



تخمین بهینه ضرایب مدل سیگنال فراصوتی با ترکیب الگوریتم‌های بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن

علی غلامی¹، فرهنگ هنرور^{2*}، حمید ابریشمی مقدم³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران.

2- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، کد پستی 1999143344، honarvar@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 16 شهریور 1393

پذیرش: 05 آبان 1393

ارائه در سایت: 11 آذر 1393

کلید واژگان:

آزمون فراصوتی

پردازش سیگنال

الگوریتم گوس-نیوتن

الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات

الگوریتم ژنتیک

چکیده

در یک آزمون فراصوتی پژواک‌های بازگشتی از درون قطعه دارای اطلاعات مفید و ارزشمندی در مورد مشخصات هندسی و ریزساختاری قطعه هستند. این اکوهای فراصوتی را می‌توان با استفاده از مدل پالس گوسی، که دارای پنج پارامتر مستقل است، مدل‌سازی کرد. برای مدل‌سازی دقیق یک اکو، پارامترهای پالس گوسی باید هر چه دقیق‌تر از روی اکوی واقعی محاسبه شوند. الگوریتم‌های متفاوتی برای تخمین این پنج پارامتر وجود دارد. در این پژوهش از سه روش بهینه‌سازی گوس-نیوتن (GN)، گروه ذرات (PSO) و الگوریتم ژنتیک (GA) برای این منظور استفاده خواهد شد و مزایا و معایب هر یک از این روش‌ها با مثال‌هایی بررسی خواهد شد و در نهایت با ترکیب این الگوریتم‌ها مزایای یک الگوریتم، جایگزین معایب الگوریتم دیگر خواهد شد. در مورد سیگنال‌هایی که دارای چندین پژواک فراصوتی هستند از اصل حداقل طول توصیف (MDL) برای تخمین تعداد اکوها استفاده شده است و برای تسهیل تخمین پارامترهای تمامی پژواک‌ها از الگوریتم بهینه‌سازی امید تعمیم یافته با فضای تناوبی (SAGE) استفاده خواهد شد. برای ارزیابی کارایی الگوریتم‌ها نیز سیگنال‌های شبیه‌سازی شده و آزمایشی در حالت-هایی که اکوها همپوشانی داشته و یا بدون همپوشانی هستند مورد بررسی قرار خواهد گرفت. الگوریتم ترکیبی در تمامی شرایط مورد مطالعه بهتر از الگوریتم‌های منفرد عمل کرده است.

Optimal parameter estimation of ultrasonic signals by using a combination of particle swarm optimization and gauss-newton algorithms

Ali Gholami¹, Farhang Honarvar^{1*}, Hamid Abrishami Moghaddam²

1- Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

2- Faculty of Electrical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 1999143344, Tehran, Iran, honarvar@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 06 September 2014
Accepted 27 October 2014
Available Online 02 December 2014

Keywords:

Ultrasonic Testing, Signal Processing
Gauss-Newton Algorithm
Particle Swarm Optimization Algorithm
Genetics Algorithm

ABSTRACT

The echoes obtained from ultrasonic testing of materials contain valuable information about the geometry and grain structure of the test specimen. These echoes can be modeled by Gaussian pulses in a model-based estimation process. For precise modeling of an echo, the parameters of the Gaussian pulse should be estimated as accurately as possible. There are a number of algorithms that can be used for this purpose. In this study, three different algorithms are used: Gauss-Newton (GN), particle swarm optimization (PSO), and genetic algorithm (GA). The pros and cons of each of these three algorithms are reviewed and by combining them, the benefits of each algorithm are used while its shortcomings are avoided. For signals containing multiple echoes, the minimum description length (MDL) principle is used to estimate the numbers of required Gaussian echoes followed by space alternating generalized expectation maximization (SAGE) technique to translate it to separate echoes and to estimate the parameters of each echo. The performance of the proposed algorithms for simulated and experimental signals with overlapping and non-overlapping echoes is evaluated and is shown to be quite effective.

1- مقدمه

یک تراگذار¹ به درون قطعه ارسال می‌شود. با برخورد این پالس به یک سطح مشترک یا عیب، بخشی از انرژی پالس بازتاب می‌شود. با دریافت سیگنال بازگشتی توسط همان تراگذار می‌توان قطعه و عیوب احتمالی موجود در آن را مورد تحلیل قرار داد. تحلیل دقیق این سیگنال‌ها را می‌توان با کمک یک

با سرعت گرفتن پیشرفت فناوری‌ها، نیاز بیشتری به روش‌هایی دقیق‌تر و سریع‌تر برای اندازه‌گیری ویژگی‌های قطعات تولیدی احساس می‌شود. یکی از روش‌های کاربردی برای پاسخ به این نیاز، استفاده از آزمون‌های فراصوتی است. در این روش یک پالس فراصوتی (یا فرکانسی بیش از 20kHz) توسط

1- Transducer

بهینه‌سازی مدل فازی-عصبی استفاده کردند. حاجیان و هنرور [9] از الگوریتم SAGE برای تخمین پارامترهای پژواک‌های حاصل از آزمون فراصوتی اتصالات چسبی استفاده کردند. گریمز و همکارانش [10] از الگوریتم SAGE برای تشخیص استخوان اسفنجی¹⁷ استفاده کردند. ستیاناراین و همکارانش [11] از یک روش ترکیبی¹⁸ الگوریتم ژنتیک و لونبرگ-مارکوارت¹⁹ برای اندازه‌گیری ترک در قطعات نازک به روش فراصوتی آرایه‌های فازی استفاده کردند.

در این مقاله از سه الگوریتم گوس-نیوتن (GN)، بهینه‌سازی گروه ذرات (PSO) و ژنتیک (GA) برای بدست آوردن ضرایب مربوط به پژواک فراصوتی استفاده خواهد شد. پس از بررسی نقاط ضعف و قوت این روش‌ها یک روش ترکیبی برای تخمین پارامترهای امواج فراصوتی پیشنهاد خواهد شد. در الگوریتم پیشنهادی از الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات به خاطر سرعت و دقت همگرایی مناسب و عدم وابستگی آن به حدس اولیه برای محاسبه یک جواب کلی استفاده می‌شود. از این جواب کلی به عنوان حدس اولیه برای الگوریتم گوس-نیوتن که دارای سرعت و دقت مناسبی (در صورت ارائه یک حدس اولیه نزدیک به جواب نهایی) است، استفاده خواهد شد. این الگوریتم در حالت‌های مختلف تک پژواک و چندین پژواک که دارای همپوشانی بوده و یا بدون همپوشانی باشند اعمال خواهد شد و در پایان برای ارزیابی عملی این الگوریتم، این الگوریتم روی نتایج آزمایشگاهی پیاده‌سازی خواهد شد.

2- مدل ریاضی

در آزمون‌های فراصوتی بازتابی²⁰، پژواک بازتابی حاصل از یک سطح بازتاب‌دهنده تخت را می‌توان به صورت رابطه (1) بیان کرد [1]:

$$g(\theta; t) = \beta e^{-\alpha(t-\tau)^2} \cos(2\pi f_c(t - \tau) + \varphi) \quad (1)$$

$$\theta = [\alpha, \tau, f_c, \varphi, \beta]$$

از آنجا که شکل پوش این مدل به صورت گوسی است، این مدل را به عنوان مدل پژواک گوسی²¹ می‌شناسند. پارامترهای موجود در این رابطه عبارتند از: α = فاکتور پهنای باند بر حسب τ ، MHz² زمان رسیدن بر حسب میکرو ثانیه، f_c = فرکانس مرکزی بر حسب φ ، MHz فاز بر حسب رادیان و β = دامنه بدون واحد است. هر یک از این پارامترها بیانگر یک ویژگی پژواک فراصوتی در یک مسیر انتشار همگن هستند. زمان رسیدن تابعی از موقعیت قرارگرفتن بازتاب‌دهنده است. فاکتور پهنای باند ضریبی از پهنای باند پژواک در حوزه فرکانس است که با پهنای پژواک در حوزه زمان رابطه معکوس دارد. فرکانس مرکزی تابعی از فرکانس مرکزی تراگذار و ویژگی‌های فرکانسی مسیر انتشار است. با توجه به امپدانس، اندازه و جهت بازتاب‌دهنده؛ پژواک فراصوتی دارای یک دامنه و فاز مشخصی نیز است.

برای واقعی‌تر شدن مدل، تأثیر نویز نیز باید در مدل پژواک فراصوتی در نظر گرفته شود. این نویز از نوع نویز گوسی سفید (WGN²²) است که از یک سری اعداد تصادفی با توزیع گوسی (نرمال) و میانگین مقادیر صفر تشکیل شده است [12]. با اضافه کردن نویز، مدل پژواک فراصوتی به صورت رابطه (2) خواهد بود [1]:

$$x(t) = \beta e^{-\alpha(t-\tau)^2} \cos(2\pi f_c(t - \tau) + \varphi) + \rho(t) \quad (2)$$

که در آن $\rho(t)$ نویز اضافه شده WGN است. همین رابطه را می‌توان برای

رایانه و با استفاده از روش‌های پردازش سیگنال انجام داد. روش‌های متنوعی برای تحلیل سیگنال‌ها وجود دارند. یکی از روش‌های رایج برای اندازه‌گیری فاصله زمانی پژواک‌ها استفاده از تابع همبستگی متقابل¹ است. این روش در عین سادگی دارای محدودیت‌هایی است که عبارتند از: (1) نیاز به یک سیگنال مرجع که معمولاً در دسترس نیست، (2) حتی در صورت در دسترس بودن سیگنال مرجع، پژواک دریافتی ممکن است دچار اعوجاج² شده باشد و این اعوجاج خود را به صورت پراکندگی فرکانسی یا تغییر فاز یا اعوجاج پوش نسبت به پژواک مرجع نمایش دهد، (3) قابلیت تفکیک این روش محدود است و برای رفع درصدی از این مشکل از منحنی‌های درون‌یابی شده مانند اسپلاین³ استفاده می‌شود [3-1].

یکی دیگر از روش‌های پردازش سیگنال؛ روش مبتنی بر مدل است. در این روش پس از برازش یک مدل ریاضی به سیگنال فراصوتی، ویژگی‌های پژواک‌های فراصوتی استخراج می‌شوند. این ویژگی‌ها شامل ضرایبی است که هر کدام از آن‌ها یکی از مشخصات امواج فراصوتی را معین می‌سازد. علاوه بر عامل زمان پرواز پژواک که یکی از پارامترهای مهم و کاربردی پژواک‌های فراصوتی است، فاکتورهای دیگری که هر کدام می‌توانند بیانگر ویژگی‌های قطعه و سطح بازتاب‌دهنده باشند در سیگنال فراصوتی وجود دارند. برای مثال یکی از این فاکتورها فرکانس مرکزی تراگذار است. دمیرلی و صنیعی [4،1] از یک روش مبتنی بر مدل برای تخمین پارامترهای سیگنال‌های فراصوتی استفاده کردند. آن‌ها روش گوس-نیوتن (GN⁴) را برای تخمین پارامترهای روش خود بکار گرفتند که مشکل این روش در نیاز به یک حدس اولیه مناسب و همچنین حساس بودن به برخی نویزها بود. لو و همکارانش [5] دو روش متفاوت تخمین پژواک توسط مدل چیرپلت⁵ را مقایسه کردند. این روش‌ها عبارتند از: تجزیه سیگنال چیرپلت بر پایه تبدیل چیرپلت (CTSD⁶) و تطابق قالب تجزیه سیگنال تعقیبی که در آن از تخمین تشابه بیشینه (7MPSP) استفاده شده بود. توسط استنتاج CRLB⁸ و صحت‌سنجی آزمایشی و شبیه‌سازی، مشخص شد که هر دو این الگوریتم‌ها برای تحلیل سیگنال‌های فراصوتی مقاوم و مفید هستند. الوفسون و استپینسکی [6] از الگوریتم ژنتیک (GA⁹) برای بهینه کردن معیار بیشینه‌گر احتمال پسین (MAP¹⁰) جهت دیکانوال¹¹ کردن امواج فراصوتی دارای همپوشانی بهره بردند. آن‌ها از یک معیار جدید برای اعمال عملگر تقاطعی¹² در الگوریتم ژنتیک استفاده کردند و برای ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی‌شان از شبیه‌سازی مونت کارلو¹³ استفاده کردند. حسینی و همکارانش [7] از تبدیل هیلبرت برای استخراج پوش پژواک استفاده کردند و نشان دادند که تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از پوش آن‌ها بهتر صورت می‌گیرد. آنها برای محاسبه پارامترهای مربوط به پوش نیز از یک روش شبه بیشینه احتمال¹⁴ استفاده کردند و تعداد پژواک‌ها توسط معیار اطلاعات ثوابت آکایک¹⁵ محاسبه شدند. آلامومانگای و دویشری [8] نیز از الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات (PSO¹⁶) برای

1- Cross-Correlation

2- Distortion

3- Spline

4- Gauss-Newton

5- Chirplet

6- Chirplet Signal Decomposition Based On The Chirplet Transform

7- Matching Pursuit Signal Decomposition

8- Cramer-Rao Lower Bounds

9- Genetic Algorithms

10- Maximum A Posteriori

11- Deconvolve

12- Cross Over

13- Mont Carlo

14- Quasi Maximum Likelihood

15- Akaike

16- Particle Swarm Optimization

17- Cancellous Bone

18- Hybrid

19- Levenberg-Marquardt

20- Pulse-Echo Ultrasonic Testing

21- Gaussian

22- White Gaussian Noise

و جهت ld هستند. $pbest_{id}^k$ بیانگر مکان بهترین مقدار شایستگی که ذره id در طول حرکت خود در جهت ld و در تکرار k ام به آن رسیده است می‌باشد و $gbest_{ld}^k$ مکان بهترین ذره در جمعیت فعلی جهت ld از تکرار k ام است. c_1 و c_2 ضرایب یادگیری را نمایش می‌دهند که معمولاً با هم برابر و مساوی 2 هستند. r_1 و r_2 هم یک عدد تصادفی بین یک و صفر هستند. مزیت اصلی این روش در کارکرد ساده و سریع آن در مقایسه با الگوریتم‌های مشابه خود است [16].

برای ارزیابی عملکرد این الگوریتم، همان مسائل قبل، تحت شرایط مشابهی در نظر گرفته می‌شوند. پژواک‌ها و نتایج به دست آمده به همراه حدود بازه متغیرها به ترتیب در شکل 1 و جدول 1 آورده شده‌اند. تعداد ذرات در هر تکرار برابر 50، مقادیر c_1 و c_2 برابر 2 و حداکثر تکرار هم 100 در نظر گرفته شده است.

3-3- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک یک فن جستجوی تصادفی است که بر اساس مکانیزم انتخاب طبیعی و علم ژنتیک کار می‌کند. الگوریتم ژنتیک متفاوت از الگوریتم‌های معمول است و با مجموعه‌ای اولیه از راه‌حل‌های تصادفی شروع می‌شود که به آن جمعیت³ گفته می‌شود. هر فرد از این جمعیت را یک کروموزوم⁴ می‌نامند که نشان‌دهنده یک راه‌حل مسئله است. کروموزوم، رشته‌ای از نشانه‌هاست که معمولاً نه لزوماً، یک رشته بیتی دودویی است. کروموزوم‌ها از طریق تکرارهای متوالی⁵ نمو می‌کنند که به آن‌ها نسل⁶ می‌گویند. در هر نسل، کروموزوم‌ها از طریق اندازه‌گیری تطابق⁷ ارزیابی می‌شوند. به منظور تولید نسل بعد، کروموزوم‌های جدید که به آن‌ها فرزند⁸ گفته می‌شوند از دو طریق تولید می‌شوند [17]:

- 1) ادغام دو کروموزوم از نسل فعلی با استفاده از عملگر برش.
- 2) تغییر یک کروموزوم از طریق عملگر جهش⁹.

تعدادی از کروموزوم‌ها که دارای ارزش بالایی هستند به عنوان کروموزوم نخبه¹⁰ شناسایی می‌شوند و بدون ایجاد هرگونه تغییری به جمعیت بعد منتقل می‌شوند.

در این قسمت نیز مطابق قسمت‌های قبل مسئله شبیه‌سازی شده، در شرایطی مشابه حل می‌شود. نتایج به دست آمده در شکل 1 و جدول 1 آورده شده‌اند. محدوده متغیرها همان مقادیر الگوریتم گروه ذرات هستند و اندازه جمعیت 20، تعداد نمونه‌ها 50، ضریب عملگر برش 0/8 و تعداد نخبه در هر نمو نیز 0/05 جمعیت، در نظر گرفته شده است که این مقادیر بهترین جواب را از بین حالت‌های مختلف ارائه می‌دهند.

3-4- تفسیر نتایج

همان طور که ملاحظه می‌شود الگوریتم گوس-نیوتن در حالت نویز 5dB نتوانسته است همگرا شود. این مشکل به دلیل دور بودن حدس اولیه است. این الگوریتم در مورد نحوه انتخاب حدس اولیه بسیار حساس است و در صورتی که این عمل به خوبی صورت نگیرد، الگوریتم با مشکل روبرو می‌شود و همگرا نخواهد شد و هرچه این حدس دقیق‌تر باشد تعداد تکرار کاهش و در

مدل کردن چندین پژواک حاصل از تعدادی بازتاب‌دهنده بسط داد. با فرض یک پژواک گوسی برای هر بازتابنده، پژواک‌های دریافتی را می‌توان توسط M پژواک به صورت رابطه (3) مدل کرد [1]:

$$y(t) = \sum_{m=1}^M g(\theta_m, t) + p(t) \quad (3)$$

هر کدام از بردارهای پارامتر θ_m ، شکل و موقعیت پژواک مربوطه را بیان می‌کند.

3- تخمین پارامترهای یک پژواک فراصوتی

برای تخمین پارامترهای یک پژواک فراصوتی باید رابطه غیرخطی کمترین مربعات (4) کمینه شود. الگوریتم‌های بهینه‌سازی متفاوتی قابلیت انجام این کار را دارند. در این مقاله از روش‌های بهینه‌سازی گوس-نیوتن، بهینه‌سازی گروه ذرات، الگوریتم ژنتیک و یک روش ترکیبی برای حل این معادله استفاده شده است (رابطه 4).

$$\|y - s(\theta)\|^2 \quad (4)$$

3-1- الگوریتم گوس-نیوتن

این الگوریتم یک روش مبتنی بر گرادیان است که با مشتق‌گیری از معادله موج گوسی بر حسب تک‌تک ضرایب و تشکیل ماتریس هسین¹ مسئله را حل می‌کند. از جمله ویژگی‌های بارز این الگوریتم سرعت همگرایی بالای آن است. از معایب این روش وابستگی آن به حدس اولیه و امکان همگرا شدن به یک نقطه کمینه محلی است [13]. در برخی از موارد روش گوس-نیوتن در تکرارهای ابتدایی ضعیف عمل می‌کند و ممکن است در مجموع در جهتی اشتباه حرکت کرده و میزان تطابق را بدتر کند. با این حال زمانی که این روش در نزدیکی نقطه بهینه باشد؛ به خوبی عمل خواهد کرد. این ویژگی بدین خاطر است که الگوریتم در آن محدوده سطح را به خوبی به صورت یک بیضی تقریب می‌زند [14]. برای ارزیابی عملکرد این الگوریتم یک پژواک شبیه‌سازی شده با مشخصات $\theta = [15 \ 1 \ 7 \ 0/5 \ 1]$ در چهار حالت بدون نویز، با نسبت سیگنال به نویز 10dB، 20dB و 5dB در نظر گرفته شده است. حدس اولیه بردار پارامترهای مورد نیاز برای این الگوریتم نیز $[3/5 \ 2 \ 0/5]$ در نظر گرفته شده است. منحنی‌ها و اطلاعات به دست آمده به ترتیب در شکل 1 و جدول 1 نمایش داده شده‌اند.

3-2- الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات

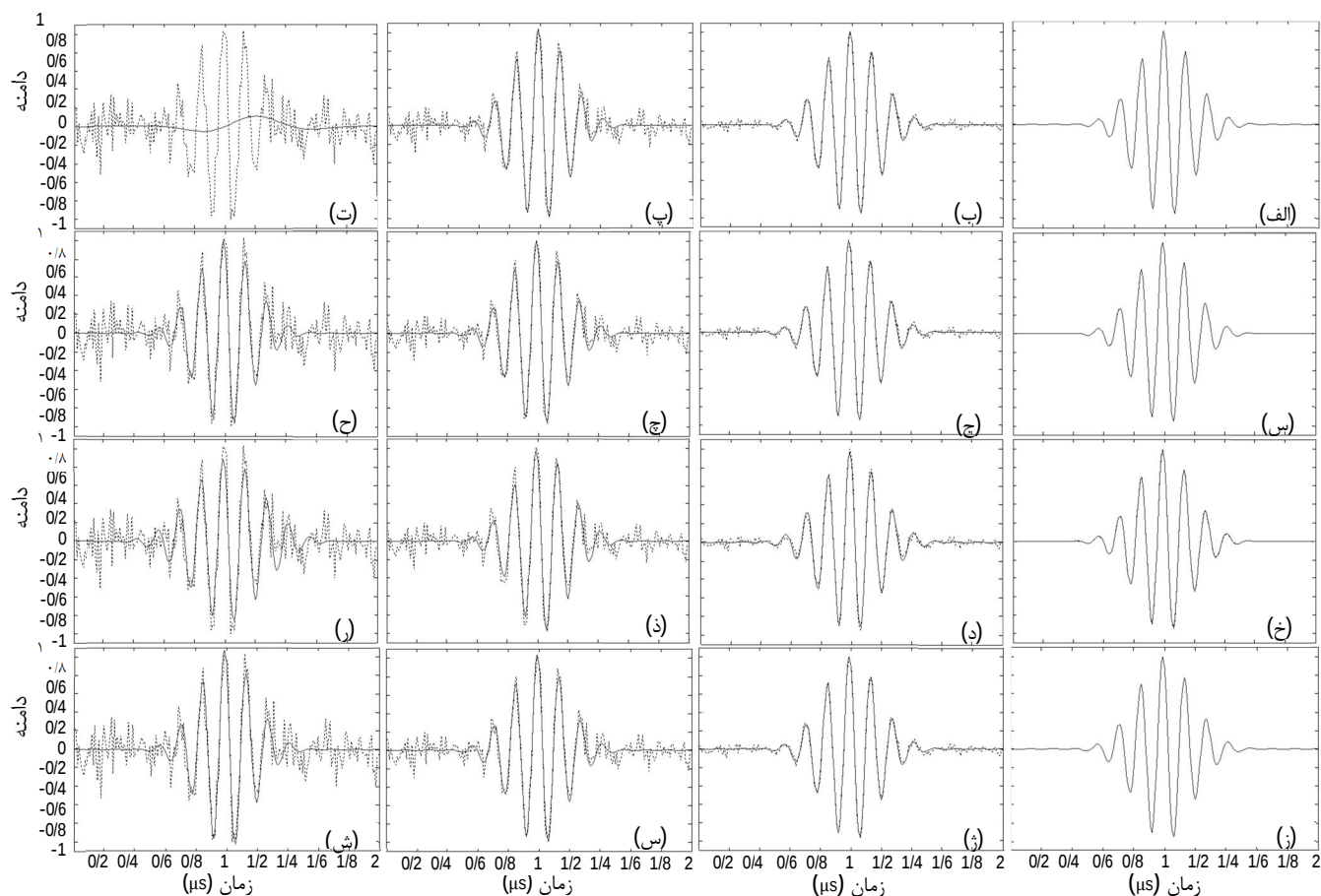
بهینه‌سازی گروه ذرات یک روش بهینه‌سازی اکتشافی است که بر پایه هوش گروهی² برنامه‌ریزی شده است. در این روش در فضای پاسخ تعدادی ذره وجود دارند که هر کدام از آن‌ها یک پاسخ هستند. هر ذره را می‌توان با موقعیت و سرعت کنونی آن ذره، بهترین موقعیت سایر ذرات و بهترین موقعیت در مجموع ذرات همسایگی نشان داد. اساس کار PSO بر این اصل استوار است که در هر لحظه هر ذره مکان خود را در فضای جستجو با توجه به بهترین مکانی که تاکنون در آن قرار گرفته است و بهترین مکانی که در کل همسایگی‌اش وجود دارد، تنظیم می‌کند. سرعت و موقعیت مطابق روابط زیر تغییر می‌کنند [15]:

$$\begin{aligned} v_{id}^{k+1} &= v_{id}^k + c_1 r_1^k (pbest_{id}^k - z_{id}^k) + r_2^k (gbest_{ld}^k - z_{id}^k) \\ z_{id}^{k+1} &= z_{id}^k + v_{id}^{k+1} \end{aligned} \quad (5)$$

در این روابط z_{id}^k و v_{id}^k به ترتیب برابر سرعت و موقعیت ذره id در تکرار k ام

3- Population
4- Chromosome
5- Evolve
6- Generation
7- Fitness
8- Offspring
9- Mutation
10- Elite

1- Hessian
2- Swarm Intelligence



شکل 1 پژواک‌های شبیه‌سازی شده (خط چین) و اکوهای تخمین زده شده (خط ممتد). ستون اول، بدون نویز، ستون دوم، نسبت سیگنال به نویز ZVUB، ستون سوم، نسبت سیگنال به نویز 10dB، ستون چهارم، نسبت سیگنال به نویز 5dB. ردیف اول: گوس-نیوتن (الف تا ت)، ردیف دوم، بهینه‌سازی گروه ذرات (س تا ح)، ردیف سوم، الگوریتم ژنتیک (خ تا ر)، ردیف چهارم، الگوریتم ترکیبی بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن (ز تا ش).

جدول 1 ضرایب تخمین زده شده از پژواک شبیه‌سازی شده توسط الگوریتم‌های گوس-نیوتن، بهینه‌سازی گروه ذرات و الگوریتم ژنتیک و ترکیبی بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن

		β	φ (radian)	f_c (MHz)	τ (μ s)	α (MHz ²)		
زمان محاسبه (ثانیه)	میانگین مربع خطاها	1	0/5	7	1	15	مقادیر واقعی	
		0/5	2	3/5	0/6	35	حدس اولیه برای گوس-نیوتن	
		-1	0	1	0	0	حد بالا و پایین برای PSO و GA	
		1	$\pi/2$	20	2	100		
9/2	-5 E 3/6	-0/990	3/5839	6/9976	0/9938	14/8056	GA	بدون نویز
17/2	-7 E 6/17	1/0000	0/4809	6/9994	0/9996	14/9281	PSO	
0/02	1/7 E -11	1/0000	19/3496	7/0000	1/0000	14/9996	GN	
0/4	6/5 E -14	1/0000	0/5000	7/0000	1/0000	15/0000	PSO+GA	
11/5	2/18 E -5	1/0135	6/7296	7/0028	0/9987	14/8967	GA	مقادیر حاصله
7/1	3/6 E -6	-1	3/6321	7/0042	0/9997	14/8155	PSO	
0/02	1/1 E -5	1/0136	19/3595	7/0007	1/0002	15/1814	GN	
0/4	1/1 E -5	1/0136	6/7931	7/0007	1/0002	15/1816	PSO+GA	
16/5	0/0002	-1/051	3/8799	6/9993	1/0052	15/6198	GA	مقادیر حاصله
4/4	2/5 E -5	1/0000	0/5870	7/0019	1/0018	14/5440	PSO	
0/02	0/0001	1/0431	19/3810	7/0023	1/0005	15/5739	GN	
0/4	0/0001	1/0431	0/5315	7/0023	1/0005	15/5739	PSO+GA	
17/5	0/0003	1/0690	3/7506	7/0017	1/0021	16/0510	GA	مقادیر حاصله
8/4	3/1 E -5	1/0000	0/5356	7/0073	1/0005	14/6232	PSO	
0/05	0/082	0/1099	5/8291	1/1524	1/1578	6/3355	GN	
0/4	0/0003	1/0770	0/5561	7/0043	1/0010	16/0182	PSO+GA	

تمامی M پژواک وضع شده همانند تخمین پارامترهای یک پژواک، نیاز به حل مسأله کمترین مربعات زیر خواهد بود (رابطه 6):

$$\left\| y - \sum_{m=1}^M s(\theta_m) \right\|^2 \quad (6)$$

مسأله بالا یک مسأله با تعداد پارامترهای زیاد (M بردار پارامتر) است که حل این‌گونه از مسایل به صورت مستقیم برای الگوریتم‌های بهینه‌سازی بسیار مشکل و در گاهی موارد همگرایی آن‌ها غیرممکن است. برای رفع این مشکل از روش بیشینه‌سازی امید می‌توان استفاده کرد. توسط این روش سیگنال y به M سیگنال مجزا تجزیه خواهد شد و الگوریتم بهینه‌سازی همواره به دنبال تخمین پارامترهای یک پژواک است. توسط این روش در واقع مسأله به تخمین پارامترهای M پژواک کاملاً مجزا تبدیل می‌شود و در هر زمان الگوریتم مشغول تخمین یک بردار پارامتر است. یک سیگنال فراصوتی با M پژواک به صورت رابطه (7) در نظر گرفته می‌شود:

$$y = \sum_{m=1}^M x_m \quad (7)$$

که در این رابطه x_m به عنوان پژواک گوسی ناشناخته است. برای تعیین x_m طبق مرجع [18] با یک تغییر خطی معادله (7) امید ریاضی آن به صورت رابطه (8) به دست خواهد آمد:

$$\hat{x}_m^{(k)} = s\left(\theta_m^{(p)}\right) + \frac{1}{M}\left(y - \sum_{l=1}^M s\left(\theta_l^{(p)}\right)\right) \quad (8)$$

حال همانند تخمین پارامترهای یک پژواک فراصوتی، پارامترهای $\hat{x}_m^{(k)}$ با حل معادله (9) به دست می‌آید:

$$\left\| \hat{x}_m^{(k)} - s(\theta_m) \right\|^2 \quad (9)$$

بردار پارامتر θ_m ای که باعث کمینه شدن معادله (9) شود به عنوان پاسخ آن پژواک در نظر گرفته خواهد شد. با تکرار این فرایند برای تمامی M پژواک موجود در سیگنال، پارامترهای تمامی پژواک‌ها به صورت تفکیک شده محاسبه خواهند شد. در پی تکرارهای بعدی، در هر گام مقدار $\hat{x}_m^{(k)}$ به مقدار پژواک m نزدیک‌تر شده و در نهایت به آن همگرا خواهد شد. الگوریتم کلی که از آن برای تخمین پارامترها استفاده شده است الگوریتم بیشینه‌سازی امید تعمیم یافته با فضای تناوبی (SAGE)^[1] است [19]. در این الگوریتم نیز نیاز به یک الگوریتم حلگر برای محاسبه معادله (9) خواهد بود. با توجه به نتایج بدست آمده از قسمت قبل، تلفیقی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن مورد استفاده قرار خواهد گرفت. بدین صورت که ابتدا الگوریتم SAGE تحت الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات اجرا خواهد شد و یک جواب کلی که دقت زیادی هم ندارد -ولی نزدیک به جواب نهایی است- بدست خواهد آمد. سپس نقطه بدست آمده از الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات به عنوان حدس اولیه الگوریتم گوس-نیوتن انتخاب خواهد شد و جواب دقیق‌تر بدست خواهد آمد.

4-1- تخمین تعداد پژواک‌های موجود در سیگنال

برای تخمین تعداد پژواک‌های موجود در یک سیگنال می‌توان از الگوریتم حداقل طول توصیف (MDL)^[2] استفاده کرد. در این روش تعداد M ای که به ازای آن مقدار MDL کمینه شود به عنوان تعداد پژواک‌های مورد نیاز تعیین می‌شود. توسط این روش، الگوریتم ابتدا کار خود را با وضع کردن یک پژواک

پی آن سرعت محاسبه افزایش می‌یابد. مزیت روش گوس-نیوتن در سرعت محاسبه بالای آن است. در بعضی موارد حتی در صورت مناسب بودن حدس اولیه نیز الگوریتم قادر به تخمین پارامترها نخواهد شد که این موضوع هم به دلیل نحوه توزیع نویز است که ممکن است سبب به وجود آمدن گوشه‌های تیز شود.

الگوریتم PSO نیز به خوبی توانست این مسأله را حل بکند. این الگوریتم نیاز به حدس اولیه ندارد و به جای آن کار خود را با تعیین بازه هر کدام از متغیرها آغاز می‌کند. همان‌طور که در مثال‌ها هم مشاهده شد، بازه تعیین شده برای پارامترها بسیار گسترده است و نیاز به دقیق بودن آن‌ها نیست. عیب این روش سرعت کند محاسباتی آن در قیاس با روش گوس-نیوتن است.

الگوریتم ژنتیک نیز همانند دو روش قبل ضرایب مربوط به پژواک فراصوتی را تخمین می‌زند. این الگوریتم نیز مانند الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات تنها به تعیین بازه‌های پارامترها نیاز دارد که مقدار آن‌ها نیز بسیار گسترده انتخاب شده‌اند. این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات قدری پیچیده‌تر است و به زمان محاسباتی بیشتری نیاز دارد. البته به دلیل ماهیت تصادفی بودن الگوریتم‌های ژنتیک و بهینه‌سازی گروه ذرات در برخی از مواقع، الگوریتم ژنتیک با سرعت و دقت بیشتری عمل می‌کند؛ ولی به طور کلی در اغلب موارد سرعت و دقت الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات بسیار بالاتر است.

همان‌طور که ملاحظه شد الگوریتم گوس-نیوتن علی‌رغم سرعت بالای محاسبات، در پاره‌ای موارد به جواب نمی‌رسد. همچنین این الگوریتم نیازمند یک بردار حدس اولیه برای شروع کار است که نحوه تعیین مقادیر این بردار تأثیر بسزایی بر نحوه عملکرد الگوریتم دارد. در ضمن این الگوریتم همانند بیشتر الگوریتم‌های مبتنی بر مشتق به جواب‌های محلی حساس است. از سوی دیگر الگوریتم‌های بهینه‌سازی گروه ذرات و ژنتیک نیازی به حدس اولیه ندارند و تنها تعیین بازه هر کدام از متغیرها در یک محدوده کاملاً گسترده برای اعمال الگوریتم کافی است. الگوریتم‌های ژنتیک و گروه ذرات محدودیتی نسبت به دامنه نویزهای اضافه شده ندارند و در مورد تمامی سطوح نویز در نظر گرفته شده، کار خود را به اتمام رساندند (همان‌طور که در مورد مثال در نظر گرفته شده مشاهده شد). از جمله ویژگی‌های بارز این دسته از الگوریتم‌ها مصون بودن آن‌ها از جواب‌های بهینه محلی است. البته به این نکته نیز باید اشاره کرد که الگوریتم‌های ژنتیک و گروه ذرات در مقایسه با الگوریتم گوس-نیوتن هزینه محاسباتی بیشتری دارند.

با توجه به نتایج به دست آمده، هرکدام از الگوریتم‌ها دارای مزایا و معایبی هستند. برای رسیدن به یک نتیجه مطلوب باید معایب الگوریتم‌ها را با مزایای سایر الگوریتم‌ها جایگزین کرد. می‌توان سرعت محاسباتی بالای الگوریتم گوس-نیوتن را با ویژگی عدم وابستگی به حدس اولیه الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات (به دلیل داشتن سرعت و دقت بالاتر نسبت به الگوریتم ژنتیک) تلفیق کرد و به نتیجه مطلوبی رسید. نتایج حاصل از این تلفیق در شکل 1 و جدول 1 آورده شده‌اند. نتایج حاصل بیانگر دقت بالاتر روش ترکیبی و عدم وابستگی آن به حدس اولیه است. سرعت این الگوریتم نیز تقریباً نزدیک به سرعت الگوریتم گوس-نیوتن است.

4- تخمین بیشینه درست‌نمایی چندین پژواک فراصوتی

در صورتی که چندین پژواک فراصوتی در یک سیگنال در نظر گرفته شده باشند، رابطه مربوطه مطابق معادله (4) خواهد بود. برای تخمین پارامترهای

1- Space Alternating Generalized Expectation Maximization
2- Minimum Description Length

آغاز می‌کند و در انتها مقدار MDL با معادله (10) محاسبه می‌شود [20]:

$$MDL(M) = (\mu M + 1) \log \frac{E}{N} \quad (1)$$

در این رابطه μ تعداد مجهولات (در اینجا برابر 5)، E خطای میانگین مربعات و N هم تعداد نقاط سیگنال است. N و μ ثابت هستند و فقط E و M در هر تکرار تغییر می‌کند. با افزایش M مقدار E قطعاً کاهش پیدا می‌کند ولی این اصل به دنبال پیدا کردن حالتی است که کمترین خطا توسط کمترین تعداد پژواک M بدست آید.

در تکرار اول الگوریتم، پس از محاسبه MDL مربوطه، مقدار M به دو تغییر می‌کند و الگوریتم کار خود را این بار با $M=2$ تکرار می‌کند. مجدداً در انتهای الگوریتم، MDL مربوط به این حالت نیز محاسبه می‌شود و با مقدار قبلی آن مقایسه می‌شود. در صورتی که مقدار MDL کاهش پیدا کرده باشد، M به $M+1$ تغییر پیدا می‌کند و مجدداً الگوریتم با تعداد M جدید تکرار می‌شود. در غیر این صورت مقدار M تعداد صحیح پژواک‌ها بوده و الگوریتم متوقف می‌شود. روند نهایی اجرای الگوریتم SAGE به صورت زیر است:

گام اول: بازه متغیرها را مشخص کن و مقدار M را برابر 1 قرار بده.

گام دوم: مقدار m را برابر 1 قرار بده.

گام سوم: مقدار امید پژواک m را محاسبه کن (توسط معادله (8) (از میانگین بازه‌ها برای محاسبه سیگنال امید استفاده می‌شود).

گام چهارم: توسط الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات مقادیر پارامترهای سیگنال محاسبه شده در گام قبل را محاسبه کن.

گام پنجم: m را به $m+1$ تغییر بده و به گام سوم بازگرد مگر اینکه $m > M$.

گام ششم: بردار پارامترهای بدست آمده از گام‌های قبل را به عنوان حدس اولیه الگوریتم گوس-نیوتن در نظر بگیر.

مقدار p (تکرار) و m (شمارنده پژواک) را برابر 1 قرار بده.

گام هفتم: مقدار امید m را توسط معادله (8) محاسبه کن.

گام هشتم: توسط الگوریتم گوس-نیوتن مقادیر پارامترهای امید m را محاسبه کن و با مقدار قبلی جایگزین کن.

گام نهم: m را به $m+1$ تغییر بده و به گام هفتم بازگرد مگر اینکه $m > M$.

گام دهم: نرم بردار پارامترهای محاسبه شده و بردار حاصل از تکرار قبل را محاسبه و با مقدار آستانه از قبل تعیین شده مقایسه کن و مادامی که بیش از حد تعیین شده باشد، با قرار دادن $m=1$ و $p=p+1$ به گام هفتم بازگرد.

گام یازدهم: مقدار MDL را محاسبه کن و با مقدار قبلی آن مقایسه کن. در صورتی که $M=1$ و یا MDL روند نزولی داشته باشد، M را به $M+1$ تغییر بده و به گام دوم بازگرد.

2-4- اعمال الگوریتم SAGE بر سیگنال‌های شبیه‌سازی شده و تجربی

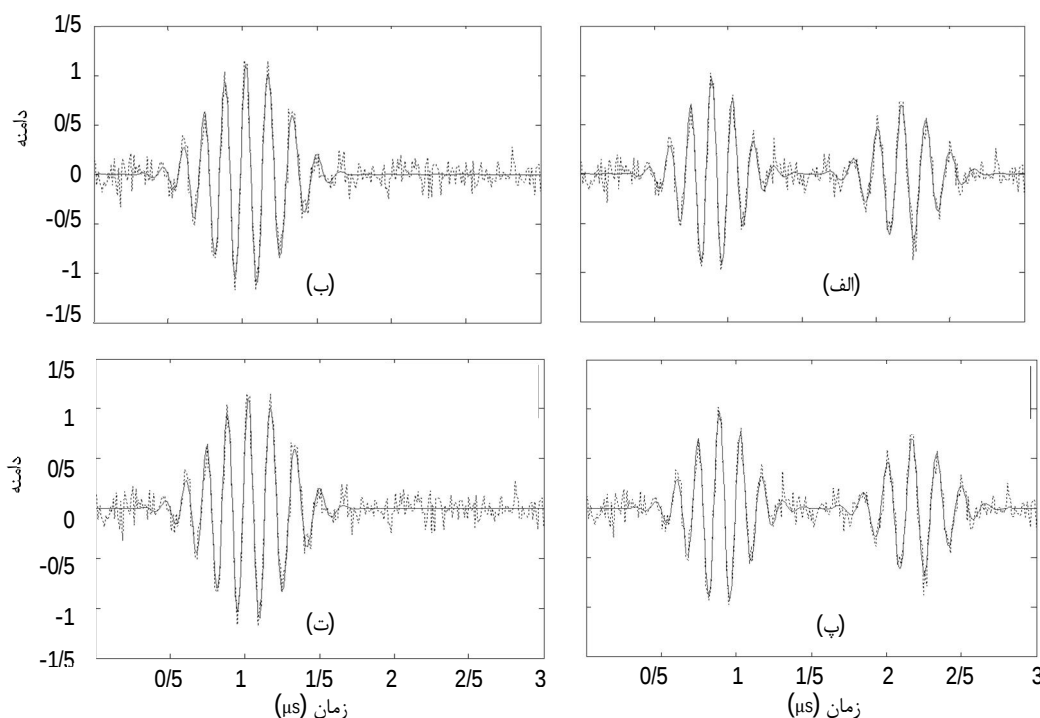
در این قسمت با در نظر گرفتن دو پژواک گوسی شبیه‌سازی شده در دو حالت بدون همپوشانی و با همپوشانی و اضافه کردن نویز 10 dB، الگوریتم معرفی شده در قسمت قبل با الگوریتم SAGE ای که تنها از گوس-نیوتن به عنوان حلگر استفاده می‌کند مقایسه می‌شود. نتایج حاصل در جدول 2 و شکل 2 آورده شده‌اند.

در مواقعی که تعداد پژواک‌ها مشخص نباشد و توسط الگوریتم MDL این مقدار تعیین شود نیز وابستگی الگوریتم گوس-نیوتن به حدس اولیه بیشتر از قبل هم می‌شود. برای بررسی نحوه عملکرد الگوریتم SAGE در مورد مسائل واقعی، این الگوریتم بر روی دو سیگنال فراصوتی آزمایشی حاصل از آزمایش فراصوتی بازتابی² توسط یک تراگذار فراصوتی عمودی 4MHz و نرخ نمونه‌برداری 100 نمونه در ثانیه در دو حالت اکوهای بدون همپوشانی و اکوهای با همپوشانی اعمال شدند که نتایج حاصل در شکل 3 و جدول 3 آورده شده‌اند.

همان طور که ملاحظه می‌شود الگوریتم ترکیبی تنها با تعیین یک بازه کلی تقریباً با سرعت و دقتی مشابه الگوریتم گوس-نیوتن موفق به تخمین جواب نهایی شده است.

جدول 2 مقادیر به دست آمده از پژواک‌های با نویز 10 dB در دو حالت اکوهای با همپوشانی و بدون همپوشانی توسط دو الگوریتم SAGE مبتنی بر گوس-نیوتن و

				SAGE		میتنیم بر الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات گوس-نیوتن.			
				0/5		1			
				1/2		2/2		15	
				0/87		6/5		12	
				1/7		1/83		25	
				0/5		1		0	
				2		10		30	
				0/8959		7/0191		14/4601	
				2/1962		6/0498		12/3896	
				0/9251		7/1641		12/0047	
				1/2508		6/1619		18/6419	
				0/8959		7/0191		14/4606	
				2/1962		6/0498		12/3876	
				0/9190		7/1501		12/4003	
				1/2440		6/1380		17/6992	



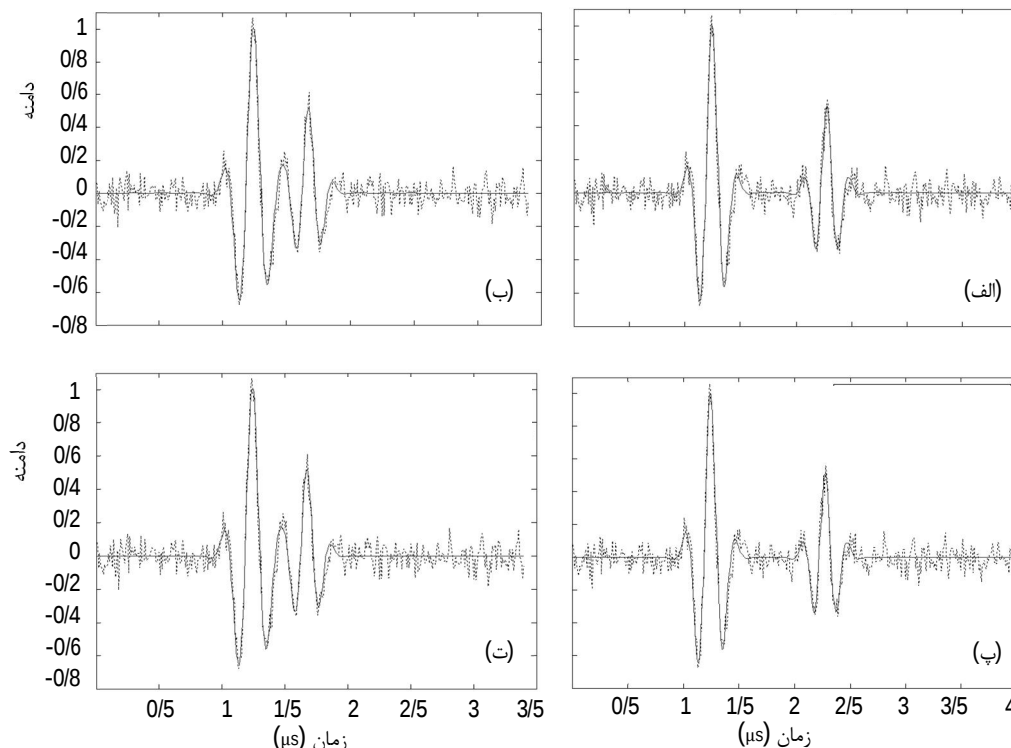
شکل 2 تخمین پارامترهای پژواک‌های با نویز 10 dB در دو حالت بدون همپوشانی (الف و پ) و با همپوشانی (ب و ت) توسط الگوریتم SAGE مبتنی بر الگوریتم گوس-نیوتن (الف و ب) و الگوریتم SAGE مبتنی بر الگوریتم‌های بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن (پ و ت)
جدول 3 مقادیر حاصل از تخمین پارامترهای سیگنال‌های فراصوتی آزمایشی در دو حالت بدون همپوشانی و دارای همپوشانی توسط دو الگوریتم SAGE مبتنی بر گوس-نیوتن و SAGE مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن.

زمان	تعداد محاسبه	میانگین مربع خطاها	β	$\varphi(\text{radian})$	$f_c(\text{MHz})$	$\tau(\mu\text{s})$	$\alpha(\text{MHz}^2)$		
			1	0	4	1/29	30	حدس اولیه برای گوس-نیوتن	
			1	0	4	2/3	30		
			0	0	1	0/5	1	0	
			1	2π	10	2/5	30	حد بالا و پایین	
0/24	22	0/0042	1/0128	-0/2160	4/1359	1/2372	38/9151	بدون همپوشانی	GN
			0/5197	-0/0174	4/6565	2/2766	41/2576		
0/24	33	0/0048	1/0147	-0/2359	4/1440	1/2363	39/2505	دارای همپوشانی	PSO+ GN
			0/5238	-6/3726	4/8801	1/6740	51/0744		
1	23	0/0042	1/0128	6/0672	4/1359	1/2372	38/9148	بدون همپوشانی	
			0/5197	6/2658	4/6565	2/2766	41/2578		
1/3	55	0/0048	1/0147	-0/2360	4/1440	1/2363	39/2532	دارای همپوشانی	
			0/5238	18/7600	4/8802	1/6740	51/0692		

الگوریتم MDL هم برای تعیین تعداد پژواک‌های فراصوتی موجود در سیگنال مورد استفاده قرار گرفت. بسته به حلگر مورد استفاده، قابلیت این حالت نیز متفاوت بود. همانند حالت تک پژواک، با تلفیق دو الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن یک الگوریتم ترکیبی حاصل شد که نقایص هر کدام از الگوریتم‌ها با مزیت الگوریتم دیگر جایگزین شد. الگوریتم‌های معرفی شده روی سیگنال‌های فراصوتی آزمایشی در دو حالت اکوهای بدون همپوشانی و اکوهای با همپوشانی نیز بررسی شدند که جواب‌های خوبی به دست آمد. از آنجا که شکل پوش پژواک گوسی در نظر گرفته شده کاملاً متقارن است، امکان برازش کامل پژواک محاسبه شده به پژواک‌های آزمایشی وجود نداشت. در صورت استفاده از یک مدل غیرمتقارن قطعاً دقت نتایج افزایش خواهد یافت.

5- نتیجه‌گیری

برای تخمین ضرایب پژواک‌های فراصوتی که توسط پالس گوسی مدل‌سازی می‌شوند از دو دسته الگوریتم استفاده شد. دسته اول الگوریتم‌های مبتنی بر محاسبه مشتق، از جمله الگوریتم گوس-نیوتن بود. دسته دوم الگوریتم‌های برگرفته از طبیعت بودند. در این قسمت دو الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی گروه ذرات بررسی شدند که الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات به خاطر سادگی، سرعت همگرایی بالاتری داشت. با تلفیق مزایای این دو الگوریتم بهینه‌سازی گروه ذرات و گوس-نیوتن جواب‌های دقیق‌تری با حدس‌های اولیه پراکنده به دست آمد. برای تخمین پارامترهای چندین پژواک نیز از الگوریتم SAGE که حالت تعمیم یافته الگوریتم بهینه‌سازی امید است استفاده شد.



شکل 3 تخمین پارامترهای سیگنال فراصوتی در دو حالت بدون همپوشانی (الف و پ) و با همپوشانی (ب و ت) توسط الگوریتم SAGE مبتنی بر الگوریتم گوس-نیوتن (الف و ب) و الگوریتم SAGE مبتنی بر الگوریتم‌های بهینه‌سازی ذرات و گوس-نیوتن (پ و ت)

6- فهرست علائم

c_1 و c_2	ضرایب یادگیری
d	شمارنده جهت در الگوریتم بهینه‌سازی ذرات
E	خطای میانگین مربعات
f_c	فرکانس مرکزی (MHz)
g	پژواک گوسی بدون نویز
g_{best}	مکان بهترین ذره در جمعیت فعلی
i	شمارنده ذره
k	شمارنده تکرار الگوریتم بهینه‌سازی ذرات
M	تعداد پژواک‌های موجود در سیگنال
m	شمارنده پژواک
N	تعداد نقاط سیگنال
p	شمارنده تکرار الگوریتم
p_{best}	مکان بهترین مقدار شایستگی
r_1 و r_2	اعداد تصادفی
s	سیگنال محاسبه شده
t	بردار زمان
v	سرعت ذره
x	پژواک گوسی با نویز گوسی سفید
$\hat{x}$	امید ریاضی سیگنال y
y	سیگنال حاصل از پژواک‌های گوسی و نویز گوسی سفید
z	موقعیت ذره

علائم یونانی

α	فاکتور پهنای باند (MHz^2)
β	دامنه
θ	بردار متغیرها
μ	تعداد مجهولات
ρ	نویز گوسی سفید
τ	زمان رسیدن (μs)
φ	فاز (رادیان)

7- مراجع

- [1] R. Demirli, J. Saniie, Model-based estimation of ultrasonic echoes. Part I: Analysis and algorithms, *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, IEEE Transactions on, Vol. 48, No. 3, pp. 787-802, 2001.
- [2] R. Zahiri-Azar, S. E. Salcudean, Time-delay estimation in ultrasound echo signals using individual sample tracking, *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, IEEE Transactions on, Vol. 55, No. 12, pp. 2640-2650, 2008.
- [3] F. Honarvar, M. Iran-Nejad, A. Gholami, A. Sinclair, Estimation of Uncertainty in Ultrasonic Thickness Gauging and Improvement of Measurements by Signal Processing, *Annual Conference*, Canadian Institute of Nondestructive Evaluation (CINDE), 2014.
- [4] R. Demirli, J. Saniie, Model-based estimation of ultrasonic echoes. Part II: Nondestructive evaluation applications, *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, IEEE Transactions on, Vol. 48, No. 3, pp. 803-811, 2001.
- [5] Y. Lu, R. Demirli, J. Saniie, A Comparative Study of Echo Estimation Techniques for Ultrasonic NDE Applications, in *Ultrasonics Symposium*, 2006. IEEE, pp. 436-439, 2006.

- [13] A. Antoniou, W.-S. Lu, *Practical optimization: algorithms and engineering applications*: Springer, 2007.
- [14] H. J. Motulsky, L. A. Ransnas, Fitting curves to data using nonlinear regression: a practical and nonmathematical review, *The FASEB journal*, Vol. 1, No. 5, pp. 365-374, 1987.
- [15] Q. Bai, Analysis of particle swarm optimization algorithm, *Computer and information science*, Vol. 3, No. 1, pp. p180, 2010.
- [16] R. C. Eberhart, J. Kennedy, A new optimizer using particle swarm theory, in *Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science*, pp. 39-43, 1995.
- [17] R. L. Haupt, S. E. Haupt, *Practical genetic algorithms*: John Wiley & Sons, 2004.
- [18] M. Feder, E. Weinstein, Parameter estimation of superimposed signals using the EM algorithm, *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 36, No. 4, pp. 477-489, 1988.
- [19] J. A. Fessler, A. O. Hero, Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 42, No. 10, pp. 2664-2677, 1994.
- [20] M. Wax, I. Ziskind, Detection of the number of coherent signals by the MDL principle, *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol. 37, No. 8, pp. 1190-1196, 1989.
- [6] T. Olofsson, T. Stepinski, Maximum a posteriori deconvolution of sparse ultrasonic signals using genetic optimization, *Ultrasonics*, Vol. 37, No. 6, pp. 423-432, 1999.
- [7] M. R. Hoseini, X. Wang, M. J. Zuo, Estimating ultrasonic time of flight using envelope and quasi maximum likelihood method for damage detection and assessment, *Measurement*, Vol. 45, No. 8, pp. 2072-2080, 2012.
- [8] N. Alamelumangai, J. DeviShree, PSO aided neuro fuzzy inference system for ultrasound image segmentation, *International Journal of Computer Applications*, Vol. 7, No. 14, 2010.
- [9] M. Hajian, F. Honarvar, Reflectivity estimation using an expectation maximization algorithm for ultrasonic testing of adhesive bonds, *Materials Evaluation*, Vol. 69, No. 2, pp. 208-219, 2011.
- [10] M. Grimes, A. Bouhadjera, S. Haddad, T. Benkedidah, In vitro estimation of fast and slow wave parameters of thin trabecular bone using space-alternating generalized expectation-maximization algorithm, *Ultrasonics*, Vol. 52, No. 5, pp. 614-621, 2012.
- [11] L. Satyanarayan, K. Bharath Kumaran, C. Krishnamurthy, K. Balasubramaniam, Inverse method for detection and sizing of cracks in thin sections using a hybrid genetic algorithm based signal parametrisation, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 49, No. 2, pp. 185-198, 2008.
- [12] J. Ganguly, M. Ghosh, Influence of Gaussian white noise on the frequency-dependent linear polarizability of doped quantum dot, *Chemical Physics*, Vol. 438, pp. 75-82, 2014.