



تحلیل ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانو لوله های کربنی مستقر بر بستر الاستیک

سعید جعفری مهرآبادی^{1*}، میلاد جلیلیان راد²، احسان ضرونی²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک

* اراک، صندوق پستی 567/38135. s-jafari@iau-arak.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 آذر 1392

پذیرش: 25 بهمن 1392

ارائه در سایت: 12 مهر 1393

کلید واژگان:

ارتعاش آزاد

پوسته مخروطی

نانولوله های کربنی تک جداره

روش ریتز

بستر الاستیک

در این تحقیق رفتار ارتعاشی پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت (UD) و مستقر بر بستر الاستیک (پسترناک)، براساس تئوری مرتبه اول تغییر برشی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور تاثیر خواص مکانیکی نانولوله ها بر سازه مذکور از قانون مخلوطها استفاده شده است. برای فرمول بندی مسئله در ابتدا براساس میدان تغییر مکان در تئوری مرتبه اول و با استفاده از روابط کرنش تغییر مکان، مولفه های کرنش در مختصات منحنی الخط نوشته شده و پس از ساده سازی در مختصات مخروطی و با استفاده از قوانین هوک تنش ها محاسبه شده اند. در مرحله بعد با تشکیل تابع انرژی پتانسیل کل سیستم و با در نظر گرفتن توابع مناسب برای تغییر مکان ها با توجه به شرایط مرزی پوسته، با اعمال روش ریتز، فرکانس های پوسته مخروطی تقویت شده به دست آمده اند. در پایان اثر کسر حجمی نانولوله های کربنی، نسبت ضخامت به شعاع مخروط، ثابت های بستر الاستیک و پارامترهای دیگر بر روی فرکانس های طبیعی سازه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین نتایج با دیگر مقالات موجود در این زمینه مقایسه و از نحوه حل مسئله اطمینان کافی حاصل شده است.

Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation

Saeed Jafari Mehrabadi^{1*}, Milad Jalilian Rad², Ehsan Zarouni²

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Arak, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Arak, Iran.

*P. O. B. 567/38135 Arak, Iran, s-jafari@iau-arak.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 December 2013
Accepted 14 February 2014
Available Online 04 October 2014

Keywords:

Free Vibration
Conical Shell
Single Wall Carbon Nanotube
Ritz Method
Elastic Foundation

ABSTRACT

In this paper, Free Vibration analysis of truncated conical shell Reinforced with single-walled carbon nanotubes for Uniformly Distribution (UD), resting on Pasternak elastic foundation, based on the first order shear deformation plate theory is investigated. The rule of mixture is used to effect of the properties of nanotubes in the mentioned structure. Based on the displacement field according to the first order shear deformation theory, after determining the strain components in the curvilinear coordinates and simplifying derived relation, we compute the strain components in conical coordinate. Then, the stress components are derived by the Hook's law. In the next stage, by computing the total potential energy of system by regarding the effect of Pasternak elastic foundation and regarding the suitable functions for displacements, by applying the Ritz method the natural frequency of system have been derived. At the end, the effect of volume fraction of nanotubes, ratio of thickness to radius of cone, elastic constants and other parameters, on the natural frequency of structure have been investigated. Also, it can be observe close agreements between present results and other papers.

مرکب پیشرفته باعث پیشرفت های چشم گیری در علوم مختلف شده است.

مواد تابعی مدرج و مواد مرکب لایه ای از جمله این مواد هستند که در بخش های مختلف صنایع پیشرفته مورد استفاده قرار می گیرند. از این رو تحقیقات گسترده در زمینه خواص مادی و مکانیکی این مواد انجام شده است [1-4]. یکی دیگر از فناوری های جدید در زمینه ساخت مواد فناوری نانو می باشد. اخیرا نانو فناوری در بسیاری از علوم از جمله علوم مهندسی توجه محققان را برانگیخته است. آزمایش ها نشان داده است که نانو لوله های کربنی (CNTs)¹ از خواص فوق العاده ای نسبت به دیگر الیاف های تقویتی برخوردارند. از لحاظ

1- مقدمه

ساختارهای پوسته های مخروطی به میزان قابل توجهی در کاربردهای مهندسی و صنعتی از جمله صنایع هوافضا، پتروشیمی، مکانیکی، نظامی، کشتی سازی و غیره استفاده می شوند. بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری این سازه ها به منظور بهبود خواص ارتعاشی و مکانیکی آن ها در طراحی های دینامیکی از اهمیت بالایی برخوردار است. مواد کامپوزیتی به دلیل وزن پایین نسبت به مادی چون فولاد و آلومینیم و همچنین خواص مکانیکی قابل توجهی که دارند در موارد بسیاری مورد استفاده قرار می گیرند. امروزه مواد

1- Carbon Nanotubes

روش ریلی-ریتز³ معادلات حرکت به دست آمده اند. فرکانس های طبیعی پوسته مخروطی با حل مسئله مقادیر ویژه معادلات حرکت به دست آمده و پاسخ های پایدار ارتعاش اجباری با حل معادلات حرکت به دست می آیند. تورنانه [25] به بررسی ارتعاش آزاد پوسته های مخروطی و استوانه ای از جنس مواد تابعی مدرج پرداخته است. در مقاله مذکور از نوعی ماده تابعی استفاده شده که ترکیبی از فلز و سرامیک می باشد. معادلات حرکت سیستم به وسیله روش مربع سازی مشتق تعمیم یافته حل شده اند. صوفیه و همکارانش [26] به تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری پوسته های مخروطی ارتوتروپیک غیرهمگن با لبه های گیردار در معرض فشارهای خارجی یکنواخت پرداختند و فرکانس های طبیعی اصلی و معادلات حاکم را روش گالرکین حل نمودند. صوفیه [27] همچنین ارتعاشات غیرخطی (با دامنه ارتعاش بالا) پوسته های مخروطی کامپوزیتی ناقص غیرهمگن را مورد بررسی قرار داده است. در تحقیق خواص مادی پوسته مخروطی طبق یک رابطه توانی در راستای ضخامت آن تغییر می کند. ستوده و همکارانش [28] ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته های مخروطی از جنس مواد تابعی مدرج با ضخامت غیر یکنواخت و تحت بارگذاری ضربه ای را مورد بررسی قرار داده اند. خواص مواد به صورت تابعی مدرج در راستای ضخامت با استفاده از قانون توزیع توانی مخلوط ها تغییر می کند. برای حل معادلات از روش مربع سازی مشتق تعمیم یافته استفاده شده است.

ژاو و لیو [29] به بررسی ارتعاش آزاد پل های پوسته مخروطی ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از روش بدون مش یا المان آزاد ریتز⁴ پرداخته اند. از تئوری مرتبه اول برشی برای کرنش ها استفاده شده است و توابع ذره ای را جهت پیوند توابع هارمونیک جهت تقریب میدان جابه جایی دوبعدی استفاده کرده اند. فرض کرده اند که خواص مواد پل های مخروطی در جهت ضخامت به طور پیوسته براساس قانون توانی توزیع کسر حجمی مواد تشکیل دهنده متغیر باشد. شن [31،30] در تحقیقی، به بررسی پس کمانش پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره⁵ در معرض بار جانبی یا فشار هیدرواستاتیک در محیط حرارتی پرداخته است. نتایج نشان داده است که توزیع تابعی خطی نانولوله های کربنی تقویتی باعث افزایش فشار کمانشی و همچنین مقاومت پس کمانشی پوسته مخروطی تحت بار خارجی فشاری می شود. مرادی دستجردی و همکارانش [32] تحلیل دینامیکی پوسته های تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره در معرض بارهای ضربه ای را مورد مطالعه قرار داده اند. آن ها ارتعاش آزاد و انتشار موج تنش را بررسی کردند. در این تحقیق توزیع های مختلفی برای نانولوله ها در نظر گرفته شده است و خواص مادی پوسته با استفاده از مدل های میکرومکانیکی تخمین زده شده است. یاس و همکارانش [33] خواص ارتعاشی پانل های استوانه ای تقویت شده با نانو لوله های کربنی تک جداره را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی مورد مطالعه قرار داده اند. برای پیش بینی خواص مادی نانو کامپوزیت از قانون اصلاح شده مخلوط ها استفاده شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده معادلات حرکت با استفاده از روش مربع سازی مشتق تعمیم یافته حل شده و فرکانس های طبیعی پوسته به دست آمده اند. شن و ژیانگ [34] ارتعاشات غیرخطی پانل های استوانه ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی در محیط حرارتی مطالعه نموده اند. در این تحقیق از تئوری مرتبه بالای برشی استفاده شده است. ملک زاده و

مقاومت کششی و ضریب کشسانی، این مواد یکی از محکم ترین موادی هستند که تا کنون شناخته شده اند [5]. بنابراین انتظار می رود که استفاده از نانو لوله های کربنی به عنوان الیاف تقویتی در زمینه های پلیمری باعث بهبود خواص این کامپوزیت های نسبت به نوع تقویت شده با سایر الیاف ها گردد. برخی مطالعات در زمینه بررسی خواص مادی کامپوزیت های تقویت شده با نانو لوله های کربنی انجام شده است که نشان می دهد تقویت سازه های کامپوزیتی با نانو لوله های کربنی حتی با کسر جرمی کم (2 تا 5 درصد)، به میزان قابل توجهی خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی آن ها را ارتقا می دهد [6-11]. جوشی و یوپادیای [12] انتقال بار در مواد مرکب تقویت شده با نانولوله های کربنی چند جداره، تحت بارهای کششی و فشاری را با استفاده از مدل مکانیک محیط پیوسته مورد مطالعه قرار داده اند در این تحقیق از روش اجزا محدود استفاده شده است. آن ها تأثیر نانولوله های کربنی تک جداره و چند جداره را در ارتقا خواص مکانیک مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده اند. ودنیچاروا و ژانگ [13]، خمش خالص و کمانش تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله های کربنی تک جداره را مورد بررسی قرار دادند. وویت و ادلی [14] رفتار تنش و خیز تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله های کربنی را بررسی کردند. آن ها دریافتند که سختی این تیرها با به کارگیری کسر حجمی پایینی از نانو لوله ها با توزیع یکنواخت به میزان چشمگیری افزایش می یابد. یاس و حشمتی [15] خواص ارتعاشی تیرهای نانو کامپوزیتی تابعی مدرج را تحت بار متحرک مورد بررسی قرار داده اند. تیر در نظر گرفته شده در این تحقیق با نانو لوله های کربنی تک جداره با جهت گیری تصادفی تقویت شده اند. به منظور مدل سازی خواص مادی تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانو از مدل موری-تاناکا استفاده شده است. آن ها تأثیر جهت گیری نانولوله ها، توزیع مواد، سرعت بار متحرک و شرایط مرزی مختلف را روی خواص ارتعاشی تیر مورد نظر، مورد بررسی قرار داده اند. یاس و صمدی [16] ارتعاشات آزاد و کمانش تیر تیموشنکوی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داده اند. نانولوله ها با توزیع یکنواخت و همچنین تابعی مدرج در راستای ضخامت فرض شده اند. از قانون مخلوط ها برای توصیف خواص مادی مؤثر استفاده شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی گوناگون معادلات پایداری و حرکت تیر به کمک اصل هامیلتون به دست آمده و از روش مربع سازی مشتق تعمیم یافته¹ حل شده اند. اثرات کسر حجمی و نحوه توزیع نانولوله ها، پارامترهای سختی بستر الاستیک و شرایط مرزی گوناگون بر روی فرکانس های طبیعی و بار بحرانی کمانش تیر مورد بررسی قرار گرفته است.

آیری و همکارانش [17،18] در تحقیقی به بررسی ارتعاش آزاد پوسته های مخروطی پرداختند. لیس [19] ارتعاشات پوسته های مخروطی را با شرایط مرزی مختلف و براساس تئوری های مختلف پوسته های نازک مورد بررسی قرار داده است. سیوادی و گانسن [20-22] ارتعاش پوسته های مخروطی با ضخامت متغیر را با استفاده روش المان محدود نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار داده اند. هوا [23]، در تحقیقی، به بررسی اثرات شرایط مرزی و خواص ارتوتروپیک روی فرکانس های طبیعی ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص دوار پرداخت. در این تحقیق از روش گالرکین² برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. لی و همکارانش [24] به محاسبه فرکانس های طبیعی و پاسخ های ارتعاش اجباری پوسته مخروطی پرداخته اند. با استفاده از اصل همیلتون و

3- Rayleigh-Ritz Method
4- Element-Free kp-Ritz Method
5- Single-walled Carbon Nanotubes

1- Generalized Differential Quadrature (GDQ)
2- Galerkin Method

رابطه $V_{CN} + V_m = 1$ را نیز ارضا می نماید. کسر حجمی V_{CN} را به صورت رابطه (4) فرض می شود:

$$V_{CN} = W(Z) V_{CN}^* \quad (4)$$

که طبق رابطه (5):

$$V_{CN}^* = \frac{W_{CN}}{W_{CN} + \left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right) - \left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right) W_{CN}} \quad (5)$$

که W_{CN} کسر جرمی نانولوله می باشد. برای حالت توزیع یکنواخت نانولوله ها مقدار $W(Z)$ برابر واحد بوده و در نتیجه $V_{CN} = V_{CN}^*$ می باشد. نسبت پواسون و دانسیته جرمی را می توان به صورت روابط (6,7) محاسبه کرد:

$$V_{12} = V_{CN} \times V_{12}^{CN} + V_m V_m^m \quad (6)$$

$$V_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} V_{12}$$

$$\rho = V_{CN} \times \rho^{CN} + V_m \rho^m \quad (7)$$

3- مدل سازی مسئله

پوسته مخروطی ناقصی را مطابق شکل 1 در نظر می گیریم. که در آن X راستای یال مخروط و θ در راستای محیط و Z در راستای ضخامت پوسته می باشد.

که در آن جابه جایی های (u, v, w) به ترتیب در راستای (x, y, z) می باشند.

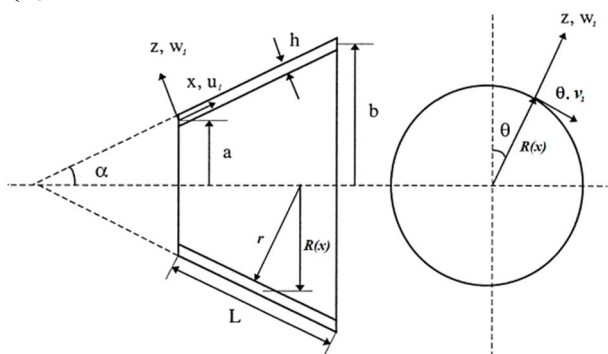
با توجه به شکل 1 پارامترهای لامه³ و شعاع های انحنای⁴ پوسته مخروطی ناقص به صورت روابط (9-11) تعریف می گردند [42].

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = a + x \sin \alpha \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} r = \frac{R(x)}{\cos \alpha} \\ R(x) = a + x \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a + x \sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} R_1 = \infty \\ R_2 = r = \frac{a + x \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = X \\ \alpha_2 = \theta \\ \alpha_3 = Z \end{cases} \quad (11)$$



شکل 1 برشی از پوسته مخروطی ناقص با دستگاه مختصات منحنی الخط

همکارانش [35] در تحقیقی، ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص دورانی از جنس ماده تابعی مدرج را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پوسته ها مورد بررسی قرار دادند و معادلات حاصل را از روش مربع سازی مشتق تعمیم یافته حل نمودند. فتوحی و همکارانش [36] در تحقیقی به بررسی تاثیرات بستر الاستیک بر روی مشخصه های ارتعاشی نانو مخروط ها پرداخته است. در این تحقیق از روش گالرکین برای حل معادلات حرکت نانو مخروط استفاده شده است و همچنین مدل پاسترناک برای مدل سازی بستر الاستیک استفاده شده است. فیروز آبادی و همکارانش [38,37] خواص ارتعاشی و پایداری نانومخروط ها را براساس یک تئوری غیرمحلّی پوسته ها مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیقات معادلات پایداری و حرکت با استفاده از روش گالرکین حل شده و فرکانس های طبیعی و بار بحرانی به دست آمده اند.

در این مقاله ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک، براساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. جهت اعمال خواص مکانیکی نانولوله ها از قانون مخلوط ها استفاده شده است. با تشکیل فانکشنال انرژی و از روش ریتز و اعمال شرایط مرزی ساده و حل مسئله مقادیر ویژه فرکانس های پوسته ی مخروطی به دست آمده اند. در پایان اثر کسر حجمی نانولوله های کربنی تقویتی، نسبت ضخامت به شعاع مخروط، ثابت های بستر الاستیک و پارامترهای دیگر بر روی فرکانس های ارتعاش مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. صحت نتایج با دیگر مقالات موجود مقایسه و دقت مناسبی بین نتایج این تحقیق و دیگر مقالات برقرار است.

2- خواص پوسته مخروطی نانو کامپوزیت

در این تحقیق پوسته مخروطی ناقص با نانولوله های کربنی با توزیعی یکنواخت در راستای مختصات X تقویت شده است و دارای زمینه ای پلیمری باشد. در مدل میکرومکانیکی، می توان خواص مادی را با استفاده از مدل موری-تاناکا¹ [39] یا قانون اصلاح شده مخلوط ها² [26] تخمین زد. مدل موری-تاناکا قابل کاربرد برای ذرات نانو می باشد [39,30,15] و قانون مخلوط ها برای پیش بینی تمامی خواص مادی ساده، ساده و مناسب می باشد. در این مقاله به دلیل تطابق نتایج حاصل از دو روش فوق، از قانون مخلوط ها استفاده شده است. براساس قانون اصلاح شده مخلوط ها مدول یانگ و مدول برشی موثر مطابق روابط (1-3) بیان می شوند [41]

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (3)$$

که E_{11}^{CN} ، E_{22}^{CN} و G_{12}^{CN} به ترتیب مدول های یانگ و برشی نانولوله کربنی می باشد، E^m و G^m خواص متناظر مربوط به زمینه می باشند. η_j ($j = 1, 2, 3$) پارامتر کارایی نانولوله کربنی می باشد، این پارامتر به این دلیل که انتقال بار بین ماتریس و نانولوله به صورت کامل صورت نمی گیرد [39,30]. در معادلات (1-3) وارد می شود. مقدار آن با تطابق مدول های الاستیسیته به دست آمده از نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی و قانون مخلوط ها تعیین می شود [30]. همچنین V_m و V_{CN} کسرهای حجمی نانولوله کربنی و زمینه می باشند که

3- Lamé parameters
4- Radii of curvature

1- Mori Tanaka
2- Extended rule of mixture

مطابق رابطه (16) نوشت.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{\theta\theta} \\ K_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

که با جایگذاری روابط مقادیر کرنش‌ها بر حسب جابجایی از رابطه (15) رابطه (16) به صورت رابطه (17) نوشته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x}}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1 \sin \alpha + w_1 \cos \alpha \right) + \frac{\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1 \sin \alpha}{a + x \sin \alpha} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right\} + Z \left\{ \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \phi \sin \alpha \right) + \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi \sin \alpha}{a + x \sin \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi + \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \psi + \frac{1}{a + x \sin \alpha} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

روابط تنش-کرنش برای مواد ارتئوتروپیک مطابق رابطه (18) می‌باشد

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

که در آن

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (19)$$

روابط $\nu_{12}, \nu_{21}, E_{11}, E_{22}, G_{12}$ از روابط اصلاح شده مخلوط‌ها مطابق روابط 1-3 و (6) محاسبه می‌شوند.

پوسته مخروطی مورد مطالعه در این تحقیق مطابق شکل 2 با بستر الاستیک از نوع دو پارامتری (وینکلر-پاسترناک) احاطه شده است و تأثیر ثابت‌های بستر الاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور از مدل پسترناک استفاده شده است [44]. به این منظور نیروی‌های عکس‌العمل که از سوی بستر الاستیک در جهت ضخامت پوسته مخروطی به آن وارد می‌گردد مطابق رابطه (20) فرمول‌بندی

روابط کرنش-تغییر مکان براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به‌دست آمده‌اند. در این تئوری فرض قابل صرف نظر بودن از کرنش‌های برشی جانبی $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{\theta z}$ و اینرسی دورانی دیگر معتبر نمی‌باشد و این تفاوت اصلی تئوری مرتبه اول تغییر شکل با تئوری کلاسیک پوسته‌ها می‌باشد. در واقع در این تئوری نتایج از دقت بیشتری برخوردار می‌باشند. روابط میدان تغییرمکان در مختصات منحنی‌الخط مطابق رابطه (12) تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \phi_2(\alpha_1, \alpha_2) \\ U_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases} \quad (12)$$

همچنین روابط کرنش-جابجایی برای هر نقطه دلخواه به فاصله α_3 از سطح میانی به صورت رابطه (13) بیان می‌گردد [43].

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3 \frac{A_1}{R_1} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + U_3 \frac{A_2}{R_2} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{U_1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \right) + \frac{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{U_2}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{U_1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \right) + \frac{1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1}$$

$$\varepsilon_{23} = A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{U_2}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \right) + \frac{1}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} \quad (13)$$

حال با جایگذاری روابط (9-11) در روابط (12,13) روابط میدان تغییرمکان و روابط کرنش-تغییرمکان برای پوسته مخروطی به‌صورت روابط (14,15) در می‌آیند.

$$\begin{cases} U = u_1(x, \theta) + Z \phi(x, \theta) \\ V = v_1(x, \theta) + Z \psi(x, \theta) \\ W = w_1(x, \theta) \end{cases} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + Z \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + Z \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \sin \alpha (u_1 + Z \phi) + w_1 \cos \alpha \right)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + Z \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + Z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{(\nu_1 + Z \psi) \sin \alpha}{a + x \sin \alpha}$$

$$\varepsilon_{xz} = \phi + \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \psi + \frac{1}{a + x \sin \alpha} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \quad (15)$$

روابط کرنش-تغییرمکان حاکم بر پوسته مخروطی را می‌توان به فرم ماتریسی

گرفته شده است

با جایگذاری روابط (16.9) در معادله (23)، معادله (24) را داریم:

$$U = \iint \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} (\epsilon_{xx}^0 + z k_{xx}) + \sigma_{\theta\theta} (\epsilon_{\theta\theta}^0 + z k_{\theta\theta}) + \sigma_{x\theta} (\epsilon_{x\theta}^0 + z k_{x\theta}) + \sigma_{xz} \epsilon_{xz}^0 + \sigma_{\theta z} \epsilon_{\theta z}^0 \right] dz \right\} (a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (24)$$

نیرو و ممان های منته به صورت رابطه (25) تعریف می شوند:

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_\theta & M_\theta \\ N_{x\theta} & M_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix} [1 \quad z] dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} dz$$

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (25)$$

با انتگرال گیری در راستای ضخامت پوسته مخروطی و جایگذاری مقادیر نیرو و ممان های منته از رابطه (25)، رابطه (26) به دست می آید:

$$U = \iint \left[N_x \epsilon_{xx}^0 + M_x k_{xx} + N_\theta \epsilon_{\theta\theta}^0 + M_\theta k_{\theta\theta} + N_{x\theta} \epsilon_{x\theta}^0 + M_{x\theta} k_{x\theta} + Q_x \epsilon_{xz}^0 + Q_\theta \epsilon_{\theta z}^0 \right] (a + x \sin \alpha) dx d\theta \quad (26)$$

با جایگذاری مقادیر و کرنش ها از رابطه (17) انرژی پتانسیل به صورت رابطه (27) نوشته می شود.

$$U = \iint \left[N_x \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + M_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + N_\theta \left(\frac{1}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1 \sin \alpha \right) + w_1 \cos \alpha \right) + M_\theta \left(\frac{1}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \phi \sin \alpha \right) \right) + N_{x\theta} \left(\frac{1}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1 \sin \alpha \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + M_{x\theta} \left(\frac{1}{a + x \sin \alpha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi \sin \alpha \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + Q_x \left(\phi + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + Q_\theta (\psi + \frac{1}{a + x \sin \alpha} \frac{\partial w_1}{\partial \theta}) \right] (a + x \sin \alpha) dx d\theta \quad (27)$$

انرژی جنبشی نیز به صورت رابطه (28) تعریف می شود

$$K = \frac{1}{2} \iint \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] A_1 A_2 dx d\theta dz \quad (28)$$

با انتگرال گیری در راستای ضخامت و جایگذاری از روابط (25.9) انرژی جنبشی مطابق رابطه (29) نوشته می شود

$$K = \iint I \left[\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] (a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (29)$$

انرژی کرنشی نیز به صورت رابطه (30) تعریف می شود:

$$V = \iint q w (a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (30)$$

که نیروی حاصل از برهم کنش پوسته مخروطی و بستر الاستیک می باشد. با جایگذاری q از رابطه (20) انرژی کرنشی به صورت رابطه (31) در می آید

$$q = k_w w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (20)$$

که در آن ثابت سختی بستر k_w (N/m³) و ثابت برشی آن k_p (N/m) می باشد. همچنین $\varphi = \theta \sin \alpha$ و w تغییر مکان صفحه میانی در راستای ضخامت می باشد.

4- به دست آوردن فرکانس های سیستم از روش ریتز

به منظور تعیین فرکانس های طبیعی پوسته مخروطی ناقص از روش ریتز استفاده است. روش ریتز از روش های حل عددی است که براساس روش تغییرات¹ معمولاً برای حل مسائل مقدار مرزی مختلف مکانیک استفاده می شود. مزیت اصلی این روش این است که توابع حدس فقط کافی است شرایط مرزی مسئله را ارضا نماید، به همین دلیل در بسیاری از موارد به کار می رود. پوسته مخروطی ناقص در این مقاله با تکیه گاه ساده در دو سر مخروط در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی ساده S-S در دو انتهای پوسته مخروطی به صورت رابطه (21) بیان می شوند:

$$v_1 = 0, w_1 = 0, N_x = 0, M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (21)$$

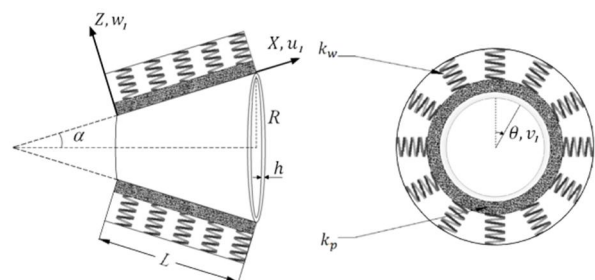
توابع جابه جایی نیز مطابق رابطه (22) در نظر گرفته شده است که شرایط مرزی مسئله را ارضا می نمایند [23].

$$\begin{aligned} u &= a_1 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta + \omega t) \\ v &= a_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta + \omega t) \\ w &= a_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta + \omega t) \\ \phi &= a_4 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta + \omega t) \\ \psi &= a_5 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta + \omega t) \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن n و m به ترتیب اعداد موج محیطی و طولی، و ω نیز فرکانس ارتعاش پوسته بر حسب هرتز (Hz) هستند.

برای پوسته مخروطی انرژی های پتانسیل، کار خارجی و انرژی جنبشی به صورت رابطه (23) می باشد:

$$U = \iint \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta} \epsilon_{x\theta} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{\theta z} \epsilon_{\theta z} \right] dz \right\} A_1 A_2 dx d\theta dz \quad (23)$$



شکل 2 نمای شماتیک از پوسته مخروطی ناقص بر بستر الاستیک

دمای (K) 300 به صورت $\rho^m = 2.5, 1.15 \text{ (gcm}^{-3}\text{)}$ ، $v^m = 0.34$ ، $G^m = 0.933 \text{ (GPa)}$ فرض شده است. مهم ترین مسئله در به-کارگیری قانون اصلاح شده مخلوطها برای کامپوزیت های تقویت شده با نانو لوله های کربنی³ تعیین پارامتر کارایی نانو لوله کربنی η_j ($j = 1, 2, 3$) است. این پارامتر را می توان از تطبیق نتایج تئوری به دست آمده براساس قانون اصلاح شده مخلوطها با نتایج به دست آمده از شبیه سازی دینامیک مولکولی تخمین زد. به این ترتیب که پارامترهای کارایی نانو لوله با تطبیق مدول یانگ E_{11} و E_{22} و مدول برشی G_{12} کامپوزیت های تقویت شده با نانو لوله های کربنی به دست آمده از قانون توسعه یافته مخلوطها با مقادیر به دست آمده از شبیه سازی دینامیک مولکولی به دست آمده اند. این مقادیر در حالت خاص در جدول 2 آمده است [30].

به منظور بررسی صحت نتایج تحقیق انجام شده، نتایج به دست آمده برای فرکانس های طبیعی پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده، ایزوتروپیک و از جنس آلومینیم با در نظر گرفتن خواص مادی و ابعاد هندسی $v = 0.3$ ، $E = 70 \text{ (GPa)}$ ، $G = 26.9 \text{ (GPa)}$ ، $\rho = 2710 \text{ (kgm}^{-3}\text{)}$ ، $h = 0.004 \text{ (m)}$ ، $b = 0.4 \text{ (m)}$ با نتایج مقاله هوا [23] مقایسه شده است. این نتایج در جدول 3 قابل مشاهده است. اعداد n و m به ترتیب اعداد موج در راستای محیط و یال مخروط است. فرکانس بی بعد به صورت $\Omega = \omega \cdot b \sqrt{\rho(1-v^2)/E}$ تعریف شده است. که در آن ω فرکانس پایه بر حسب هرتز (Hz)، v ضریب پواسون، E مدول یانگ، G مدول برشی، ρ چگالی، h ضخامت پوسته، a شعاع کوچک مخروط، b شعاع بزرگ مخروط و L طول یال مخروط می باشد. از جدول 3 می توان مشاهده نمود که نتایج به دست آمده در تحقیق ارائه شده با نتایج موجود در مقالات گذشته مطابقت دارد. البته مقداری اختلاف میان نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر با نتایج مرجع [23] مشاهده می شود که دلیل آن اختلاف در تئوری های استفاده شده برای توصیف میدان تغییر مکان پوسته است. نتایج ارائه شده در مرجع [23] براساس تئوری تخمین اولیه لاو⁴ (تئوری کلاسیک)

جدول 1 خواص مادی وابسته به دما نانو لوله کربنی تک جداره (10.10)

دما (K)	E_{11}^{CN} (TPa)	E_{22}^{CN} (TPa)	G_{12}^{CN} (TPa)	α_{11}^{CN} (10 ⁻⁶ /k)	α_{22}^{CN} (10 ⁻⁶ /k)
300	5/6466	7/0800	1/9445	3/4584	5/1682
500	5/5308	7/0800	1/9643	4/5361	5/0189
700	5/4744	6/8641	1/9644	4/6677	4/8943

$$(L = 9.26 \text{ nm}, R = 0.68 \text{ nm}, h = 0.068 \text{ nm}, v_{12}^{CN} = 0.175)$$

جدول 2 مقایسه مدول های یانگ برای کامپوزیت های PMMA/CNT

دینامیک مولکولی			قانون مخلوطها				
E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	V_{CN}^*	η_1	η_2	η_3	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)
94/6	2/9	0/12	0/137	1/022	0/715	94/78	2/9
138/9	4/9	0/17	0/142	1/626	1/138	138/68	4/9
224/2	5/5	0/28	0/141	1/585	1/109	224/50	5/5

$$V = \iint \left[k_w w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] w(a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (31)$$

تابعی انرژی بر حسب انرژی های پتانسیل، کرنشی و جنبشی به صورت رابطه (32) بیان می شود:

$$\Pi = U + V - K \quad (32)$$

با حذف مولفه های هارمونیک و جایگذاری توابع جابه جایی در معادله (32) ماکزیمم فانکشنال انرژی مطابق رابطه (33) بیان می شود:

$$\hat{\Pi} = U_{\max} + V_{\max} - K_{\max} \quad (33)$$

با کمینه کردن فانکشنال معادله بالا نسبت به ضرایب به دست می آید. طبق رابطه (34) داریم:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (34)$$

که منجر به معادله مقدار ویژه به صورت رابطه (35) می شود:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

برای به دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم کافی است دترمینان ماتریس ضرایب مساوی صفر قرار داده شود. طبق رابطه (36) داریم:

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

مولفه های S_{ij} ماتریس ضرایب در معادله (36) در پیوست آمده است.

5- بحث و نتایج

در این تحقیق پوسته های کامپوزیتی مخروطی ناقص با زمینه پلی متیل - متاکریل (PMMA)¹ که با نانو لوله های کربنی تک جداره (10.10) به-صورت یکنواخت در راستای یال مخروط تقویت شده اند، مورد بررسی قرار گرفته اند. که زوج مرتب (10.10) مولفه های بردار کایرال² نانو لوله هستند و نوع نانو لوله های تک جداره را مشخص می کند [45]. ابتدا به بررسی خواص مادی پلیمر مورد نظر و نانو لوله های کربنی تک جداره (10.10) پرداخته شده است.

خواص مادی نانو لوله که وابسته به ابعاد نانو لوله و دما می باشند از شبیه سازی دینامیک مولکولی به دست آمده اند [30]. نتایج نمونه در جدول 1 ارائه شده است. خواص مادی پلیمر زمینه که از جنس پلی متیل - متاکریل در

3- CNTRCs

4 -Love first-approximation theory

1- Poly Methyl Methacrylate

2 -Chiral Vector

- تقویت یک سازه با نانولوله‌های کربنی هرچند با درصد حجمی بسیار کم (0/25%) می‌تواند به میزان چشم‌گیری فرکانس ارتعاش آن را افزایش دهد.
- با افزایش کسر حجمی نانو لوله‌های تقویتی فرکانس به میزان بیشتری افزایش می‌یابد.
- میزان افزایش فرکانس ارتعاش در اثر تقویت با نانولوله‌های کربنی به عدد موج (n) نیز بستگی دارد.
- بسته به کسر حجمی نانولوله‌ها حداقل فرکانس ممکن است به‌ازای مقادیر مختلف عدد موج (n) (مود ارتعاش) رخ دهد.

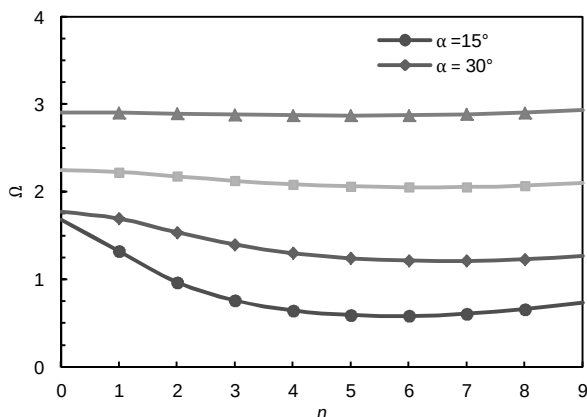
جدول 4 فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده به‌ازای مقادیر مختلف عدد موج در راستای یال مخروط m

$(L \sin \alpha = 0.1, a = b - L \sin \alpha \quad n=1)$ و از جنس آلومینیم			
$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	m
0/642763	0/794965	0/920818	1
1/46797	1/19388	1/04562	2
3/07978	2/17442	1/39250	3
5/34530	3/66191	2/04087	4
8/19612	5/58496	2/96342	5
11/5759	7/90120	4/12578	6

جدول 5 تغییرات فرکانس سازه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌داره برحسب

مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله‌ها				
N	کسر حجمی نانولوله			
	0/25%	2%	5%	10%
1	28/04%	150/9%	265/81%	385/94%
2	6/77%	44/63%	85/15%	131/64%
3	17/34%	31/06%	39/37%	50/96%
4	12/26%	32/80%	42/90%	54/42%
5	6/79%	75/26%	119/72%	142/36%

تغییرات به صورت درصدی نسبت به حالت بدون نانولوله تقویتی داده شده است.



شکل 3 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 12% بر حسب n

است که در این تئوری از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌شود، ولی در مقاله حاضر از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، که دقیق‌تر و به واقعیت نزدیک‌تر است، استفاده شده است.

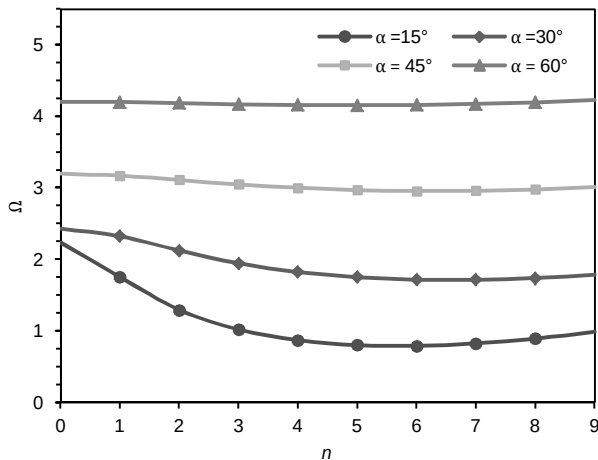
در جدول 4 تغییرات فرکانس بی‌بعد Ω پوسته مخروطی ناقص با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده برای زوایای راس مختلف و خواص مادی و ابعاد هندسی $\nu = 0.3$, $E = 70$ (GPa), $G = 26.9$ (GPa), $\rho = 2710$ (kgm⁻³), $b = 0.4$ (m), $L = 0.1/\sin \alpha$ و $n=1$ به‌ازای عدد موج‌های در راستای یال مخروط (m) مختلف به‌دست آمده و مشاهده می‌شود که در تمام زوایای به‌ازای $m=1$ فرکانس‌های بی‌بعد پوسته مخروطی حداقل مقدار را دارد. از شکل‌های 3 تا 5 می‌توان دریافت که با افزایش زاویه راس مخروط α فرکانس بی‌بعد Ω افزایش می‌یابد، همچنین با بزرگتر شدن زاویه راس مخروط میزان وابستگی فرکانس بی‌بعد Ω به عدد موج n کاهش می‌یابد یعنی دیگر با تغییر n شدت تغییرات Ω زیاد نیست. علاوه بر این از شکل‌های 3 تا 5 مشاهده می‌گردد که مقدار حداقل فرکانس بی‌بعد بسته به زاویه راس مخروط تغییر کرده است. بدین ترتیب که در زوایای راس 15° , 30° و 45° و 60° حداقل فرکانس بی‌بعد به‌ترتیب مربوط به اعداد موج محیطی 6, 7, 6 و 5 می‌باشد.

به‌منظور بررسی صحت نتایج به‌دست آمده برای پوسته تقویت شده با نانولوله‌های کربنی نتایج حاصل با نتایج به‌دست آمده در مرجع [46] مقایسه شده است. نتایج حاصل از مرجع [46] حاکی از آن است تقویت یک سازه با نانولوله‌های کربنی تک‌داره فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آن را تا 500% افزایش می‌دهد. بخشی از نتایج به‌دست آمده در این تحقیق در جدول 5 آمده است که می‌توان نتایج زیر از آن استخراج نمود:

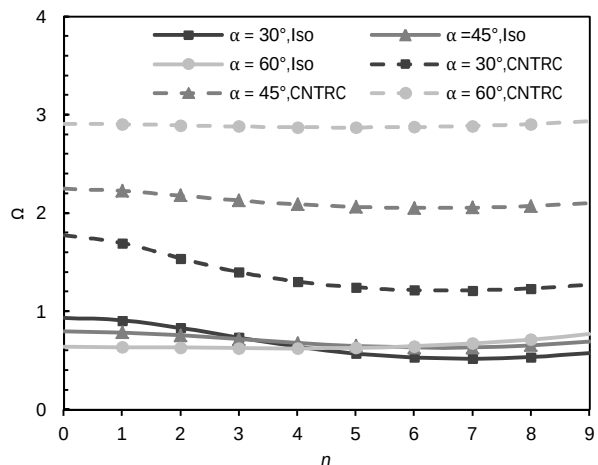
جدول 3 فرکانس بی‌بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده ($m=1, L \sin \alpha = 0.1, a = b - L \sin \alpha$)

n	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	
2	0/6348	0/7655	0/8420	هوا [22]
	0/637436	0/766729	0/843117	تحقیق حاضر
3	0/6238	0/7212	0/7376	هوا [22]
	0/631664	0/727617	0/744890	تحقیق حاضر
4	0/6145	0/6739	0/6362	هوا [22]
	0/629497	0/687627	0/651349	تحقیق حاضر
5	0/6111	0/6323	0/5528	هوا [22]
	0/634844	0/655668	0/579622	تحقیق حاضر
6	0/6171	0/6035	0/4950	هوا [22]
	0/650742	0/638403	0/536970	تحقیق حاضر

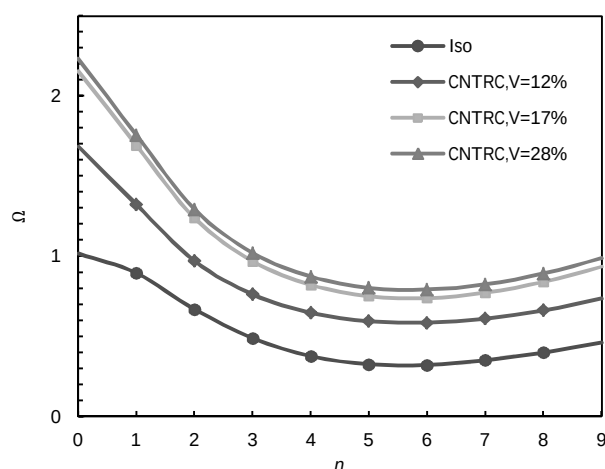
بیشتری افزایش می یابد. به عبارت دیگر می توان گفت که تأثیر افزایش نسبت ضخامت به شعاع مخروط بر روی افزایش فرکانس های پوسته مخروطی با افزایش زاویه رأس افزایش می یابد.



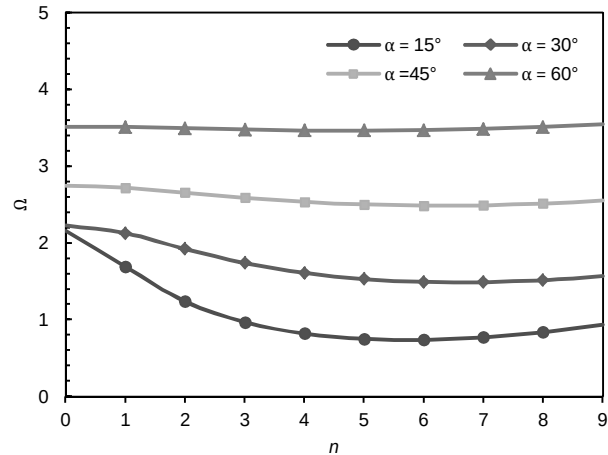
شکل 4 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 17% بر حسب n



شکل 5 مقایسه فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 12% بر حسب n



شکل 6 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با زاویه راس $\alpha = 15^\circ$ با تکیه گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی های مختلف

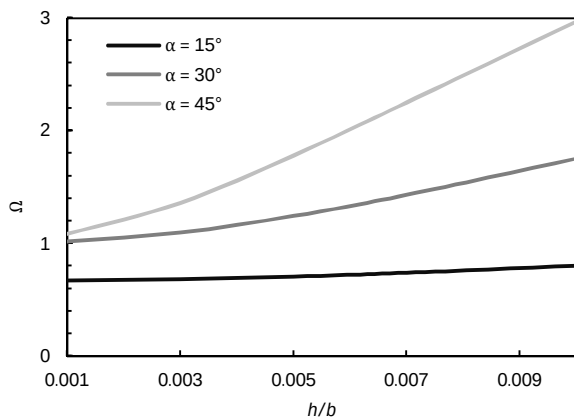


شکل 7 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 17% بر حسب n

دریافت که هر چه زاویه راس مخروط α افزایش می یابد تأثیر نانولوله های کربنی تقویتی بر روی افزایش فرکانس های بی بعد بیشتر می شود. به عنوان مثال برای $\alpha = 15^\circ$ فرکانس بی بعد Ω ، بسته به عدد موج محیطی n ، 165% تا 182%، برای $\alpha = 30^\circ$ 189% تا 234%، برای $\alpha = 45^\circ$ 282% تا 325%، برای $\alpha = 60^\circ$ 400% تا 456% افزایش یافته است. که این نتایج با نتایج حاصل در مرجع [46] کاملاً همخوانی دارد. در هر یک از زوایای راس مخروط مقدار فرکانس حداقل در مقدار متفاوتی از n رخ می دهد، از طرفی با بزرگتر شدن زاویه راس مخروط میزان وابستگی فرکانس بی بعد Ω به عدد موج n کاهش می یابد یعنی دیگر با تغییر n شدت تغییرات Ω زیاد نیست و نمودار به صورت خطی تقریباً افقی در می آید. به عنوان مثال منحنی مربوط زاویه 30° با افزایش n به سمت پایین متمایل می شود ولی منحنی مربوط به زاویه 60° درجه تقریباً افقی و بدون تغییر است. به همین دلیل منحنی های حالت ایزوتروپیک یکدیگر را در $n = 4$ و 5 قطع می کنند.

در شکل های 7 و 8 به ترتیب تأثیر کسر حجمی های مختلف از نانولوله کربنی تقویتی بر روی افزایش فرکانس های بی بعد پوسته مخروطی با زاویه رأس 15° و 30° نشان داده شده است. همان طور که به وضوح مشاهده می شود با تقویت پوسته مخروطی با نانولوله ها حتی با کسر حجمی پایین 12% فرکانس های پوسته مورد نظر افزایش یافته است و سختی آن بیشتر شده است. شکل 7 همچنین نشان می دهد که به طور میانگین افزایش فرکانس بی بعد پوسته مخروطی مورد نظر در اثر تقویت با نانو لوله های کربنی برای کسر حجمی 12%، 17% و 28% به ترتیب 170%، 220% و 240% بوده است. می توان مشاهده نمود که اختلاف چندانی میان فرکانس های بی بعد برای کسر حجمی 28% و 17% وجود ندارد، ولی این اختلاف بین دو کسر حجمی 17% و 12% بیشتر است. البته با افزایش زاویه راس مخروط این شرایط دیگر برقرار نیست به عنوان مثال در شکل 8 اختلاف میان فرکانس های بی بعد با کسر حجمی 28% و 17% بیشتر شده است. در شکل 8 مشاهده می گردد که افزایش فرکانس بی بعد پوسته مورد نظر به طور میانگین برای کسر حجمی 12%، 17% و 28% به ترتیب 220%، 260% و 300% نسبت به حالت بدون نانولوله تقویتی افزایش یافته است.

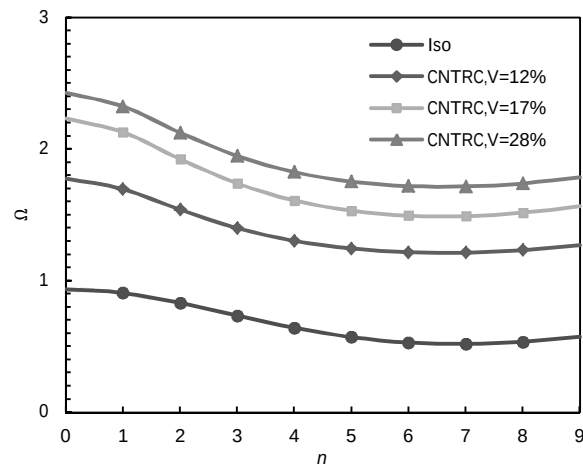
در شکل 9 اثرات نسبت ضخامت به شعاع سر بزرگ پوسته مخروطی نشان داده شده است. در این نمودار مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع مخروط مقدار فرکانس بی بعد Ω افزایش می یابد. همچنین می توان مشاهده نمود که با افزایش زاویه رأس مخروط، مقدار فرکانس بی بعد با شیب



شکل 9 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی 28% با تغییر نسبت h/b برای زوایای راس مخروط مختلف ($n=5$)

جدول 6 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده به ازای تغییرات سختی بستر الاستیک

پوسته ایزوتروپیک از جنس آلومینیم، ($n,m=2,1$)		پوسته تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی 12%، ($n,m=1$)		K_p (N/m)	K_w (N/m ³)
$\alpha=45^\circ$	$\alpha=30^\circ$	$\alpha=45^\circ$	$\alpha=30^\circ$		
0/76629	0/84317	2/22735	1/69684	0	0
0/80226	0/88526	2/33541	1/80034	10^6	
0/82601	0/90578	2/37625	1/82417	$2/5 \times 10^6$	
0/83277	0/93077	2/41315	1/85236	5×10^6	
0/82449	0/89788	2/31812	1/79309	0	
0/85022	0/92871	2/40214	1/83526	10^6	10^6
0/86110	0/94566	2/45635	1/85218	$2/5 \times 10^6$	
0/88011	0/97021	2/50541	1/88615	5×10^6	
0/86144	0/94003	2/43502	1/84129	0	2×10^6
0/88028	0/98113	2/51025	1/87624	10^6	
0/89217	1/01210	2/57821	1/89805	$2/5 \times 10^6$	
0/91576	1/04473	2/63653	1/93742	5×10^6	4×10^6
0/90645	1/02783	2/56298	1/90521	0	
0/94788	1/07677	2/67539	1/96552	10^6	
0/97397	1/10303	2/75445	2/03217	$2/5 \times 10^6$	
1/01130	1/15480	2/81148	2/11256	5×10^6	



شکل 8 تغییرات فرکانس بی بعد $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$ برای پوسته مخروطی ناقص با زاویه راس $\alpha=30^\circ$ با تکیه گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با نانولوله با کسر حجمی های مختلف

در جدول 6 تاثیرات بستر الاستیک بر روی فرکانس های طبیعی ارتعاش پوسته مخروطی ناقص ایزوتروپیک از جنس آلومینیم و همچنین پوسته کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله های کربنی با تکیه گاه ساده مورد بررسی قرار گرفته است. در این جدول شانزده حالت برای سختی های بستر الاستیک در نظر گرفته شده است، به این صورت که چهار حالت برای سختی بستر وینکلر با مقادیر $0, 10^6, 2 \times 10^6, 4 \times 10^6$ در نظر گرفته شده است و برای هر کدام از این حالات نیز چهار حالت برای سختی بستر پاسترناک با مقادیر $0, 10^6, 2/5 \times 10^6, 5 \times 10^6$ در نظر گرفته شده است. مشاهده می گردد که احاطه نمودن پوسته مورد نظر با بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانس های طبیعی ارتعاش آن می گردد. با افزایش سختی های بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک فرکانس های بی بعد سیستم افزایش می یابد. همچنین با توجه به جدول 6 می توان گفت که تاثیر سختی های بستر وینکلر و پاسترناک بر روی افزایش فرکانس های بی بعد طبیعی پوسته مخروطی یکسان است.

6- نتیجه گیری

در این تحقیق ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک، براساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. جهت اعمال خواص مکانیکی نانولوله ها از قانون مخلوط ها استفاده شده است. از روش ریتز و اعمال شرایط مرزی ساده، فرکانس های پوسته مخروطی ناقص به دست آمده اند.

نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان می دهد که با تقویت پوسته مخروطی با نانولوله های کربنی می توان سختی آن را به میزان دلخواهی افزایش داد. در واقع با تغییر کسر حجمی نانولوله های استفاده شده، فرکانس های ارتعاش آن را به میزان دلخواه تغییر داد. تأثیر نانولوله ها در افزایش فرکانس پوسته با افزایش زاویه رأس مخروط افزایش می یابد. افزایش نسبت ضخامت به شعاع سر بزرگ پوسته باعث افزایش فرکانس های ارتعاش آن می گردد و تأثیر این عامل در افزایش فرکانس ها با افزایش زاویه رأس مخروط افزایش می یابد. همچنین احاطه نمودن پوسته مورد نظر با بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانس های طبیعی ارتعاش آن می گردد.

7- پیوست

$$S_{44} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (2 l h^2 \sin \alpha + 4 h^2 a) - \frac{1}{8 \pi R^2 l} (4 \pi^3 C_{11} a R^2 + 4 A_{35} a l^2 R^2 \pi - 4 l^2 C_{12} R \pi \cos^2 \alpha - 2 l^3 C_{22} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 l^2 C_{22} a \pi \cos^2 \alpha + 2 \pi^3 C_{11} R^2 l \sin \alpha + 4 C_{66} n^2 a l^2 \pi + 4 l^2 C_{12} R \pi + 4 l^2 C_{22} a \pi + 2 l^3 C_{22} \pi \sin \alpha + 2 l^3 A_{55} R^2 \pi \sin \alpha + 2 l^3 C_{66} n^2 \pi \sin \alpha)$$

$$S_{45} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-2 C_{66} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha - 2 C_{12} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha + 2 l^3 C_{66} n \cos^2 \alpha + 2 l^3 C_{22} n \cos^2 \alpha - 4 \pi^2 C_{66} n a l R - 4 \pi^2 C_{12} n a l R - 2 l^3 C_{66} n - 2 l^3 C_{22} n)$$

$$S_{51} = 0, S_{52} = 0$$

$$S_{53} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-2 l^3 A_{44} n R \pi \sin \alpha - 4 A_{44} n a l^2 R \pi)$$

$$S_{54} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (2 l^3 C_{66} n \cos^2 \alpha - 2 C_{66} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha - 2 C_{12} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha + 2 l^3 C_{22} n \cos^2 \alpha - 4 \pi^2 C_{66} n a l R - 4 \pi^2 C_{12} n a l R - 2 l^3 C_{66} n - 2 l^3 C_{22} n)$$

$$S_{55} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (2 l h^2 \sin \alpha + 4 h^2 a) - \frac{1}{8 \pi R^2 l} (4 \pi^3 C_{66} a R^2 + 2 l^3 C_{22} n^2 \pi \sin \alpha - 4 l^2 C_{66} R \pi \cos^2 \alpha - 2 l^3 C_{66} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 l^2 C_{66} a \pi \cos^2 \alpha + 2 \pi^3 C_{66} \sin \alpha R^2 l + 4 A_{44} a l^2 R^2 \pi + 4 C_{22} n^2 a l^2 \pi + 4 l^2 C_{66} R \pi + 4 l^2 C_{66} a \pi + 2 C_{66} l^3 \pi \sin \alpha + 2 l^3 A_{44} R^2 \pi \sin \alpha)$$

که در آن A_{ij} ، B_{ij} و C_{ij} طبق رابطه زیر تعریف شده‌اند.

$$\{A_{ij} \ B_{ij} \ C_{ij}\} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Q_{ij} \{1 \ z \ z^2\} dz$$

8- مراجع

- [1] M. J. Ebrahimi, M. M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 27-38, 2013. (In Persian)
- [2] Sh. Hosseini-Hashemi, K. Khorami, Analysis of free vibrations of moderately thick cylindrical shells made of functionally graded materials using differential quadrature method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, 2011. (In Persian)
- [3] K. Daneshjou, R. Madoliat, M. Talebitooti, Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 80-94, 2012. (In Persian)
- [4] A. Arjangpay, R. Ansari, M. Darvaz, Vibration analysis of a FGM cylindrical shell using MLPG method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 93-101, 2012. (In Persian)
- [5] C. H. Sun, F. Li, H. M. Cheng, G. Q. Lu, Axial Young's modulus prediction of single-walled carbon nanotube arrays with diameters from nanometer to meter Scales, *Applied Physics Letters*, Vol. 87, pp. 193101-3, 2005.
- [6] R. Zhu, E. Pan, A. K. Roy, Molecular dynamics study of the stress-strain behavior of carbon-nanotube reinforced Epon 862 composites, *Material Science Engineering A*, Vol. 447, No. 1-2, pp. 51-7, 2007.
- [7] J. D. Fidelus, E. Wiesel, F. H. Gojny, K. Schulte, H. D. Wagner, Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites, *Composites Part A*, Vol. 36, No. 11, pp. 1555-61, 2005.
- [8] M. Griebel, J. Hamaekers, Molecular dynamics simulations of the elastic moduli of polymer-carbon nanotube composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 17-20, pp. 1773-88, 2004.
- [9] Y. S. Song, J. R. Youn, Modeling of effective elastic properties for polymer based carbon nanotube composites, *Polymer*, Vol. 47, No. 5, pp. 1741-8, 2006.

$$S_{11} = \frac{\rho h \omega^2 l}{2} - \frac{1}{8 \pi R^2 l} (4 \pi^3 A_{11} a R^2 - 4 l^2 A_{12} R a \cos^2 \alpha - 2 l^3 A_{22} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 l^2 A_{22} a \pi \cos^2 \alpha + 2 \pi^3 A_{11} R^2 l \sin \alpha + 4 A_{66} n^2 a l^2 \pi + 4 l^2 A_{12} R \pi + 4 l^2 A_{22} a \pi + 2 l^3 A_{22} \pi \sin \alpha + 2 l^3 A_{66} n^2 \pi \sin \alpha)$$

$$S_{12} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-2 A_{22} n \sin \alpha l^2 R \pi^2 + 2 l^3 A_{66} n \cos^2 \alpha - 4 \pi^2 A_{66} n a l R + 2 l^3 A_{22} n \cos^2 \alpha - 4 \pi^2 A_{12} n a l R - 2 A_{66} n \sin \alpha l^2 R \pi^2 - 2 l^3 A_{22} n - 2 l^3 A_{66} n)$$

$$S_{13} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-4 \pi^2 A_{12} \cos \alpha a l R - 2 A_{22} \cos \alpha \sin \alpha l^2 R \pi^2 + 2 l^3 A_{22} \cos^3 \alpha - 2 l^3 A_{22} \cos \alpha)$$

$$S_{14} = 0, S_{15} = 0$$

$$S_{21} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-2 A_{22} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha + 2 l^3 A_{66} n \cos^2 \alpha - 4 \pi^2 A_{66} n a l R + 2 l^3 A_{22} n \cos^2 \alpha - 4 \pi^2 A_{12} n a l R - 2 A_{66} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha - 2 l^3 A_{22} n - 2 l^3 A_{66} n)$$

$$S_{22} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (48 a + 24 l \sin \alpha) - \frac{1}{8 \pi R l} (4 \pi^3 A_{66} a R^2 + 2 l^3 A_{22} n^2 \sin \alpha \pi - 4 l^2 A_{66} R \pi \cos^2 \alpha - 2 l^3 A_{66} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 l^2 A_{66} a \cos^2 \alpha \pi + 2 \pi^3 A_{66} \sin \alpha R^2 l + 4 A_{22} n^2 a l^2 \pi + 4 l^2 A_{66} R \pi + 4 l^2 A_{66} a \pi + 2 A_{66} l^3 \sin \alpha \pi)$$

$$S_{23} = -\frac{1}{8 \pi R l} (2 l^3 A_{22} n \cos \alpha \sin \alpha \pi + 4 A_{22} n \cos \alpha a l^2 \pi)$$

$$S_{24} = 0, S_{25} = 0$$

$$S_{31} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-4 \pi^2 A_{12} a l R \cos \alpha - 2 A_{12} l^2 R \pi^2 \cos \alpha \sin \alpha + 2 l^3 A_{22} \cos^3 \alpha - 2 l^3 A_{22} \cos \alpha)$$

$$S_{32} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (2 l^3 A_{22} n \cos \alpha \pi \sin \alpha + 4 A_{22} n a l^2 \pi \cos \alpha)$$

$$S_{33} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (48 a + 24 l \sin \alpha) - \frac{1}{8 \pi R^2 l} (4 \pi^3 A_{55} a R^2 + 2 \pi^3 A_{55} R^2 l \sin \alpha + 4 l^2 A_{22} a \pi \cos^2 \alpha + 4 A_{44} n^2 a l^2 \pi + 2 l^3 A_{22} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 l^3 A_{44} n^2 \pi \sin \alpha) - \frac{\omega^2}{4 l} (2 k_p \pi a \sin 2 \pi - 2 k_p \pi^2 a - 2 k_w l^2 - k_p \pi^2 l \sin \alpha)$$

$$S_{34} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (2 A_{55} l^2 R^2 \pi^2 \sin \alpha + 4 \pi^2 A_{55} a l R^2)$$

$$S_{35} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (-2 l^3 A_{44} n R \pi \sin \alpha - 4 A_{44} n a l^2 R \pi)$$

$$S_{41} = 0, S_{42} = 0$$

$$S_{43} = -\frac{1}{8 \pi R^2 l} (2 A_{55} l^2 R^2 \pi^2 \sin \alpha + 4 \pi^2 A_{55} a l R^2)$$

- [28] X. Zhao, K. M. Liewa, Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method, *Composite structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 649-664, 2011.
- [29] H. Shen Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2096-2108, 2011.
- [30] H. Shen Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 10, pp. 2496-2503, 2011.
- [32] R. Moradi-Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Materials & Design*, Vol. 44, No. 1, pp. 256-266, 2013.
- [33] M. H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmati, Three-dimensional free vibration of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Materials & Design*, Vol. 49, No. 1, pp. 583-590, 2013.
- [34] H. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 111, pp. 291-300, 2014.
- [35] P. Malekzadeh, A. R. Fiouz, M. Sobhrouyan, Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 89, No. 1, pp. 210-221, 2012.
- [36] M. M. Fotouhi, R. D. Firouz-Abadi, H. Haddadpour, Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 64, No. 1, pp. 14-22, 2013.
- [37] R. D. Firouz Abadi, M. M. Fotouhi, H. Haddadpour, Stability analysis of nanocones under external pressure and axial compression using nonlocal shell model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 9, pp. 1832-1837, 2012.
- [38] R. D. Firouz-Abadi M. M. Fotouhi, H. Haddadpour, Free vibration analysis of nanocones using a nonlocal continuum model, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 41, pp. 3593-3598, 2011.
- [39] G. D. Seidel, D. C. Lagoudas, Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites, *Mechanics of Materials*, Vol. 38, No. 8-10, pp. 884-907, 2006.
- [40] V. Anumandla, R. F. Gibson, A comprehensive closed form micromechanics model for estimating the elastic modulus of nanotube-reinforced composites, *Composites Part A*, Vol. 37, No. 12, pp. 2178-85, 2006.
- [41] H. Shen Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 1, pp. 9-19, 2009.
- [42] M. E. Fares, Y. G. Youssif, A. E. Alamir, Design and control optimization of composite laminated truncated conical shells for minimum dynamic response including transverse shear deformation, *Composite Structures*, Vol. 64, No. 2, pp. 139-150, 2004.
- [43] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- [44] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, Natural frequency of laminated orthotropic shells with different boundary conditions and resting on the Pasternak type elastic foundation, *Composites: Part B*, Vol. 42, No. 6, pp. 1562-1570, 2011.
- [45] R. Rahmani, A. Qurban Pour, A. Rastgoo, *Introduction to Nanocomposites and Nano-Tubes*, Tehran: Academic book Publication, 2012. (In Persian)
- [46] G. Formica, W. Lacarbonara, R. Alessi, Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 10, pp. 1875-1889, 2010.
- [10] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/ carbon nanotube composites, *Computational Material Science*, Vol. 39, No. 2, pp. 315-23, 2007.
- [11] P. Bonnet, D. Sireude, B. Garnier, O. Chauvet, Thermal properties and percolation in carbon nanotube-polymer composites, *Journal of Applied Physics*, Vol. 91, pp. 201910-4, 2007.
- [12] P. Joshi, S. H. Upadhyay, Evaluation of elastic properties of multi-walled carbon nanotube reinforced composite, *Computational Materials Science*, Vol. 81, No. 1, pp. 332-338, 2014.
- [13] T. Vodenitcharova, L. C. Zhang, Bending and local buckling of a nanocomposite beam reinforced by a single-walled carbon nanotube, *International Journal of Solid Structures*, Vol. 43, No. 10, pp. 3006-24, 2006.
- [14] J. Wuite, S. Adali, Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis, *Composite Structures*, Vol. 71, No. 3-4, pp. 388-96, 2005.
- [15] M. H. Yas, M. Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beam reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 4, pp. 1371-1394, 2012.
- [16] M. H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, No. 1, pp. 119-128, 2012.
- [16] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Free vibration of a conical shell with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 82, No. 1, pp. 83-94, 1982.
- [17] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Natural frequencies of truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 92, No. 3, pp. 447-453, 1984.
- [18] A. W. Leissa, *Vibration of Shells*, New York: Acoustic Society of America, 1993.
- [19] K. R. Sivasadas, N. Ganesan, Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness, *Computer and Structures*, Vol. 36, No. 3, pp. 559-566, 1990.
- [20] K. R. Sivasadas, N. Ganesan, vibration analysis of thick composite clamped conical shells of varying thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152, No. 1, pp. 27-37, 1992.
- [21] K. R. Sivasadas, N. Ganesan, Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 148, No. 3, pp. 477-491, 1991.
- [22] L. Hua, Frequency analysis of rotating truncated circular orthotropic conical shells with different boundary conditions, *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 16, pp. 2945-2955, 2000.
- [23] F. M. Li, K. Kishimoto, W. H. Huang, The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh-Ritz method, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 5, pp. 595-602, 2009.
- [24] F. Tornabene, Free vibration analysis of functionally graded conical shell, cylindrical shell and annular plate structures with a four- parameter power-law distribution, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 37-40, pp. 2911-2935, 2009.
- [25] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, H. M. Halilov, The vibration and stability of non-homogeneous orthotropic conical shells with clamped edges subjected to uniform external pressures, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, No. 7, pp. 1807-1822, 2010.
- [26] A. H. Sofiyev, large-amplitude vibration of non-homogenous orthotropic composite truncated conical shells, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 61, pp. 365-374, 2014.
- [27] A. R. Setoodeh, M. Tahani, E. Selahi, Transient dynamic and free vibration analysis of functionally graded truncated conical shells with non-uniform thickness subjected to mechanical shock loading, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 5, pp. 2161-2171, 2012.