



تحلیل خمش میکروتیرهای یک سرگیردار بر اساس تئوری پلاستیسیته‌ی گرادایانی چن-وگ

حکیمه علیزاده¹، رضا انصاری^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت، صندوق پستی 3756، r_ansari@guilan.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 06 شهریور 1393
پذیرش: 24 آذر 1393
ارائه در سایت: 13 دی 1393
کلید واژگان:
پلاستیسیته گرادایان کرنش
میکروتیر یک سرگیردار
خمش
مقیاس طول داخلی
تئوری چن - وگ

چکیده

وقتی ضخامت تیر یک سرگیردار به میکرون تقلیل می‌یابد، رفتار مکانیکی تیر تحت تأثیر ابعاد ماده و مقیاس طول داخلی قرار می‌گیرد. هدف این مقاله، تحلیل خمش میکرو تیر یک سرگیردار و ارائه رابطه‌ای برای خیز تیر مذکور با استفاده از تئوری پلاستیسیته گرادایان کرنش چن - وگ می‌باشد. مدل تیر مورد استفاده، اوپلر - برنولی است که در سه حالت الاستیک، صلب - پلاستیک و الاستو پلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است و روابط دقیقی برای کرنش‌های الاستیک و پلاستیک ارائه شده‌است. خیز تیر برای هر سه حالت، به ازای طول مشخصه‌های مختلف و بارگذاری‌های متفاوت بدست آمده، نتایج حاصل با یکدیگر و نیز با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده و تحلیل‌هایی ارائه شده‌اند. همچنین نتایج حاصل از تئوری کلاسیک برای مشخص کردن ناتوانی این تئوری در پیش‌بینی دقیق رفتار مواد در اندازه‌های میکرون یا پایین‌تر نیز رسم شده‌اند. نتایج بدست آمده نشان دهنده وابستگی جواب‌ها به حدود ابعاد و طول مشخصه می‌باشد. همچنین مقایسه نتایج حاصل از این تحقیق و نتایج تجربی، نشان دهنده صحت تقریبی تئوری گرادایانی به کار گرفته شده است.

Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory

Hakimeh Alizadeh, Reza Ansari*

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r_ansari@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 28 August 2014
Accepted 15 December 2014
Available Online 03 January 2015

Keywords:
Strain Gradient Plasticity
Micro Cantilever Beam
Bending
Intrinsic Length Scale
Chen-Wang Theory

ABSTRACT

When the cantilever beam thickness is scaled down to micron, the dimension of material and the intrinsic length scale affect the mechanical behavior of the beam. The purpose of this paper is to analyze the bending of cantilever micro-beam and present a relation for the beam deflection using Chen-Wang gradient plasticity theory. To this end, the Euler-Bernoulli beam model is utilized and three cases including elastic, rigid-plastic and elasto-plastic beams are considered. Clear relations for elastic and plastic strains are given. For all mentioned cases, the beam deflection is determined for different intrinsic lengths and the obtained results are compared with each other and experimental data and some explanations are presented. The results obtained from classical theory are also shown in the results section to prove that classical theories do not have the ability to predict behavior of micron-size structures precisely. Numerical results clarify the dependence of responses to the range of dimensions and intrinsic lengths. The comparison between the present results and those observed from experimental tests authenticate the reliability of utilized gradient theory.

1- مقدمه

این تحقیقات نشان داده‌اند که رفتار مکانیکی مواد آشکارا به حدود ابعاد ماده وابسته است. این آزمایشات شامل پیچش سیم مسی در ابعاد میکرو [1]، خمش ورق‌های نیکل در ابعاد میکرو [2]، سختی‌سنجی در ابعاد میکرو و نانو [3] و کامپوزیت‌های دارای ذرات کوچک فلزی [4] می‌باشند. با توجه به این که تئوری‌های پلاستیسیته کلاسیک، پارامتری برای در نظر گرفتن مقیاس طول داخلی ندارند، قادر به پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو نمی‌باشند. بنابراین نیاز به بسط تئوری‌های پلاستیسیته جدید می‌باشد که شامل پارامتری برای اثرات ابعاد و اندازه باشد. مقیاس طولی ماده تاکنون مفهوم فیزیکی خاصی که مورد قبول محققین باشد را ندارد. در واقع

استفاده از تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته¹ برای پیش‌بینی رفتار مواد در بسیاری از تغییرشکل‌ها در ابعاد میکرو به شکست می‌انجامد. نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که در این موارد وابستگی معناداری به پارامترهای طولی اندازه‌های وجود دارد و برای تحلیل رفتار مواد، لازم است تئوری‌های کلاسیک محیط پیوسته بسط داده شده و کمیت‌هایی شامل ابعاد ماده وارد معادلات ساختاری شود. تأثیرات اندازه در توجیه رفتار مکانیکی، در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است.

1- Classic continuum mechanics theories

در این مقاله ابتدا به توصیف تئوری پلاستیسیته‌ی گرادانی چن-ونگ پرداخته شده است. سپس با استفاده از این تئوری، رابطه‌ی تحلیلی برای خمش میکروتیر یک سرگیردار تحت دو نوع بارگذاری ممان M و نیروی متمرکز P در انتهای تیر، برای حالت‌های الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستوپلاستیک ارائه شده است. سپس نتایج برای پارامتر طول‌های مختلف رسم می‌شود. با مشاهده نتایج می‌توان به روشنی دریافت که در ابعاد میکرون، خمش تیر بسیار وابسته به اندازه می‌باشد.

2- تئوری پلاستیسیته‌ی گرادانی چن-ونگ

در این بخش خلاصه‌ای از تئوری چن-ونگ [11] ارائه می‌شود.

در پلاستیسیته‌ی کلاسیک تنش مؤثر، مزدوج با کرنش مؤثر است که به با رابطه (1) بیان می‌شود:

$$\sigma_e = \frac{du(\epsilon_e)}{d\epsilon_e} \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} : \sigma'_{ij}} \quad (1)$$

تغییرات چگالی انرژی کرنشی نیز با رابطه (2) ارائه می‌شود:

$$\delta u = \sigma' : \delta \epsilon' + \sigma_m : \delta \epsilon_m = \sigma : \delta \epsilon \quad (2)$$

که

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial u}{\partial \epsilon'_{ij}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\epsilon_e} \epsilon'_{ij} \quad (3)$$

نرخ تنش انحرافی σ'_{ij} ، به ترتیب رابطه (4) می‌باشد:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{\epsilon_e} \sigma_e + \frac{2}{3} \frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{\epsilon_e} \sigma_e - \frac{2}{3} \frac{\epsilon'_{ij} \dot{\sigma}_e}{\epsilon_e^2} \epsilon_e \quad (4)$$

تنش مؤثر فون میسز با توجه به معیار تسلیم فون میسز در پلاستیسیته‌ی کلاسیک، تابعی از کرنش مؤثر می‌باشد که با توجه به [11] به صورت رابطه (5) نیز بیان می‌شود:

$$\sigma_e = A(\epsilon_e) = \Sigma_0 + \frac{3}{2} E_p \epsilon_e \quad (5)$$

و نرخ آن به ترتیب رابطه (6) می‌باشد:

$$\dot{\sigma}_e = A'(\epsilon_e) \dot{\epsilon}_e \quad (6)$$

در این تئوری، گرادان کرنش و نرخ قانون سخت‌شوندگی، شامل جمله گرادانی، به صورت رابطه (7) معرفی می‌گردد:

$$\dot{\sigma}_e = A'(\epsilon_e) \left(1 + \frac{l_{cw} \eta}{\epsilon_e}\right)^{1/2} \dot{\epsilon}_e = B(\epsilon_e, l_{cw} \eta) \dot{\epsilon}_e \quad (7)$$

که در آن

$$\eta = \sqrt{c_1 \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + \chi_e^2} \quad (8)$$

$\eta_{ijk}^{(1)}$ تانسور گرادان کرنش می‌باشد که همانند عبارت گرادان کشیدگی¹⁰ فلک و هاتچینسون [8] تعریف می‌گردد و c_1 نیز به صورت رابطه (9) بیان می‌گردد:

$$c_1 = \left(\frac{l_1}{l_{cw}}\right)^2 \quad (9)$$

در این تئوری l_1 و l_{cw} ، به ترتیب مقیاس طول داخلی مربوط به گرادان کشش و گرادان چرخش¹¹ می‌باشد.

3- خمش میکروتیر یک سرگیردار تحت بارگذاری نیروی متمرکز در انتهای تیر

3-1- حالت صلب-پلاستیک

شکل 1، میکرو تیر یک سرگیردار اوپلر- برنولی را تحت بارگذاری نیروی متمرکز P نشان می‌دهد. محور x در راستای طول تیر، محور y در راستای پهنای تیر و محور z در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

تنها چیزی که با قاطعیت می‌توان گفت این است که مقیاس طولی ماده، کمیتی است که بصورت ضربی از گرادان‌های مرتبه‌ی بالای کرنش در معادلات وارد می‌شود و به کمک آن‌ها سعی شده رفتار وابسته به ابعاد ماده توجیه گردد. البته تلاش‌هایی به منظور پیدا کردن توجیه فیزیکی برای مقیاس طول داخلی انجام شده است. در تلاش‌های اولیه سعی شده است که مقیاس طول داخلی ماده، l ، به کمیت‌های میکرو ساختار¹ ارتباط داده شود [5]. در معادلات روش‌های گرادانی، گرادان مرتبه‌ی بالای کمیت‌های اساسی، با ضرایبی که نشان‌دهنده‌ی کمیت‌های وابسته به ابعاد ماده می‌باشند، همراه با در نظر گرفتن محیط پیوسته‌ی غیر موضعی² ارائه شده است. تاکنون تئوری‌های پلاستیسیته گرادانی متعددی برای حل مسائل مربوط به تغییر شکل‌های کوچک و بزرگ ارائه شده است که به دو دسته تقسیم می‌شوند.

دسته‌ی اول، تئوری‌های مرتبه‌ی پایین³ هستند که ابتدا توسط آچاریا و بیودین [6] مطرح شد. این دسته از تئوری‌ها، تئوری مرسوم پلاستیسیته را همراه با در نظر گرفتن گرادان کرنش پلاستیک به صورت شبه زمانی و یا مدول مماسی در خود دارند. به عبارتی در تابع تسلیم⁴ ماده عبارتی وابسته به گرادان کرنش پلاستیک مؤثر وارد می‌شود و سایر معادلات ساختاری کلاسیک ماده و همچنین شرایط مرزی به صورت اولیه خود باقی می‌مانند و نیازی به در نظر گرفتن شرایط مرزی اضافی نیست.

دسته‌ی دوم تئوری‌های مرتبه‌ی بالا⁵ هستند که ابتدا توسط ایفانتیس [7] با یک مقیاس طولی داخلی و سپس توسط فلک و هاتچینسون [8-10] با سه مقیاس طولی داخلی ارائه شد. این دسته از تئوری‌ها شرایط مرزی اضافی داشته و تنش‌های مرتبه‌ی بالا را به همراه کرنش‌های مرتبه‌ی بالای سازگار با آن وارد معادلات ساختاری می‌نماید و معادلات ساختاری مرتبه‌ی بالا با شرایط مرزی اضافی ارائه می‌گردد.

تئوری چن-ونگ که از دسته تئوری‌های مرتبه پایین است، توسط چن و ونگ ارائه شد [11]. در این تئوری یک قانون جدید سخت‌شوندگی گرادان کرنش، بر اساس حفظ ساختار پلاستیسیته‌ی فون میسز⁶ مطرح شده است. در این تئوری اثرات گرادانی به صورت مدول مماسی وارد معادلات می‌شود و نیازی به تعریف تنش‌های مرتبه‌ی بالا و شرایط مرزی اضافی نمی‌باشد. با به کارگیری این تئوری، چن و ونگ [12] به بررسی و تحلیل پدیده تسلیم پرداختند.

کاربردهای بی‌اندازه میکروتیرهای یک سرگیردار در میکروسیستم‌های الکترو-مکانیکی باعث ترغیب محققان برای تحلیل رفتار آن‌ها شده است. خمش میکرو تیر در حالت‌های الاستیک و پلاستیک در تحقیقات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است [13-16]. آیدیارت و همکارانش [17] با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی گرادانی فلک و ویلیس [18] اثرات اندازه را در خمش تیرهای نازک مورد تحلیل قرار دادند. جی و همکارانش [19] رفتار الاستوپلاستیک میکرو تیر را با استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی تنش کوپل⁷ بررسی نمودند. شی و همکارانش [20] اثرات گرادان کرنش و منحنی تنش و کرنش⁸ در مقیاس میکرو را در خمش میکروتیر مورد توجه قرار دادند. مانو و همکارانش [21] رفتار الاستوپلاستیک میکروتیر ساخته شده از مواد هوشمند را با تئوری برپایه مکانیزم⁹ تحلیل نمودند.

- 1- Microstructure
- 2- Non-Local
- 3- Lower order
- 4- Yield surface
- 5- Higher order
- 6- Von-mises
- 7- Couple stress
- 8- Stress-Strain curve
- 9- Mechanism- Based

10- Stretch gradient
11- Rotation gradient

$$\sigma_e = (\Sigma_0 + E_p z w'') \left(1 + \sqrt{\frac{3 l_{cw}}{2 z}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

که Σ_0 تنش تسلیم است. با توجه به رابطه (3) اجزای غیر قابل حذف تنش-های انحرافی به صورت رابطه (23) می باشد:

$$\sigma'_{xx} = -\frac{1}{2} \sigma'_{yy} = -\frac{1}{2} \sigma'_{zz} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \varepsilon'_{ij} \quad (23)$$

تنش حجمی σ_m ، به صورت رابطه (24) خواهد بود:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma'_{xx}}{3} \quad (24)$$

حال با استفاده از اصل انرژی پتانسیل مینیمم کل، معادلات حاکم و شرایط مرزی استخراج می شود:

$$\delta \pi = (k_2 w'' + k_1) \delta w'(x) \Big|_0^L - k_2 w'''(x) \Big|_0^L + \int_0^L k_2 w'''(x) \delta w(x) dx - P \delta w(L) = 0 \quad (25)$$

که k_1 و k_2 ثابت های وابسته به مقیاس طولی داخلی می باشند و با روابط (26-الف) و (26-ب) مشخص می گردند:

$$k_1 = \frac{1}{8} \Sigma_0 b [(2h + \sqrt{6} l_{cw}) \sqrt{h^2 + l_{cw} h \sqrt{6}} - 3 l_{cw}^2 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6} h + \sqrt{6 h^2 + 6 \sqrt{6} l_{cw} h}}{3 l_{cw}} \right)] \quad (26-الف)$$

$$k_2 = E_p b \left[\frac{1}{48} \sqrt{h^2 + l_{cw} h \sqrt{6}} (4 h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} - 9 l_{cw}^2) + \frac{3 \sqrt{6}}{32} l_{cw}^3 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6} h + \sqrt{6 h^2 + 6 \sqrt{6} l_{cw} h}}{3 l_{cw}} \right) \right] \quad (26-ب)$$

حال با توجه به شرایط مرزی و معادله حاکم به محاسبه ی خیز تیر پرداخته می شود. شرایط مرزی در انتهای گیردار تیر یعنی $x = 0$ بصورت رابطه (27) می باشد:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0 \quad (27)$$

در انتهای آزاد، یعنی $x = L$ داریم:

$$M_{x=L} = \int_A (m_{xy} + \sigma_{xx} z) dA \Big|_L = (k_2 w'' + k_1) = 0 \quad (28-الف)$$

$$M'_{x=L} = M' = -k_2 w'''(L) = 0 \quad (28-ب)$$

با توجه به رابطه (25) خواهیم داشت:

$$k_2 w'''(x) = 0 \quad (29)$$

با توجه به رابطه (29) و شرایط مرزی، خیز تیر بصورت رابطه (30) مشخص می شود:

$$w^p = \frac{P x^2}{6 k_2} \left[3 \left(L - \frac{k_1}{P} \right) - x \right] \quad (30)$$

و شیب پلاستیک، θ^p ، نیز به صورت رابطه (31) خواهد بود:

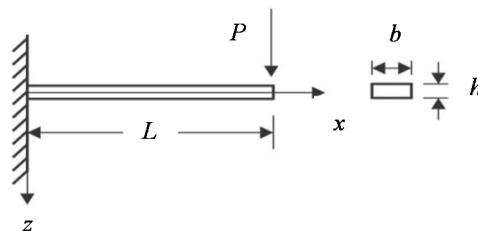
$$\theta^p = \frac{(2PL - Px - 2k_1)x}{k_2} \quad (31)$$

کرنش پلاستیک ε_{xx}^p ، به ترتیب رابطه (32) می باشد:

$$\varepsilon_{xx}^p = -\frac{(PL - Px - k_1)z}{k_2} \quad (32)$$

3-2- حالت الاستیک

در حالت الاستیک، $\Sigma_0 = 0$ و $E_p = E$ خواهد بود. بنابراین خیز تیر در حالت الاستیک، تحت اعمال نیروی متمرکز به انتهای تیر با رابطه (33) تعیین می گردد:



شکل 1 میکروتیر یک سرگیردار تحت نیروی متمرکز در انتهای تیر

میدان جابجایی برای تیر مذکور به صورت رابطه (10) بیان می شود:

$$u_1 = -zw'(x), u_2 = 0, u_3 = w(x) \quad (10)$$

با توجه به میدان جابجایی مولفه های کرنش نیز به ترتیب رابطه (11) می باشند:

$$\varepsilon_{xx} = -zw''(x) \quad (11-الف)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (11-ب)$$

کرنش حجمی ε_m و مؤلفه های کرنش انحرافی ε'_{ij} به صورت روابط (12) و (13) محاسبه می شوند:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -zw''(x) \quad (12)$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_m \delta_{ij} \quad (13-الف)$$

$$\varepsilon'_{xx} = -\frac{1}{2} \varepsilon'_{yy} = -\frac{1}{2} \varepsilon'_{zz} = -\frac{2}{3} zw''(x) \quad (13-ب)$$

کرنش مؤثر ε_{eff} ، نیز به ترتیب رابطه (14) بدست می آید:

$$\varepsilon_{eff}^2 = \frac{2}{3} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \quad (14-الف)$$

$$\varepsilon_{eff} = \frac{2}{3} zw''(x) \quad (14-ب)$$

مؤلفه بردار چرخش θ_y ، نیز با رابطه (15) مشخص می گردد:

$$\theta_y = w'(x) \quad (15)$$

و تانسور انحنای به ترتیب رابطه (16) می باشد:

$$\chi_{ij} = \theta_{i,j} \quad (16-الف)$$

$$\chi_{yx} = w''(x) \quad (16-ب)$$

تانسور انحنای مؤثر با رابطه (17) بیان می گردد:

$$\chi_{eff}^2 = \frac{2}{3} \chi_{ij} \chi_{ij} = \frac{2}{3} w''^2 \quad (17)$$

با توجه به تعریف $\eta_{ijk}^{(1)}$ در تئوری فلک و هاتچینسون [8]، $\eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)}$ با رابطه (18) بیان می گردد:

$$\eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} = \frac{2}{5} z^2 (w''')^2 + \frac{4}{15} (w'')^2 \quad (18)$$

قانون سخت شوندگی پلاستیک در این تئوری با توجه به رابطه ی (7) به صورت رابطه (19) بیان می گردد:

$$\dot{\sigma}_e = \frac{3}{2} E_p \dot{\varepsilon}_e \left(1 + \frac{l_{cw} \eta}{\varepsilon_e} \right)^{1/2} \quad (19)$$

که η ، تانسور گرادایان کرنش پلاستیک، با توجه به رابطه (8) به ترتیب رابطه (20) می باشد:

$$\eta = \sqrt{c_1 \left[\frac{2}{5} z^2 (w''')^2 + \frac{4}{15} (w'')^2 \right] + \frac{2}{3} w''^2} \quad (20)$$

از آنجا که مقیاس طول داخلی مربوط به گرادایان کشش یعنی l_1 بسیار کمتر از مقیاس طول داخلی مربوط به گرادایان چرخش l_{cw} می باشد [13]، عبارت c_1 بسیار کوچک و قابل صرف نظر می باشد. در نتیجه رابطه ی (20) به صورت رابطه (21) بازنویسی می شود:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{3} w''^2} \quad (21)$$

با انتگرال گیری از رابطه ی (19) تنش مؤثر کل σ_e مشخص خواهد شد:

$$w_1 = w^{l_0} \quad (42\text{-الف})$$

$$w_2 = \theta^{l_0}(x - l_0) \quad (42\text{-ب})$$

$$w_3 = \frac{P(x - l_0)^2(3L - 2l_0 - x)}{6k_3} \quad (42\text{-ج})$$

می توان خیز تیر را در این حالت با معادله کلی (43) بیان نمود:

$$w^{ep} = \begin{cases} \frac{Px^2}{6k_2} \left[3 \left(L - \frac{k_1}{P} \right) - x \right] & x < l_0 \\ w^{l_0} + \theta^{l_0}(x - l_0) + \frac{P(x - l_0)^2(3L - 2l_0 - x)}{6k_3} & x \geq l_0 \end{cases} \quad (43)$$

که l_0 ، θ^{l_0} و w^{l_0} به ترتیب با معادلات (38-40) بیان می شوند.

4- خیز میکروتیر یک سرگیردار تحت بارگذاری ممان M در انتهای تیر

4-1- حالت صلب-پلاستیک

شکل 2، میکرو تیر یک سرگیردار اوپلر-برنولی به طول L ، ضخامت h و پهنای b را تحت بارگذاری ممان M نشان می دهد. محور x در راستای طول تیر، محور y در راستای پهنای تیر و محور z در راستای ضخامت تیر می باشد.

با بکارگیری اصل انرژی پتانسیل مینیمم کل خواهیم داشت:

$$\delta\pi = k_2 w'' + k_1 \delta w'(x) \Big|_0^L - k_2 w'''(x) \Big|_0^L + \int_0^L k_2 w'''(x) \delta w(x) dx - M \delta w'(L) = 0 \quad (44)$$

شرایط مرزی در انتهای گیردار تیر یعنی در $x = 0$ همان رابطه (27) می باشد و در انتهای آزاد، یعنی $x = L$ داریم:

$$M_{x=L} = \int_A (m_{xy} + \sigma_{xx} z) dA_L = (k_2 w'' + k_1) = M \quad (45\text{-الف})$$

$$M'_{x=L} = M' = -k_2 w'''(L) = 0 \quad (45\text{-ب})$$

با توجه به معادله حاکم:

$$w'''(x) = 0 \quad (46)$$

با توجه به معادله حاکم و شرایط مرزی (27) خیز تیر یکسر گیردار با معادله ی (47) مشخص می گردد:

$$w = \frac{M - k_1}{2k_2} x^2 \quad (47)$$

رابطه (47) نشان می دهد که خیز تیر وابسته به اثرات ابعاد و مقیاس طولی داخلی می باشد.

4-2- حالت الاستیک

در حالت الاستیک، $E_p = E$ و $\Sigma_0 = 0$ خواهد بود. بنابراین خیز تیر در حالت الاستیک، تحت اعمال ممان به انتهای تیر با رابطه (48) تعیین می گردد:

$$w = \frac{M}{2k_3} x^2 \quad (48)$$

اگر $l_{cw} = 0$ باشد، رابطه (49) حاصل خواهد شد که همان رابطه خیز در الاستیسیته کلاسیک می باشد:

$$w_{\text{classic}} = \frac{M}{2EI} x^2, I = \frac{bh^3}{12} \quad (49)$$

لازم به ذکر است که برای تحلیل الاستوپلاستیک تیر تحت خمش خالص، با توجه به [19] حل تحلیلی ارائه نشده است. دلیل این امر این است که در محاسبات ذکر شده روابط مربوط به ε_{xx}^p و ε_{xx}^e وابسته به x نخواهند بود.

5- بحث و نتایج

در این بخش ابتدا در بخش (5-1)، برای تعیین صحت تقریبی نتایج و اطمینان از قابل قبول بودن تئوری ارائه شده، به مقایسه نتایج به دست آمده

$$w^e = \frac{P(3L - x)x^2}{6k_3} \quad (33\text{-الف})$$

$$k_3 = Eb \left[\frac{1}{48} \sqrt{h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} (4h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} - 9l_{cw}^2)} + \frac{3\sqrt{6}}{32} l_{cw}^3 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6}h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6}l_{cw}h}}{3l_{cw}} \right) \right] \quad (33\text{-ب})$$

که e ، بیانگر حالت الاستیک است. شیب الاستیک θ^e ، نیز به صورت رابطه (34) خواهد بود:

$$\theta^e = \frac{(2PL - Px)x}{3k_3} \quad (34)$$

اگر $l_{cw} = 0$ باشد، به رابطه (35) خواهیم رسید که همان رابطه ی خیز در الاستیسیته ی کلاسیک می باشد.

$$w_{\text{classic}} = \frac{Px^2}{6EI} (3L - x), I = \frac{bh^3}{12} \quad (35)$$

و کرنش الاستیک نیز بصورت رابطه (36) خواهد بود:

$$\varepsilon_{xx}^e = -\frac{P(L - x)z}{k_3} \quad (36)$$

3-3- حالت الاستو-پلاستیک

در این حالت، تغییر شکل پلاستیک در شکل 1 از انتهای گیردار شروع می شود که همانند حالت صلب-پلاستیک بوده و خیز تیر در این قسمت با معادله (30) تعیین می گردد. تغییر شکل الاستیک در $x = l_0$ از انتهای گیردار شروع می شود که l_0 طول جداکننده ناحیه الاستیک و پلاستیک می باشد. با توجه به پیوستگی ε_{xx} در این طول، به محاسبه ی l_0 پرداخته می شود. در $x = l_0$ کرنش الاستیک برابر با کرنش پلاستیک می باشد:

$$\varepsilon_{xx}^e|_{x=l_0} = \varepsilon_{xx}^p|_{x=l_0} \quad (37)$$

با جایگذاری رابطه های (32) و (36) در رابطه (37)، l_0 بدست می آید:

$$l_0 = L + \frac{k_1}{P \left[\frac{E_p}{E} - 1 \right]} \quad (38)$$

شیب و خیز در $x = l_0$ که به ترتیب با θ^{l_0} و w^{l_0} نشان داده می شود با توجه به معادلات (30) و (31) به ترتیب با روابط (39) و (40) مشخص می گردند:

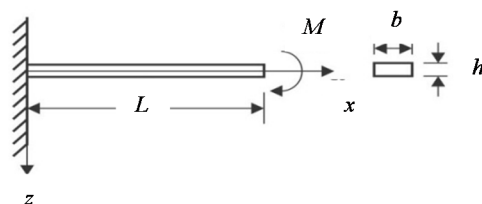
$$\theta^{l_0} = \frac{(2PL - Px - 2k_1)x}{k_2} \quad (39)$$

$$w^{l_0} = \frac{l_0^2(3PL - Pl_0 - 3k_1)}{6k_2} \quad (40)$$

حال به محاسبه ی خیز تیر در حالت الاستوپلاستیک پرداخته می شود. همانطور که ذکر گردید تغییر شکل پلاستیک از $x = 0$ تا $x = l_0$ می باشد که این تغییر شکل به صورت صلب-پلاستیک بوده و خیز تیر با معادله (30) بیان می گردد. اکنون به محاسبه خیز تیر در محدوده ی الاستیک پرداخته می شود. تغییر شکل الاستیک تیر از طول l_0 شروع می شود که در این طول، تیر دارای یک شیب θ^{l_0} و یک خیز w^{l_0} می باشد. خیز تیر در قسمت الاستیک شامل سه بخش است:

$$w^{ep} = w_1 + w_2 + w_3 \quad (41)$$

که eP ، بیانگر حالت الاستو پلاستیک است. w_1 ، همان w^{l_0} در $x = l_0$ ، w_2 ، خیز ایجاد شده توسط شیب θ^{l_0} و w_3 ، خیز مربوط به قسمت تغییر شکل الاستیک می باشد که با معادلات (42) بیان می شود:



شکل 2 میکرو تیر یک سرگیردار تحت بارگذاری ممان M

$$+ \frac{3\sqrt{6}}{4} \left(\frac{E_p}{\Sigma_0} \right) \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)^3 \times \ln \left\{ 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \left[\left(\frac{h}{l_{cw}} \right) + \sqrt{\left(\frac{h}{l_{cw}} \right)^2 + \sqrt{6} \left(\frac{h}{l_{cw}} \right)} \right] \right\} + \left[1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right) \right] \sqrt{1 + \sqrt{6} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)^2} \times \ln \left\{ 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \left[\left(\frac{h}{l_{cw}} \right) + \sqrt{\left(\frac{h}{l_{cw}} \right)^2 + \sqrt{6} \left(\frac{h}{l_{cw}} \right)} \right] \right\} \quad (53)$$

ممان خمشی بی بعد کلاسیک نیز با صفر قراردادن مقیاس طول داخلی به صورت رابطه (54) بدست می آید:

$$\frac{4M}{\Sigma_0 b h^2} = \frac{8}{12} \varepsilon_b \left(\frac{E_p}{\Sigma_0} \right) \quad (54)$$

برای مقایسه نتایج تحلیلی در حالت پلاستیک با داده های تجربی، مانند تحقیق شرتریا و همکارانش [23]، مدول پلاستیسیته معادل 1/03 گیگاپاسکال، مقیاس طول داخلی تئوری چن-وونگ برابر با 4/8 میکرومتر در نظر گرفته شده اند. جدول 2 مقایسه ی نتایج را در حالت پلاستیک نشان می دهد. نتایج نشان می دهد که این تئوری هم در حالت الاستیک و هم در حالت پلاستیک، برای تیرهای ضخیم تر تطابق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد.

2-5- تحلیل نتایج

نمودارهای 3 الی 7 خیز بی بعد تیر، $\frac{w}{h}$ ، بر حسب طول بی بعد، $\frac{x}{h}$ ، می باشند که برای حالت های صلب-پلاستیک، الاستیک و الاستوپلاستیک و تحت بارگذاری های نیروی متمرکز و ممان وارد به انتهای تیر رسم شده است و تأثیر مقیاس طول داخلی را بر خیز تیر نشان می دهد.

برای رسم نمودارها، نسبت طول تیر به ضخامت تیر، $\frac{l}{h}$ ، معادل 40، نسبت پهنای تیر به ضخامت، $\frac{b}{h}$ ، معادل 6، نسبت مدول پلاستیسیته به تنش تسلیم، $\frac{E_p}{\Sigma_0}$ ، معادل 40، نسبت $\frac{M}{\Sigma_0 b h^2}$ برابر 1/2، نسبت $\frac{E_p}{\Sigma_0}$ برابر 1/200، نسبت $\frac{PL}{\Sigma_0 b h^2}$ برابر 2/3 و نسبت $\frac{PL}{E b h^2}$ معادل 1/200 می باشد. لازم به ذکر است که در نتایج غیر کلاسیک، l ثابت فرض شده و با تغییر h ، نسبت های مختلف بدست آمده اند. و برای رسم نتایج کلاسیک l برابر با صفر در نظر گرفته می شود.

جدول 1 مقایسه نتایج حاصل با داده های آزمایشگاهی در حالت الاستیک

ضخامت (میکرومتر)	صلبیت خمشی لم و همکاران (مرجع [22])	صلبیت خمشی چن-وونگ (تحقیق حاضر) (گیگاپاسکال)
20	0/33	0/229
40	0/18	0/183
75	0/16	0/157
115	0/14	0/1455

جدول 2 مقایسه نتایج حاصل با داده های آزمایشگاهی در حالت پلاستیک

ضخامت (میکرومتر)	کرنش	ممان خمشی بی بعد شرتریا و همکاران (مرجع [23])	ممان خمشی بی بعد چن-وونگ (تحقیق حاضر) (گیگاپاسکال)
25	0/025	1/5	1/36
50	0/054	1/35	1/20
100	0/088	1/22	1/10
200	0/09	1/09	1/055

از تئوری چن-وونگ با داده های تجربی پرداخته می شود و سپس در بخش (2-5)، با استفاده از روابط تعیین شده برای خیز تیر، اثر پارامتر مقیاس طول ماده در سه حالت ذکر شده و برای بارگذاری های مختلف بررسی می شود.

1-5- مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

1-1-1-1-5 حالت الاستیک

در این بخش، با توجه به تحقیق لم¹ و همکارانش [22]، برای مقایسه ی نتایج آزمایشگاهی با نتایج تحلیلی در حالت الاستیک، صلبیت خمشی بی بعد بکار گرفته می شود. در حالت پلاستیک نیز با توجه به تحقیق شرتریا و همکارانش [23] از ممان خمشی بی بعد استفاده می شود.

رابطه بین صلبیت خمشی و ضخامت تیر به صورت آزمایشگاهی توسط لم و همکارانش [22] ارائه شده است. صلبیت خمشی برای تیر، D ، با توجه به رابطه $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ بصورت حاصل ضرب مدول الاستیسیته E در ممان اینرسی I تعریف می گردد که با ضخامت رابطه ی مستقیم دارد و با رابطه ی (50) مشخص می شود.

$$D = EI \quad (50)$$

و با توجه به تحقیق لم و همکارانش [22]، صلبیت خمشی بی بعد، بصورت $D' = \frac{D}{bh^3}$ تعریف شده است که b پهنای تیر و h ضخامت تیر می باشد و با ضخامت رابطه ی عکس دارد. این تعریف برای مقایسه با نتایج آزمایشگاهی بکار گرفته شده است.

صلبیت خمشی در حالت کلاسیک به ترتیب رابطه (51) می باشد:

$$D'_{\text{classic}} = \frac{EI}{bh^3} = \frac{E}{12} \quad (51)$$

صلبیت خمشی برای تئوری چن-وونگ نیز با توجه به رابطه ی (48) با رابطه ی (52) بیان می گردد:

$$D' = E h^{-3} \left[\frac{1}{48} \sqrt{h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} (4h^2 + l_{cw} h \sqrt{6} - 9l_{cw}^2)} \right] + E h^{-3} \left[\frac{3\sqrt{6}}{32} l_{cw}^3 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{6} h + \sqrt{6h^2 + 6\sqrt{6} l_{cw} h}}{3l_{cw}} \right) \right] \quad (52)$$

صلبیت خمشی به ازای مقیاس طول داخلی صفر، برابر $\frac{E}{12}$ می باشد. به منظور مقایسه نتایج تحلیلی در حالت الاستیک با نتایج آزمایشگاهی، همانند تحقیق لم و همکارانش [22]، مدول الاستیسیته معادل 1/44 گیگاپاسکال، مقیاس طول داخلی تئوری چن-وونگ در حالت الاستیک برابر با 8/14 میکرومتر می باشد. جدول 1 مقایسه نتایج را در حالت الاستیک نشان می دهد.

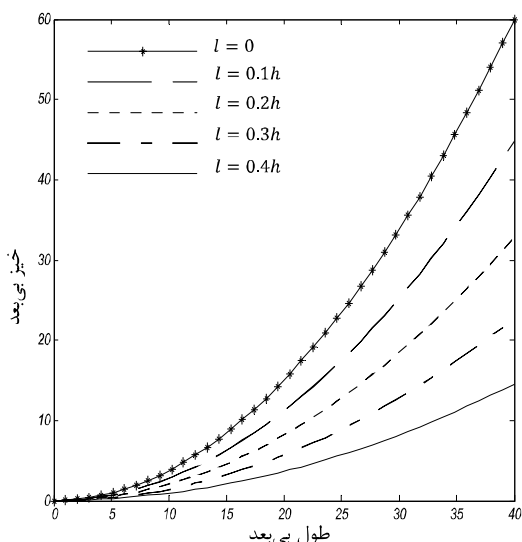
1-1-1-2-5 حالت صلب-پلاستیک

برای مقایسه ی نتایج تحلیلی حالت صلب-پلاستیک، نتایج آزمایشگاهی شروتربا² و همکارانش [23] بکار گرفته می شود. بدین منظور از ممان خمشی بی بعد، $\frac{4M}{\Sigma_0 b h^2}$ به عنوان تابعی از کرنش سطح، $\varepsilon_b \left(z = \frac{h}{2} \right)$ استفاده می شود.

ممان خمشی بی بعد تئوری چن-وونگ نیز با بکارگیری رابطه (11) و (47) به ترتیب رابطه (53) می باشد:

$$\frac{4M}{\Sigma_0 b h^2} = \frac{1}{6} \varepsilon_b \left(\frac{E_p}{\Sigma_0} \right) \sqrt{1 + \sqrt{6} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)} \times \left[4 + \sqrt{6} \left(\frac{l_{cw}}{h} \right) - 9 \left(\frac{l_{cw}}{h} \right)^2 \right]$$

1- Lam
2- Shrotriya



شکل 6 خیز بی بعد میکروتیر یک سرگیردار صلب-پلاستیک بر حسب طول بی بعد تحت بار گذاری ممان M

شکل‌های 3 و 4 بترتیب، خیز بی بعد تیر بر حسب طول بی بعد را تحت بار-گذاری نیروی متمرکز به انتهای تیر در حالت صلب-پلاستیک و الاستیک نشان می‌دهد.

همانگونه که قابل مشاهده است، در هر دو حالت با کاهش ضخامت، سفتی¹ تیر بیشتر و خیز کمتر می‌گردد.

در صورتی که مقیاس طول داخلی برابر صفر باشد، حل کلاسیک حاصل می‌گردد که به منظور مقایسه رسم شده است. بیشترین مقدار خیز تیر به ازای $l = 0$ و کمترین میزان خیز به ازای $l = 0.4h$ می‌باشد. در هر دو حالت الاستیک و صلب-پلاستیک با کاهش ضخامت تیر اثرات اندازه و طول مشخصه تأثیر بیشتری بر میزان خیز تیر دارد. همچنین با کاهش نسبت $\frac{l}{h}$ ، نتایج به نتایج حاصل از تئوری کلاسیک میل می‌کنند.

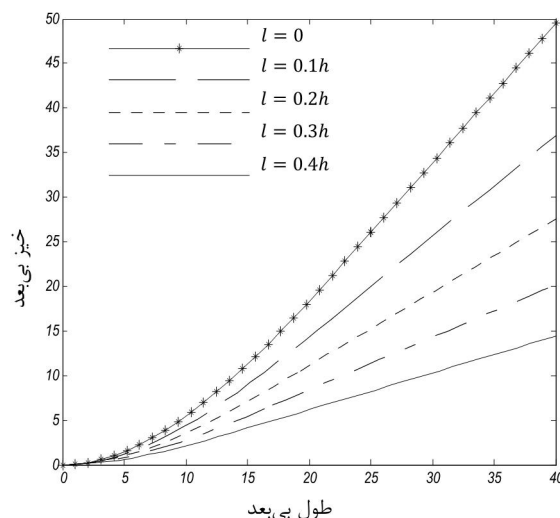
در شکل 5، خیز تیر در حالت الاستوپلاستیک رسم شده است. l_0 ، طول جداکننده‌ی محدوده‌ی تغییر شکل پلاستیک از بخش الاستیک می‌باشد.

همانگونه که از شکل مشخص است، با کاهش ضخامت محدوده پلاستیک کوچکتر شده و به صفر نزدیک می‌شود. دلیل این امر این است که با کاهش ضخامت، سفتی تیر بیشتر شده و بنابراین در یک نیروی مشخص، تیر با ضخامت کمتر یا به عبارت دیگر با نسبت $\frac{l}{h}$ بیشتر، نسبت به تیرهای با ضخامت بیشتر، کمتر دچار تغییر شکل پلاستیک می‌شود.

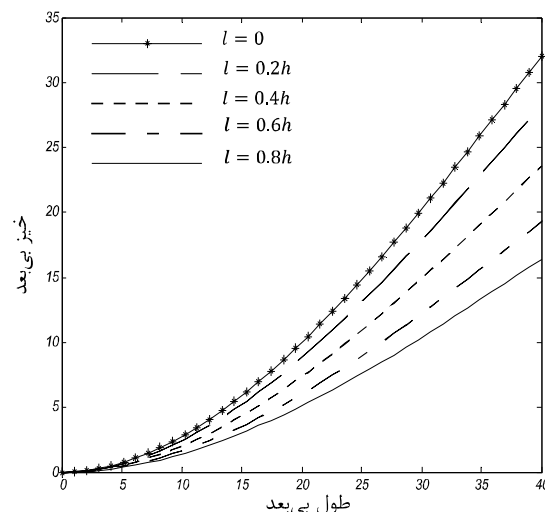
در این حالت نیز اثرات ابعاد و اندازه بر میزان خیز تیر حائز اهمیت است. همچنین واضح است که با کاهش ضخامت، سفتی تیر افزایش می‌یابد.

شکل‌های 6 و 7 بترتیب، خیز بی بعد تیر بر حسب طول بی بعد را تحت بار گذاری ممان M ، در حالت صلب-پلاستیک و الاستیک و برای مقادیر متغیر مقیاس طول داخلی نشان می‌دهد.

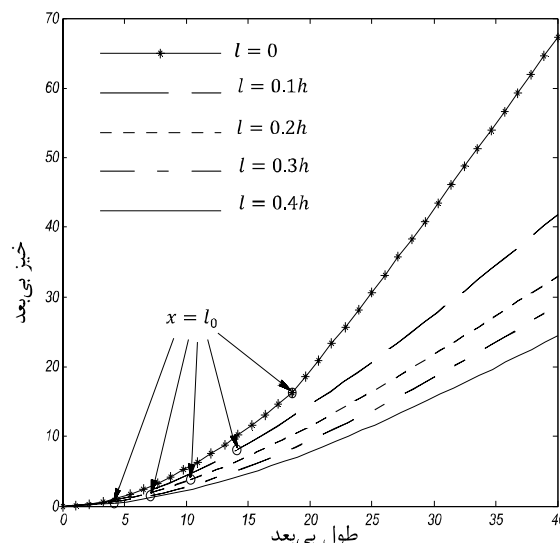
قابل مشاهده است، باز هم در هر دو حالت با کاهش ضخامت، سفتی تیر بیشتر و خیز کمتر می‌گردد. در هر دو حالت الاستیک و صلب-پلاستیک با کاهش ضخامت تیر اثرات اندازه و طول مشخصه تأثیر بیشتری بر میزان خیز تیر دارد. همانند حالات قبلی، در اینجا باز هم با کاهش نسبت $\frac{l}{h}$ نتایج به تئوری کلاسیک نزدیک شده و نیز با قرار دادن مقدار این نسبت برابر با صفر، نتایج تئوری کلاسیک حاصل می‌شوند. همچنین واضح است که میزان خیز تیر تحت اعمال ممان نسبت به نیروی متمرکز بیشتر است.



شکل 3 خیز بی بعد میکروتیر یک سرگیردار صلب-پلاستیک بر حسب طول بی بعد و تحت اعمال نیروی متمرکز

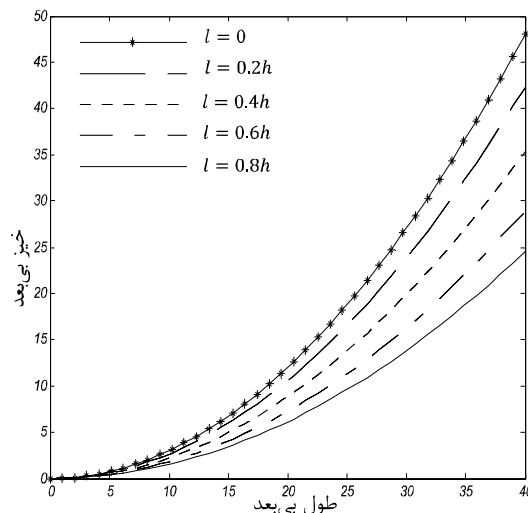


شکل 4 خیز بی بعد میکروتیر یک سرگیردار الاستیک بر حسب طول بی بعد و تحت اعمال نیروی متمرکز



شکل 5 خیز بی بعد میکروتیر یک سرگیردار الاستوپلاستیک بر حسب طول بی بعد و تحت اعمال نیروی متمرکز

- [2] J. S. Stolken, A. G. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia*, Vol. 46, pp. 5109-5115, 1998.
- [3] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyiadjis, Analytical and Experimental Determination of the Material Intrinsic Length Scale of Strain Gradient Plasticity Theory from Micro- and Nano-Indentation Experiments, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20(6), pp. 1139-1182, 2004.
- [4] M. B. Taylor, H. M. Zabib, M. A. Khaleel, Damage and size effect during superplastic deformation, *International Journal of Plasticity*, Vol. 18, pp. 415-442, 2002.
- [5] W. D. Nix, H. Gao, Indentation size effect in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 46(3), pp. 411-425, 1998.
- [6] A. Acharya, A. J. Beaudoin, Grain-size effect in viscoplastic polycrystals at moderate strains, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 48, pp. 2213-2230, 2000.
- [7] E. C. Aifantis, Strain gradient interpretation of size effect, *International Journal of Fracture*, Vol. 95, pp. 299-314, 1999.
- [8] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 41, pp. 1825-1857, 1993.
- [9] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, Strain gradient plasticity, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 295-361, 1997.
- [10] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, A reformulation of strain gradient plasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 49, pp. 2245-2271, 2001.
- [11] S. H. Chen, T. C. Wang, A new hardening law for strain gradient plasticity, *Acta Materialia*, Vol. 48, pp. 3997-44005, 2000.
- [12] S. H. Chen, T. C. Wang, Interface crack problems with strain gradient effects, *International Journal of Fracture*, Vol. 117, pp. 25-37, 2002.
- [13] S. K. Park, X. L. Gao, Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 16, pp. 2355-2359, 2006.
- [14] S.H. Chen, B. Feng, Size effect in micro-scale cantilever beam bending, *Acta Mechanica*, Vol. 219, pp. 291-307, 2011.
- [15] N. Challamel, C. M. Wang, The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved, *Nanotechnology*, Vol. 19, pp. 345703, 2008.
- [16] W. Wang, Y. Huang, K. J. Hsia, K. X. Hu, A. Chandra, A study of microbend test by strain gradient plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol. 19, pp. 365-382, 2003.
- [17] M. I. Idiat, V. S. Deshpande, N. A. Fleck, J. R. Willis, Size effect in the bending of thin foils, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 47, pp. 1251-1264, 2009.
- [18] N. A. Fleck, J. R. Willis, A mathematical basis for strain gradient plasticity theory. Part II: tensorial plastic multiplier, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 57, pp. 1045-1057, 2009.
- [19] B. Ji, W. J. Chen, J. Zhao, Measurement of length-scale and solution of cantilever beam in couple stress elasto-plasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 25, pp. 381-387, 2009.
- [20] Z. F. Shi, B. Huang, H. Tan, Y. Huang, T. Y. Zhang, P. D. Wu, K. C. Hwang, H. Gao, Determination of the microscale stress-strain curve and strain gradient effect from the micro-bend of ultra- thin beams, *International Journal of Plasticity*, Vol. 24, pp. 1606-1624, 2008.
- [21] Y. Q. Mao, S. G. Ai, D. N. Fang, Y. M. Fu, C. P. Chen, Elasto-plastic analysis micro FGM beam basing on mechanism-based strain gradient plasticity theory, *Composite Structure*, Vol. 101, pp. 168-179, 2013.
- [22] D. C. C. Lam, F. Yang, A. C. M. Chong, J. Wang, P. Tong, Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of mechanics and physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477-1503, 2003.
- [23] P. Shrotriya, S. M. Allameh, J. Lou, T. Buchheit, W. O. Soboyejo, On the measurement of the plasticity length scale parameter in LIGA nickel foils, *Mechics of Materials*, Vol. 35, pp. 233-243, 2003.



شکل 7 خیز بی بعد میکرو تیر یک سرگیردار الاستیک بر حسب طول بی بعد تحت بار گذاری ممان M

در یک نگاه کلی به نتایج می توان عدم توانایی تئوری کلاسیک را در پیش بینی دقیق رفتار ماده مشاهده کرد. هرچه ابعاد ماده کوچکتر شود، این عدم توانایی بیشتر شده و نتیجه پیش بینی شده اختلاف بیشتری نسبت به جواب واقعی خواهد داشت. این امر لزوم بکارگیری تئوری های غیر کلاسیک را که قادر به در نظر گرفتن اثرات ابعاد و اندازه باشند، به وضوح نشان می دهد.

6- جمع بندی

در این تحقیق خمش میکروتیر یک سرگیردار در حالت الاستیک، صلب-پلاستیک و الاستوپلاستیک با به کار گیری تئوری چن-وونگ و تحت بارگذاری های متفاوت بررسی شده است و روابط مربوط به خیز تیر در تمامی حالات ذکر شده به دست آمده و با استفاده از روابط به دست آمده، نمودارهای خیز تیر رسم شده اند.

نتایج نشان می دهند که خیز میکرو تیر در تمامی حالت ها وابسته به کمیات ابعاد و مقیاس طول داخلی می باشد. در صورت استفاده از تئوری های کلاسیک، نمی توان این وابستگی را نشان داد. درحالی که تئوری گرادیانی چن-وونگ این وابستگی را به خوبی نشان می دهد. هر چه که مقدار ضخامت میکرو تیر کوچکتر باشد این وابستگی بیشتر در رفتار ماده تأثیر گذار می باشد. علاوه بر این مشاهده شد که میزان خیز تیر تحت بارگذاری ممان در انتهای تیر، نسبت به بارگذاری نیروی متمرکز اعمال شده در انتهای تیر، بیشتر است. در حالت الاستوپلاستیک نیز با افزایش نسبت $\frac{l}{h}$ محدوده پلاستیک کوچکتر خواهد شد.

7- مراجع

- [1] N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashby, J. W. Hutchinson, Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, pp. 475-487, 1994.