسبه فرکانس‌های طبیعی اصلاح شده، مقدار تغییر فرکانس هر مود نسبت به فرکانس‌های حاصل از آزمایش مودال محیطی (جدول 11) قابل محاسبه خواهد بود. با استفاده از رابطه (33) مقدار تغییر فرکانس هر مود محاسبه و در جدول 15، ارائه شده‌اند.



شکل 9 نمودار پایداری آزمایش مودال محیطی صفحه



شکل 10 صفحه فلزی تحت آزمایش مودال محیطی به همراه جرم اضافی

جدول 11 مقایسه فرکانس‌های طبیعی (هرتز) بدست آمده از آزمایش‌های مودال

کلاسیک و آزمایش مودال محیطی

شماره مود	آزمایش مودال کلاسیک	آزمایش مودال کلاسیک	آزمایش مودال محیطی
مود	تک شتاب‌سنج	هشت شتاب‌سنج	هشت شتاب‌سنج
1	67/25	65/72	65/70
2	89/34	86/86	86/78
3	136/52	134/75	134/72
4	162/74	159/58	159/58
5	186/79	181/94	181/93

4-3- آزمایش مودال محیطی

به منظور انجام آزمایش مودال محیطی صفحه، مشابه بخش 2-4، 8 شتاب‌سنج بر روی صفحه نصب شده‌اند و سازه توسط یک چکش و بصورت دلخواه در نقاط مختلف تحریک شده است.

بعد از پایان آزمایش، سیگنال‌های شتاب اندازه‌گیری شده توسط روش زیرفضاهای اتفاقی در نرم‌افزار پالس آنالیز شده‌اند. در این روش با تجزیه مقادیر ویژه ماتریس سیستم، قطب‌های سیستم بدست آمده‌اند و با توجه به معیارهای مطرح شده در مرجع [19] قطب‌های پایدار، ناپایدار و نویزی از یکدیگر متمایز شده‌اند و نمودار پایداری ترسیم شده است (شکل 9). سپس مرتبه مناسب مدل، با توجه به روابط موجود در مرجع [21] انتخاب شده است و فرکانس‌های طبیعی (جدول 11)، ضرایب دمپینگ و شکل مودها تخمین زده شده‌اند.

7- مراجع

- [1] M.M. Khatibi, M.R. Ashory, A.R. Albooyeh, Optimum Amount of Additive Mass in Scaling of Operational Mode Shapes, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 39, Issue 5, 2011, pp. 733-750.
- [2] S. Adhikari, M.I. Friswell, K. Lonkar, A. Sarkar, Experimental case studies for uncertainty quantification in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 24, Issue 4, 2009, pp. 473-492.
- [3] H. Jung, D.J. Ewins, On the use of simulated experimental data for evaluation of modal analysis methods, *Proc. of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1992.
- [4] H. Sarparast, M.R. Ashory, M.M. Khatibi, The Art of Measurement and Modeling in Modal Testing and Its Difficulties (Part 1), *Journal of Vibration and Sound*, Vol. 1, No. 1, 2012, pp. 59-68. (In Persian).
- [5] M.R. Ashory, Correction of mass loading effects of transducers and suspension effects in modal testing, *Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1998.
- [6] D.J. Ewins, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research studies press LTD, United Kingdom, 2000.
- [7] O. Dossing, Prediction of transducer mass-loading effects and identification of dynamic mass, *Proc. of the 9th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1991.
- [8] G.M. McConnell, *Vibration Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 1995.
- [9] J. Decker, H. Witfeld, Correction of transducer-loading effects in experimental modal analysis, *Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1995.
- [10] J.M.M. Silva, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, Some applications of coupling/uncoupling techniques in structural dynamics, Part 1: Solving the mass cancellation problem, *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1997.
- [11] J. M. M. Silva, N. M. M. Maia, A. M. R. Ribeiro, Some applications of coupling/uncoupling techniques in structural dynamics, Part 2: Generation of the whole FRF matrix from measurements on a single column-the mass uncoupling method (MUM), *Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 1997.
- [12] A. Klosterman, *On the experimental determination and use of modal representations of dynamic characteristics*, PhD thesis, Cincinnati, University of Cincinnati, 1971.
- [13] O. Cakar, K.Y. Sanliturk, Elimination of noise and transducer effects from measured response data, *Proc. of the 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, 2002.
- [14] O. Cakar, K.Y. Sanliturk, Elimination of transducer mass loading effects from frequency response functions, *Mechanical Systems and Signal Processing*, No. 19, 2005, pp. 87-104.
- [15] J.M.M. Silva, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, Cancellation of mass-loading effects of transducers and evaluation of unmeasured frequency response functions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, Issue 5, 2000 pp. 761-779.
- [16] M.R. Ashory, *High quality modal testing methods*, PhD thesis, London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1999.
- [17] H. Sarparast, M.R. Ashory, P. Ebadi, M.M. Khatibi, Modal Parameter Identification of a Structure Subjected to Ambient Load Using Output Analysis, *Modes Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, 2013, pp. 63-73. (In Persian)
- [18] M.L. Aenlle, P. Fernández, R. Brincker, A.F. Canteli, Scaling factor estimation using an optimized mass-change strategy, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 24, Issue 5, 2010 pp. 1260-1273.
- [19] B. Peeters, *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*, PhD thesis, Belgium, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.
- [20] R. Brincker, P. Andersen, Understanding Stochastic Subspace Identification, *Proc. of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 2006.
- [21] A. M. Aibinu, N.A. Rahman, M.J.E. Salami, A.A. Shafie, Optimal Model Order Selection for Transient Error Autoregressive Moving Average MRI Reconstruction Method, *Proc. of World Academy of Science, Engineering and Technology*, No. 42, 2008, pp. 161-165.
- [22] Modent, Integrated Software for Structural Dynamics, ICATS, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, UK, 1988-2000.
- [23] N.M.M. Maia, *Extraction of valid modal properties from measured data in structural vibrations*, PhD thesis, London, Imperial College of Science & Technology, 1988.
- [24] PULSE, Version 8.0, Brüel & Kjær, Sound & Vibration Measurement A/S. 1996-2003.
- [25] A. Taleshi Anbouhi, P. Zamani, M.R. Ashory, M.M. Khatibi, Correction of mass-loading effects of accelerometers on the measured FRFs using optimized mass change algorithm, *Journal of Modeling in Engineering*, Vol. 10, No. 5, 2012, pp. 19-31. (In Persian)

جدول 14 فرکانس‌های طبیعی (هرتز) حاصل از اجرای روش انتخاب قله بر روی توابع

پاسخ فرکانسی اصلاح شده					
شماره جرم	مود 1	مود 2	مود 3	مود 4	مود 5
1	65/88	87/04	135/95	159/93	182/41
2	65/83	86/85	134/99	159/86	182/04
3	65/76	86/93	134/27	159/84	181/86
4	65/77	87/19	135/22	160/70	182/44
5	65/80	87/35	135/48	159/73	182/69
6	66/03	87/08	134/79	159/86	182/37
7	65/81	87/28	135/13	159/70	182/79
8	65/98	87/32	134/95	159/93	182/33

جدول 15 مقدار تغییر فرکانس در هر مود برای حذف اثر جرم شتابسنج‌ها

شماره مود	1	2	3	4	5
تغییر فرکانس (هرتز)	1/27	2/13	3/75	2/92	3/57

جدول 16 مقایسه فرکانس‌های (هرتز) اصلاح شده و آزمایش تک شتابسنج

شماره مود	آزمایش تک شتابسنج	آزمایش مودال محیطی	خطا (%)
1	67/25	66/97	0/42
2	89/34	88/91	0/48
3	136/52	138/47	1/43
4	162/74	162/50	0/15
5	186/79	185/50	0/69

مقادیر تغییر فرکانس ارائه شده در جدول 15 به فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی (جدول 11) اضافه شده‌اند تا اثر بارگذاری جرمی شتابسنج‌ها حذف شود. این مقادیر در جدول 16 ارائه و با مقادیر حاصل از آزمایش مودال تک شتابسنج مقایسه شده‌اند. جدول 16 نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، می‌تواند اثر بارگذاری جرمی شتابسنج‌ها را حذف و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سازه با دقت مناسبی محاسبه شوند.

5- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید برای حذف اثر جرم شتابسنج‌ها از نتایج آزمایش مودال محیطی ارائه شد. در این روش، با قراردادن جرم‌های اضافی بر روی سازه و تکرار آزمایش، اثر بارگذاری جرمی شتابسنج‌ها حذف و فرکانس‌های طبیعی سازه بصورت دقیق محاسبه می‌شوند.

به منظور بررسی عددی روش پیشنهادی از مدل یک سیستم 5 درجه آزادی کمک گرفته شد و با انجام آزمایش‌های شبیه‌سازی شده‌ای در محیط نرم‌افزار متلب، کارایی روش ارزیابی شده است. همچنین به منظور بررسی تجربی، یک صفحه کاملاً آزاد تحت آزمایش‌هایی قرار گرفته است. نتایج آزمایش مودال محیطی نشان داد که فرکانس‌های طبیعی حاصل با مقادیر دقیقی که از آزمایش مودال کلاسیک تک شتابسنج بدست آمده، اختلاف دارد. این اختلاف که ناشی از جرم شتابسنج‌ها می‌باشد به کمک روش پیشنهادی حذف شده است و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش مودال محیطی اصلاح شده‌اند. نتایج عددی و تجربی حاصل، کارایی و دقت روش پیشنهادی را در حذف اثر جرم شتابسنج‌ها و تخمین دقیق فرکانس‌های طبیعی نشان می‌دهند.

6- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند، از حمایت‌های دفتر استعدادهای درخشان دانشگاه سمنان تقدیر و تشکر نمایند.