مجله مهندسی مکانیک مدرس، فوق‌العاده اسفند 1393، دوره 14، شماره 16، ص‌ص 152-162

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل مکانیک غیرخطی اندرکنش سازه نامتقارن با جداساز لرزه‌ای تحت بارهای هارمونیک و زلزله و مطالعه پدیده‌های غیرخطی آن

مجید امین افشار[1*] ، سپهر آقایی‌پور[2]

1- استادیار، مهندسی عمران-سازه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران-سازه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین

* قزوین، صندوق پستی 16818-34149، mafshar@eng.ikiu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 مرداد 1393

پذیرش: 15 شهریور 1393

ارائه در سایت: 10 آبان 1393

کلید واژگان:

مکانیک غیرخطی

جداساز لرزه‌ای

سازه نامتقارن

پدیده‌های غیرخطی

چکیده

امروزه، تجهیز ساختمان با جداساز لرزه‌ای از روش‌های متداول مقاوم‌سازی لرزه‌ای ساختمان‌هاست. هدف اصلی این روش، کاهش جابه‌جایی نسبی طبقات سازه و در عوض ایجاد حرکت جسم صلب در آن از طریق نصب مصالحی نرم و انعطاف‌پذیر به‌نام الاستومر در پای ساختمان است. با توجه به کثرت اجرای ساختمان‌های دارای پلان نامنظم و نیز شدت خسارت‌های ناشی از زلزله به این نوع سازه‌ها، در این مقاله، مکانیک اندرکنشی سازه نامتقارن جداسازی شده مطالعه می‌شود و معادلات حرکت آن در دو دستگاه مختصات، یکی نصب شده بر پایه ساختمان (مختصات کلی) و دیگری نصب شده بر کف طبقه جداساز در حال دوران (مختصات محلی)، ارائه می‌شود. در دیدگاه متداول، معادلات حرکت در سیستم مختصات نخست به فرم خطی به‌دست می‌آیند، حال آنکه در نگرش جدید پیشنهادی این تحقیق، بررسی مکانیک حرکت در سیستم مختصات دومی، به معادلاتی از نوع غیرخطی منجر می‌شود. سه نوع سازه با نسبت‌های فرکانس طبیعی هم‌بسته پیچشی-جانبی به فرکانس طبیعی جهت متقارن معرفی می‌شود. پاسخ‌های دو مدل خطی و غیرخطی برای 3 نوع سازه، تحت اثر تحریکات هارمونیک و زلزله در تحلیل تاریخچه زمانی و محتوای فرکانسی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. مشاهده می‌شود که در برخی موارد، تفاوت‌هایی بین دو مدل خطی و غیرخطی وجود دارد. سپس، بروز برخی از پدیده‌های غیرخطی نظیر اشباع، انتقال انرژی بین مدها و جابه‌جایی صلب در این نوع سازه‌ها بررسی می‌شود.

Nonlinear Mechanic Model of Asymmetric Base-Isolated Structures Interaction against Harmonic Loads and Earthquake, and Study of Related Nonlinear Phenomena

Majid Amin Afshar[1*], Sepehr Aghaei Pour[2]

1- Department of Technology and Engineering, Emam Khomeini International University, Qazvin, Iran

2- Department of Technology and Engineering, Emam Khomeini International University, Qazvin, Iran

* P.O.B. 34149-16818 Qazvin, Iran, mafshar@eng.ikiu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 August 2014
Accepted 06 September 2014
Available Online 01 November 2014

Keywords:
Nonlinear Mechanics
Base Isolator
Asymmetric Structure
Nonlinear Phenomena

ABSTRACT

Today, base isolation of buildings is a conventional approach to earthquake resistance. The main objective is to reduce displacement of the structure by movement of elastomeric bearings installed on the base of structures on the ground. Considering widespread construction of asymmetric buildings as well as the intensity of their damages resulting from earthquake, the present research covers study of interaction mechanics of asymmetric base-isolated structures, where the equations of motion are presented in two coordinates, one fixed on the building base (global coordinate) and the other on the torsional isolation level (local coordinate). In this conventional approach, the equations of motion are calculated on linear form in the initial coordinate system, whereas in the new approach proposed in this research, the motion mechanics analysis in the secondary coordinate system will lead to non-linear equations. Three types of structures are proposed with ratio of torsional-lateral correlated natural frequency on asymmetric natural frequency. Responses of both linear and nonlinear methods for the three types of structures under harmonic effects and earthquake are compared while analyzing time history and frequency solutions. Some differences are observed between the linear and nonlinear methods. Then, some non-linear phenomena such as saturation, energy transfer between modes, and rigid displacement in such structures are also analyzed.

1- مقدمه

بسیاری از خسارت‌های ساختمان‌ها تحت تاثیر زلزله، ناشی از تحریکات پیچشی به واسطه نامنظمی پلان است. بسیاری از تحقیق‌ها نشان داده که اثر مخرب زلزله در ساختمان با پلان نامتقارن بسیار بیشتر از ساختمان‌های منظم است. لذا، مطالعه بیشتر در بررسی رفتار سازه‌های نامنظم تحت زلزله الزامی به‌نظر می‌رسد. از طرفی، در مدت 40 سال گذشته مبحث جداساز

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

M. Amin Afshar, S. Aghaei Pour, Nonlinear Mechanic Model of Asymmetric Base-Isolated Structures Interaction against Harmonic Loads and Earthquake, and Study of Related Nonlinear Phenomena, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 16, pp. 152-162, 2015 (In Persian)

لرزه‌ای به‌صورت یک واقعیت علمی و کاربردی در آمده است و این به‌واسطه تکیه‌گاه‌های چند لایه الاستومریک نصب شده در پای ساختمان‌هاست، به‌گونه‌ای که خسارات ناشی از زلزله در ساختمان‌های نامنظم را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد[1].

در بیشتر تحقیقات گذشته، مدل خطی سازه جداسازی شده در سیستم مختصات کلی مورد بررسی قرار گرفته است. تنا کولنگا و گومز سابرون[2]، به بررسی پاسخ‌های یک سازه جداسازی شده نامتقارن با خروج از مرکزیت جرم در روسازه تحت زلزله پرداختند. ایشان در تحقیق خود روی یک ساختمان 3 طبقه با پلان متقارن در سختی المان‌های مقاوم همراه با خروج از مرکزیت جرم، تأثیر جداگر لرزه‌ای LRB[1] را در کاهش اثرات پیچشی بررسی نمودند. همچنین، تأثیر مقادیر مختلف نسبت فرکانس پیچشی به جانبی در روسازه را مورد تحلیل قرار دادند. تنا کولنگا در کار دیگر خود به همراه کروز[3]، بر روی مدل قبلی تحقیق خود[2]، کارهای گسترده‌ای انجام داد. به این ترتیب که تأثیرات خروج از مرکزیت جرم روسازه و خروج از مرکزیت در سیستم جداگر را مورد تحلیل قرار داد و محدوده زمان تناوب را بین 1/5 تا 3 ثانیه درنظر گرفت و مقادیر مختلف پاسخ را به‌دست آورد. همچنین، تنا کولنگا و کروز[4] ضمن بررسی کارهای صورت گرفته در مطالعات قبلی خود، تأثیر خروج از مرکزیت سختی در روسازه را نیز بررسی کردند. آقای دلالیرا و همکارانش[5]، نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی از سازه نامتقارن خطی، با دمپرهای اصطکاکی و ویسکوالاستیک را بررسی نمودند. نتایج براساس جرم و سختی مدل 6 طبقه نامتقارن همراه با دمپرهای اصطکاکی ارائه شد که البته با دمپرهای ویسکوالاستیک نیز نتایج یکسانی به‌دست آمد. آقای دلالیرا و همکاران در فعالیتی دیگر[6]، پاسخ زلزله را برای سازه جداسازی شده و با همبستگی پیچشی-جانبی بررسی کردند. هدف اساسی ارائه روند ساده برای تخمین جابه‌جایی لبه سازه و جداساز بود. همچنین، آن‌ها[7] سازه را به‌صورت دو بخش مجزا جداساز و سازه رو بنا درنظر گرفتند. سازه رو بنا به‌صورت یک جسم صلب تحت پاسخ شتاب عمل می‌کرد که این ساده‌سازی نیز نتایج خوبی در تخمین پاسخ سیستم به‌همراه داشت. آقایان کیلار و کورن[8]، سعی در درک بهتر رفتار سازه جدا شده نامتقارن داشتند. آن‌ها حالات مختلفی از سازه بتن آرمه 4 طبقه جداسازی شده با پراکندگی‌های گوناگون جداساز LRB را مورد ملاحظه قرار دادند. آن‌ها مشاهده کردند، هنگامی که مرکز جرم منطبق بر مرکز پراکندگی جداساز باشد، اثرات پیچشی را در سیستم جداسازی کاهش می‌دهد و همچنین خسارت بیشتری در المان‌های مقاوم جهت انعطاف‌پذیرتر (دور از مرکز سختی) ایجاد می‌شود. آقای شربتدار و همکاران[9] به ارائه پاسخ لرزه‌ای سازه جداسازی شده با جداگرهای LRB و FPS[2] تحت حرکت زمین نزدیک گسل پرداختند. آنها مشاهده کردند که جابه‌جایی‌های بزرگ و ضربه‌های سرعتی در ثبت حرکت زمین نزدیک به گسل نتایج پاسخ لرزه‌ای سازه جداسازی شده را تغییر می‌دهد. وجه مشترک تمام این تحقیقات بررسی دینامیکی مدل‌ها برای همبستگی پیچشی-جانبی در سیستم مختصات کلی است.

به هر حال، اغلب محققان در حوزه مهندسی سازه، تاکنون به غیرخطی بودن اینرسی به واسطه همبستگی پیچشی-جانبی توجهی نداشتند. یک باور غلط در مورد غیرخطی هندسی بودن (اینرسی)، چشم‌پوشی از پاسخ‌ها و تحریکات کوچک تحت تاثیر عبارات غیرخطی در معادلات حاکم بر حرکت سیستم غیرخطی، به کمک فرایند خطی سازی آن‌ها است، حال آنکه در واقعیت، حتی کوچک‌ترین پاسخ‌ها و تحریکات به بروز پدیده‌های غیرعادی و عجیب منجر خواهد شد. انتقال انرژی بین مدهای طبیعی، چرخه، اشباع، پرش و غیره از پدیده‌های غیرخطی هستند که در مدل خطی مشاهده نمی‌شوند. کنکاش و بررسی این پدیده‌ها در حوزه اندرکنش‌های غیرخطی، به‌عنوان شاخه‌ای از علم مکانیک غیرخطی، صورت می‌گیرد [10].

تحقیق‌های بسیاری نیز به بررسی رفتار دینامیکی در سیستم‌های مکانیک غیرخطی پرداختند. به‌عنوان مثال، می‌توان به همبستگی غیرخطی مدهای چرخشی و غلتشی در حرکت کشتی‌ها به واسطه امواج بزرگ[11]، آونگ صلب با یک جرم متمرکز تحت اثر نیروی بازگرداننده جاذبه یا یک فنر پیچشی[12]، حرکات اجباری همگام در دو نوسانگر همبسته مرتبه دوم[13]، سیستم‌های آونگ-فنر تحت اثر بار هارمونیک[14-16]، اتصال انعطاف‌پذیر میله با مکانیسم لغزنده[17]، ارتعاشات آزاد یک نانو صفحه تک‌لایه بر مبنای الاستیسیته غیرمحلی[18] و یک تیر مایل تحت اثر بار متحرک[19] اشاره کرد.

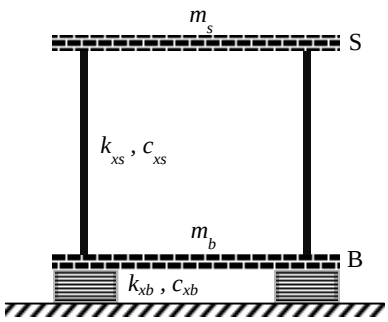
تا به حال در تمام تحقیق‌های صورت گرفته در زمینه دینامیک سازه‌های نامتقارن جداسازی شده، درجات آزادی سیستم در امتداد محورهای ثابت دستگاه مختصات کلی تعریف شده‌اند. نتیجه این نگرش متداول، ارائه معادلات حاکم بر حرکت سازه جداسازی شده به فرم خطی است. این در حالی است که راستای محورهای معرف پارامترهای سختی سازه، ثابت نبوده و امتداد آن‌ها با زاویه پیچش کف جداساز دوران می‌کند. این نگرش جدید به مشخصات سازه‌ای، منجر به تغییرات چشمگیر در معادلات دینامیکی حاکم بر رفتار همبسته پیچشی-جانبی سازه‌های جداسازی شده نامنظم (فرم غیرخطی) خواهد شد. هدف در این تحقیق ارائه مدل غیرخطی معادلات حرکت برای سازه جداسازی شده نامتقارن یک طرفه و مقایسه آن با مدل خطی متداول است. در تحلیل عددی، 3 نوع سازه انتخاب می‌شود، که در یکی از آن‌ها تفاضل اولین و دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی سازه و جداساز برابر فرکانس اول جهت متقارن است و در دیگری فرکانس اول پیچشی-جانبی جهت نامتقارن 2 برابر فرکانس اول جهت متقارن است و حال آنکه هیچ یک از دو شرط فوق در سازه آخر فراهم نیست. از این‌رو، پاسخ‌های دو مدل در این 3 نوع سازه، تحت اثر تحریکات هارمونیک و زلزله کوبه، با یکدیگر مقایسه می‌شوند و برخی پدیده‌های غیرخطی به واسطه غیرخطی بودن اینرسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

2- معادلات حرکت مدل

یک سازه یک طبقه جداسازی شده با پلان نامتقارن یک‌طرفه مورد بررسی قرار می‌گیرد. اساس مقاله بر پایه یک مدل سازه‌ای با دو جرم قرار دارد. جرم m_s نماینده روسازه (S) ساختمان و m_b جرم کف پایه (B) در بالای سیستم جداگر است. پارامترهای سازه‌ای نظیر سختی و میرایی جهت متقارن (X) در سازه با k_{xs} و c_{xs} و در جداگر با k_{xb} و c_{xb} نشان داده می‌شود (شکل 1).

همان‌طور که در شکل 2 نشان داده شده، پیکربندی فرضی پلان نامتقارن یک‌جهته سازه و جداساز را تحت بردار تحریکات زمین‌لرزه r_g در دو امتداد X و Y، درنظر بگیرید. این ساختمان دارای دیافراگم کف صلب با توزیع یکنواخت جرم و قاب‌های مسطح قرار گرفته در دو امتداد متعامد، است. در این تحقیق دو دستگاه مختصات تعریف می‌شود. دستگاه مختصات اول نصب شده در پایه ساختمان[20]، دستگاه مختصات کلی XYZ است و دومی نصب شده برکف جداساز، دستگاه مختصات محلی $x_by_bz_b$ است. مبدأ این دستگاه مختصات چرخان مرکز جرم جداساز است. دستگاه مختصات چرخان با زاویه

1- Lead-rubber bearing
2- Friction pendulum system



شکل 1 سازه یک طبقه جداسازی شده و پارامترهای سازه‌ای در جهت متقارن

پیچش θ_b دوران پیدا می‌کند و تمام جابه‌جایی‌ها، سختی‌ها و میرائی‌های سازه و جداساز در راستای این دستگاه تعریف می‌شود. دوران سازه θ_s، از مرتبه کوچک‌تری نسبت به دوران جداساز θ_b، قرار دارد و تقریباً، به‌علت بزرگ بودن سختی‌های سازه نسبت به جداگر، سازه به‌صورت یک جسم صلب بر روی یک لایه نرم قرار گرفته است، به همین دلیل، توصیف امتدادهای فنرهای سازه تقریباً در راستای موقعیت جدید زیرسازه (جداساز) درنظر گرفته شده که به تقریب نزدیک‌تر بوده و دستگاه دوران یافته‌ای با زاویه پیچش θ_s حول مرکز جرم سازه درنظر گرفته نشده است. حرکت جرم سازه و جداساز توسط 6 درجه آزادی توصیف می‌شود: U_{Xs}، U_{Ys}، $U_{\theta s}$ درجات آزادی سازه و U_{Xb}، U_{Yb} و $U_{\theta b}$ درجات آزادی جداساز در امتداد محورهای دستگاه مختصات کلی و همین‌طور U_{xs}، U_{ys}، $U_{\theta s}$، U_{xb}، U_{yb} و $U_{\theta b}$ در امتداد محورهای دستگاه مختصات محلی. مرکز جرم و مرکز سختی عناصر مقاوم در سازه به‌ترتیب با $C.M._S$ و $C.R._S$ و در جداساز به‌ترتیب با $C.M._b$ و $C.R._b$ نشان داده شده‌اند. مرکز جرم سازه و جداساز در یک امتداد حول محور قائم (Z) قرار می‌گیرد. به سبب توزیع نامتقارن سختی، صرفاً حول محور Y، مرکز سختی در سازه و جداساز به‌ترتیب به فاصله e_{xs} و e_{xb} در امتداد محور X از مرکز جرم قرار دارد. خروج از مرکزیت‌های e_{xb} و e_{xs} توسط روابط (1) و (2) تعیین می‌شوند.

$$e_{xb}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_{ib}k_{yib}}{\sum_{i=1}^{N}k_{yib}} \tag{1}$$

$$e_{xs}=\frac{\sum_{i=1}^{M}x_{is}k_{yis}}{\sum_{i=1}^{M}k_{yis}} \tag{2}$$

که در آن‌ها k_{yib} سختی i امین عنصر مقاوم جداساز موازی با محور Y و x_{ib} فاصله آن تا محور Y و N تعداد عناصر مقاوم جهت Y جداساز است. همچنین، k_{yis} سختی iامین عنصر مقاوم سازه موازی با محور Y و x_{is} فاصله آن تا محور Y و M تعداد عناصر مقاوم جهت Y سازه است.

در شکل 2-(الف)، درجات آزادی بیان شده در امتداد محورهای ثابت دستگاه مختصات کلی XYZ تعریف شدند. همچنین، مشخصات استاتیکی و دینامیکی سازه و جداساز، شامل سختی (k_{xs}، k_{ys}، $k_{\theta s}$، k_{xb}، k_{yb} و $k_{\theta b}$) و میرائی (C_{xs}، C_{ys}، $C_{\theta s}$، C_{xb}، C_{yb} و $C_{\theta b}$) عناصر مقاوم سازه‌ای، به‌صورت متغیرهای کلی و در امتداد محورهای این دستگاه مختصات کلی نصب شده بر پایه ساختمان تعریف می‌شوند. این بدین معنی است که این پارامترها مستقل از دوران θ_b، ناشی از پیچش کف جداساز فرض شدند. این در حالی است که محورهای معرف پارامترهای سختی سازه ثابت نبوده و امتداد آن‌ها با زاویه پیچش کف جداساز دوران می‌کند؛ به تعبیر دیگر بهتر آن است که پارامترهای سازه‌ای نظیر سختی و میرائی به‌صورت متغیرهای محلی و در امتداد محورهای دستگاه مختصات چرخان $x_by_bz_b$ نصب شده در مرکز جرم جداساز تعریف شوند (شکل 2-ب). به عبارت دیگر، در نگرش متداول، عناصر مقاوم سازه‌ای به‌صورت فنرها و میراگرهایی با راستای بدون تغییر در دستگاه مختصات زمین درنظر گرفته می‌شوند. لیکن در واقعیت امر، نیروهای فنر و میراگر در سازه نامتقارن جداسازی شده، به سبب پیچش ایجاد شده در آن هنگام وقوع زلزله و باد، ناگزیر از تغییر جهت و راستا در امتداد جدید طبقه پیچش یافته‌اند، چراکه این نیروها ناشی از مقاومت عناصر مقاوم سازه‌ای (همان تیرها و ستون‌ها در قاب‌های مسطح یا اسکلت ساختمانی و یا صفحات موازی فولاد و لاستیک الاستومر در عناصر جداساز) آرایش یافته در امتدادهای متعامد و مقید به راستای کف طبقات سازه‌اند و در پی دوران طبقات سازه، این عناصر در امتداد جدید قرار خواهند گرفت. در واقعیت امر، این عناصر مقاوم نظیر تیرها و ستون‌ها در قاب‌های مسطحی در دو امتداد متعامد که در راستای کف طبقات مقید شده‌اند، قرار می‌گیرند. هنگام وقوع زلزله و باد، مقید شدن عناصر مقاوم سازه‌ای سبب تغییر و پیچش آن‌ها حین پیچش کف طبقات قاب‌های مقاوم صفحه‌ای می‌شود.

لذا، در نگرش جدید، با درنظر گرفتن ماهیت غیرثابت راستای نیروهای فنرها و میراگرها، پارامترهای سازه‌ای نظیر سختی و میرائی در امتداد محورهای دستگاه مختصات محلی متصل به مرکز جرم زیرسازه (جداساز) و به‌صورت تابعی از زاویه پیچش کف زیرسازه (θ_b) تعریف شده‌اند.

جهت دست‌یابی به معادلات مدل‌های خطی و غیرخطی، روش لاگرانژی ارائه می‌شود[22،21]. در روش لاگرانژی با درنظر گرفتن مولفه‌های دستگاه مختصات کلی و محلی به‌عنوان مولفه‌های تعمیم یافته و نوشتن انرژی‌های پتانسیل و جنبشی و در پی تشکیل تابع لاگرانژ می‌توان به معادلات حاکم بر حرکت در دستگاه مختصات چرخان دست یافت. معادلات حرکت سازه جداسازی شده در دستگاه مختصات کلی و محلی از رابطه (3) به دست می‌آید.

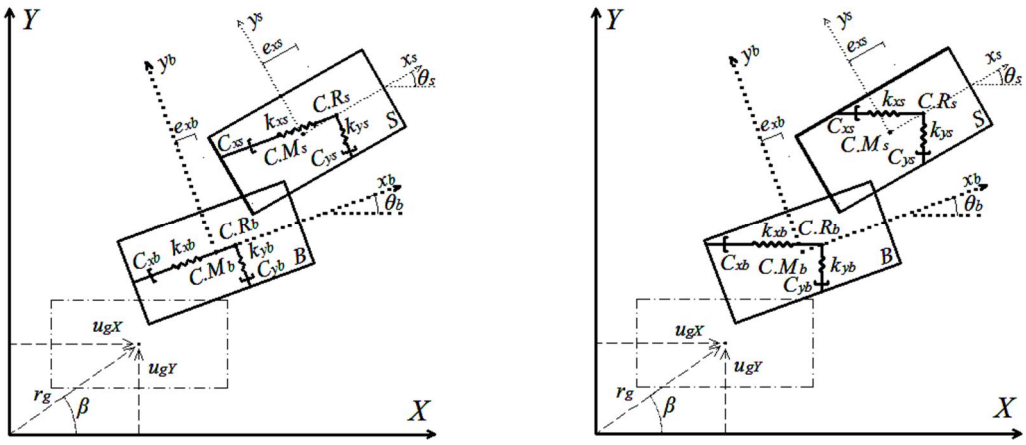
$$F_{qi}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{3}$$

که در آن q_i مولفه‌های مختصات تعمیم یافته هستند، که همان مولفه‌های جابه‌جایی‌های کلی U_{Xs}، U_{Ys}، $U_{\theta s}$، U_{Xb}، U_{Yb} و $U_{\theta b}$ و یا محلی U_{xs}، U_{ys}، $U_{\theta s}$، U_{xb}، U_{yb} و $U_{\theta b}$ به‌ترتیب در دستگاه مختصات کلی و چرخان هستند و F_{qi} نیروهای ناپایستار خارجی نظیر نیروهای میرائی و محرک هستند و L تابع لاگرانژی بوده و به‌صورت تفاضل انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم سازه‌ای (یعنی $L=T-V$) تعریف می‌شود. از این‌رو، نخست باید انرژی پتانسیل ذخیره شده در عناصر مقاوم طبق رابطه (4) محاسبه شود.

$$\begin{aligned}V=&\frac{1}{2}k_{xb}u_{xb}^2+\frac{1}{2}k_{yb}\left(u_{yb}+e_{xb}u_{\theta b}\right)^2+\frac{1}{2}k_{\theta Rb}u_{\theta b}^2+\\&\frac{1}{2}k_{xs}\left(u_{xs}-u_{xb}\right)^2+\frac{1}{2}k_{ys}\left[\left(u_{ys}-u_{yb}\right)+e_{xs}\left(u_{\theta s}-u_{\theta b}\right)\right]^2+\\&\frac{1}{2}k_{\theta Rs}\left(u_{\theta s}-u_{\theta b}\right)^2\end{aligned} \tag{4}$$

که در آن $k_{\theta Rb}$ سختی پیچشی جداساز و $k_{\theta Rs}$ سختی پیچشی سازه حول محور سختی هستند و به‌صورت رابطه (5) و (6) تعریف می‌شوند.

$$k_{\theta Rb}=\sum_{i=1}^{M}k_{xib}y_{ib}^2+\sum_{i=1}^{N}k_{yib}\left(x_{ib}-e_{xb}\right)^2 \tag{5}$$



(الف) (ب)

شکل 2 دستگاه مختصات کلی XYZ و محلی $x_by_bz_b$ ، و امتداد مشخصات استاتیکی و دینامیکی سازه و جداساز شامل سختی و میرائی در مدل، الف) خطی، و ب) غیرخطی

$$k_{\theta Rs}=\sum_{i=1}^{p}k_{xis}y^2_{is}+\sum_{i=1}^{q}k_{yis}\left(x_{is}-e_{xs}\right)^2 \tag{6}$$

k_{xb} و k_{yb} برابر مجموع سختی عناصر مقاوم جداساز در جهات x_b، yb، k_{xs} و k_{ys} برابر مجموع سختی عناصر مقاوم سازه در جهات x_b و y_b هستند. سپس، انرژی جنبشی کل به صورت رابطه (7) محاسبه می‌شود.

$$T=\frac{1}{2}m_b\left(\frac{du_{Xb}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_b\left(\frac{du_{Yb}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_br_b^2\left(\frac{du_{\theta b}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_s\left(\frac{du_{Xs}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_s\left(\frac{du_{Ys}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m_sr_s^2\left(\frac{du_{\theta s}}{dt}\right)^2 \tag{7}$$

که در آن r_b شعاع ژیراسیون جداساز حول مرکز جرم و r_s شعاع ژیراسیون سازه حول مرکز جرم هستند. حال این متغیرهای کلی با متغیرهای محلی با دوران محورهای محلی به مقدار θ_b در جهت ساعتگرد و با استفاده از ماتریس دوران نظیر آن به یکدیگر توسط روابط (8) تا (13) مرتبط می‌شوند.

$$u_{Xs}=u^b_{xs}\cos\theta_b-u^b_{ys}\sin\theta_b+u_{gX} \tag{8}$$

$$u_{Ys}=u^b_{xs}\sin\theta_b+u^b_{ys}\cos\theta_b+u_{gY} \tag{9}$$

$$u_{\theta s}=\theta_s \tag{10}$$

$$u_{Xb}=u^b_{xb}\cos\theta_b-u^b_{ys}\sin\theta_b+u_{gX} \tag{11}$$

$$u_{Yb}=u^b_{xb}\sin\theta_b+u^b_{yb}\cos\theta_b+u_{gY} \tag{12}$$

$$u_{\theta b}=\theta_b \tag{13}$$

اکنون با توجه به شکل 2-الف و جایگذاری روابط (4) و (7) در رابطه (3) و بررسی روابط موجود تنها در مختصات کلی، معادلات دیفرانسیل خطی حاکم بر حرکت دیافراگم صلب سازه یک طبقه جداسازی شده نامتقارن یک طرفه با جانشینی مولفه‌های مختصات کلی در مولفه تعمیم یافته q_i طبق روابط (14) تا (19) حاصل می‌شود.

- دو معادله خطی همبسته سازه و جداساز در جهت متقارن:

$$m_b\ddot{u}_{Xb}+\left(c_{xb}+c_{xs}\right)\dot{u}_{Xb}+\left(k_{xb}+k_{xs}\right)u_{Xb}-c_{xs}\dot{u}_{Xs}-k_{xs}u_{Xs}=-m_b\ddot{u}_{gX} \tag{14}$$

$$m_s\ddot{u}_{Xs}+c_{xs}\dot{u}_{Xs}+k_{xs}u_{Xs}-c_{xs}\dot{u}_{Xb}-k_{xs}u_{Xb}=-m_s\ddot{u}_{gX} \tag{15}$$

- چهار معادله خطی همبسته سازه و جداساز در جهت نامتقارن:

$$m_b\ddot{u}_{Yb}+\left(c_{yb}+c_{ys}\right)\dot{u}_{Yb}+\left(k_{yb}+k_{ys}\right)u_{Yb}+\left(e_{xb}c_{yb}+e_{xs}c_{ys}\right)\dot{u}_{\theta b}-c_{ys}\dot{u}_{Ys}-e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{\theta s}+\left(e_{xb}k_{yb}+e_{xs}k_{ys}\right)u_{\theta b}-k_{ys}u_{Ys}-e_{xs}k_{ys}u_{\theta s}=-m_b\ddot{u}_{gY} \tag{16}$$

$$m_br_b^2\ddot{u}_{\theta b}+\left(c_{\theta b}+c_{\theta s}\right)\dot{u}_{\theta b}+\left(k_{\theta b}+k_{\theta s}\right)u_{\theta b}+\left(e_{xb}c_{yb}+e_{xs}c_{ys}\right)\dot{u}_{Yb}-e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{Ys}-c_{\theta s}\dot{u}_{\theta s}+\left(e_{xb}k_{yb}+e_{xs}k_{ys}\right)u_{Yb}-e_{xs}k_{ys}u_{Ys}-k_{\theta s}u_{\theta s}=0 \tag{17}$$

$$m_s\ddot{u}_{Ys}+c_{ys}\dot{u}_{Ys}+k_{ys}u_{Ys}-c_{ys}\dot{u}_{Yb}-e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{\theta b}+e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{\theta s}-k_{ys}u_{Yb}-e_{xs}k_{ys}u_{\theta b}+e_{xs}k_{ys}u_{\theta s}=-m_s\ddot{u}_{gY} \tag{18}$$

$$m_sr_s^2\ddot{u}_{\theta s}+c_{\theta s}\dot{u}_{\theta s}+k_{\theta s}u_{\theta s}-e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{Yb}-c_{\theta s}\dot{u}_{\theta b}+e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{Ys}-e_{xs}k_{ys}u_{Yb}-k_{\theta s}u_{\theta b}+e_{xs}k_{ys}u_{Ys}=0 \tag{19}$$

روابط (8) تا (13) را در رابطه (7) جایگذاری نموده و رابطه (3) با جانشینی مولفه‌های مختصات محلی در مولفه تعمیم یافته q_i، به‌کار برده می‌شود و بدین ترتیب معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر حرکت دیافراگم صلب سازه یک طبقه جداسازی شده نامتقارن یک طرفه، با توجه به شکل 2-ب براساس روابط (20) تا (25) حاصل می‌شود.

- دو معادله غیرخطی همبسته سازه و جداساز در جهت متقارن:

$$m_b\ddot{u}^b_{xb}+\left(c_{xb}+c_{xs}\right)\dot{u}^b_{xb}+\left(k_{xb}+k_{xs}\right)u^b_{xb}-c_{xs}\dot{u}^b_{xs}-k_{xs}u^b_{xs}=-m_b\left(-2\dot{u}^b_{yb}\dot{u}_{\theta b}-u^b_{yb}\ddot{u}_{\theta b}-u^b_{xb}\dot{u}^2_{\theta b}+\ddot{u}_{gX}\cos\theta_b+\ddot{u}_{gY}\sin\theta_b\right) \tag{20}$$

$$m_s\ddot{u}^b_{xs}+c_{xs}\dot{u}^b_{xs}+k_{xs}u^b_{xs}-c_{xs}\dot{u}^b_{xb}-k_{xs}u^b_{xb}=-m_s\left(-2\dot{u}^b_{ys}\dot{u}_{\theta b}-u^b_{ys}\ddot{u}_{\theta b}-u^b_{xs}\dot{u}^2_{\theta b}+\ddot{u}_{gX}\cos\theta_b+\ddot{u}_{gY}\sin\theta_b\right) \tag{21}$$

- چهار معادله غیرخطی همبسته سازه و جداساز در جهت نامتقارن:

$$m_b\ddot{u}^b_{yb}+\left(c_{yb}+c_{ys}\right)\dot{u}^b_{yb}+\left(k_{yb}+k_{ys}\right)u^b_{yb}+\left(e_{xb}c_{yb}+e_{xs}c_{ys}\right)\dot{u}_{\theta b}-c_{ys}\dot{u}^b_{ys}-e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{\theta s}+\left(e_{xb}k_{yb}+e_{xs}k_{ys}\right)u_{\theta b}-k_{ys}u^b_{ys}-e_{xs}k_{ys}u_{\theta s}=-m_b\left(2\dot{u}^b_{xb}\dot{u}_{\theta b}+u^b_{xb}\ddot{u}_{\theta b}-u^b_{yb}\dot{u}^2_{\theta b}-\ddot{u}_{gX}\sin\theta_b+\ddot{u}_{gY}\cos\theta_b\right) \tag{22}$$

$$m_br_b^2\ddot{u}_{\theta b}+\left(c_{\theta b}+c_{\theta s}\right)\dot{u}_{\theta b}+\left(k_{\theta b}+k_{\theta s}\right)u_{\theta b}+\left(e_{xb}c_{yb}+e_{xs}c_{ys}\right)\dot{u}^b_{yb}-e_{xs}c_{ys}\dot{u}^b_{ys}-c_{\theta s}\dot{u}_{\theta s}+\left(e_{xb}k_{yb}+e_{xs}k_{ys}\right)u^b_{yb}-e_{xs}k_{ys}u^b_{ys}-k_{\theta s}u_{\theta s}=0 \tag{23}$$

$$
\begin{aligned}
& m_s \ddot{u}^b_{ys} + c_{ys}\dot{u}^b_{ys} + k_{ys}u^b_{ys} - \\
& c_{ys}\dot{u}^b_{yb} - e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{\theta b} + e_{xs}c_{ys}\dot{u}_{\theta s} - \\
& k_{ys}u^b_{yb} - e_{xs}k_{ys}u_{\theta b} + e_{xs}k_{ys}u_{\theta s} = \\
& -m_s\left(2\dot{u}^b_{xs}\dot{u}^2_{\theta b} + u^b_{xs}\ddot{u}_{\theta b} - u^b_{ys}\dot{u}^2_{\theta b} - \ddot{u}_{gX}\sin\theta_b + \ddot{u}_{gY}\cos\theta_b\right)
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
& m_s r_s^2 \ddot{u}_{\theta s} + c_{\theta s}\dot{u}_{\theta s} + k_{\theta s}u_{\theta s} - \\
& e_{xs}c_{ys}\dot{u}^b_{yb} - c_{\theta s}\dot{u}_{\theta b} + e_{xs}c_{ys}\dot{u}^b_{ys} - \\
& e_{xs}k_{ys}u^b_{yb} - k_{\theta s}u_{\theta b} + e_{xs}k_{ys}u^b_{ys} = 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

که در آن $\ddot{u}_{gX}$ و $\ddot{u}_{gY}$ شتاب‌های انتقالی حرکت زمین در جهات X و Y، و C_{xs}، C_{ys}، $C_{\theta s}$، C_{xb}، C_{yb} و $C_{\theta b}$ ضرایب میرائی سازه و جداساز هستند. $k_{\theta b}$ سختی پیچشی جداساز و $k_{\theta s}$ سختی پیچشی سازه حول مرکز جرم هستند، k_{xb} و k_{yb} برابر مجموع سختی عناصر مقاوم جداساز در جهات x_b و y_b، و k_{xs} و k_{ys} برابر مجموع سختی عناصر مقاوم سازه در جهات x_b و y_b تعریف می‌شوند.

مشاهده می‌شود که عبارت‌های سمت چپ روابط (14) تا (19) با عبارت‌های سمت چپ روابط (20) تا (25) کاملاً مشابه است. البته، بردارهای جابه‌جایی، سرعت و شتاب در روابط (14) تا (19) در امتداد محورهای دستگاه مختصات کلی تعریف شده‌اند. تفاوت چشمگیر معادلات خطی و غیرخطی در عبارات سمت راست آن‌هاست. وجود جملات همبسته غیرخطی اینرسی بین درجات آزادی پیچشی و جانبی سازه و جداساز در روابط (20) تا (25)، عملکرد غیرخطی را در مدل پیشنهاد شده ایجاب می‌کند، درحالی که وجود جملات خطی شامل شتاب‌های انتقالی و تکانش زمین در روابط (14) تا (19) سبب بروز رفتار خطی شده است. بدیهی است که در تحلیل عددی، باید پاسخ‌های مدل غیرخطی به‌دست آمده از روابط (20) تا (25) توسط ماتریس دوران به دستگاه مختصات کلی انتقال یابد و یا به عبارتی محورهای محلی باید به مقدار θ_b و در جهت ساعتگرد دوران پیدا کنند و سپس با پاسخ‌های خطی به‌دست آمده از روابط (14) تا (19)، مقایسه شوند.

3- تحلیل عددی

ارزیابی و مقایسه عملکرد مدل خطی و غیرخطی، با مطالعه پارامتری بر روی تحریکات هارمونیک و زوایای مختلف ورود زلزله کوبه به سازه صورت می‌گیرد. دوره‌ی تناوب روسازه برابر با پریود طبیعی نوسان جانبی جهت متقارن سازه تقریبا برابر $T_{xs} = 0.1\text{s}$ است، یعنی فرکانس طبیعی نوسان آن برابر $20\pi(\text{rad/s})$ فرض می‌شود. توزیع جرم پلان جداساز و سازه با هم یکسان است، یا به عبارتی شعاع ژیراسیون در پلان سازه و در پلان جداساز با یکدیگر برابر است. جرم سازه m_s به جرم طبقه جداسازی شده m_b دارای نسبت 5 به 1 درنظر گرفته شده است. تمام فرکانس‌های سازه و جداساز نسبت به فرکانس جهت متقارن سازه (ω_{xs}) سنجیده می‌شوند. نسبت فرکانس پیچشی و جانبی سازه و جداساز نسبت به فرکانس جهت متقارن سازه به‌صورت رابطه (26) بیان می‌شود.

$$
\Omega_{xb} = \frac{\omega_{xb}}{\omega_{xs}}, \Omega_{\theta b} = \frac{\omega_{\theta b}}{\omega_{xs}}, \Omega_{yb} = \frac{\omega_{yb}}{\omega_{xs}}
$$

$$
\Omega_{xs} = \frac{\omega_{xs}}{\omega_{xs}}, \Omega_{\theta s} = \frac{\omega_{\theta s}}{\omega_{xs}}, \Omega_{ys} = \frac{\omega_{ys}}{\omega_{xs}} \tag{26}
$$

که در آن فرکانس‌های غیرهمبسته انتقالی ω_{xs}، ω_{ys}، ω_{xb} و ω_{yb} و پیچشی $\omega_{\theta s}$ و $\omega_{\theta b}$ هستند. بدیهی است که به سبب سختی یکسان هر جداساز، یا الاستومر، در دو امتداد X و Y، فرکانس‌های طبیعی غیر همبسته جانبی در امتداد X و Y در پلان جداساز، یعنی فرکانس‌های ω_{xb} و ω_{yb} و از این رو نسبت‌های فرکانسی آن‌ها برابر است $(\Omega_{xb} = \Omega_{yb})$.

پاسخ‌های تاریخچه زمانی و محتوای فرکانسی دو مدل خطی و غیرخطی برای 3 نوع سازه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت اول نسبت فرکانس پیچشی جداساز به فرکانس جانبی متقارن سازه برابر با 0/15 $(\Omega_{\theta b} = 0.15)$ و خروج از مرکزیت جداساز برابر با 0/6 $(e_{xb} = 0.6)$ درنظر گرفته می‌شود. در حالت دوم نسبت فرکانس پیچشی جداساز به فرکانس جانبی متقارن سازه برابر با 0/105 و خروج از مرکزیت جداساز برابر با 0/8 هستند و در حالت سوم این مقادیر به‌ترتیب برابر با 0/15 و 1/03 هستند. سایر نسبت‌ها کاملاً یکسان و مشابه یکدیگرند که در جدول 1 ارائه شده است. انتخاب مشخصات هندسی و دینامیکی 3 نوع سازه بر طبق ضوابط طراحی جداساز (منظور بزرگی سختی‌های سازه نسبت به سختی جداگر) به‌گونه‌ای بوده است که فرکانس طبیعی همبسته اول جهت متقارن (ω_{x1}) نزدیک به فرکانس جداساز (ω_{xb}) است، حال آنکه دومین فرکانس طبیعی همبسته (ω_{x2}) نزدیک به فرکانس سازه (ω_{xs}) است. بدیهی است اگر نسبت‌های فرکانسی سازه و جداگر (10 به 1) کم‌تر باشد، طبیعتاً سازه و جداساز فرکانس‌های همبسته نزدیک به هم پیدا می‌کنند. این امر در چهار فرکانس‌های طبیعی همبسته در جهات نامتقارن و پیچشی نیز قابل مشاهده است. فرکانس‌های اول و دوم ($\omega_{y\theta1}$ و $\omega_{y\theta2}$) نزدیک به فرکانس پیچشی-جانبی جداساز ($\omega_{y\theta b}$ و $\omega_{y\theta b}$) و دو فرکانس دیگر ($\omega_{y\theta3}$ و $\omega_{y\theta4}$) نزدیک به فرکانس پیچشی-جانبی سازه ($\omega_{y\theta S}$ و $\omega_{y\theta S}$) است. این گونه می‌توان برداشت کرد که در جهت پیچشی و جانبی نیز عملکرد جداساز مستقل از سازه است. به عبارت دیگر، در بررسی رفتار دینامیکی، سازه به‌صورت یک جسم صلب بدون تغییر و جداساز به‌صورت یک سازه نرم و متاثر از تحریکات زلزله است. هدف از انتخاب این 3 نوع سازه، تخصیص نسبت‌های فرکانسی همبسته طبیعی مشخص به آن‌ها بوده است. نسبت‌ها در سازه دوم به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که حداقل یکی از نسبت‌های فرکانسی طبیعی همبسته پیچشی-جانبی سازه و جداساز برابر 0/5 شود و همچنین این نسبت‌ها در سازه سوم به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تفاضل اولین و دومین نسبت فرکانسی طبیعی همبسته پیچشی-جانبی سازه و جداساز برابر 1 شوند که هیچ کدام از این دو ویژگی در سازه اول فراهم نشد. فرکانس‌های همبسته طبیعی و نسبت‌های فرکانسی 3 نوع سازه به‌ترتیب در جدول‌های 2 و 3 ارائه شده‌اند.

جدول 1 مشخصات سازه ای 3 نوع سازه

سازه	Ω_{xb}	$\Omega_{\theta b}$	Ω_{yb}	$\Omega_{\theta s}$	Ω_{ys}	e_{xb}/r	e_{xs}/r
1	0/1	0/15	0/1	0/7	0/5	0/6	0/2
2	0/1	0/105	0/1	0/7	0/5	0/8	0/2
3	0/1	0/15	0/1	0/7	0/5	1/03	0/2

جدول 2 فرکانس‌های طبیعی 3 نوع سازه

سازه	ω_{x1}	ω_{x2}	$\omega_{y\theta1}$	$\omega_{y\theta2}$	$\omega_{y\theta3}$	$\omega_{y\theta4}$
1	6/25	154/47	5/40	9/70	76/42	110/98
2	6/25	154/47	3/12	8/38	76/25	110/06
3	6/25	154/47	4/04	10/30	76/20	111/14

جدول 3 نسبت‌های فرکانسی همبسته طبیعی 3 نوع سازه

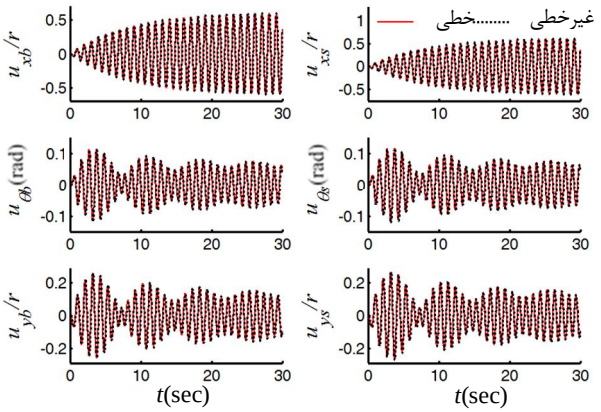
سازه	Ω_{xs}	Ω_1	Ω_2
1	1	0/863	1/552
2	1	0/5	1/340
3	1	0/646	1/646

پاسخ‌های این 3 نوع سازه، تحت تحریکات نیروهای هارمونیک با توجه به تغییر دامنه تحریک A و فرکانس تحریک Ω و همچنین تحت زلزله کوبه با زوایای مختلف ورود تحریک β نسبت به محور X مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پاسخ‌ها برای 6 درجه آزادی حرکت مراکز جرم کف طبقه سازه و جداساز یعنی U_{xs}، U_{ys}، $U_{\theta s}$، U_{xb}، U_{yb} و $U_{\theta b}$ در دو حوزه زمان و فرکانس بررسی می‌شوند. پاسخ‌های حوزه فرکانسی با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع (FFT) جهت تعیین مشارکت مدهای سازه در جذب انرژی تحریک به‌دست آمده‌اند. مقادیر فرکانس نظیر بیشینه یا پیک پاسخ‌ها در نمودارهای محتوای فرکانسی پاسخ‌های ارتعاش واداشته این سازه‌ها، معرف فرکانس‌های طبیعی مدهای غالب سازه و یا فرکانس نظیر تحریک است و مقادیر پیک معرف میزان جذب انرژی تحریک ورودی به سیستم سازه‌ای توسط مدهای طبیعی نظیر آن‌ها و یا توسط فرکانس نظیر تحریک است.

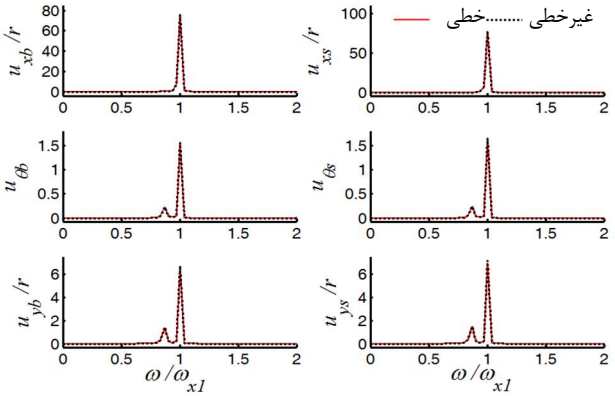
3-1- پاسخ به تحریک هارمونیک

بردار نیروی تحریک یا شتاب تکانش زمین $\vec{r_g}$ را به‌صورت نیروی هارمونیک برابر با $A\omega^2\sin(\omega t)$ تعریف می‌شود، که در آن ω فرکانس تحریک و A نسبت دامنه جابه‌جایی تکانش زمین بر شعاع ژیراسیون هستند. در ادامه مطالعات به‌جای فرکانس تحریک ω، از پارامتر بی‌بعد Ω برابر نسبت فرکانسی ω/ω_{x1} استفاده می‌شود، که در آن ω_{x1} فرکانس طبیعی مد اول جهت متقارن است. همچنین، زاویه ورود شتاب هارمونیک به سازه، برابر β نسبت به امتداد X است که منجر به دو مولفه شتاب تکانش زمین $\ddot{u}_{gx} = A(\Omega\omega_{x1})^2\sin(\Omega\omega_{x1}t)\cos\beta$ و $\ddot{u}_{gy} = A(\Omega\omega_{x1})^2\sin(\Omega\omega_{x1}t)\sin\beta$ می‌شود. دامنه تحریک برابر با 0/05، زاویه ورود تحریک β و نسبت میرائی سازه به‌ترتیب برابر با 60 درجه نسبت به محور X و 2% درنظر گرفته شده است، مگر آنکه مقادیر غیر از این به صراحت ذکر شود.

در شکل‌های ارائه شده، پاسخ مدل خطی به‌صورت خط ممتد (قرمز رنگ) و پاسخ مدل غیرخطی با خط‌چین (مشکی رنگ) نشان داده شده است. در ابتدا سازه 1 تحت تحریک هارمونیک با فرکانس تحریک برابر فرکانس مد اول جهت متقارن قرار داده شد ($\Omega=1$). در شکل‌های 3 و 4، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ارتعاش واداشته سازه نوع 1 ارائه شده‌اند که مشاهده می‌شود پاسخ‌های دو مدل خطی و غیرخطی دقیقاً برهم منطبق است. در شکل 4، مقادیر پیک پاسخ‌ها در سازه و جداساز در فرکانس مد اول جهت متقارن، در جهات x، y و θ رخ داده و علاوه‌بر آن در جهات y و θ پیک کوچک‌تری نیز در نخستین نسبت فرکانسی همبسته پیچشی-جانبی ایجاد



شکل 3 پاسخ زمانی سازه نوع 1 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega=1$

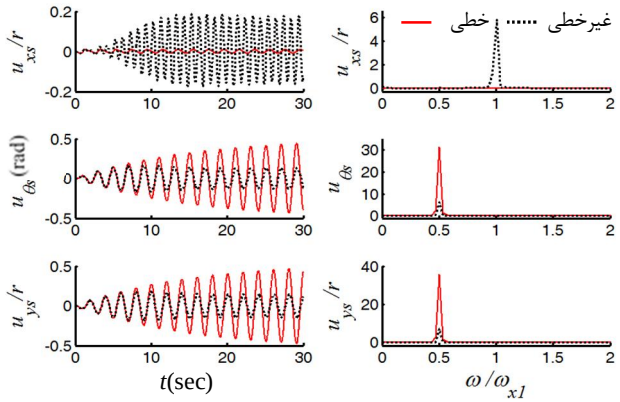


شکل 4 پاسخ فرکانسی سازه نوع 1 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega=1$

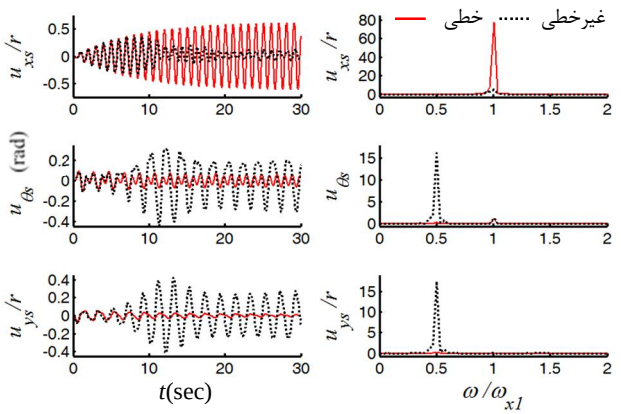
شده است همان گونه که بیان شد، این مقادیر پیک، معرف میزان جذب انرژی تحریک ورودی به سیستم سازه‌ای توسط فرکانس نظیر تحریک است.

در این تحقیق مشاهده شد که انطباق پاسخ‌های دو مدل در سازه نوع 1 برای مقادیر بیشتر دامنه تحریک نیز محقق می‌شود و به عبارت دیگر این انطباق مستقل از اندازه دامنه تحریک است. همچنین، مشاهده شد این انطباق از فرکانس و زوایای ورود تحریک نیز مستقل است.

سازه 2 تحت تحریک هارمونیک با فرکانس تحریک برابر با نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی و فرکانس مد اول جهت متقارن قرار داده شد. در شکل‌های 5 و 6، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ارتعاش واداشته سازه نوع 2 تحت این دو فرکانس تحریک ارائه شده‌اند که مشاهده می‌شود، در نمودارهای تاریخچه زمانی، در جهت x، مدل غیرخطی از یک لحظه مشخص مقدار متفاوتی نسبت به مدل خطی نشان می‌دهد که در جهات y و θ نیز این موضوع مشهود است. در شکل 5، در پاسخ فرکانسی جهت x، فقط مدل غیرخطی دارای پیک پاسخ در فرکانس مد اول جهت متقارن است، ولی در جهات y و θ هر دو مدل دارای پیک پاسخی در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی هستند که مدل خطی مقدار بیشتری را نسبت به غیرخطی نشان می‌دهد. در شکل 6، در پاسخ فرکانسی جهت x، مدل خطی و غیرخطی دارای پیک پاسخ در فرکانس مد اول جهت متقارن است که این مقدار در مدل غیرخطی بسیار کمتر است، ولی در جهات y و θ مدل غیرخطی دارای پیک پاسخ در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی است که این پیک در مدل خطی مشاهده نمی‌شود.



شکل 5 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega=\Omega_1$



شکل 6 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega=1$

بر مبنای تئوری خطی، دامنه پاسخ سازه با میرائی در جهت متقارن x، نخست با زمان به‌طور یکنوا افزایش یافته و سپس به سبب میرائی در مقدار مشخصی ثابت می‌ماند و این مقدار دامنه حالت مانا، طبق شکل 6 برابر 0/6 است و این پدیده تشدید اصلی[1] نامیده می‌شود. ثابت بودن دامنه پاسخ هارمونیک با نسبت فرکانسی $\Omega=1$ در جهات پیچشی و نامتقارن نیز برقرار است.

در زمان‌های نخست دو مدل خطی و غیرخطی عملکرد مشابهی دارند، بدین معنی که درجه آزادی جهت متقارن به‌طور مستقل و غیرهمبسته با درجات آزادی دیگر سازه رفتار می‌نماید، تا اینکه در یک لحظه معین، پاسخ جهت متقارن مقدار مشخصی از انرژی تحریک را جذب می‌کند، از آن لحظه به بعد عملکرد دو مدل متفاوت از یکدیگر خواهد بود. در مدل غیرخطی، برخلاف مدل خطی، تمامی درجات آزادی به‌طور همبسته عمل می‌کنند، به‌گونه‌ای که در لحظه یاد شده، که آن را لحظه اشباع می‌نامند، انرژی جذبی توسط پاسخ جهت متقارن در حد مشخصی ثابت و اصطلاحاً اشباع شده و از آن لحظه به بعد مابقی انرژی تحریک جذبی جهت متقارن به جهات نامتقارن و پیچشی منتقل می‌شود. این انتقال انرژی در شکل 6 از فرکانس طبیعی بیشتر $(\Omega=1)$ جهت x، به فرکانس طبیعی کمتر $(\Omega=\Omega_1)$، جهات y و θ صورت گرفته است. این رفتار مدل غیرخطی را پدیده اشباع[2] می‌نامند که در شکل 6 مشهود است. لیکن در شکل 5، پدیده اشباع رخ نمی‌دهد، یعنی انتقال انرژی بین مدها، و به عبارت دیگر، لحظه بروز رفتار غیرخطی، با نقطه شروع یا آستانه، همراه نیست، بلکه از همان ابتدای نوسان، انتقال انرژی از فرکانس طبیعی کمتر $(\Omega=\Omega_1)$ به فرکانس طبیعی بیشتر $(\Omega=1)$ آغاز می‌شود.

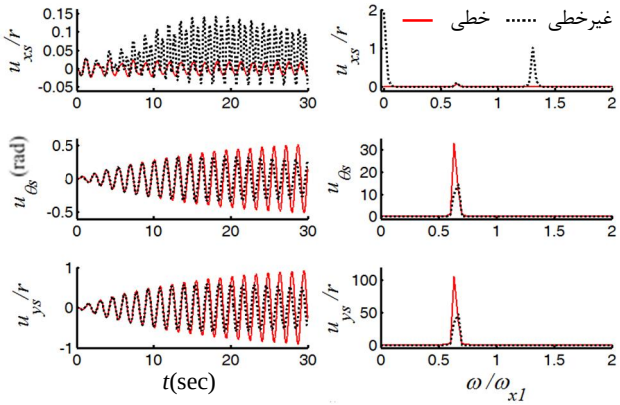
شکل‌های 7 و 8، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی ارتعاش واداشته سازه نوع 3 را تحت اولین و دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی نشان می‌دهند. تمایز بین پاسخ‌های مدل خطی و غیرخطی از لحظات ابتدایی در تحلیل تاریخچه زمانی در درجات آزادی مختلف قابل مشاهده است؛ بدین معنی که برخلاف پدیده اشباع، لحظه مشخصی نظیر لحظه اشباع به‌عنوان لحظه شروع تغییر وجود ندارد. در شکل 7، بررسی پاسخ فرکانسی جهت x نشان می‌دهد که مدل غیرخطی دارای پیک پاسخ در $\Omega=0$ است که با افزایش دامنه تحریک به مقدار این پیک نیز افزوده می‌شود. این به معنی جابه‌جایی یا انتقال خالص مرکز جرم دیافراگم صلب سازه در جهت متقارن، به نقطه جدیدی غیر از نقطه تعادل استاتیکی (موقعیت اولیه مرکز جرم طبقه) است، به‌گونه‌ای که ارتعاش یا نوسان مرکز جرم سازه حول این نقطه جدید رخ می‌دهد، درحالی که طبق تئوری خطی، تمامی نوسانات سازه باید حول نقطه تعادل استاتیکی رخ دهد. همچنین، پیک‌های پاسخ دیگری در هر دو مدل در این جهت مشاهده می‌شود، ولی در جهات y و θ هر دو مدل دارای پیک پاسخی در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی هستند که مدل خطی مقدار بیشتری را نسبت به غیرخطی نشان می‌دهد.

در شکل 8، بررسی پاسخ فرکانسی سازه نتیجه می‌دهد که انرژی مدل غیرخطی در جهات y و θ، از دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی به اولین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی و نیز فرکانس مد اول جهت متقارن منتقل می‌شود. همچنین، در این جهات مدل خطی بر خلاف شکل 7، تنها در دومین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی تحریک شده است.

از ابتدای تحریک سازه، تمامی درجات آزادی در مدل غیرخطی برخلاف مدل خطی به‌طور همبسته عمل می‌کنند، به‌گونه‌ای که تحت تحریک هارمونیک با فرکانس $\Omega=\Omega_1$، بخشی از انرژی تحریک جذبی توسط درجات آزادی y و θ به‌صورت پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی پایین‌تر $\Omega=\Omega_1$، در همین درجات آزادی بروز می‌کند و مابقی انرژی تحریک جذبی به درجه آزادی جهت x، تحت پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی بالاتر منتقل می‌شود. این رفتار مدل غیرخطی را پدیده انتقال انرژی[3] می‌نامند که در شکل 7 مشهود است. همچنین، پیک پاسخ مدل غیرخطی در نسبت فرکانسی بین 1 و 1/5، که نظیر هیچ یک از فرکانس‌های طبیعی سازه نیست، قابل مشاهده است. در شکل 8، پدیده انتقال انرژی با انتقال انرژی از فرکانس طبیعی $\Omega=\Omega_2$ به فرکانس‌های طبیعی دیگر، $\Omega=\Omega_1$ و $\Omega=1$ همراه است.

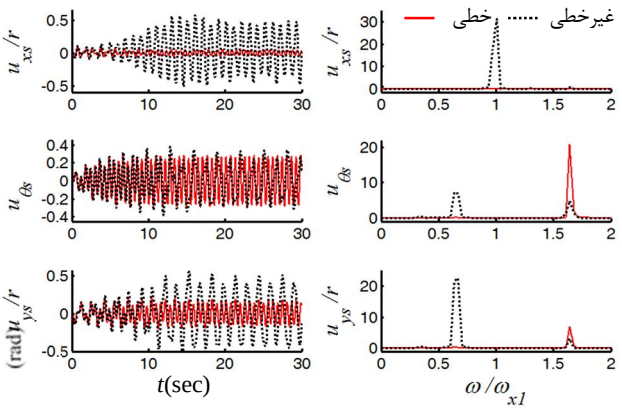
شکل 9 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 را تحت تحریک تناوبی با دامنه تحریک 0/1 و فرکانس تحریک برابر فرکانس مد اول جهت متقارن نشان می‌دهد که مجدداً تفاوت بین دو مدل خطی و غیرخطی مشهود است.

تمام پدیده‌های ایجاد شده در مدل غیرخطی ناشی از حضور جملات همبسته اینرسی غیرخطی در معادلات (20) تا (25) هستند. بررسی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی جداساز نیز در سازه نوع 2 و 3 نتایج مشابهی را با سازه به‌همراه داشت. همچنین تفاوت بین دو مدل خطی و غیرخطی در زوایای مختلف ورود تحریک مشهود است و نیز این تفاوت با افزایش دامنه تحریک افزایش یافته و باعث بروز بی‌نظمی[4]هایی در ارتعاشات سازه می‌شود.

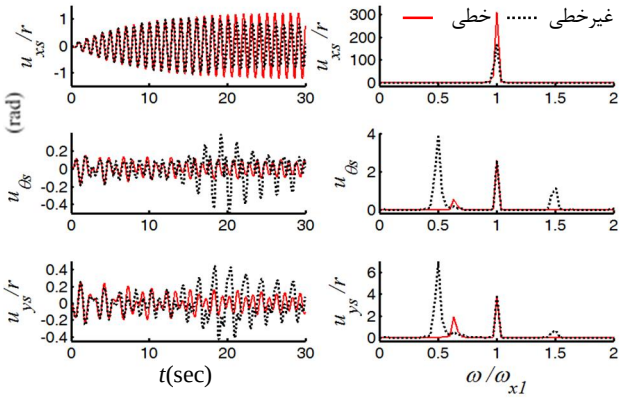


شکل 7 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت تحریک تناوبی فرکانس تحریک $\Omega=\Omega_1$

1- Primary resonance
2- Saturation phenomenon
3- Energy transfer phenomenon
4- Chaotic



شکل 8 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت تحریک تناوبی با فرکانس تحریک $\Omega = \Omega_2$

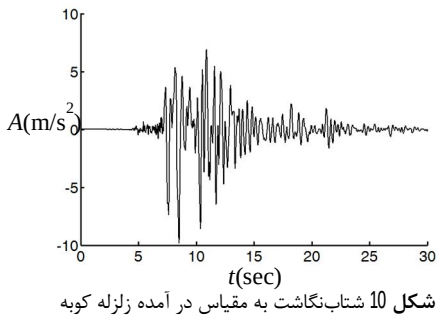


شکل 9 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت تحریک تناوبی با دامنه تحریک 0/1 و فرکانس تحریک $\Omega = 1$

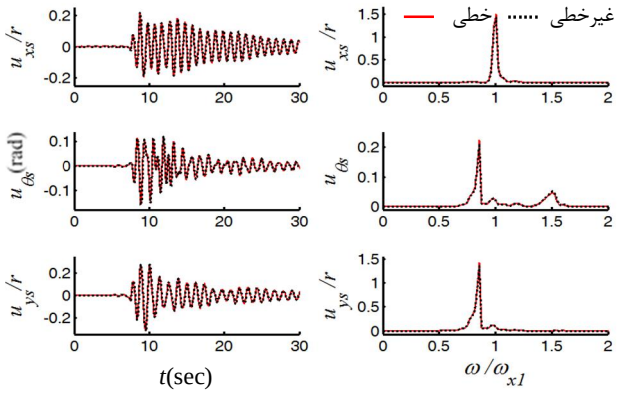
3-2- پاسخ به تحریک زلزله

پاسخ‌های لرزه‌ای دو مدل خطی و غیرخطی تحت زلزله کوبه 1995 و با زاویه‌های مختلف ورود تحریک β نسبت به محور X مقایسه می‌شوند. مقدار بیشینه شتاب زلزله کوبه به $1/0g$ مقیاس شده است (شکل 10). زاویه ورود تحریک β به‌ترتیب برابر با 0، 60 و 90 درجه نسبت به محور X و نسبت میرائی سازه 2% درنظر گرفته شده است.

شکل 11 پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سازه نوع 1 را تحت زاویه تحریک 60 درجه برای دو مدل خطی و غیرخطی نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود، پاسخ‌های دو مدل برای درجات آزادی مختلف در سازه نوع 1 برهم منطبق است. انطباق پاسخ‌های دو مدل در سازه نوع 1 برای مقادیر دیگر زاویه تحریک نیز محقق می‌شود و به عبارت دیگر این انطباق مستقل از زاویه ورود تحریک است.



شکل 10 شتاب‌نگاشت به مقیاس در آمده زلزله کوبه



شکل 11 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 1 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 60 درجه نسبت به محور X

شکل‌های 12، 13 و 14 پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 را تحت زوایای تحریک به‌ترتیب 0، 60 و 90 درجه برای دو مدل خطی و غیرخطی نشان می‌دهند.

در شکل 12 مشاهده می‌شود، هنگامی که تحریک کاملاً در جهت متقارن سازه است، جابه‌جایی u_{xs} نسبت به جابه‌جایی‌های $u_{\theta s}$ و u_{ys} مقادیر بیشتری را از خود نشان می‌دهد. جابه‌جایی پیچشی و جانبی سازه در مدل خطی مقدار صفر را نشان می‌دهد، حال آنکه در مدل غیرخطی این جابه‌جایی تا لحظه 9/8 ثانیه صفر است و از آن لحظه به بعد افزایش می‌یابد. همچنین، مشاهده می‌شود پاسخ مدل خطی و غیرخطی برای درجات آزادی جهت متقارن کاملاً برهم منطبق است. بررسی محتوای فرکانسی نشان می‌دهد که جذب انرژی در جهت متقارن مقدار بیشتری را نشان می‌دهد و در این جهت پیک پاسخ‌ها در مدل خطی و غیرخطی با یکدیگر برابر است که در فرکانس مد اول جهت متقارن رُخ می‌دهد. همچنین، مشاهده می‌شود که پیک جابه‌جایی پیچشی و جانبی در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی در مدل غیرخطی رخ می‌دهد، این در حالی است که مدل خطی در این جهات همواره مقدار صفر را نشان می‌دهد و دارای هیچ پیک پاسخی نیست.

شکل 13 نشان می‌دهد جابه‌جایی درجات آزادی سازه تقریباً در یک محدوده هستند، که دلیل این امر زاویه ورود تحریک 60 درجه است، از طرفی پاسخ‌های مدل خطی و مدل غیرخطی در درجات آزادی مختلف برهم منطبق نیست.

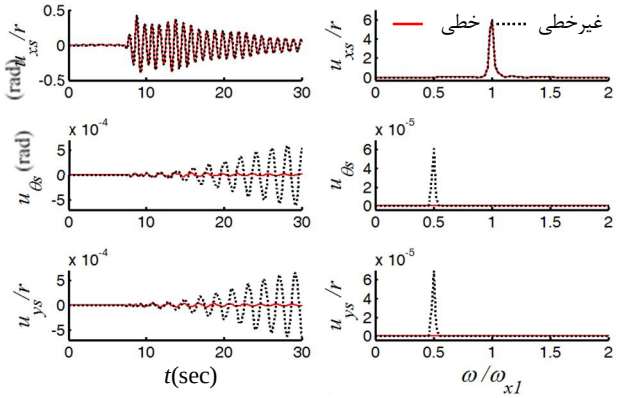
در شکل 14 مشاهده می‌شود، هنگامی که تحریک کاملاً در جهت نامتقارن سازه است، جابه‌جایی‌های $u_{\theta s}$ و u_{ys} نسبت به جابه‌جایی u_{xs}، مقادیر بیشتری را نشان می‌دهند و جابه‌جایی جهت متقارن سازه در مدل خطی مقدار صفر را نشان می‌دهد، حال آنکه در مدل غیرخطی جابه‌جایی جهت متقارن سازه تا لحظه 9/8 ثانیه صفر است و از آن لحظه به بعد افزایش می‌یابد. همچنین، مشاهده می‌شود پاسخ‌های زمانی و فرکانسی مدل خطی سازه برای درجات آزادی y و θ مقادیر بیشتری نسبت به مدل غیرخطی نشان می‌دهند، درحالی که پیک پاسخ مدل غیرخطی در جهت متقارن در فرکانس نظیر این جهت قابل توجه است.

شکل‌های 15، 16 و 17 پاسخ‌های زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 را تحت زوایای تحریک به‌ترتیب 0، 60 و 90 درجه برای دو مدل خطی و غیرخطی نشان می‌دهند.

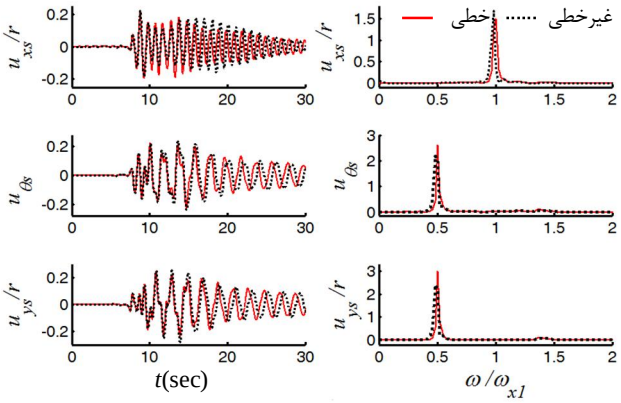
در شکل 15 مشاهده می‌شود جابه‌جایی پیچشی و جانبی سازه در مدل خطی مقدار بیشتری را نسبت به مدل غیرخطی نشان می‌دهد تا در زمان‌های

بزرگ این مقدار در مدل غیرخطی به صفر می‌رسد و همچنین پیک جابه‌جایی پیچشی و جانبی مدل خطی در نخستین فرکانس همبسته پیچشی-جانبی $(\Omega = \Omega_1)$، بیشتر از مدل غیرخطی است.

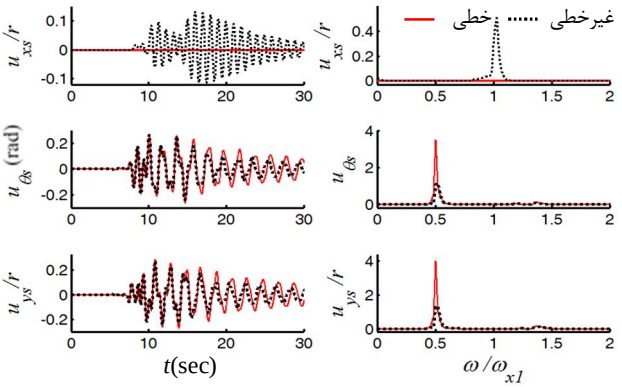
در شکل 16، جابه‌جایی جهت متقارن سازه در مدل خطی از یک لحظه مشخص به بعد دارای مقدار بیشتری نسبت به مدل غیرخطی است. پیک پاسخ‌های فرکانسی در مدل خطی دارای مقدار بیشتری نسبت به مدل غیرخطی بوده و این اختلاف در جهت متقارن به حداکثر مقدار می‌رسد. در شکل 17، پاسخ‌های زمانی و فرکانسی دو مدل خطی و غیرخطی در درجات آزادی y و θ برابر است. بررسی محتوای فرکانسی جهت متقارن نتیجه



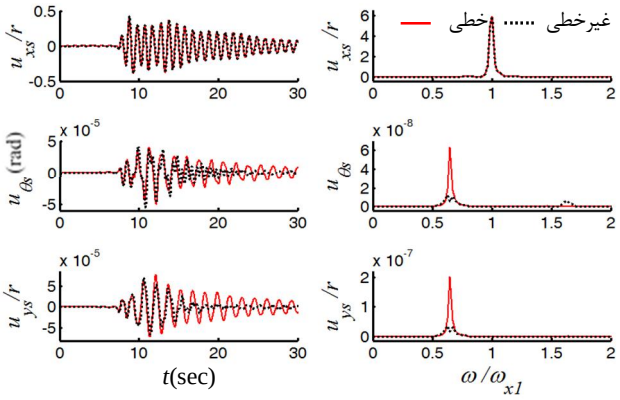
شکل 12 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 0 درجه نسبت به محور X



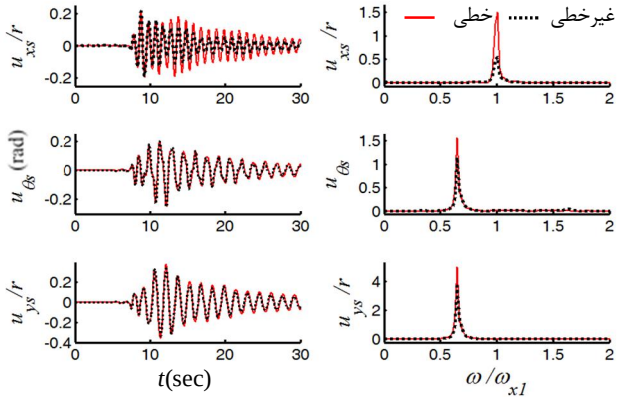
شکل 13 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 60 درجه نسبت به محور X



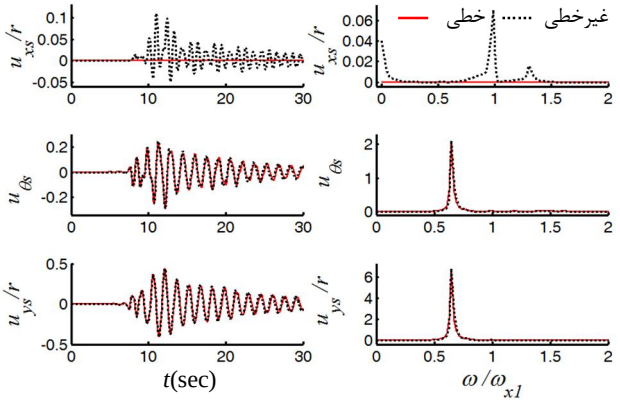
شکل 14 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 2 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 90 درجه نسبت به محور X



شکل 15 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 0 درجه نسبت به محور X



شکل 16 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 60 درجه نسبت به محور X



شکل 17 پاسخ زمانی و فرکانسی سازه نوع 3 تحت زلزله کوبه تحت زاویه ورود تحریک 90 درجه نسبت به محور X

می‌دهد که مدل خطی تحریک نشده، حال آنکه در مدل غیرخطی، دیافراگم صلب طبقه جابه‌جایی خالص و بدون ارتعاش داشته که البته مقدار آن، با توجه به اینکه تحریک در جهت نامتقارن است، ناچیز است.

پاسخ‌های زمانی و فرکانسی جداساز نیز برای 3 نوع سازه، تحت زلزله کوبه تحت زوایای ورود تحریک 0، 60 و 90 بررسی شد که نتایج مشابهی را با سازه به‌همراه داشت.

طبق مدل خطی، جابه‌جایی در امتداد متقارن، مستقل و غیرهمبسته با درجات آزادی دیگر سیستم است. از این رو، هنگامی که سازه تحت تحریک اولیه در جهت نامتقارن قرار گیرد، در جهت متقارن هیچ تحریکی به آن وارد

نمی‌شود. همان‌طور که مشاهده شد پاسخ جابه‌جایی مدل خطی در جهت متقارن صفر شد. اما، بر مبنای معادلات حرکت مدل غیرخطی ارائه شده در این مقاله، درجات آزادی سیستم برای سازه و جداساز نامتقارن یک طرفه، به‌طور خطی و غیرخطی با یکدیگر همبسته‌اند. به عبارت دیگر اگرچه جهت X به‌طور خطی با درجات آزادی جهات y و θ همبسته نیست، ولی به سبب عبارت غیرخطی اینرسی در معادلات غیرخطی با آن‌ها همبسته می‌شوند. بنابراین، طبق مدل غیرخطی پیشنهادی، انتظار می‌رود که به سبب تحریک اولیه در امتداد نامتقارن سازه، یعنی محور Y، پاسخ جابه‌جایی در جهت متقارن، یعنی محور X، غیر صفر باشد، همان‌طور که مشاهده شد پاسخ جابه‌جایی در مدل غیرخطی در جهت متقارن برابر صفر نشد.

همان‌طور که در نمودارهای پاسخ فرکانسی مشاهده شد، پیک‌های پاسخ اندرکنشی سازه و جداساز بر روی فرکانس‌های اول جهات متقارن، نامتقارن و پیچشی بروز می‌کنند. همان‌گونه که قبلاً بیان شد، این فرکانس‌ها تقریباً نزدیک به فرکانس جداساز هستند و در نتیجه سازه اصلی هیچ‌گونه اثری در رفتار اندرکنشی سازه و جداساز نداشته و به‌صورت یک جسم صلب عمل می‌کند، از این‌رو، به‌دلیل بزرگ بودن نسبت سختی‌های سازه به زیرسازه، می‌توان این رفتار اندرکنشی را به‌صورت یک سازه یک طبقه مورد تحلیل قرار داد. نتایج این تحلیل ساده شده با داده‌های به‌دست آمده در مراجع [22،21] برای سازه نامتقارن یک طبقه و نیز با نتایج تحقیق حاضر منطبق خواهد بود.

4- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

حرکت سازه جداسازی شده نامتقارن توسط 6 درجه آزادی توصیف شد که 3 درجه آزادی مربوط به سازه و 3 درجه آزادی دیگر مربوط به جداساز است. معادلات حرکت دو مدل خطی و غیرخطی با توجه به دستگاه‌های مختصات نصب شده در پایه ساختمان (دستگاه مختصات کلی)، و برکف جداساز (دستگاه مختصات محلی) برای این درجات آزادی ارائه شد. اختلاف این دو مدل، تفاوت در عبارت‌های غیرخطی اینرسی آن‌ها بود که تنها در مدل غیرخطی ظاهر شد. سپس، 3 نوع سازه خاص تعریف شد پاسخ‌های این 3 نوع سازه، تحت تحریکات نیروهای هارمونیک با توجه به تغییر دامنه تحریک A و فرکانس تحریک Ω، و همچنین تحت زلزله کوبه با زوایای مختلف ورود تحریک β نسبت به محور X مورد بررسی قرار گرفتند. به بررسی پاسخ‌های سازه وجداساز در دو حوزه زمان و فرکانس برای دو مدل خطی و غیرخطی پرداخته و مشاهدات نتایج برای 3 نوع سازه به موارد زیر خلاصه می‌شود:

- پاسخ‌های زمانی و فرکانسی دو مدل خطی و غیرخطی در سازه نوع 1 دقیقاً برهم منطبق است و این انطباق مستقل از اندازه دامنه و فرکانس تحریک، تحت بار هارمونیک و زوایای ورود تحریک، تحت بار هارمونیک و زلزله است.

- در پدیده اشباع، در لحظه‌ای مشخص، انرژی جذبی توسط پاسخ یک جهت، اشباع شده و از آن لحظه به بعد مابقی انرژی تحریک جذبی، که حاوی پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی بیشتر است، به درجات آزادی جهت دیگر، تحت پاسخ هارمونیک با فرکانس طبیعی کمتر، منتقل می‌شود. این رفتار مدل غیرخطی در سازه 2 قابل مشاهده است.

- در پدیده انتقال انرژی مشابه پدیده اشباع، انتقال انرژی از یک جهت به جهت دیگر صورت می‌گیرد، با این تفاوت که این انتقال از لحظات نخستین تحریک آغاز می‌شود و دارای یک لحظه خاص نیست. این پدیده در سازه 3 مشهود است.

- با افزایش دامنه تحریک، اختلاف پاسخ‌های دو مدل خطی و غیرخطی در سازه‌های نوع 2 و 3 چشمگیرتر بوده و در دامنه‌های بزرگ‌تر، بی‌نظمی‌هایی در ارتعاشات مدل غیرخطی سازه رخ می‌دهد که دیگر از پاسخ‌های هارمونیک تبعیت نمی‌کند.

- در سازه 2 با اعمال تحریک زلزله در جهت متقارن، هر دو مدل خطی و غیرخطی در فرکانس اول مد ارتعاشی متقارن تحریک می‌شود، ولی در مدل غیرخطی علاوه‌بر آن فرکانس مد اول جهت نامتقارن نیز تحریک شده است. با اعمال تحریک در جهت نامتقارن، هر دو مدل در فرکانس اول نامتقارن تحریک شده، ولی پیک پاسخ مدل خطی بیشتر است. همچنین، مد فرکانسی جهت متقارن نیز در مدل غیرخطی برخلاف مدل خطی، به سبب انتقال انرژی از جهت پیچشی-جانبی به جهت متقارن، تحریک شده است.

- در سازه 3 با اعمال تحریک زلزله در جهت متقارن، هر دو مدل خطی و غیرخطی در فرکانس مد اول جهت نامتقارن تحریک شده که مدل خطی دارای مقدار بیشتری است. با اعمال تحریک در جهت نامتقارن، هر دو مدل در فرکانس اول نامتقارن تحریک شده و دارای پیک پاسخ‌های برابر هستند و دیافراگم صلب طبقه در جهت متقارن جابه‌جایی خالص و بدون ارتعاش داشته است.

- دلیل اختلاف پاسخ‌های مدل خطی با مدل غیرخطی وجود عبارت‌های غیرخطی اینرسی در معادلات حرکت مدل غیرخطی است که باعث می‌شود درجات آزادی جهات متقارن و نامتقارن به‌طور همبسته با یکدیگر عمل کنند.

- به سبب بزرگ بودن سختی سازه نسبت به جداساز، می‌توان رفتار اندرکنشی سازه و جداساز را به‌صورت یک سازه یک طبقه شامل یک جسم صلب هم وزن سازه بر روی لایه نرم زیرسازه یا همان جداساز درنظر گرفت.

بنابراین، این تحقیق، با ارائه نگرش جدید و معادلات غیرخطی حاصل شده از آن و به کمک بررسی پدیده‌های غیرخطی ممکن، علاوه‌بر نمایش قابلیت‌های دیگر رفتار اندرکنشی سازه و جداساز، بر لزوم مطالعات بیش‌تر بر این نوع تکنیک و روش کنترل سازه‌ها جهت اصلاح روش‌های تحلیل و طراحی متداول و حتی تغییر ضوابط و تجویزهای آیین‌نامه‌هایی نظیر UBC8، تأکید دارد.

5- مراجع

[1] J. M. Kelly, F. Naeim, Design of seismic isolated structures: From theory to practice, *Nueva York, John Wiley & Sons,* 1999.

[2] A. Tena-Colunga, L. Gomez-Soberon, Torsional response of base-isolated structures due to asymmetries in the superstructure, *Engineering structures,* Vol. 24, No. 12, pp. 1587-1599, 2002.

[3] A. Tena-Colunga, C. Zambrana-Rojas, Dynamic torsional amplifications of base-isolated structures with an eccentric isolation system, *Engineering structures,* Vol. 28, No. 1, pp. 72-83, 2006.

[4] A. Tena-Colunga, J. L. Escamilla-Cruz, Torsional amplifications in asymmetric base-isolated structures, *Engineering structures,* Vol. 29, No. 2, pp. 237-247, 2007.

[5] J. C. De La Llera, J. L. Almazan, I. Vial, V. Ceballos, M. Garcia, Analytical and experimental response of asymmetric structures with friction and visco-elastic dampers, in *Proceeding of 13th world conference on earthquake engineering,* pp. 516-531, Vancouver, British Columbia, Canada, 2004.

[6] C. E. Seguín, J. C. de la Llera, J. L. Almazán, Base–structure interaction of linearly isolated structures with lateral–torsional coupling, *Engineering Structures,* Vol. 30, No. 1, pp. 110-125, 2008.

[7] C. E. Seguin, J. L. Almazán, J. C. De la Llera, Torsional balance of seismically isolated asymmetric structures, *Engineering Structures,* Vol. 46, pp. 703-717, 2013.

[8] V. Kilar, D. Koren, Seismic behaviour of asymmetric base isolated structures with various distributions of isolators, *Engineering Structures,* Vol. 31, No. 4, pp. 910-921, 2009.

[9] M. Sharbatdar, S. Vaez, G. G. Amiri, H. Naderpour, Seismic response of base-isolated structures with LRB and FPS under near fault ground motions, *Procedia Engineering,* Vol. 14, pp. 3245-3251, 2011.

[10] A. Nayfeh, D. Mook, *Nonlinear Oscillations,* New York: John Willey and Sons, 1979.
[11] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, L. R. Marshall, Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions, *Journal of Hydronautics,* Vol. 7, No. 4, pp. 145-152, 1973.
[12] H. Hatwal, A. Mallik, A. Ghosh, Non-linear vibrations of a harmonically excited autoparametric system, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 81, No. 2, pp. 153-164, 1982.
[13] J. Miles, Resonantly forced motion of two quadratically coupled oscillators, *Physica D: Nonlinear Phenomena,* Vol. 13, No. 1, pp. 247-260, 1984.
[14] W. K. Lee, H. D. Park, Chaotic dynamics of a harmonically excited spring-pendulum system with internal resonance, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 14, No. 3, pp. 211-229, 1997.
[15] P. Bayly, L. Virgin, An empirical study of the stability of periodic motion in the forced spring-pendulum, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences,* Vol. 443, No. 1918, pp. 391-408, 1993.
[16] G. Gorelik, A. Witt, Swing of an elastic pendulum as an example of two parametrically bound linear vibration systems, *J. Tech. Phys.(USSR),* Vol. 3, No. 2-3, pp. 294-307, 1933.
[17] S. R. Hsieh, S. W. Shaw, The dynamic stability and non-linear resonance of a flexible connecting rod: single-mode model, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 170, No. 1, pp. 25-49, 1994.
[18] A. Shooshtari, D. Dastani Mobarakeh, Nonlinear free vibration of a single layered nanoplate based on the nonlocal elasticity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 15, pp. 223-236, 2014. (In Persian)
[19] A. Mamandi, M. H. Kargarnovin, D. Younesian, Nonlinear dynamics of an inclined beam subjected to a moving load, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 60, No. 3, pp. 277-293, 2010.
[20] A. K. Chopra, *Dynamics of structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering,* 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
[21] F. Amini, M. A. Afshar, Saturation in asymmetric structures under internal resonance, *Acta mechanica,* Vol. 221, No. 3-4, pp. 353-368, 2011.
[22] M. Amin Afshar, F. Amini, Non-linear dynamics of asymmetric structures under 2: 2: 1 resonance, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 47, No. 7, pp. 823-835, 2012.