



بررسی جذب انرژی ارتعاشی از یک تیر غیرخطی تیموشنکو تحت تحریک تکیه گاهی با کمک سیستم برداشت انرژی مغناطیسی

بهزاد جانی زاده¹، مرتضی دردل^{2*}، محمد هادی پاشایی³، رضا اکبری آلاشتی³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

* صندوق پستی 484، dardel@nit.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 05 شهریور 1393
پذیرش: 15 آبان 1393
ارائه در سایت: 09 آذر 1393
کلید واژگان:
جذب انرژی الکترومغناطیس
ارتعاشات غیرخطی
روش میانگین گیری مختلط
الگوریتم تکرار شبه کمان

چکیده

در کار حاضر جذب انرژی ارتعاشی تیر غیرخطی یک سر گیردار تحت تحریک هارمونیک تکیه گاهی به کمک میدان مغناطیسی و نحوه تاثیر پارامترهای مختلف میدان مغناطیسی بر روی رفتار سیستم بررسی شده است. در مدل سازی از روش مد مفروض استفاده گردید و تیر نیز از نوع تیموشنکو با خصوصیت تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی در نظر گرفته شده است. از آنجا که در بررسی سیستم های جذب انرژی، به دست آوردن پاسخ فرکانسی از آن جهت که بهترین محدوده جذب انرژی و عملکرد سیستم را نشان می دهد بسیار اهمیت دارد، یک روش نیمه تحلیلی برای حل سریع مساله و یافتن پاسخ فرکانسی به کار گرفته شده است. در این روش ابتدا معادلات حرکت از روش میانگین گیری مختلط حل شده و سپس برای حل دستگاه معادلات غیرخطی حاصل از اعمال این روش، از الگوریتم پیوسته شبه کمان استفاده گردید. به منظور اعتبارسنجی روش حل ارائه شده، مقایسه ای بین حل عددی و حل تحلیلی در فرکانس های مختلف انجام شده است. همچنین سیستم جذب انرژی خطی و غیرخطی با یکدیگر مقایسه و نیز پایداری پاسخ تناوبی و انشعاق های سیستم غیرخطی بررسی شده است. علاوه بر این به منظور بررسی تاثیر افزایش تعداد مد ها بر پاسخ سیستم و نیز همگرایی جواب ها، مقایسه ای بین حل تک مد، دو مد، سه مد و چهار مد صورت گرفته است.

Investigation of energy harvesting from vibrating nonlinear Timoshenko beam under base oscillating with electromagnetic energy harvester

Behzad Janizade¹, Morteza Dardel^{1*}, Mohammad Hadi Pashaei¹ and Reza Akbari Alashti¹

1- Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Mazandaran

* P.O.B. 484, Babol, Iran, dardel@nit.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 27 August 2014
Accepted 06 November 2014
Available Online 30 November 2014

Keywords:
Electromagnetic energy harvesting
Nonlinear vibration
Complex Averaging method
Arc length continuation method

ABSTRACT

In this work, nonlinear electromagnetic vibration energy harvesting from cantilever beam under base harmonic oscillation is investigated and the effects of electromagnetic parameters on behavior of system are considered. For modeling assumed mode method is used, and beam is modeled according to Timoshenko theory, which includes shear deformation and rotary inertia. In energy harvesting the frequency response of the system is very important because it shows the best areas for energy harvesting and is a good criterion for designing energy harvesters, hence a semi analytical method is used to find simply the amplitude of oscillation in terms of excitation frequency. In this method, at first equations of motion are solved with complex averaging method and the obtained equations are solved using continuation method. For validation, comparison between results obtained from numerical and semi analytical method is given. Also, comparison between linear and nonlinear system, and stability of periodic response and their bifurcations are given. In addition, in order to compare the effect of number of mode shapes and convergence of solution, frequency response of one, two, three modes and four modes cases are compared with each other.

1- مقدمه

میلی وات و میکرووات می باشند. در دهه های اخیر استفاده از انرژی ارتعاشی جهت تامین توان مورد نیاز وسایل کم توان مانند سیستم های میکروالکترو مکانیکی و سنسورهای بی سیم مورد توجه ویژه ای قرار گرفته است تا بدین وسیله نیاز به تعویض باتری از بین رود و امکان استفاده به صورت بی سیم به خصوص در کاربردهایی که شرایط محیطی امکان دسترسی را محدود

بهره برداری از منابع انرژی موجود در محیط اطراف، نظیر انرژی خورشیدی، بادی و ارتعاشی همواره مورد توجه محققان بوده است. در بین منابع جذب انرژی، برخی دارای سطح انرژی بالا در حد مگاوات هستند نظیر خورشید و باد و برخی دیگر مانند منابع انرژی ارتعاشی دارای سطح انرژی در حد

Please cite this article using:

B. Janizade, M. Dardel, M.H. Pashaei, R. Akbari Alashti, Investigation of energy harvesting from vibrating nonlinear Timoshenko beam under base oscillating with electromagnetic energy harvester, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 131-140, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

می‌کند، فراهم گردد[1]. زمین لرزه، حرکت انسان، صوت، نویزهای حرارتی، ارتعاش پل‌ها و بال هواپیما از جمله منابع انرژی ارتعاشی می‌باشند. سه روش اصلی تبدیل انرژی ارتعاشی به الکتریکی عبارتند از پیزوالکتریک، الکترومغناطیس و الکترواستاتیک. در جذب انرژی به روش الکترواستاتیک از دو هادی که به وسیله ماده‌ای دی‌الکتریک (غیر رسانا) از هم جدا می‌شوند استفاده می‌گردد. این رساناها وقتی در میدان الکتریکی قرار می‌گیرند نسبت به یکدیگر حرکت نموده و جریان الکتریکی تولید می‌شود. پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که در اثر ایجاد تنش و کرنش مکانیکی، جریان برق تولید می‌کنند. در روش الکترومغناطیس نیز حرکت نسبی بین حلقه‌های سیم‌پیچ و هسته مغناطیسی موجب تولید توان می‌شود. در جذب انرژی به روش پیزوالکتریک یا الکترومغناطیس برخلاف الکترواستاتیک نیازی به منبع توان خارجی نیست. در روش الکترومغناطیس مقدار جریان تولیدی زیاد و ولتاژ کم می‌باشد در حالی که در دو مکانیزم دیگر جذب انرژی، ولتاژ زیاد و جریان کم می‌باشد. میزان جذب انرژی در روش الکترومغناطیس به شدت به ابعاد سیستم بستگی دارد لذا از لحاظ ابعادی، مکانیزم الکترومغناطیس در مقیاس ماکرو و مکانیزم‌های پیزوالکتریک و الکترواستاتیک در مقیاس میکرو و نانو کاربرد بیشتری دارند. همچنین ذخیره انرژی به وسیله الکترومغناطیس فقط به میزان سرعت نسبی و تغییر شار مغناطیسی وابسته بوده و عواملی مانند محدودیت تنش خستگی و شکست که در موادی مثل پیزوالکتریک می‌باشد وجود ندارد[2]. راندی مقایسه‌ای تئوری از توان قابل برداشت از سه روش اصلی جذب انرژی ارتعاشی که در بالا به آنها اشاره شد انجام داده است. وی چنین نتیجه گرفت که چگالی توان قابل برداشت از روش پیزوالکتریک و الکترومغناطیس با یکدیگر برابر و تقریباً ده برابر روش الکترواستاتیک می‌باشد. همچنین روش الکترومغناطیس نسبت به سایر روش‌ها در پهنه فرکانسی بزرگتری قادر به جذب انرژی می‌باشد[3].

اغلب سیستم‌های جذب انرژی طراحی شده، سیستم‌های خطی تشدید می‌باشند که بیشینه توان را زمانی که فرکانس طبیعی سیستم با فرکانس تحریک برابر است، تولید می‌کنند[2]. اما یک انحراف کوچک از فرکانس تشدید در این سیستم‌ها موجب کاهش شدید توان قابل جذب می‌شود به عبارت دیگر پهنه فرکانسی که می‌توان در آن جذب انرژی داشت محدود می‌باشد. لذا در سال‌های اخیر روش‌هایی نظیر بکارگیری آرایشی از تیرهای مختلف جهت بهبود پهنه فرکانسی پیشنهاد شده است[9]. یکی از روش‌های افزایش پهنه فرکانسی ایجاد غیرخطی در سیستم جذب انرژی می‌باشد. در واقع مزیت اصلی یک جاذب انرژی غیرخطی نسبت به جاذب خطی، گسترش پهنه فرکانسی است که می‌توان در آن جذب انرژی داشته باشیم[10]. در مرجع [10] نشان داده شده که روش‌های مختلفی نظیر تنظیم فرکانسی، جذب انرژی از چندین مد، استفاده از عوامل غیرخطی می‌تواند به افزایش جذب انرژی کمک نماید. وجود غیرخطی موجب می‌شود نقطه بیشینه در پاسخ فرکانسی به سمت جلو یا عقب منتقل گردد (با توجه به مثبت یا منفی بودن عبارت غیرخطی) و به این ترتیب جذب انرژی در فرکانس‌های بیشتری نسبت به سیستم خطی قابل حصول است. غیرخطی می‌تواند به علت طبیعی و از ویژگی‌های ذاتی ماده مانند مواد پیزوالکتریک غیرخطی یا مواد الکترومغناطیس غیرخطی و یا ناشی از ویژگی‌های ساختاری نظیر کرنش زیاد باشد. اما سیستم‌های غیرخطی دارای پیچیدگی‌ها خاص خود می‌باشند از جمله اینکه به دلیل صادق نبودن اصل جمع آثار و تابع انتقال خطی، محاسبات پیچیده‌تر می‌گردد. در این سیستم‌ها رفتاری نظیر آشوب، انواع انشقاق‌ها و سیکل‌های حدی وجود دارد. همچنین شرایط اولیه در رفتار سیستم تاثیر زیادی دارد به خصوص در نزدیکی نقاط انشقاق که تغییر کوچکی در پارامترها موجب تغییر شدید در رفتار سیستم می‌شود.

اونز [11] یک سیستم خطی و غیرخطی جذب انرژی با الکترومغناطیس را بررسی کرد. وی در مقایسه این دو سیستم نشان داد در کل سیستم غیرخطی کارایی بهتری نسبت به سیستم خطی دارد هر چند گاهی به منظور مثبت‌سازی اثر غیرخطی نیاز به تنظیم پارامترهای سیستم می‌باشد. آنها در نهایت نتیجه گرفتند، اگر غیرخطی که در برخی مواقع می‌تواند مخرب باشد، اگر به صورت صحیح طراحی گردد، دارای اثر بسیار مثبتی است. بلهاک [12] اثر یک تحریک کننده الکترومغناطیسی بر روی تیر یک سر گیردار تحت تحریک هارمونیک را به صورت تحلیلی، عددی و تجربی مورد بررسی قرار داد. بررسی تحلیلی با استفاده از روش تئوری اختلالات بر روی مدل ساده شده در حالت تک مد انجام گرفت. در این تحقیق نشان داده شد که تحریک کننده الکترومغناطیس موجب انتقال نقطه بیشینه پاسخ فرکانسی به سمت چپ (رفتار نرم شدن) شده و با افزایش چگالی جریان الکتریکی تحریک کننده، سیستم نرم‌تر می‌شود. من و اونز [13] یک جاذب انرژی غیرخطی را به صورت تئوری و تجربی بررسی کردند که در آن از اثر برهم کنش دو آهن‌ربا جهت ایجاد نقاط تعادل غیر صفر (ایجاد سیستم با دو وضعیت پایدار) استفاده نمودند. آنها نشان دادند که رفتار غیرخطی می‌تواند با افزایش پهنه فرکانسی

می‌کند، فراهم گردد[1]. زمین لرزه، حرکت انسان، صوت، نویزهای حرارتی، ارتعاش پل‌ها و بال هواپیما از جمله منابع انرژی ارتعاشی می‌باشند. سه روش اصلی تبدیل انرژی ارتعاشی به الکتریکی عبارتند از پیزوالکتریک، الکترومغناطیس و الکترواستاتیک. در جذب انرژی به روش الکترواستاتیک از دو هادی که به وسیله ماده‌ای دی‌الکتریک (غیر رسانا) از هم جدا می‌شوند استفاده می‌گردد. این رساناها وقتی در میدان الکتریکی قرار می‌گیرند نسبت به یکدیگر حرکت نموده و جریان الکتریکی تولید می‌شود. پیزوالکتریک‌ها موادی هستند که در اثر ایجاد تنش و کرنش مکانیکی، جریان برق تولید می‌کنند. در روش الکترومغناطیس نیز حرکت نسبی بین حلقه‌های سیم‌پیچ و هسته مغناطیسی موجب تولید توان می‌شود. در جذب انرژی به روش پیزوالکتریک یا الکترومغناطیس برخلاف الکترواستاتیک نیازی به منبع توان خارجی نیست. در روش الکترومغناطیس مقدار جریان تولیدی زیاد و ولتاژ کم می‌باشد در حالی که در دو مکانیزم دیگر جذب انرژی، ولتاژ زیاد و جریان کم می‌باشد. میزان جذب انرژی در روش الکترومغناطیس به شدت به ابعاد سیستم بستگی دارد لذا از لحاظ ابعادی، مکانیزم الکترومغناطیس در مقیاس ماکرو و مکانیزم‌های پیزوالکتریک و الکترواستاتیک در مقیاس میکرو و نانو کاربرد بیشتری دارند. همچنین ذخیره انرژی به وسیله الکترومغناطیس فقط به میزان سرعت نسبی و تغییر شار مغناطیسی وابسته بوده و عواملی مانند محدودیت تنش خستگی و شکست که در موادی مثل پیزوالکتریک می‌باشد وجود ندارد[2]. راندی مقایسه‌ای تئوری از توان قابل برداشت از سه روش اصلی جذب انرژی ارتعاشی که در بالا به آنها اشاره شد انجام داده است. وی چنین نتیجه گرفت که چگالی توان قابل برداشت از روش پیزوالکتریک و الکترومغناطیس با یکدیگر برابر و تقریباً ده برابر روش الکترواستاتیک می‌باشد. همچنین روش الکترومغناطیس نسبت به سایر روش‌ها در پهنه فرکانسی بزرگتری قادر به جذب انرژی می‌باشد[3].

گرکا [4] به بررسی جنبه‌های مختلف طراحی و عملکردی یک سیستم جذب انرژی ارتعاشی به کمک الکترومغناطیس پرداخت. او ژرنا توری طراحی کرد که توانست 1/44 وات توان الکتریکی در فرکانس تشدید 5 هرتز و مقاومت بار 5 کیلو اهم تولید کند. بیبی [5] یک ژرنا توری الکترومغناطیسی ساخت و به بهینه‌سازی آن با استفاده از داده‌های تجربی پرداخت. این سیستم از یک تیر یک سر گیردار، چهار مغناطیس دائم که روی تیر قرار گرفته و سیم پیچ تشکیل می‌شود. این دستگاه توان $46\mu W$ را در مقاومت بار $4 k\Omega$ و فرکانس تشدید 52Hz زمانی که شتاب تحریک $0/59\frac{m}{s^2}$ تولید کرد. بوجان [6] جذب (میرا کردن) ارتعاش عرضی یک تیر یک سر گیردار به وسیله میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار داد. این سیستم شامل یک کلید تقویت جریان و یک زوج مغناطیس که روی تیر قرار دارد می‌باشد. وی به تحلیل تئوری کنترل سیستم مذکور پرداخت و صحت نتایج تئوری را به صورت تجربی بررسی کرد.

لی [7] بهبود تبدیل انرژی ارتعاشی به انرژی الکتریکی را مورد بررسی قرار داد. وی مدل‌سازی تیر یک سر گیردار که لایه‌های پیزوالکتریک روی آن نصب می‌باشد را بهبود بخشید و نتایج را از طریق مقایسه با نتایج تجربی و روش المان محدود اعتبارسنجی نمود. مدل و آزمایش نشان دادند که مد دوم تشدید فرکانسی، پهنای فرکانسی و تشدید بیشتر نسبت به فرکانس اول فراهم می‌نماید. با افزایش جرم در انتهای آزاد، ولتاژ بدست آمده از مد اول، افزایش می‌یابد. ابوالفتح [8] یک دستگاه جاذب انرژی تحت تحریک تکیه‌گاهی را که دارای خاصیت خودتنظیمی فرکانس طبیعی سیستم با فرکانس تحریک تکیه‌گاهی می‌باشد ساخت. این دستگاه از یک تیر یک‌سر

می‌توان از آنها صرف نظر کرد. به همین خاطر در نزدیکی مقسوم‌علیه‌های کوچک نیاز به حل جداگانه می‌باشد. ولی در روش میانگین‌گیری مختلط، با تغییر متغیر مختلط معادلات به فضای مختلط دامنه و فاز منتقل می‌شوند و در روند حل مقسوم‌علیه‌های کوچک ایجاد نمی‌شوند لذا نیاز به حل جداگانه برای این فرکانس‌ها نمی‌باشد و یک بار حل برای تمام فرکانس‌ها کافی است. در ادامه برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی، معادلات حاصل از اعمال روش میانگین‌گیری مختلط با استفاده از الگوریتم تکرار شبه کمان $[15-17]$ حل گردید. در واقع با ترکیب روش‌های میانگین‌گیری مختلط و الگوریتم پیوسته شبه کمان می‌توان یک روش حل نیمه تحلیلی با زمان حل کم بدست آورد.

در ادامه مقاله، به منظور اعتبار سنجی روش فوق، پاسخ زمانی حالت پایا در فرکانس‌های مختلف با حل عددی مقایسه گردید. همچنین به منظور نشان دادن اثر غیرخطی در سیستم، مقایسه ای بین پاسخ فرکانسی سیستم خطی و غیرخطی صورت پذیرفت و نیز اثر افزایش تعداد مدها در همگرایی جواب‌ها نشان داده شده است. علاوه اثر تغییر تحریک تکیه‌گاهی، شدت میدان مغناطیسی و مکان قرارگیری مغناطیس دائم روی تیر بر توان قابل جذب، پایداری سیکل‌های حدی و انشعاق آنها بررسی گردید.

2- محاسبات تئوری

شکل 1 ساختار سیستم جذب انرژی را نشان می‌دهد. این مجموعه شامل تیر یکسرگردار، تحریک تکیه‌گاهی، فنر، حلقه‌های سیم‌پیچ بوبین، مغناطیس دائم و مدار الکتریکی می‌باشد. همچنین مدار الکتریکی از مقاومت بار (برای مثال باتری یا خازن)، مقاومت و اندوکتانس سیم پیچ بوبین تشکیل شده است. در ادامه اثر الکترومغناطیس بر روی این ساختار و معادلات حرکت بررسی می‌شوند.

2-1- مدل‌سازی اثر الکترومغناطیس

زمانی که تیر ارتعاش می‌کند حرکت نسبی بین هسته مغناطیس دائم و حلقه‌های سیم‌پیچ موجب تغییر شار عبوری از حلقه‌های سیم‌پیچ می‌گردد. طبق قانون فارادی، تغییر شار موجب تولید جریان الکتریکی در حلقه‌های سیم پیچ می‌گردد. همچنین طبق قانون لنز موجب ایجاد نیرویی خلاف جهت حرکت تیر می‌شود. به این ترتیب انرژی سیستم به صورت انرژی الکتریکی از آن گرفته می‌شود و از ارتعاش سیستم کاسته می‌گردد.

شار یک میدان مغناطیسی و ولتاژ القا شده از روابط 1 و 2 بدست می‌آیند.

$$\phi = B A \cos \theta \quad (1)$$

$$e_b = - \frac{d\phi}{dt} \quad (2)$$

در روابط 1 و 2، ϕ شار مغناطیسی، B شدت میدان مغناطیسی، A سطح مقطع شار عبوری، θ زاویه بین راستای میدان و خط عمود بر سطح و e_b ولتاژ القایی می‌باشد. از آنجا که تغییر شار ناشی از سرعت نسبی بین تیر و حلقه‌های سیم پیچ می‌باشد، به رابطه 3 زیر خواهیم رسید.

$$e_b = NBL_{coil}(\dot{q} - \dot{y}) = NBL_{coil}\dot{w} \quad (3)$$

که در رابطه فوق N تعداد حلقه‌های سیم پیچ، L_{coil} طول سیم هر حلقه از سیم پیچ، q جابجایی مطلق، y جابجایی تکیه‌گاهی و w جابجایی نسبی تیر می‌باشد. از آنجا که اندوکتانس بوبین L نسبت به مقاومت سیم پیچ R_{coil} بسیار کوچک می‌باشد لذا از آن صرف نظر شده است. جریان تولید شده در مدار الکتریکی معادل نشان داده شده در شکل 1-جریان می‌یابد. با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف در این مدار رابطه 4 را خواهیم داشت.

جذب انرژی، کارایی سیستم جذب انرژی را بهبود بخشد. آزمایش‌های تجربی و تحلیل‌های صورت گرفته نشان داده که، پدیده فرکانسی گریز از چاه پتانسیل می‌تواند جذب انرژی را افزایش دهد. کریمی وایمن [14] یک روش تقریبی برای بررسی سیستم‌های جذب انرژی تحت تحریک تکیه‌گاهی در میرایی‌ها و فرکانس‌های مختلف معرفی نمودند. آن‌ها با استفاده از تئوری اختلالات در دامنه‌های ارتعاشی کوچک و انتگرال‌گیری عددی در دامنه‌های ارتعاشی بزرگ، به یک حل یکپارچه برای جاذب‌های انرژی خطی، غیرخطی دارای رفتار نرم (که عبارت غیرخطی کوچک و منفی است) و غیرخطی دوپایا¹ دست یافتند.

در کار حاضر جذب انرژی ارتعاشی از یک تیر یک سرگردار تحت تحریک هارمونیک به کمک میدان مغناطیسی بررسی شده است. سیستم از یک تیر یک سرگردار، یک هسته مغناطیس دائم متصل به تیر، سیم پیچ، تحریک تکیه‌گاهی و یک فنر متصل به تیر تشکیل شده است. از تئوری تیر تیموشنکو و کرنش غیرخطی ون‌کارمن برای مدل‌سازی تیر استفاده شده است. به منظور افزایش دقت، معادلات حرکت سیستم در حالت تک مد، دومد، سه مد و چهار مد به وسیله روش مد مفروض به دست آمد و با یکدیگر مقایسه گردید. همان‌طور که ذکر شد اغلب کارها در این زمینه حالت خطی را در نظر گرفته‌اند و تحقیقاتی هم که روی حالت غیرخطی انجام شده معمولاً از مدل‌های ساده تیر نظیر مدل جرم و فنر یا مدل تیر اویلر-برنولی در حالت تک مد استفاده نموده‌اند تا معادلات حرکت و حل آن ساده‌تر گردد. در واقع می‌توان گفت در بررسی سیستم‌های جذب انرژی به دست آوردن پاسخ فرکانسی از آن جهت که بهترین محدوده جذب انرژی و عملکرد سیستم را نشان می‌دهد بسیار اهمیت دارد و یک ابزار بسیار ارزشمند و ضروری جهت تحلیل و بهینه‌سازی این سیستم‌ها می‌باشد. وقتی معادلات حرکت پیچیده گردد، با استفاده از روش‌های معمول حل مانند رانگ کوتا مرتبه چهار و روش‌های تفاضلی دیفرانسیل یا نمی‌توان مسئله را حل کرد یا آنکه زمان زیادی برای حل آن مورد نیاز می‌باشد. اغلب محققانی هم که بر روی مدل غیرخطی مطالعه نموده‌اند مدل ساده‌ای از سیستم را در نظر گرفته‌اند تا حل آن با روش‌های عددی معمول امکان‌پذیر باشد. در برخی تحقیقات نیز از روش‌های تئوری اختلالات مانند روش میانگین‌گیری و یا روش مقیاس‌های چندتایی برای حل معادلات غیرخطی استفاده شده است. ولی در این روش‌ها لازم است تشدیدهای اولیه و ثانویه به طور جداگانه بررسی شوند و حجم محاسبات نیز زیاد می‌باشد. لذا استفاده از این روش‌ها زمان زیادی را لازم دارند. در این مقاله ابتدا معادلات حرکت با استفاده از روش میانگین‌گیری مختلط حل می‌شوند. در روش میانگین‌گیری مختلط نیاز به حل جداگانه برای تشدیدهای اولیه و ثانویه نیست و یک‌بار حل برای تمام فرکانس‌ها کافی می‌باشد. به عبارت دیگر در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با استفاده از روش‌های معمول تئوری اختلالات نظیر روش مستقیم، روش مقیاس چندتایی، جملات سکولار و مقسوم‌علیه‌های کوچک (عوامل صفرکننده مخرج کسر) ایجاد می‌شوند. به همین خاطر این حل برای فرکانس‌هایی نزدیک مقسوم‌علیه‌های کوچک معتبر نمی‌باشد. در روش‌هایی مانند میانگین‌گیری یا مقیاس‌های چندتایی، مقسوم‌علیه‌های کوچک به صورت توان عبارت نمایی ظاهر می‌گردند. از آنجا که در جواب خصوصی معادله دیفرانسیل از تغییرات سریع صرف نظر می‌شود، در نزدیکی مقسوم‌علیه‌های کوچک، عبارت توانی شامل آن‌ها دارای تغییرات آرام می‌باشد و باید در نظر گرفته شوند ولی در فرکانس‌هایی دورتر از مقسوم‌علیه‌های کوچک

$$C = \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial w(d_1, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (11)$$

حال معادلات حرکت با استفاده از روش مد مفروض و معادله لاگرانژ- برنولی بدست خواهد آمد. ابتدا متغیرهای مساله به فرم گسترش یافته 12 نوشته می‌شوند.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) u_i(x), \beta(x, t) = \sum_{i=1}^n T_i(t) X_i(x) \quad (12)$$

$u_i(x)$ و $X_i(x)$ توابع مجاز نامیده می‌شوند که لازم است شرایط مرزی را مرتفع نمایند و $\eta_i(t)$ و $T_i(t)$ متغیرهای تعمیم یافته می‌باشند. به منظور به دست آوردن معادلات در فرم بی بعد، پارامترهای بی بعد 13 تعریف می‌شوند.

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{\eta} = \frac{\eta(t)}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \tau = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} t \quad (13)$$

حال با استفاده از معادله لاگرانژ- برنولی و با فرض تحریک تکیه‌گاهی هارمونیک، معادلات حرکت به فرم رابطه 14 به دست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} M_{ij} & M_{ij}^T \\ m_{ij} & m_{ij}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_j \\ \ddot{T}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_j \\ \dot{T}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ij} & K_{ij}^T \\ K_{ij}^T & K_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_j \\ T_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} NL_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega \tau \quad (14)$$

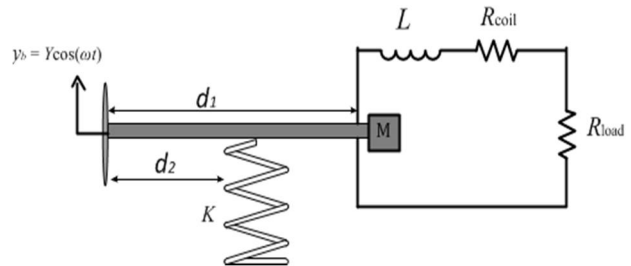
که $\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \tau$ فرکانس بی بعد و ماتریس‌های NL, K, C, M و F به ترتیب ماتریس جرمی، میرایی، سفتی، غیرخطی و نیرو نامیده می‌شوند. پارامترهای معادله فوق در پیوست تعریف شده‌اند. در مقاله فعلی، شکل مد خمشی تیر یک سرگیردار اوایلر- برنولی به عنوان $u_i(x)$ در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه شکل مدها باید شرایط مرزی را برآورده نمایند، شکل مد مناسب برای تغییر شکل برشی $X_i(x)$ با انتگرال‌گیری از شکل مد جابجایی عرضی تیر به دست آمده است زیرا معادله حاصل از انتگرال‌گیری از شکل مد جابجایی، شرایط مرزی برش را مرتفع می‌نماید. در تئوری تیموشنکو، جابجایی عرضی و دوران مقطع هر دو وجود دارند. برای تعیین شکل مد مناسب برای دوران مقطع، یک راه اولیه تعیین آن از حل دقیق تئوری تیموشنکو است، اما راه حل ساده‌تر استفاده از خود شکل مد جابجایی عرضی تیر اوایلر برنولی است، چرا که برای تیرهای نازک مطابق مرجع [18]، دوران مقطع برابر منفی مشتق جابجایی عرضی یعنی $\phi = -\partial w / \partial x$ است، اما برای تیر ضخیم از نظر مقداری این گونه نیست. بنابراین برای این که در تحلیل تیرها براساس تئوری تیموشنکو براساس روش مد مفروض براساس رایلی- ریتز، نیاز به استفاده از شکل مد دقیق ϕ مرتفع گردد، می‌توان از $\partial w / \partial x$ برای شکل مد دوران مقطع استفاده نمود، چرا که شرایط مرزی هندسی مورد نیاز برای روش مد مفروض با حل رایلی ریتز برآورده خواهد شد. اگر برای تیر ضخیم، تغییر شکل برشی خالص β مطابق رابطه 6 از حل دقیق تیر تیموشنکو بدست آید و با خود شکل مد w مقایسه گردد، به این نتیجه خواهیم رسید که آنها برابر انتگرال w هستند. در این صورت شکل مدها مطابق روابط 15 و 16 خواهند بود [18].

$$u_i(x) = \cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x) - \frac{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)} (\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)) \quad (15)$$

$$X_i(x) = -\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x) - \frac{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)} (\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)) \quad (16)$$

که β_i از رابطه 17 به دست می‌آید.

$$1 + \cos(\beta L) \cosh(\beta L) = 0 \quad (17)$$



شکل 1 پیکره‌بندی سیستم جذب انرژی به وسیله الکترومغناطیس

$$(R_{coil} + R_{load})i = NBL_{coil}\dot{w} \quad (4)$$

در این صورت نیروی الکترومغناطیس از رابطه 5 بدست می‌آید:

$$F = NBL_{coil}i = \frac{(NBL_{coil})^2}{R_{coil} + R_{load}} \dot{w} = c\dot{w} \quad (5)$$

که در رابطه فوق i جریان الکتریکی می‌باشد و C ضریب میرایی معادل نامیده می‌شود. همان‌طور که مشخص است اثر سیستم الکترومغناطیس بر ساختار جذب انرژی را می‌توان به صورت یک میرایی ویسکوز دانست [3].

2-2- معادلات حرکت

تغییر شکل‌ها و جابجایی‌ها در تئوری تیر تیموشنکو به صورت رابطه 6 می‌باشند [18].

$$w = w_s + w_b, \beta = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (6)$$

که w_s جابجایی برشی، w_b جابجایی خمشی، β دوران مقطع تیر ناشی از خمش، u جابجایی محوری، v جابجایی جانبی و w جابجایی عرضی می‌باشند. براساس معادله فوق و رابطه کرنش ون کارمن [19]، روابط 7 بدست می‌آیند.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7)$$

در معادله فوق از عبارت $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ نسبت به سایر عبارات صرف نظر شده و عبارت $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ صفر می‌باشد. در این صورت مولفه‌های تنش به صورت رابطه 8 می‌باشند.

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} = -Ez \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \sigma_{zx} = K_c G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \quad (8)$$

که در آن E مدول الاستیک، G مدول برشی و K_c ضریب تصحیح برش می‌باشند. در این صورت انرژی پتانسیل سیستم مطابق با رابطه 9 خواهد بود.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} EA \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + K_c GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} K_s w^2(d_2, t) \quad (9)$$

که در آن I ممان اینرسی مقطع، A مساحت مقطع، K_s سفتی فنر و d_2 فاصله فنر از سر گیردار تیر می‌باشد. انرژی جنبشی تیر که شامل اینرسی دورانی نیز می‌باشد به صورت رابطه 10 خواهد بود.

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial w(d_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (10)$$

در عبارت فوق ρ چگالی جرمی، L طول تیر، m جرم مغناطیس دائم و d_1 فاصله مغناطیس دائم از سر گیردار تیر می‌باشد. تابع اتلاف رایلی نیز با رابطه 11 بیان می‌گردد.

جدول 1 مشخصات ساختار جذب انرژی بوسیله میدان الکترومغناطیسی

$L = 300 \text{ mm}$	$m = 30 \text{ g}$
$h = 30 \text{ mm}$	$R_{load} = 4 \Omega$
$b = 50 \text{ mm}$	$R_{coil} = 4 \Omega$
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	$N = 150 \text{ Turns}$
$E = 200 \text{ GPa}$	$a_b = 0.1$ (شتاب بی‌بعد تحریک پایه)
$B = 1/2 \text{ T}$	$L_{coil} = 50 \text{ mm}$
$\nu = 0/3$	$K_s = 250 \text{ N/m}$

3- نتایج

در این بخش ابتدا اعتبارسنجی روش نیمه تحلیلی استفاده شده در این مقاله بررسی می‌گردد. سپس همگرایی نتایج با افزایش تعداد مدهای مسئله مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ادامه نیز تاثیر پارامترهای سیستم مغناطیسی و شدت تحریک تکیه‌گاهی بررسی خواهد شد. در جدول زیر مشخصات ساختار جذب انرژی بوسیله میدان الکترومغناطیس نشان داده شده است:

3-1- اعتبار سنجی حل ارائه شده

به منظور اعتبار سنجی، مقایسه‌ای بین روش نیمه تحلیلی و حل عددی در حالت پایا و در فرکانس‌های مختلف ارائه می‌گردد. همان طور که شکل 2 نشان می‌دهد حل نیمه تحلیلی دارای دقت مناسبی می‌باشد.

3-2- مقایسه جاذب انرژی خطی و غیرخطی

نمودار جابجایی و توان سیستم‌های جذب انرژی خطی و غیرخطی در شکل‌های 3 و 4 نشان داده شده است. شکل 3 نشان می‌دهد دامنه جابجایی سیستم غیرخطی کمتر از سیستم خطی می‌باشد. دلیل این موضوع این است که عبارت غیرخطی در جاذب انرژی غیرخطی، از نوع سفتی می‌باشد. به عبارت دیگر به سفتی سیستم افزوده شده است لذا دامنه جابجایی کاهش یافته است. شکل 4 نشان می‌دهد توان سیستم غیرخطی بر خلاف جابجایی از سیستم خطی بیشتر است. از آنجا که توان الکتریکی قابل جذب به سرعت نسبی تیر بستگی دارد لذا تغییرات سرعت در سیستم غیرخطی بیش از سیستم خطی است.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد اغلب سیستم‌های جذب انرژی، سیستم‌های تشدید هستند که بر مبنای تنظیم فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم عمل می‌کنند. مقایسه فوق نشان می‌دهد در صورتی که سیستم دارای عامل غیرخطی باشد، سیستم خطی نمی‌تواند تخمین مناسبی از فرکانس تشدید داشته باشد. لذا استفاده از نتایج مدل خطی به منظور تحلیل و بهینه سازی سیستم‌های جذب انرژی که عامل غیرخطی در آن اثرگذار است معتبر نمی‌باشد. همچنین شکل‌های 3 و 4 نشان می‌دهند که عامل غیرخطی موجب گشته نقطه بیشینه نمودار به سمت راست منتقل گردد و پهنه فرکانسی مناسب برای جذب انرژی افزایش یابد. یکی از اساسی‌ترین عیب‌های سیستم‌های جذب انرژی تشدید خطی این است که یک اخلاف کوچک بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی سیستم موجب کاهش شدید توان می‌گردد. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود این عیب در ساختار غیرخطی وجود ندارد لذا جاذب غیرخطی محدوده عملکردی وسیع‌تری دارد.

3-3- بررسی همگرایی نتایج

به منظور بررسی همگرایی نتایج، نمودار پاسخ فرکانسی جابجایی و ولتاژ و جریان در تعداد مدهای مختلف با یکدیگر مقایسه شد. شکل‌های 5-8 مربوط به این مقایسه می‌باشند. به منظور سنجش دقیق‌تر، نتایج این مقایسه در جدول 2 گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد با افزایش تعداد مدها، نتایج همگرا می‌شوند. از آنجا که همگرایی حل در حالت چهار مد قابل قبول می‌باشد لذا از این پس تمامی نتایج در حالت چهار مد گزارش می‌شود.

3-4- تحلیل پایداری و انشقاق‌ها

به منظور تعیین محدوده پایداری سیستم لازم است معادلات غیرخطی حول نقطه تعادل خطی‌سازی شوند و ماتریس ژاکوبین (شامل مشتقات جزئی اول) در این نقطه محاسبه گردد.

3-2- حل معادلات حرکت

در این مقاله معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم با ترکیب روش‌های میانگین‌گیری مختلط و الگوریتم پیوسته حل شده‌اند. در روش میانگین‌گیری، ابتدا تغییر متغیرهای مختلط در معادلات حرکت جایگزین می‌شوند. سپس قسمت دینامیک سریع و آرام جداسازی شده و از قسمت سریع میانگین‌گیری می‌شود و در نهایت قسمت آرام از معادلات میانگین‌گیری شده استخراج می‌گردد. الگوریتم پیوسته نیز یک روش پیشرفته در حل دستگاه معادلات غیرخطی بوده که قابلیت پیدا کردن تمام جواب‌های دستگاه معادلات را دارد. زمانی که به دلیل غیرخطی بودن مسئله با چندین جواب مواجه می‌شویم، روش‌هایی که براساس همگرایی محلی هستند، دچار مشکل می‌شوند (برای مثال در نقاط برگشتی یا حدی). در چنین شرایطی روش‌های پیوستگی کارایی بسیار زیادی در یافتن نقاط بهینه کلی و جواب‌های دستگاه معادلات دارا می‌باشند. در ادامه معادلات حرکت در مدهای مختلف با روش میانگین‌گیری مختلط حل می‌گردد. به دلیل کمبود فضا و حجم زیاد محاسبات، معادلات حل شده در حالت تک مد در این قسمت و حالت دو مد نیز در پیوست ارائه می‌گردد.

معادلات حرکت در حالت تک مد به صورت رابطه 18 می‌باشد.

$$m_{11}\ddot{\eta}_1 + C_{11}\dot{\eta}_1 + K_{11}\eta_1 + K_{11}^T T_1 + B_{11}\dot{\eta}_1^3 = f_1 \cos \Omega t \quad (18)$$

$$M_{11}\ddot{T}_1 + K_{11}^T T_1 + K_{11}^T \eta_1 = 0$$

متغیرهای مختلط به صورت روابط 19 تعریف می‌شوند.

$$\psi_1 = \dot{\eta}_1 + i\Omega\eta_1 \rightarrow \dot{\eta}_1 = \frac{\psi_1 + \psi_1^*}{2}$$

$$\eta_1 = \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\Omega}, \dot{\eta}_1 = \psi_1 - i\Omega \frac{\psi_1 + \psi_1^*}{2}$$

$$\psi_2 = \dot{T}_1 + i\Omega T_1 \rightarrow \dot{T}_1 = \frac{\psi_2 + \psi_2^*}{2}$$

$$T_1 = \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\Omega}, \dot{T}_1 = \psi_2 - i\Omega \frac{\psi_2 + \psi_2^*}{2}$$

$$\psi_1 = A_1 e^{i\Omega t}, \psi_2 = A_2 e^{i\Omega t}$$

$$A_1 = a_1 + ib_1, A_2 = a_2 + ib_2 \quad (19)$$

با انجام مراحل ذکر شده، ساده‌سازی معادلات و همچنین جداسازی قسمت-

های حقیقی و موهومی روابط 20 بدست می‌آیند.

$$M_{11}\dot{b}_1 + \frac{C_{11}}{2}b_1 - \frac{3b_{11}}{8\Omega^3}a_1^3 + \frac{M_{11}\Omega}{2}a_1 - \frac{K_{11}^T}{2\Omega}a_2 - \frac{K_{11}}{2\Omega}a_1 - \frac{3B_{11}}{8\Omega^3}a_1b_1^2 = 0$$

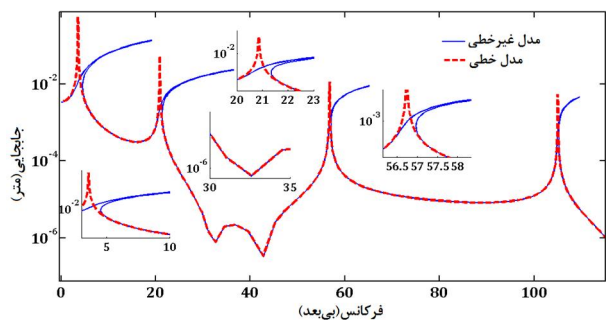
$$M_{11}\dot{a}_1 + \frac{C_{11}}{2}a_1 - \frac{f_1}{2} + \frac{3B_{11}}{8\Omega^3}b_1^3 - \frac{M_{11}\Omega}{2}b_1 + \frac{K_{11}^T}{2\Omega}b_2 + \frac{K_{11}}{2\Omega}b_1 + \frac{3B_{11}}{8\Omega^3}a_1^2b_1 = 0$$

$$m_{11}\dot{b}_2 + \frac{m_{11}\Omega}{2}a_2 - \frac{K_{11}^T}{2\Omega}a_2 - \frac{K_{11}^T}{2\Omega}a_1 = 0$$

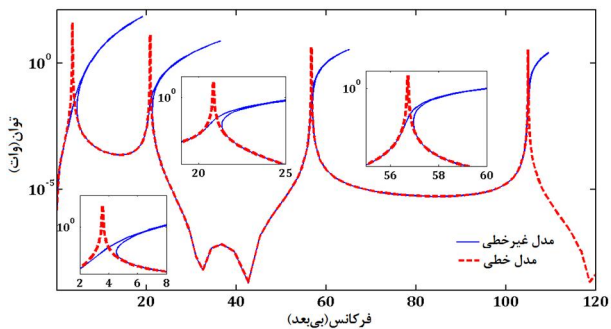
$$m_{11}\dot{a}_2 - \frac{m_{11}\Omega}{2}b_2 + \frac{K_{11}^T}{2\Omega}b_2 + \frac{K_{11}^T}{2\Omega}b_1 = 0 \quad (20)$$

حال با حل معادلات فوق با استفاده از الگوریتم پیوسته، دامنه و فاز متغیرهای تعمیم یافته به صورت روابط 21 به دست می‌آید.

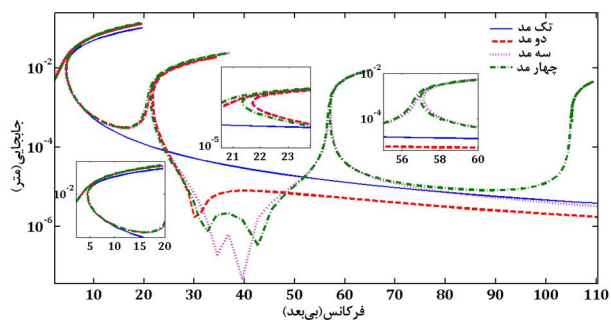
$$\eta_i = \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{\Omega} \sin(\Omega t + \beta_i), \beta_i = \tan^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right) \quad (21)$$



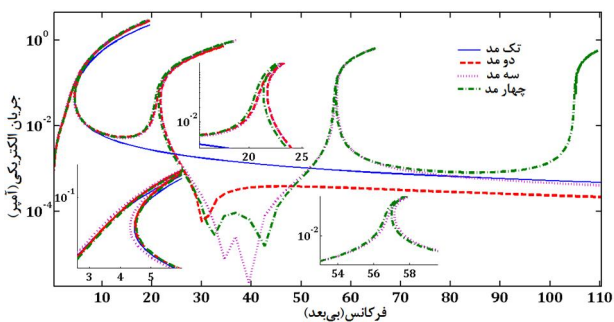
شکل 3 مقایسه جابجایی انتهای تیر در جاذب انرژی خطی و غیرخطی



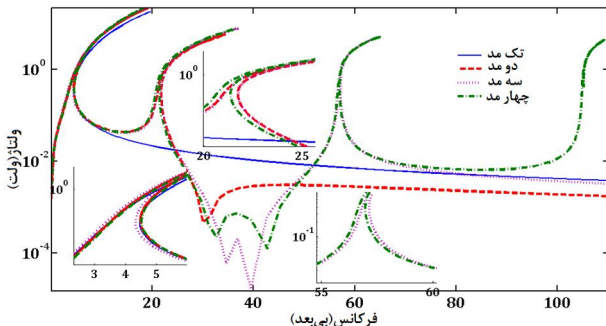
شکل 4 مقایسه توان الکتریکی در جاذب انرژی خطی و غیرخطی



شکل 5 مقایسه جابجایی انتهای تیر درمدهای مختلف

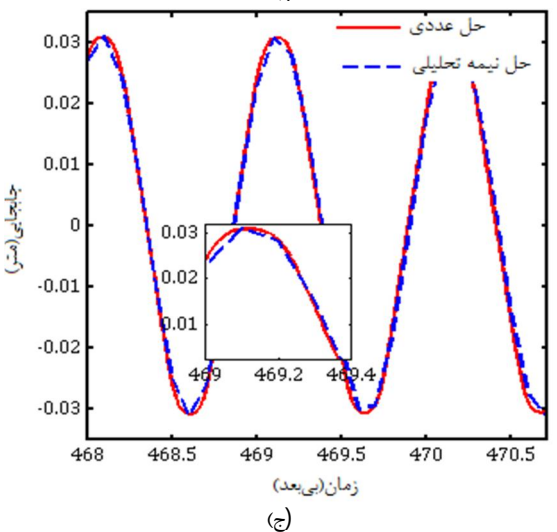
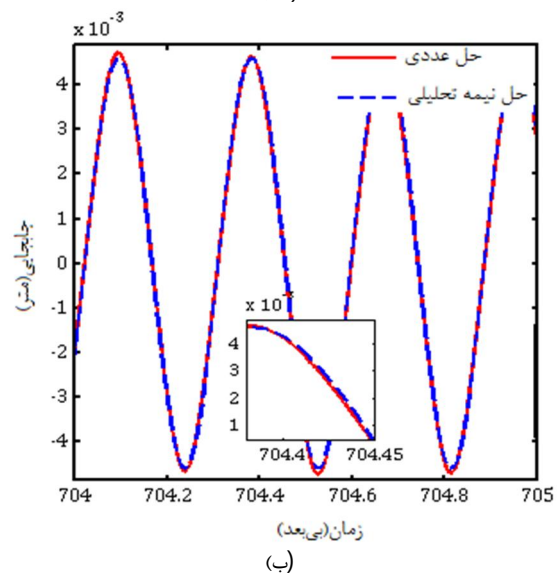
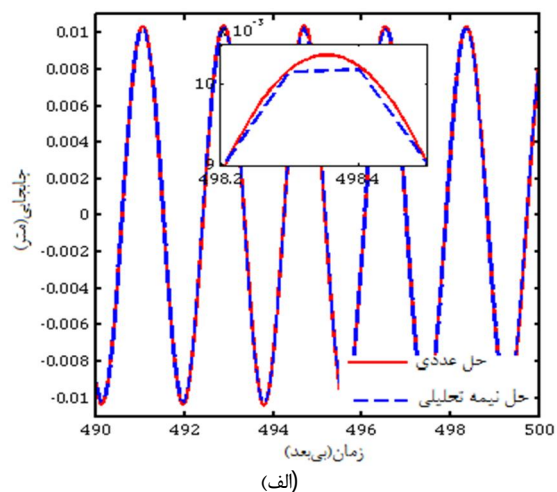


شکل 6 مقایسه جریان الکتریکی درمدهای مختلف



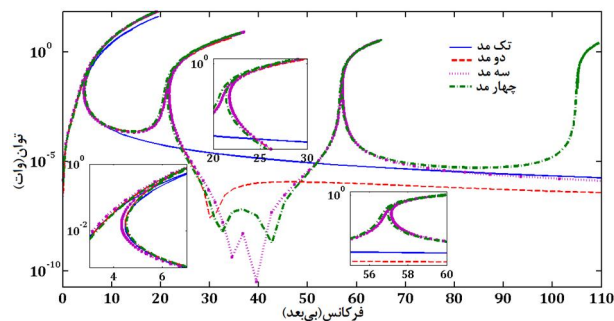
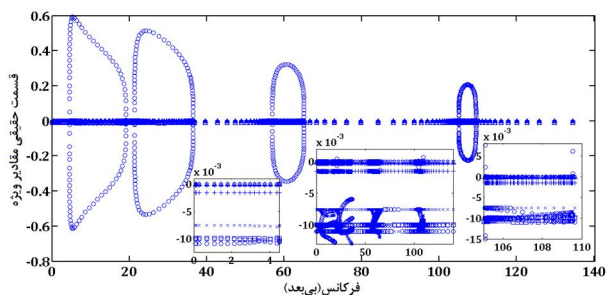
شکل 7 مقایسه ولتاژ الکتریکی درمدهای مختلف

مقادیر ویژه این ماتریس معیاری برای سنجش پایداری می‌باشد و اگر حداقل یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشند سیستم ناپایدار می‌باشد. فرکانسی که سیستم در آن از حالت پایدار به ناپایدار (یا بالعکس) تبدیل می‌گردد فرکانس بحرانی Ω_c نامیده می‌شود.



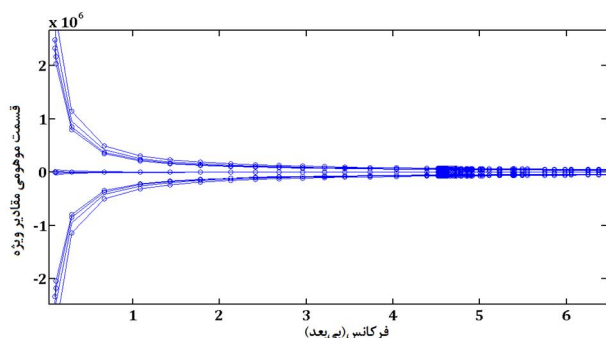
شکل 2 مقایسه نتایج حل روش نیمه تحلیلی با روش عددی، (الف) $\Omega = 3/442$ ، (ب) $\Omega = 21/85$ و (ج) $\Omega = 26/25$

توان قابل جذب را نشان می‌دهند. همان طور که از شکل‌ها مشخص است با افزایش شدت تحریک تکیه‌گاهی، جابجایی انتهایی تیر و توان افزایش یافته است.

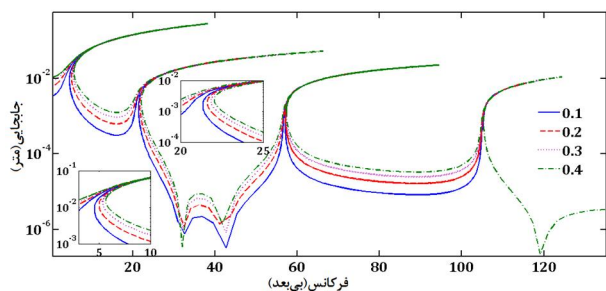


شکل 8 مقایسه توان الکتریکی در مدهای مختلف

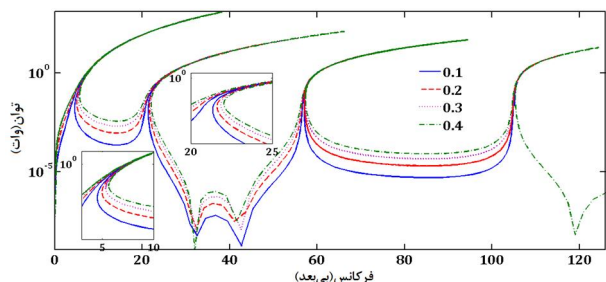
شکل 9 قسمت حقیقی مقادیر ویژه در فرکانس‌های مختلف



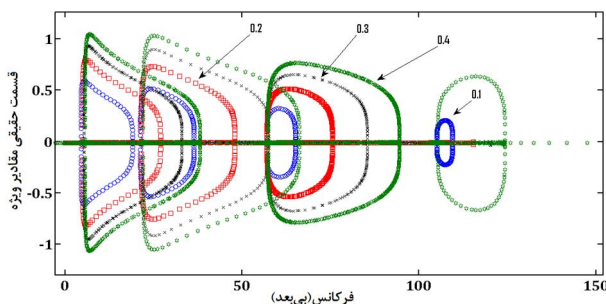
شکل 10 قسمت موهومی مقادیر ویژه در فرکانس‌های مختلف



شکل 11 پاسخ فرکانسی جابجایی سر آزاد تیر به ازای شتاب‌های تکیه‌گاهی مختلف



شکل 12 پاسخ فرکانسی توان الکتریکی به ازای شتاب‌های تکیه‌گاهی مختلف



شکل 13 پاسخ فرکانسی بخش حقیقی مقادیر ویژه به ازای شتاب‌های تکیه‌گاهی مختلف

جدول 2 بررسی اثر افزایش تعداد مدها در همگرایی جواب

چهار مد	سه مد	دو مد	تک مد	
19/15	19/16	19/57	19/58	فرکانس تشدید اول
36/49	37/01	34/41	-	فرکانس تشدید دوم
65/14	64/55	-	-	فرکانس تشدید سوم
109/5	-	-	-	فرکانس تشدید چهارم
0/1373	0/1341	0/1316	0/1035	جابجایی سر آزاد تیر در تشدید اول (متر)
0/02367	0/02394	0/01882	-	جابجایی سر آزاد تیر در تشدید دوم (متر)
0/009002	0/008672	-	-	جابجایی سر آزاد تیر در تشدید سوم (متر)
0/004624	-	-	-	جابجایی سر آزاد تیر در تشدید چهارم (متر)
2/958	2/889	2/898	2/281	جریان الکتریکی در تشدید اول (آمپر)
0/9716	0/9966	0/7285	-	جریان الکتریکی در تشدید دوم (آمپر)
0/6514	0/6297	-	-	جریان الکتریکی در تشدید سوم (آمپر)
0/5699	-	-	-	جریان الکتریکی در تشدید چهارم (آمپر)
23/66	23/12	23/18	18/24	ولتاژ الکتریکی در تشدید اول (ولت)
7/773	7/973	5/828	-	ولتاژ الکتریکی در تشدید دوم (ولت)
5/277	5/038	-	-	ولتاژ الکتریکی در تشدید سوم (ولت)
4/559	-	-	-	ولتاژ الکتریکی در تشدید چهارم (ولت)
70	66/79	67/19	41/61	توان الکتریکی در تشدید اول (وات)
7/552	7/5946	4/246	-	توان الکتریکی در تشدید دوم (وات)
3/481	3/172	-	-	توان الکتریکی در تشدید سوم (وات)
2/598	-	-	-	توان الکتریکی در تشدید چهارم (وات)

شکل‌های 9 و 10 به ترتیب قسمت حقیقی و موهومی مقادیر ویژه سیستم را نشان می‌دهد. مقادیر ویژه به صورت مزدوج مختلط می‌باشند. با افزایش فرکانس قسمت موهومی همواره در حال کاهش می‌باشد که نشان‌دهنده این است که فرکانس نزدیک شدن به سیکل حدی در حال کاهش می‌باشد تا اینکه با رسیدن به سیکل حدی به صفر می‌رسد. همچنین در ابتدا قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی می‌باشند لذا سیستم پایدار است. با افزایش فرکانس تحریک یکی از شاخه‌ها محور حقیقی را قطع می‌کند و مقدار ویژه از منفی به مثبت تغییر می‌کند و سیستم ناپایدار می‌گردد. اولین انشعاق در فرکانس بحرانی $\Omega_{c1} = 4/552$ رخ می‌دهد. از این فرکانس تا فرکانس $\Omega_{c2} = 19/15$ که دومین انشعاق رخ می‌دهد سیستم دارای سه سیکل حدی می‌باشد که یکی از آنها ناپایدار است. با افزایش فرکانس، انشعاق‌های بعدی به ترتیب در فرکانس‌های $\Omega_c = 21/34, 36/49, 56/96, 65/14, 105/1, 109/5$ رخ می‌دهد که تمامی آنها از نوع انشعاق هاپف می‌باشند.

3-5- بررسی اثر تحریک تکیه‌گاهی و پارامترهای سیستم الکترومغناطیسی

بر رفتار ساختار جذب انرژی

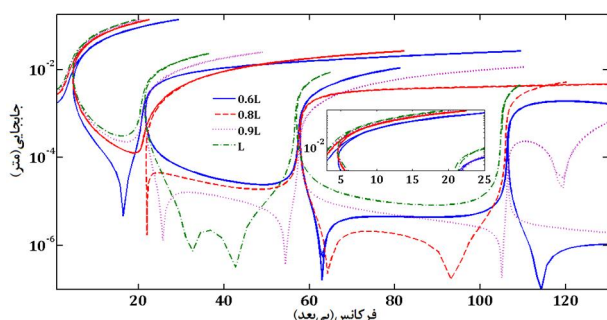
شکل‌های 11 و 12 اثر شدت تحریک تکیه‌گاهی بر بیشینه جابجایی انتهایی تیر و

در حقیقت، وقتی دامنه جابجایی مغناطیس دائم تقریباً ثابت باشد آنگاه با کمتر شدن فاصله آن از سر گیردار، شیب پروفیل جابجایی (یا شکل مد تیر) افزایش می‌یابد و تغییرات سرعت شدیدتر می‌گردد لذا توان الکتریکی افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت در یک فرکانس ثابت با افزایش فاصله، توان و میزان جابجایی نیز افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، به ازای انرژی ورودی یکسان، انرژی جذب شده با افزایش فاصله مغناطیس دائم از سر گیردار تیر افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش فاصله مغناطیس دائم از سر گیردار تیر، فرکانس‌هایی که انشقاق از آنها آغاز می‌شود تقریباً تغییری نکرده ولی فرکانسی که انشقاق‌ها ناپدید می‌شوند افزایش قابل ملاحظه‌ای یافته است در واقع محدوده‌ای که سیستم علاوه بر جواب‌های پایدار دارای جواب ناپایدار نیز می‌باشد افزایش یافته است.

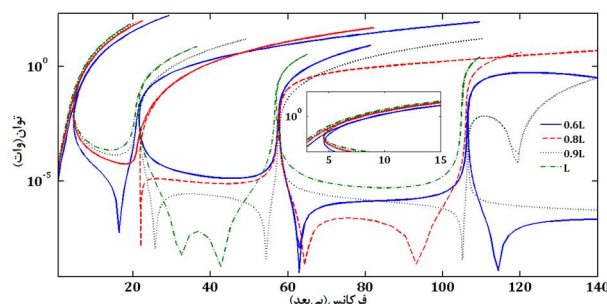
4- نتیجه‌گیری

در این مقاله جذب انرژی ارتعاشی از یک تیر غیرخطی یکسر گیردار تحت تحریک هارمونیک تکیه‌گاهی و در حضور میدان مغناطیسی بررسی گردید و جواب‌ها در حالت مدهای مختلف با یکدیگر مقایسه و نتایج آن ارائه گردید. با استفاده از روش میانگین‌گیری مختلطو الگوریتم پیوسته شبه کمان به طور همزمان، حل نیمه تحلیلی مناسبی برای تحلیل ارتعاشات غیرخطی حتی در حالت چند مد ارائه گردید که اولاً برای غیرخطی‌های بزرگ هم کاربرد دارد و ثانیاً نیاز به حل جداگانه به ازای تشدیدهای ثانویه نیست و ثالثاً زمان لازم برای حل به وسیله نرم افزار بسیار کوتاه می‌باشد.

به کمک حل نیمه تحلیلی تمامی جواب‌های ممکن برای مساله بدست آمد تا دید جامعی از رفتار احتمالی سیستم حاصل گردد. برای نمونه پاسخ فرکانسی بدست آمده نشان داد که در برخی از فرکانس‌ها سه جواب برای دامنه داریم که بزرگترین و کوچکترین دامنه، پایدار و جواب ما بین ناپایدار می‌باشد که این مساله در بحث طراحی و بهینه‌سازی سیستم جذب انرژی ارتعاشی بسیار اهمیت دارد.



شکل 17 پاسخ فرکانسی جابجایی سر آزاد تیر به ازای فواصل مختلف مغناطیس دائم از سرگیردار تیر

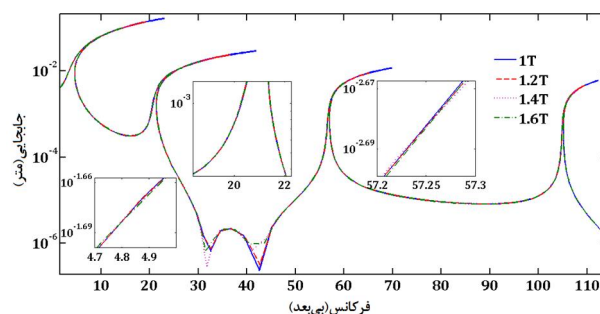


شکل 18 پاسخ فرکانسی توان الکتریکی به ازای فواصل مختلف مغناطیس دائم از سرگیردار تیر

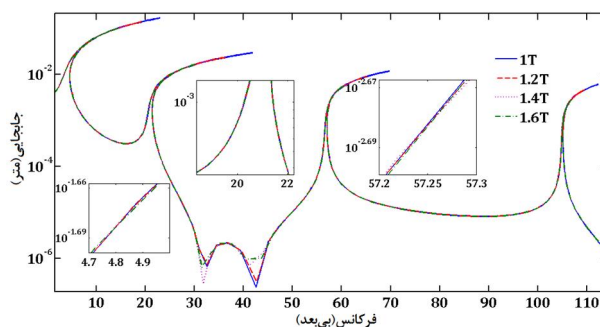
شکل 13 نیز که اثر شدت تحریک تکیه‌گاهی بر پایداری سیستم را نشان می‌دهد، بیانگر آن است که با افزایش شتاب تکیه‌گاهی، محدوده ناپایداری پهن‌تر می‌گردد. به عبارت دیگر محدوده فرکانسی که سیستم علاوه بر سیکل حدی پایدار دارای جواب ناپایدار نیز می‌باشد افزایش یافته است. همچنین تعداد انشقاق‌ها بیشتر شده است.

شکل‌های 14-16 به ترتیب اثر افزایش شدت میدان مغناطیسی بر بیشینه جابجایی انتهای تیر، توان قابل جذب و محدوده پایداری را نشان می‌دهد. با افزایش شدت میدان مغناطیسی بر میرایی سیستم افزوده شده لذا جابجایی انتهای تیر و فرکانس تشدید کاهش یافته است. همچنین با افزایش شدت میدان مغناطیسی، پهنه فرکانسی جذب انرژی کمتر شده و محدوده‌ای که سیستم دارای جواب ناپایدار می‌باشد کاهش یافته است. در واقع فرکانس‌هایی که انشقاق از آنها آغاز می‌شود تقریباً ثابت مانده ولی فرکانسی که انشقاق‌ها ناپدید می‌شوند، کاهش یافته است.

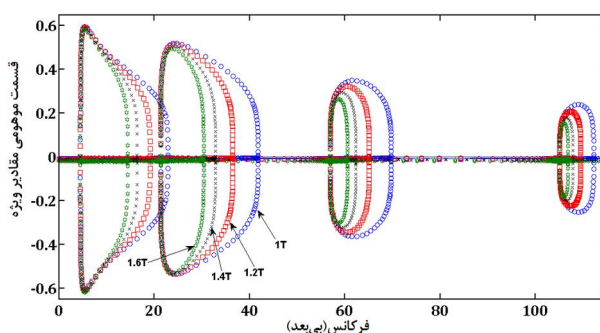
اثر مکان قرارگیری مغناطیس دائم (فاصله مغناطیس دائم از سر گیردار تیر) بر سیستم جذب انرژی در شکل 17-19 نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است با افزایش فاصله مغناطیس دائم از سر گیردار تیر، جابجایی مغناطیس دائم تقریباً بدون تغییر است ولی توان و فرکانس تشدید کاهش می‌یابد.



شکل 14 پاسخ فرکانسی جابجایی سر آزاد تیر به ازای شدت میدان مغناطیسی مختلف



شکل 15 پاسخ فرکانسی توان الکتریکی به ازای شدت میدان مغناطیسی مختلف



شکل 16 پاسخ فرکانسی بخش حقیقی مقادیر ویژه به ازای شدت میدان مغناطیسی مختلف

$$K_{ij}^{\eta} = -\frac{1}{\Gamma} \int_0^1 \frac{d^2 u_i}{d\bar{x}^2} \frac{dX_j}{d\bar{x}} d\bar{x} \quad (\text{س})$$

5-2- حل معادلات حرکت در حالت دو مد با روش میانگین گیری مختلط

معادلات حرکت در حالت دو مد:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{\eta}_1 + m_{12}\ddot{\eta}_2 + c_{11}\dot{\eta}_1 + c_{12}\dot{\eta}_2 + k_{11}\eta_1 + k_{12}\eta_2 + K_{11}^T T_1 \\ + K_{12}^T T_2 + B_{11}\eta_1^3 + B_{12}\eta_2^3 + D_{11}\eta_1^2\eta_2 \\ + D_{12}\eta_1\eta_2^2 = f_1 \cos(\Omega\tau) \\ m_{21}\ddot{\eta}_1 + m_{22}\ddot{\eta}_2 + c_{21}\dot{\eta}_1 + c_{22}\dot{\eta}_2 + k_{21}\eta_1 + k_{22}\eta_2 + K_{21}^T T_1 \\ + K_{22}^T T_2 + B_{21}\eta_1^3 + B_{22}\eta_2^3 + D_{21}\eta_1^2\eta_2 \\ + D_{22}\eta_1\eta_2^2 = f_2 \cos(\Omega\tau) \\ M_{11}\ddot{T}_1 + M_{12}\ddot{T}_2 + K_{11}^T T_1 + K_{12}^T T_2 + K_{11}^{\eta}\eta_1 + K_{12}^{\eta}\eta_2 = 0 \\ M_{21}\ddot{T}_1 + M_{22}\ddot{T}_2 + K_{21}^T T_1 + K_{22}^T T_2 + K_{21}^{\eta}\eta_1 + K_{22}^{\eta}\eta_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ش})$$

تعریف متغیرهای مختلط جدید:

$$\psi_1 = \eta_1 + i\Omega\bar{\eta}_1 \rightarrow \bar{\eta}_1 = \frac{\psi_1 + \psi_1^*}{2}, \eta_1 = \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2i\Omega}, \quad (\text{ص})$$

$$\bar{\eta}_1 = \psi_1 - i\Omega \frac{\psi_1 + \psi_1^*}{2} \quad (\text{ص})$$

$$\psi_2 = \eta_2 + i\Omega\bar{\eta}_2 \rightarrow \bar{\eta}_2 = \frac{\psi_2 + \psi_2^*}{2}, \eta_2 = \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{2i\Omega} \quad (\text{ض})$$

$$\bar{\eta}_2 = \psi_2 - i\Omega \frac{\psi_2 + \psi_2^*}{2} \quad (\text{ط})$$

$$\psi_3 = T_1 + i\Omega T_2 \rightarrow \bar{T}_1 = \frac{\psi_3 + \psi_3^*}{2}, T_1 = \frac{\psi_3 - \psi_3^*}{2i\Omega}, \quad (\text{ظ})$$

$$\bar{T}_1 = \psi_3 - i\Omega \frac{\psi_3 + \psi_3^*}{2} \quad (\text{ع})$$

$$\psi_4 = T_2 + i\Omega T_1 \rightarrow \bar{T}_2 = \frac{\psi_4 + \psi_4^*}{2}, T_2 = \frac{\psi_4 - \psi_4^*}{2i\Omega}, \quad (\text{ع})$$

$$\bar{T}_2 = \psi_4 - i\Omega \frac{\psi_4 + \psi_4^*}{2} \quad (\text{ع})$$

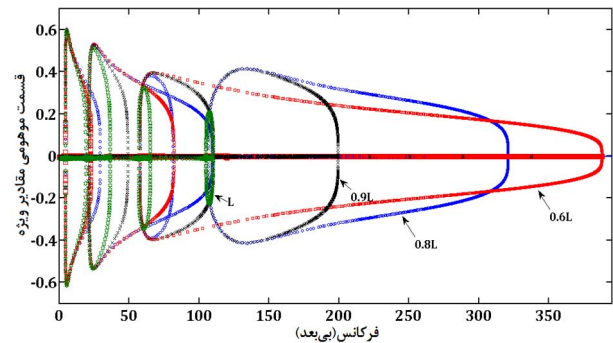
$$\begin{aligned} \psi_1 = A_1 e^{i\Omega t}, \psi_2 = A_2 e^{i\Omega t}, \psi_3 = A_3 e^{i\Omega t}, \psi_4 = A_4 e^{i\Omega t} \\ A_1 = a_1 + ib_1, A_2 = a_2 + ib_2, A_3 = a_3 + ib_3, A_4 = a_4 + ib_4 \end{aligned} \quad (\text{ع})$$

با انجام مراحل حل مطابق حالت تک مد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}}{2} b_1 + \frac{C_{12}}{2} b_2 + M_{11} \dot{b}_1 + M_{12} \dot{b}_2 - \frac{3B_{11}}{8\Omega^3} a_1^3 - \frac{3B_{12}}{8\Omega^3} a_2^3 \\ + \frac{M_{11}\Omega}{2} a_1 + \frac{M_{12}\Omega}{2} a_2 - \frac{K_{11}^T}{2\Omega} a_3 - \frac{K_{12}^T}{2\Omega} a_4 \\ - \frac{K_{11}}{2\Omega} a_1 - \frac{K_{12}}{2\Omega} a_2 - \frac{3B_{11}}{8\Omega^3} a_1 b_1^2 \\ - \frac{3B_{12}}{8\Omega^3} a_2 b_2^2 - \frac{3D_{11}}{8\Omega^3} a_2 a_1^2 - \frac{3D_{12}}{8\Omega^3} a_1 a_2^2 \\ - \frac{D_{11}}{8\Omega^3} a_2 b_1^2 - \frac{D_{12}}{8\Omega^3} a_1 b_2^2 - \frac{D_{11}}{4\Omega^3} a_1 b_1 b_2 \\ - \frac{D_{12}}{4\Omega^3} a_2 b_1 b_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ع})$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}}{2} a_1 + \frac{C_{12}}{2} a_2 - \frac{f_1}{2} + M_{11} \dot{a}_1 + M_{12} \dot{a}_2 + \frac{3B_{11}}{8\Omega^3} b_1^3 + \frac{3B_{12}}{8\Omega^3} b_2^3 \\ - \frac{M_{11}\Omega}{2} b_1 - \frac{M_{12}\Omega}{2} b_2 + \frac{K_{11}^T}{2\Omega} b_3 + \frac{K_{12}^T}{2\Omega} b_4 \\ + \frac{K_{11}}{2\Omega} b_1 + \frac{K_{12}}{2\Omega} b_2 + \frac{3B_{11}}{8\Omega} b_1 a_1^2 \\ + \frac{3B_{12}}{8\Omega} b_2 a_2^2 + \frac{3D_{11}}{8\Omega^3} b_2 b_1^2 + \frac{3D_{12}}{8\Omega^3} b_1 b_2^2 \\ + \frac{D_{11}}{8\Omega^3} b_2 a_1^2 + \frac{D_{12}}{8\Omega^3} b_1 a_2^2 + \frac{D_{11}}{4\Omega^3} b_1 a_1 a_2 \\ + \frac{D_{12}}{4\Omega^3} b_2 a_1 a_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ع})$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{21}}{2} b_1 + \frac{C_{22}}{2} b_2 + M_{21} \dot{b}_1 + M_{22} \dot{b}_2 - \frac{3B_{21}}{8\Omega^3} a_1^3 - \frac{3B_{22}}{8\Omega^3} a_2^3 \\ + \frac{M_{21}\Omega}{2} a_1 + \frac{M_{22}\Omega}{2} a_2 - \frac{K_{21}^T}{2\Omega} a_3 - \frac{K_{22}^T}{2\Omega} a_4 \\ - \frac{K_{21}}{2\Omega} a_1 - \frac{K_{22}}{2\Omega} a_2 - \frac{3B_{21}}{8\Omega^3} a_1 b_1^2 \\ - \frac{3B_{22}}{8\Omega^3} a_2 b_2^2 - \frac{3D_{21}}{8\Omega^3} a_2 a_1^2 - \frac{3D_{22}}{8\Omega^3} a_1 a_2^2 \\ - \frac{D_{21}}{8\Omega^3} a_2 b_1^2 - \frac{D_{22}}{8\Omega^3} a_1 b_2^2 - \frac{D_{21}}{4\Omega^3} a_1 b_1 b_2 \\ - \frac{D_{22}}{4\Omega^3} a_2 b_1 b_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{ع})$$



شکل 19 پاسخ فرکانسی بخش حقیقی مقادیر ویژه به ازای فواصل مختلف مغناطیس دائم از سرگیردار تیر

در ادامه مدل غیرخطی با سیستم خطی مقایسه شد و مشاهده گردید که در سیستم جذب انرژی غیرخطی، پهنای فرکانسی جذب انرژی و فرکانس تشدیدها افزایش ولی توان الکتریکی قابل جذب کاهش می‌یابد. همچنین تاثیر افزایش شتاب تکیه‌گاهی و پارامترهای میدان مغناطیسی روی جابجایی تیر و توان الکتریکی قابل جذب بررسی شد و مشاهده گردید که با افزایش شتاب تکیه‌گاهی همان‌طور که انتظار می‌رفت جابجایی تیر و توان الکتریکی قابل جذب افزایش یافت. همچنین بررسی تاثیر پارامترهای میدان مغناطیسی بر رفتارسیستم نشان داد افزایش تعداد حلقه‌ها و شدت میدان مغناطیسی موجب افزایش میرایی و در نتیجه کاهش دامنه جابجایی تیر و توان الکتریکی قابل جذب می‌شود و نیز در یک فرکانس ثابت با افزایش فاصله مغناطیس دائم از سرگیردار تیر، توان و میزان جابجایی نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر این نحوه تاثیر این موارد بر محدوده پایداری و انشعاق‌های سیکل حدی نشان داد.

5- پیوست‌ها

5-1- تعریف ضرایب معادلات حرکت

$$\bar{m} = \frac{m}{\rho AL}, \bar{I} = \frac{I}{AL^2}, \bar{M} = \frac{mh^2}{\rho AL^3}, \bar{k}_s = \frac{K_s L^3}{EI}, \bar{c} = \frac{cL}{\sqrt{\rho AEI}}, \quad (\text{ا})$$

$$\bar{m}_s = \frac{mh^2}{\rho IL}, \bar{K}_c = \frac{K_c GA^2 L^4}{EI^2}, \quad M_{ij} = \int_0^1 W_i W_j d\bar{x} + \bar{I} \int_0^1 \frac{du_i}{d\bar{x}} \frac{du_j}{d\bar{x}} d\bar{x} \quad (\text{ب})$$

$$M_{ij}^T = -\left(\bar{I} \int_0^1 \frac{du_i}{d\bar{x}} X_j d\bar{x} + \left(\frac{1}{8} \bar{M} \frac{du_i}{d\bar{x}} X_j \right)_{(\bar{x}=\frac{d_1}{L})} \right) \quad (\text{ت})$$

$$D_i = \left[\int_0^1 u_i d\bar{x} + \bar{m}(u_i)_{(\bar{x}=\frac{d_1}{L})} \right] \frac{d^2 y'}{d\tau^2} = -\frac{\bar{Y}\Omega^2}{\bar{a}_b} \left[\int_0^1 u_i d\bar{x} + \bar{m}(u_i)_{(\bar{x}=\frac{d_1}{L})} \right] \cos(\Omega\tau) \quad (\text{ث})$$

$$NL_i = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2\bar{I}} \int_0^1 \frac{du_i}{d\bar{x}} \frac{du_j}{d\bar{x}} \frac{du_m}{d\bar{x}} \frac{du_k}{d\bar{x}} d\bar{x} \right] \bar{\eta}_j \bar{\eta}_m \bar{\eta}_k \quad (\text{ج})$$

$$K_{Lij} = \int_0^1 \frac{d^2 u_i}{d\bar{x}^2} \frac{d^2 u_j}{d\bar{x}^2} d\bar{x} + \bar{k}_s (u_i u_j)_{(\bar{x}=\frac{d_2}{L})} \quad (\text{ح})$$

$$K_{ij}^T = -\left[\int_0^L \frac{d^2 u_i}{d\bar{x}^2} \frac{dX_j}{d\bar{x}} d\bar{x} \right] \quad (\text{خ})$$

$$C_{Lij} = (\bar{c} u_i u_j)_{(\bar{x}=\frac{d_1}{L})} \quad (\text{د})$$

$$m_{ij} = -\left(\frac{du_i}{d\bar{x}} X_j d\bar{x} + \left(\frac{\bar{m}_s}{8} \frac{du_i}{d\bar{x}} X_j \right)_{(\bar{x}=\frac{d_1}{L})} \right) \quad (\text{ذ})$$

$$m_{ij}^T = \int_0^1 X_i X_j d\bar{x} + \left(\frac{\bar{m}_s}{4} X_i X_j \right)_{(\bar{x}=\frac{d_1}{L})} \quad (\text{ر})$$

$$K_{ij}' = \frac{1}{\bar{I}} \int_0^1 \frac{dX_i}{d\bar{x}} \frac{dX_j}{d\bar{x}} d\bar{x} + \bar{K}_c \int_0^1 X_i X_j d\bar{x} \quad (\text{ز})$$

- [4] R. Gherca, R. Olaru, *Harvesting vibration energy by electromagnetic induction*, *Annals of the University of Craiova, Electrical Engineering series*, No. 35, ISSN 1842-4805, 2011.
- [5] S. P. Beeby, R. N. Torah, M. J. Tudor, P. G. Jones, T. O'Donnell, R. Saha and S. Roy, *A micro electromagnetic generator for vibration energy harvesting*, *J. Micromech. Microeng.*, 17, pp:1257-1265, 2007.
- [6] B. Gospodaric, D. Voncina, B. Bucar, Active electromagnetic damping of laterally vibrating ferromagnetic cantilever beam, *Mechatronics*, 17, pp: 291-298, 2007.
- [7] R. Ly, M. Rguiti, S. D'Astorg, A. Hajjaji, C. Courtois and A. Leriche, Modeling and characterization of piezoelectric cantilever bending sensor for energy harvesting, *Sensors and Actuators A Physics*, 168, 95-100, 2011.
- [8] N. A. Aboulfotouh, M. H. Arafa and S. M. Megahed, A self-tuning resonator for vibration energy harvesting, *Sensors and Actuators A Physics*, 201, 328-334, 2013.
- [9] N. Elvin and A. Erturk, *Advances in Energy Harvesting Methods*, Springer Science, 2013.
- [10] L. Tang, Y. Yang and C. K. Soh, Toward Broadband Vibration-based Energy Harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, DOI: 10.1177/1045389X10390249, 2010.
- [11] A. M. Owens, P. Mann, Linear and nonlinear electromagnetic coupling models in vibration-based energy harvesting, *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp:922-937, 2012.
- [12] M. Belhaq, A. Bichri, J. D. Hogapian and J. Mahfoud, Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46, pp:828-833, 2011.
- [13] B. Mann and B. Owens, Investigations of a nonlinear energy harvester with a bistable potential well, *Journal of Sound and Vibration*, 329, pp:1215-1226, 2010.
- [14] M. A. Karami and D. J. Inman, Equivalent damping and frequency change for linear and nonlinear hybrid vibrational energy harvesting systems, *Journal of Sound and Vibration*, 330, pp:5583-5597, 2011.
- [15] H. Croisier, *Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow-fast system*, Phd thesis, Academie Wallonie-Europe, Université de Liege, 2009.
- [16] L. Eugene. Allgower and K. Georg, *Introduction to Numerical Continuation Methods*, Colorado State University, 1990.
- [17] M. W. Sracic and M. S. Allen, *Numerical Continuation of Periodic Orbits for Harmonically Forced Nonlinear Systems*, University of Wisconsin-Madison, 2011.
- [18] S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons Inc 2007.
- [19] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*, 2nd edition, CRC Press LLC 2004.

$$\begin{aligned} & \frac{C_{21}}{2} a_1 + \frac{C_{22}}{2} a_2 - \frac{f_2}{2} + M_{21} \dot{a}_1 + M_{22} \dot{a}_2 + \frac{3B_{21}}{8\Omega^3} b_1^3 + \frac{3B_{21}}{8\Omega^3} b_2^3 \\ & - \frac{M_{21}\Omega}{2} b_1 - \frac{M_{22}\Omega}{2} b_2 + \frac{K'_{21}}{2\Omega} b_3 + \frac{K'_{21}}{2\Omega} b_4 \\ & + \frac{K_{21}}{2\Omega} b_1 + \frac{K_{22}}{2\Omega} b_2 + \frac{3B_{21}}{8\Omega} b_1 a_1^2 \\ & + \frac{3B_{22}}{8\Omega^3} b_2 a_2^2 + \frac{3D_{21}}{8\Omega^3} b_2 b_1^2 + \frac{3D_{12}}{8\Omega^3} b_1 b_2^2 \\ & + \frac{D_{21}}{8\Omega^3} b_2 a_1^2 + \frac{D_{22}}{8\Omega^3} b_1 a_2^2 + \frac{D_{21}}{4\Omega^3} b_1 a_1 a_2 \\ & + \frac{D_{22}}{4\Omega^3} b_2 a_1 a_2 = 0 \\ & m_{11} \dot{b}_3 + m_{12} \dot{b}_4 + \frac{m_{11}\Omega}{2} a_3 + \frac{m_{12}\Omega}{2} a_4 - \frac{K'_{11}}{2\Omega} a_3 - \frac{K'_{12}}{2\Omega} a_4 \\ & - \frac{K_{11}^\eta}{2\Omega} a_1 - \frac{K_{12}^\eta}{2\Omega} a_2 = 0 \\ & m_{11} \dot{a}_3 + m_{12} \dot{a}_4 - \frac{m_{11}\Omega}{2} b_3 - \frac{m_{12}\Omega}{2} b_4 + \frac{K'_{11}}{2\Omega} b_3 + \frac{K'_{12}}{2\Omega} b_4 \\ & + \frac{K_{11}^\eta}{2\Omega} b_1 + \frac{K_{12}^\eta}{2\Omega} b_2 = 0 \\ & m_{21} \dot{b}_3 + m_{22} \dot{b}_4 + \frac{m_{21}\Omega}{2} a_3 + \frac{m_{22}\Omega}{2} a_4 - \frac{K'_{21}}{2\Omega} a_3 - \frac{K'_{22}}{2\Omega} a_4 \\ & - \frac{K_{21}^\eta}{2\Omega} a_1 - \frac{K_{22}^\eta}{2\Omega} a_2 = 0 \\ & m_{21} \dot{a}_3 + m_{22} \dot{a}_4 - \frac{m_{21}\Omega}{2} b_3 - \frac{m_{22}\Omega}{2} b_4 + \frac{K'_{21}}{2\Omega} b_3 + \frac{K'_{22}}{2\Omega} b_4 \\ & + \frac{K_{21}^\eta}{2\Omega} b_1 + \frac{K_{22}^\eta}{2\Omega} b_2 = 0 \end{aligned}$$

در نهایت با حل معادلات فوق دامنه و فاز متغیر تعمیم یافته به صورت زیر خواهد بود.

$$\bar{\eta}_i = \frac{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}{\Omega} \sin(\Omega\tau + \beta_i), \beta_i = \tan^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right) \quad (ق)$$

6- مراجع

- [1] S. Priya & D. J. Inman, *Energy Harvesting Technologies*, Springer Science, 2009.
- [2] T. J. Ka'zmierski and S. Beeby, *Energy Harvesting Systems, Principles, Modeling and Applications*, Springer Science, 2011.
- [3] S. Roundy, P. H. Wright, J. M. Rabaey, *Energy Scavenging for Wireless Sensor Networks with Special Focus on Vibrations*. Kluwer, Norwell, MA, 2004.