



رشد ترک خستگی در اجسام تحت تماس غلتشی در اثر چندین بار متحرک

امیررضا شاهانی^{1*}، رضا دواچی²

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* shahani@kntu.ac.ir، 19395-1999

چکیده

اطلاعات مقاله

یاتاقان‌های غلتشی یکی از اجزای مهم در ماشین‌آلات دوار هستند که تحت اثر خستگی تماس غلتشی قرار دارند لذا جهت تخمین بهتر عمر باقیمانده‌ی این اجزا مدلی با در نظر گرفتن چندین بار متحرک بر مبنای مکانیک شکست خطی ارائه شده است. در نظر گرفتن اثر چند بار متحرک در این مدل نکته‌ی مهمی است که در مراجع در نظر گرفته نشده است. سطح در تماس با یک نیم صفحه‌ی بی‌نهایت دارای یک ترک لبه‌ای مدل گردیده است. تماس سیکی غلتشی نیز با حرکت یک توزیع بار بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت شبیه‌سازی شده است. محاسبات مسیر ترک و ضرایب شدت تنش به کمک روش گام به گام بر مبنای معادلات انتگرالی منفرد انجام گردیده است. اثر ضریب اصطکاک و در نظر گرفتن دو بار متمرکز متحرک بر روی مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف ترک اولیه نسبت به مرز نیم صفحه و عمر باقیمانده‌ی سطح تحت خستگی تماس غلتشی برای فولاد 75XΓCT مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصل از این تحلیل با نتایج مدل قبلی مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به نتایج به‌دست آمده برای عمر باقیمانده مشخص است که با افزایش تعداد بارهای تماسی متحرک بر روی سطح تماس مقدار عمر باقیمانده کاهش پیدا کرده و به حالت واقعی نزدیک‌تر می‌گردد، همچنین با افزایش ضریب اصطکاک عمر باقیمانده کاهش می‌یابد.

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 19 شهریور 1393
پذیرش: 06 آذر 1393
ارائه در سایت: 04 بهمن 1393
کلید واژگان:
تماس غلتشی
عمر باقیمانده
مکانیک شکست خطی
روش گام به گام
معادلات انتگرالی منفرد

Fatigue crack growth in bodies under rolling contact with multiple moving loads

Amir RezaShahani*, Reza Davachi

Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran. shahani@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 September 2014
Accepted 27 November 2014
Available Online 24 January 2015

Keywords:
Rolling Contact
Remaining Life
Linear Fracture Mechanics
Step-by-Step Process
Singular Integral Equations

ABSTRACT

Rolling bearings is one of the important elements in rotating machinery that are under rolling contact fatigue, so for better estimation of remaining life of these elements a model which is considered multiple moving loads based on the linear fracture mechanics has been proposed. Considering the effect of the multiple moving loads is a key element of this model that is not considered in literature. The contact surface is modeled by a half-plane with an edge crack. Rolling contact is simulated by moving a load distribution on the boundary of a half-plane. The calculation of the crack path and stress intensity factors is carried out by the step-by-step process on the basis of the singular integral equations method. The effect of the friction coefficient and considering two concentrated moving load on the crack growth path for different angles between the initial crack and boundary of the half-plane and remaining life of a surface under the fatigue rolling contact for 75XΓCT steel is analyzed. The results of this analysis are compared with results from a previous model. According to the results of the remaining life obtained by increasing the numbers of moving loads on the contact surface, the remaining life decrease and become closer to the real state. Furthermore, the remaining life decreases with increasing friction coefficient.

1- مقدمه

تماس غلتشی باعث ایجاد ترک در اجسام تحت تماس می‌گردد به همین دلیل بررسی رشد ترک در اجسام تحت تماس غلتشی از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. برای اولین بار در سال 1935 وی به صورت آزمایشگاهی به بررسی ترک‌های ناشی از خستگی تماس غلتشی پرداخته است [1]. او مشاهده کرد که رشد این ترک‌ها دارای دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول ترک تحت مود برشی و به‌صورت خطی تحت زاویه 10 تا 30 درجه نسبت به سطح غلتشی رشد می‌کنند. در مرحله دوم ترک تحت مود بازشوندگی و به‌صورت منحنی

چرخ‌دنده‌ها، یاتاقان‌ها و چرخ‌های ریل راه‌آهن مثال‌هایی از اجسام دوار هستند که تحت بارگذاری تماسی قرار دارند. این اجسام به‌طور گسترده در ماشین‌های دوار مورد استفاده قرار می‌گیرند و از حساس‌ترین عضوهای این ماشین‌آلات می‌باشند. اگر در این اجسام از دیگر حالت‌های خرابی¹ جلوگیری شود، نهایتاً خستگی تماس غلتشی² باعث خرابی آن‌ها می‌گردد. خستگی

1- Failure Modes
2- Rolling Contact Fatigue

رشد ترک به گام¹ جهت ایجاد مسیر رشد ترک [10,9] بر مبنای روش معادلات انتگرالی منفرد مورد استفاده قرار گرفته است. جسم تحت تماس غلتشی نیز با یک نیم صفحه بی نهایت دارای یک ترک لبه ای مدل گردیده است. تماس سیکیلی غلتشی نیز با حرکت یک توزیع بار معادل با تماس (بار متمرکز، توزیع بیضوی و...) بر روی مرز نیم صفحه بی نهایت مدل سازی شده است. با در نظر گرفتن دو گام مستقل (یکی برای حرکت توزیع بار بر روی مرز نیم صفحه بی نهایت و دیگری برای رشد ترک) در حل مسئله امکان در نظر گرفتن توزیع تنش مربوط به رشد ترک و حرکت ناحیه تماس فراهم شده است. نتایج عددی حاصل از تحلیل برای زمانی که جسم تحت یک بار متمرکز مماسی $\sigma_{\theta\theta}$ به عنوان معیار شکست محلی انتخاب و نرخ رشد ترک براساس رابطی پاریس محاسبه گردیده است. مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف ترک اولیه نسبت به مرز نیم صفحه بدست آمده و عمر باقیمانده ی سطح تحت خستگی تماس غلتشی برای فولاد 75XГСТ محاسبه گردیده است. نتایج به دست آمده حاصل از این تحلیل با نتایج داتسیشین و همکارانش [5] مورد مقایسه قرار گرفته است.

2- مدل محاسبه ی عمر باقیمانده ی سطح تحت خستگی تماس غلتشی

در یاتاقان های غلتشی با آگاهی از میزان باری که به یاتاقان وارد می گردد، می توان نحوه ی توزیع بار خارجی وارد بر یاتاقان را در میان عضوهای غلتشی محاسبه نمود. برای این منظور، لازم است تا رابطه ی بین بار و جابجایی برای المان های غلتشی استخراج گردد. در یاتاقان های غلتشی، معمولاً رینگ داخلی یا خارجی (گاهی اوقات هر دو رینگ) دارای چرخش پایداری می باشند. در اکثر مواقع، شرایط کاری یاتاقان های غلتشی به گونه ای می باشد که این سرعت چرخش به اندازه ای بزرگ نیست تا بر روی توزیع بار خارجی بر روی المان های غلتشی تأثیر بگذارد. همچنین، نیروهای اصطکاکی و ممان هایی که بر روی المان های غلتشی عمل می کنند نیز در بیشتر کاربردها، بر روی توزیع بار بین المان های غلتشی تأثیر قابل توجهی نمی گذارند. در نتیجه در بیشتر موارد می توان توزیع بار داخلی یاتاقان های غلتشی را به صورت استاتیکی و با استفاده از روابط بار-جابجایی محاسبه نمود.

در حالت کلی رابطه ی بین جابجایی یا تغییر شکل ناحیه تماس و نیروی عمودی بین رینگ یاتاقان و المان های غلتشی به صورت رابطه (1) بیان می گردد [6]:

$$Q = K\delta^n \quad (1)$$

که در آن Q نیروی عمودی بین رینگ یاتاقان و المان های غلتشی، δ جابجایی یا تغییر شکل ناحیه تماس و n برای بلبرینگ ها برابر $3/2$ و برای رولبرینگ ها برابر $10/9$ می باشند. موقعیت المان غلتشی قبل از بارگذاری در شکل 1 نشان داده شده است.

برای یک یاتاقان غلتشی با پایه نگه دارنده ی صلب که تحت بار شعاعی قرار گرفته است، میزان جابجایی شعاعی در هر موقعیت زاویه ای المان غلتشی به صورت رابطه (2) می باشد [6]:

$$\delta_\psi = \delta_r \cos \psi - \frac{1}{2} p_d \quad (2)$$

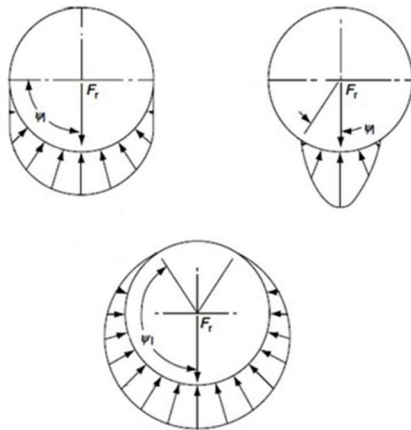
در این رابطه ψ موقعیت زاویه ای المان غلتشی بوده که در شکل 2 مشخص گردیده است. δ_r میزان جابجایی شعاعی رینگ است که در زاویه ψ رخ

شکل رشد می کند. از آن زمان به بعد تحقیقات تئوری و آزمایشگاهی بسیاری در مورد جوانه زنی و رشد ترک در اجسام تحت خستگی تماس غلتشی صورت گرفته است. در تحقیقات تئوری، توجه اصلی معطوف به تحلیل عددی ضرایب شدت تنش بوده و کمتر به تعیین عمر باقیمانده اجسام تحت تماس غلتشی پرداخته شده است. بریانت و همکارانش در سال 1982 اولین مدل قطعی-پژوهشی را جهت تخمین عمر اجسام تحت بارگذاری تماسی غلتشی دارای ترک سطحی ارائه نموده اند [2]. در این مدل از نتایج تجربی وی استفاده گردیده است. آن ها رشد ترک در مرحله ی اول را مدل سازی نموده و فرض کرده اند که ترک تحت مود برشی و به صورت خط رشد می نماید. در این مدل مسئله تماس غلتشی به صورت دو بعدی مدل شده و از معادلات انتگرالی منفرد و توابع توزیع نابجایی جهت تخمین عمر استفاده گردیده است. مدل ارائه شده توسط بریانت و همکارانش پایه و اساس مدل های قطعی-پژوهشی دیگر به منظور تخمین عمر اجسام تحت تماس غلتشی قرار گرفته است. آن ها همچنین در [3] به ارائه ی مدلی دیگر در این زمینه پرداخته و در [4] به بررسی مسئله ی تماس خطی در تماس یک گوه با یک جسم الاستیک پرداخته اند.

معادلات انتگرالی منفرد اغلب جهت بیان حالت تنش در اجسام الاستیک حاوی ترک مورد استفاده قرار می گیرند. همان طور که بیان گردید در تحقیقات تئوری توجه اصلی معطوف به تحلیل عددی ضرایب شدت تنش در اجسام دوار جهت تخمین عمر می باشد. جهت بررسی این پارامترها استفاده از مدل ها و روش های مختلفی مرسوم است. در این مدل ها اثر تماس بر روی اجسام در گردش به وسیله ی نیروهای تماسی هرتزی همراه با مؤلفه های مماسی در نظر گرفته می شوند. جسم تحت تماس نیز با یک نیم صفحه حاوی ترک لبه ای مدل می گردد.

داتسیشینو همکارانش [5] مدلی را جهت تخمین عمر باقیمانده ی اجسام تحت خستگی تماس غلتشی ارائه کرده اند. در این مدل جسم تحت تماس به صورت یک نیم صفحه حاوی ترک لبه ای مدل شده و بارگذاری تماسی به صورت یک بار متحرک بر روی مرز نیم صفحه در نظر گرفته شده است. در این مدل از معادلات انتگرالی منفرد جهت مدل سازی مسئله و تخمین عمر خستگی استفاده شده است. یاتاقان های غلتشی از مهم ترین اجزای به کار رفته در ماشین آلات دوار می باشند، به همین دلیل تعیین عمر باقیمانده ی این اجزا از موضوعات مهم در مباحث مربوط به ماشین آلات دوار می باشد. هریس [6] توضیحات گسترده ای را در مورد نحوه بارگذاری در اجزای دوار در تماس در یاتاقان های غلتشی آورده است. در هنگام بارگذاری یک یاتاقان غلتشی، بیش از یک المان غلتشی تحت بار قرار خواهد گرفت؛ بنابراین جهت تخمین دقیق تر عمر یاتاقان و مدل سازی ریاضی واقعی تر مسئله، لازم است همه ی المان های غلتشی تحت بار در مدل ریاضی مسئله لحاظ گردند. تا به حال در مراجع مدلی جهت تخمین عمر باقیمانده ی اجزای دوار در تماس با در نظر گرفتن چندین بار متحرک تماسی ارائه نشده است.

با توجه به توضیحات داده شده در مورد نحوه ی بارگذاری در اجزای دوار در تماس در یاتاقان های غلتشی در این مقاله مدلی مشابه مدل داتسیشینو و همکارانش جهت بررسی اثر در نظر گرفتن چندین بار متحرک بر روی مسیر رشد ترک و عمر باقیمانده ی اجسام تحت خستگی تماس غلتشی ارائه گردیده است. این مدل، مدلی دو بعدی جهت تخمین عمر باقیمانده این اجسام می باشد. نکته مهم در این مدل نحوه ایجاد مسیر رشد ترک در جسم حاوی ترک است. در این مدل دیدگاه مکانیک شکست در بارگذاری سیکیلی [8,7] و

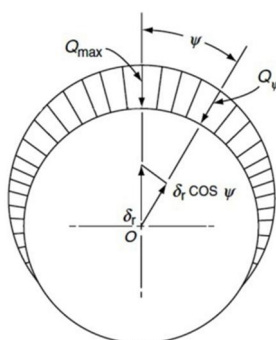


شکل 3 توزیع بار شعاعی برای ϵ های مختلف [6]

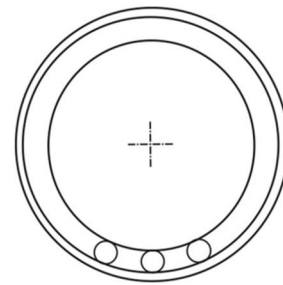
المان‌های غلشی را محاسبه نمود، جزئیات بیشتر در این زمینه در مرجع [6] موجود می‌باشد. در شکل 4 توزیع بار بین المان‌های غلشی برای یک یاتاقان تحت بارگذاری ترکیبی نشان داده شده است.

با توجه به توضیحات ارائه شده درباره‌ی نحوه‌ی توزیع بار بین المان‌های غلتشی مشاهده می‌گردد که در یک یاتاقان غلتشی، بیش از یک المان غلتشی تحت بار قرار خواهد گرفت؛ بنابراین جهت تخمین دقیق‌تر عمر یاتاقان و مدل‌سازی ریاضی واقعی‌تر مسئله، لازم است همه‌ی المان‌های غلتشی تحت بار در مدل ریاضی مسئله لحاظ گردند. به همین منظور، هریک از این المان‌های غلتشی با یک بارگذاری تماسی (تماس هرتزی) بر روی رینگ مدل‌سازی شده‌اند. در نتیجه در مدل ارائه شده، دو بارگذاری تماسی متحرک بر روی مرز نیم صفحه در نظر گرفته شده است که جهت تخمین دقیق‌تر عمر می‌توان تعداد بارگذاری بیشتری نیز در نظر گرفت.

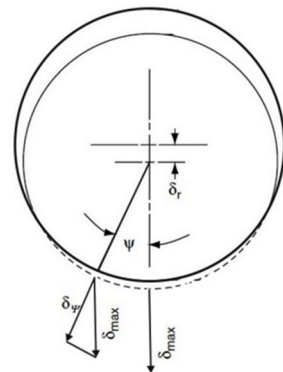
در مدل ارائه شده روابط ضرایب شدت تنش بر مبنای مکانیک شکست الاستیک خطی استخراج و مسئله با استفاده از معادلات آننگرالی منفرد حل شده است. با فرض ایجاد کندگی ناشی از ترک‌های سطحی به عنوان مود اصلی واماندگی و با توجه به این‌که ابعاد ترک و ناحیه تماس در مقایسه با شعاع انحنای سطح جسم تحت تماس سیکیلی غلظتی کوچک می‌باشد، جسم تحت تماس غلظتی با یک نیم‌صفحه‌ی بی‌نهایت دارای یک ترک لبه‌ای مدل گردیده است. تماس سیکیلی غلظتی نیز با در نظر گرفتن یک توزیع بار متحرک معادل با تماس (بار متمرکز، توزیع بیضوی و...) بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت مدل‌سازی شده است. در این مدل با فرض دو گام مستقل (یکی جهت حرکت توزیع بار بر روی مرز نیم صفحه بی‌نهایت و دیگری برای رشد ترک) در حل مسئله امکان در نظر گرفتن توزیع تنش مربوط به رشد ترک و حرکت ناحیه تماس فراهم شده است. مدل فیزیکی ساده‌سازی شده‌ی



شکل 4 توزیع بار بین المان‌های غلتشی، برای یک پاتاقان تحت بارگذاری ترکیبی [6]



شکل 1 رینگ یاتاقان قبل از بارگذاری [6]



شکل 2 تغییر شکل رینگ یاتاقان بعد از بارگذاری [6]

می دهد. همچنین، P_d مقدار لقی یاتاقان می باشد.

معادله‌ی (2) را می‌توان براساس بیش‌ترین مقدار جابجایی بیان نمود [6]:

$$\delta_\psi = \delta_{\max} [1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi)] \quad (3)$$

که در آن:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \frac{P_d}{2\delta_r}) \quad (4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (2) می‌توان محدوده‌ی زاویه‌ای که ناحیه‌ی بار در آن قرار دارد را تعیین نمود[6]:

$$\psi_l = \cos(\frac{P_d}{2\delta_r})^{-1} \quad (5)$$

همچنین از رابطه‌ی (1) مقدار بار در هر زاویه براساس بیش‌ترین تغییر مکان، تغییر مکان شعاعی در هر زاویه و ماکزیمم بار وارده به گلتنده به‌صورت رابطه (6) قابل محاسبه می‌باشد [6]:

$$\frac{Q_{\psi}}{Q_{\max}} = \left(\frac{\delta_{\psi}}{\delta_{\max}}\right)^n \quad (6)$$

در نهایت می‌توان با ترکیب معادلات (2) و (6) توزیع بار بر روی المان‌های غلتشی را به صورت رابطه (7) تعیین نمود [6]:

$$Q_\psi = Q_{\max} [1 - \frac{1}{2_\varepsilon} (1 - \cos \psi)]^n \quad (7)$$

پارامتر $Q_{\max}$ با استفاده از مقدار بار شعاعی خارجی و با در نظر گرفتن شرایط تعادل استاتیکی، محاسبه می‌گردد [6]:

$$F_r = ZQ_{\max} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_l}^{+\psi_l} \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right]^n \cos \psi \, d\psi \quad (8)$$

توزیع بار شعاعی خارجی در شکل 3 برای چندین ε مختلف نشان داده شده است.

در حالتی که یاتاقان غلشی تحت ترکیبی از بارگذاری شعاعی و محوری قرار داشته باشد نیز به شیوه‌ای مشابه می‌توان نحوه‌ی توزیع بار بین

$$K_{\max} = \max(|K_{\max}|, |K_{\min}|) = |F[K_I(\lambda^*), K_{II}(\lambda^*), \theta^*(\lambda^*)]| \quad (14)$$

که در آن:

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda' & \text{if } |K_{\max}| > |K_{\min}| \\ \lambda'' & \text{if } |K_{\max}| < |K_{\min}| \end{cases} \quad (15)$$

با برقراری شرط زیر فرض می‌شود که ترک در هر سیکل در جهت زاویه‌ی θ^* (در رابطه‌ی 11) که متناظر با $\lambda = \lambda^*$ می‌باشد، رشد می‌کند:

$$\Delta K > \Delta K_{th} \quad (16)$$

که در آن ΔK_{th} بازه‌ی آستانه‌ای تابع $F[K_I, K_{II}, \theta^*]$ است، که یک مشخصه از مقاومت رشد ترک سیکلی ماده می‌باشد.

مسیر ترک به صورت گام به گام ایجاد می‌گردد. در مرحله‌ی اول، مسأله‌ی تئوری الاستیسیته یک نیم صفحه با ترک لبه‌ای اولیه‌ای (در حالت کلی به صورت منحنی شکل) که بر روی کانتور L_1 قرار گرفته است و تحت تأثیر نیروهای داده شده در رابطه‌ی 9 قرار دارد، به ازای مقادیر مختلف λ حل می‌گردد. از حل این مسأله ضرایب شدت تنش مود اول و دوم استخراج می‌گردد. سپس با استفاده از روابط 11، 14 و 15 می‌توان مقدار پارامتر $\lambda = \lambda^*$ (محل قرار گرفتن مرکز ناحیه تماس)، زاویه رشد ترک متناظر با آن θ^* و در نهایت مقدار $K_{\max}$ را محاسبه نمود. با محاسبه پارامترهای ذکر شده مقدار ΔK نیز به دست می‌آید. با فرض برقراری شرایط 16 ترک برای مدت N_1 سیکل به اندازه گام Δl_1 در مسیری با زاویه‌ی θ^*_1 رشد می‌کند. فرض می‌شود که در هر مرحله از رشد ترک مقادیر $\Delta K_1, \theta^*_1$ و λ^*_1 ثابت باقی می‌مانند. مسیر ترک در هر مرحله (Δl_1)، با یک تابع چند جمله‌ای درجه سه تقریب زده می‌شود. در هر مرحله برای کانتور جدیدی که ترک بر روی آن قرار می‌گیرد یعنی ایجاد قسمت جدید مسیر ترک مراحل قبل تکرار می‌گردد، به این ترتیب مسیر رشد ترک به صورت یک منحنی هموار به دست می‌آید.

عمر کل اجسام تحت بارگذاری سیکلی از دو بخش مختلف تشکیل شده که در رابطه‌ی (17) نشان داده شده است [7]:

$$N = N_0 + N_c = N_0 + \int_{l_1}^{l_c} \frac{dl}{v(\Delta K(l))} \quad (17)$$

در این رابطه N_0 تعداد سیکل‌های بارگذاری لازم برای جوانه‌زنی ترک ماکروی¹ اولیه‌ای به طول l_1 و N_c تعداد سیکل‌های بارگذاری لازم جهت رشد ترک اولیه‌ای با طول l_1 تا طول بحرانی l_c می‌باشند. در واقع می‌توان N_c را عمر باقیمانده جسمی با ترک اولیه‌ای به طول l_1 در نظر گرفت که در آن ترک تا طول بحرانی l_c رشد می‌کند. تابع $v(\Delta K(l))$ در رابطه‌ی (17) بیانگر رابطه‌ی بین نرخ رشد ترک و بازه تغییرات پارامتر K می‌باشد. این تابع با استفاده از رابطه‌ی پاریس به صورت رابطه (18) بیان می‌گردد:

$$v = C(\Delta K)^n \quad (18)$$

در این رابطه C و n وابسته به خواص ماده بوده و به صورت تجربی تعیین می‌گردند. باید توجه داشت که این رابطه برای مود بازشوندگی ترک و میدان تنش سیکلی متقارن تک‌محوره استخراج گردیده است. بسیاری از محققین با تعریف یک ضریب شدت تنش معادل، از این رابطه برای میدان تنش پیچیده² و مود ترکیبی رشد ترک استفاده نموده‌اند. در این مدل نیز از همین روش استفاده شده است و در واقع پارامتر K ضریب شدت تنش معادل در رابطه‌ی پاریس می‌باشد.

مسئله همراه با دو بار متحرک معادل تماسی در شکل 5 نشان داده شده است. در این مسئله در صورت در نظر گرفتن دو بار متحرک بر روی مرز نیم صفحه توزیع نیروهای تماسی به صورت رابطه‌ی (9) بیان می‌گردند:

$$N(x) + iT(x) = -(1+if)p_1(x) - (1+if)p_2(x) = -p_{01}(1+if)s_1(x, x_0) - p_{02}(1+if)s_2(x, x_0 + x_1) \quad |x - x_0| < c \quad (9)$$

که در آن $N(x)$ نیروی عمودی و $T(x)$ نیروی مماسی می‌باشند، که دو مؤلفه‌ی نرمال و مماسی نیروهای تماسی با استفاده از قانون کولمب و به وسیله‌ی ضریب اصطکاک f به یکدیگر مرتبط گردیده‌اند. در این مدل نیروهای اصطکاکی ناشی از لغزش سطوح در مؤلفه‌ی مماسی نیروی تماسی در نظر گرفته شده‌اند. با توجه به شکل 5 مختصه‌ی افقی مرکز ناحیه‌ی تماس، $2c$ عرض ناحیه تماس، $s_1(x, x_0)$ و $s_2(x, x_0 + x_1)$ فشار تماسی نرمالیزه شده بر روی مرز نیم صفحه، فاصله‌ی x_1 فاصله‌ی بین مراکز ناحیه تماس دو بار متحرک p_{01} و p_{02} ماکزیمم فشار بر روی ناحیه تماس می‌باشند.

در حالت غلتش دو جسم بر روی یکدیگر، بارگذاری به صورت سیکلی می‌باشد. شکست محلی به صورت شبه استاتیکی فرض شده است. در حالت میدان تنش مختلط پارامتر K که معرف مکانیزم شکست محلی می‌باشد در نظر گرفته شده است [9]:

$$K = F[K_I(\lambda), K_{II}(\lambda), \theta^*(\lambda)] \quad (10)$$

که در آن K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در نوک ترک بوده و همچنین λ برابر x_0/l_1 می‌باشد، که در آن l_1 طول ترک اولیه است. کمیت θ^* زاویه مسیر رشد ترک بوده و با معلوم بودن مقادیر $K_I(\lambda)$ و $K_{II}(\lambda)$ مقدار K اکسترمم از تابع $F[K_I, K_{II}, \theta^*]$ را در اختیار قرار می‌دهد. θ^* به وسیله‌ی رابطه‌ی (11) تعریف می‌شود:

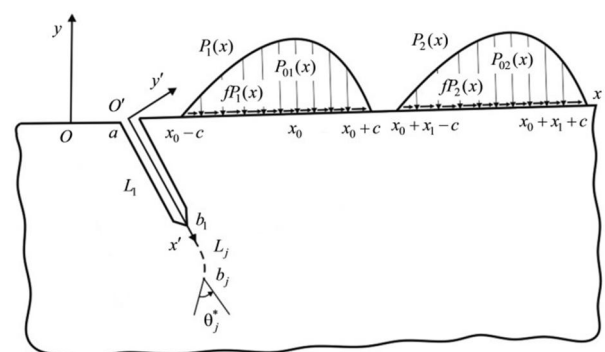
$$\theta^* = f[K_I(\lambda), K_{II}(\lambda)] \quad (11)$$

حرکت ناحیه تماس بر روی مرز نیم صفحه‌ی بی‌نهایت در هر سیکل با تغییر پارامتر λ مدل‌سازی شده است. در هر سیکل تابع $F[K_I(\lambda), K_{II}(\lambda), \theta^*(\lambda)]$ بین مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود نسبت به پارامتر λ تغییر می‌کند، که این مقادیر در روابط (12) و (13) آمده‌اند:

$$K_{\max} = F[K_I(\lambda'), K_{II}(\lambda'), \theta^*(\lambda')] \quad (12)$$

$$K_{\min} = F[K_I(\lambda''), K_{II}(\lambda''), \theta^*(\lambda'')] \quad (13)$$

کمیت $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ بیانگر بازه‌ی تغییرات تابع F در یک سیکل غلتش می‌باشد. کمیت $K_{\max}^*$ نیز که بیانگر مقدار بیشینه‌ی قدر مطلق کمیت K می‌باشد، به صورت رابطه (14) تعریف می‌گردد:



شکل 5 نمای کلی هندسه و بارگذاری مسئله

1- Macrocrack
2- Complex Stress Stage

3- معادلات انتگرالی منفرد نیم صفحه شامل ترک لبه ای تحت بار

تماسی متحرک

توابع پتانسیل مختلط مسأله یک نیم صفحه بی نهایت تحت بار گذاری تماسی بر روی مرز نیم صفحه با در نظر گرفتن دو بار متحرک را می توان به صورت روابط (19) و (20) بیان نمود [11]:

$$\phi_0(z) = \frac{p_{01}(1+if)}{2\pi i} \int_{x_{01}-c}^{x_{01}+c} \frac{s_1(\zeta, l_1\lambda) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{p_{02}(1+if)}{2\pi i} \int_{x_{02}-c}^{x_{02}+c} \frac{s_2(\zeta, l_1\lambda + x_1) d\zeta}{\zeta - z} \quad (19)$$

$$\psi_0(z) = \frac{p_{01}}{2\pi i} \int_{x_{01}-c}^{x_{01}+c} \frac{(1-if)z + 2if}{\zeta - z} s_1(\zeta, l_1\lambda) d\zeta + \frac{p_{02}}{2\pi i} \int_{x_{02}-c}^{x_{02}+c} \frac{(1-if)z + 2if}{\zeta - z} s_2(\zeta, l_1\lambda + x_1) d\zeta \quad (20)$$

پارامترهای توابع فوق در رابطه ی (9) توضیح داده شده اند. در این مفهوم توابع پتانسیل مختلط اصلاح شده¹ در الاستیسیته صفحه ای جهت استخراج توابع پتانسیل مختلط یک نیم صفحه حاوی ترک لبه ای مورد استفاده قرار گرفته است. این مفهوم در مراجع [12] و [13] مورد بحث قرار گرفته است. جزئیات روش استخراج توابع پتانسیل مختلط یک نیم صفحه حاوی ترک لبه ای از این طریق در [14] توضیح داده شده است.

طبق این روش، توابع پتانسیل مختلط یک نیم صفحه حاوی تابع نایجایی $g'(t)$ بر روی کانتور ترک L به صورت روابط (21) و (22) بیان می گردد [9]:

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[\frac{1}{T-z} - \frac{1}{\bar{T}-z} \right] e^{i\alpha} g'(t) dt + \frac{T-\bar{T}}{(\bar{T}-z)^2} e^{-i\alpha} \overline{g'(t)} d\bar{t} \right\} \quad (21)$$

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \left[\frac{1}{(\bar{T}-z)^2} - \frac{1}{(T-z)^2} \right] T e^{i\alpha} g'(t) dt + \left[\frac{1}{T-z} - \frac{1}{\bar{T}-z} \right] \frac{(\bar{T}-T)(\bar{T}+T)}{(\bar{T}-z)^3} e^{-i\alpha} \overline{g'(t)} d\bar{t} \right\} \quad (22)$$

که در این روابط $T = te^{i\alpha} + z'_0$ و $z = z_k e^{i\alpha} + z_0$ می باشند. که z_k و t متغیر مختلط در دستگاه مختصات محلی هستند. z'_0 و z_0 مختصات مبدأ دستگاه مختصات محلی در دستگاه مختصات مرجع و α زاویه ی بین محور x از دستگاه مختصات محلی و x از دستگاه مختصات مرجع می باشند.

در یک مسأله تماس غلتشی با استفاده از اصل جمع آثار توابع پتانسیل مختلط این مسأله به صورت مجموع توابع پتانسیل مختلط مسأله تماس یک نیم صفحه و توابع پتانسیل مختلط یک نیم صفحه حاوی ترک لبه ای به صورت روابط (23) و (24) بیان می گردد:

$$\Phi(z) = \phi_1(z) + \phi_0(z) \quad (23)$$

$$\Psi(z) = \psi_1(z) + \psi_0(z) \quad (24)$$

شرایط مرزی برای حالتی که وجوه ترک عاری از تنش هستند بر روی کانتور

ترک L به صورت رابطه ی (25) بیان می گردد:

$$N^\pm(\tau) + iT^\pm(\tau) = 0, \quad \tau \in L \quad (25)$$

علامت های $+$ و $-$ متناظر با مقادیر حدی تنش بر روی وجوه ترک هنگام میل کردن به سمت کانتور L به ترتیب از سمت راست و چپ می باشند (شکل 6). با ارضای شرایط مرزی (25) به وسیله ی توابع پتانسیل مختلط (23) و (24)، می توان معادلات انتگرالی مسأله ی مورد نظر را بر حسب تابع توزیع نایجایی $g'(t)$ استخراج نمود. شکل نرمالیزه شده ی این معادلات به صورت رابطه (26) می باشد [15]:

$$\int_{-1}^1 [R(\xi, \eta) \phi(\xi) + S(\xi, \eta) \bar{\phi}(\xi)] d\xi = \pi P(\eta, \lambda), \quad |\eta| < 1 \quad (26)$$

که در آن:

$$R(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'(\eta)}{(\omega(\xi) - \omega(\eta))} + \frac{\omega'(\eta)}{w(\xi, \eta)} \right] + \frac{1}{2} \frac{w(\xi, \xi)}{w^2(\xi, \eta)} [\omega'(\eta) e^{2i\alpha} + \overline{\omega'(\eta)}] + 2\overline{\omega'(\eta)} e^{2i\alpha} \frac{(\omega(\xi) - \omega(\eta))}{w(\xi, \eta)} \quad (27)$$

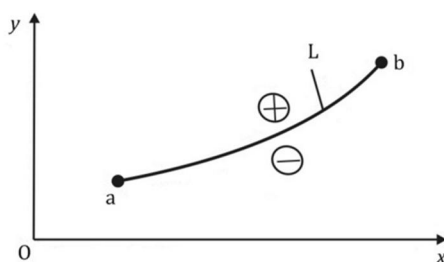
$$S(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\bar{\omega}(\xi) - \bar{\omega}(\eta)} \right] + \frac{\omega'(\eta)}{2} \left[w^{-1}(\xi, \eta) + \frac{[\omega(\xi) - \omega(\eta)] \bar{\omega}'(\eta)}{w^2(\xi, \eta)} \frac{\omega'(\eta)}{\bar{\omega}'(\eta)} + \frac{\bar{w}(\xi, \xi)}{\bar{w}^2(\xi, \eta)} e^{-2i\alpha} \right] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} z_k = \omega(\eta) &\rightarrow z = z_k e^{i\alpha} + z_0 \rightarrow z = \omega(\eta) e^{i\alpha} + z_0 \\ t = \omega(\xi) &\rightarrow T = t e^{i\alpha} + z_0 \rightarrow T = \omega(\xi) e^{i\alpha} + z_0 \\ H = z = z_k e^{i\alpha} + z_0 \quad z \in L, \quad H &= \omega(\eta) e^{i\alpha} + z_0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$t = \omega(\xi), \quad t' = \omega(\eta) \quad (30)$$

$$\phi(\xi) = g'(t) \omega'(\xi) \quad (31)$$

$$P(\eta, \lambda) = -2\operatorname{Re}(\phi_0(H)) - \frac{\bar{\omega}'(\eta)}{\omega'(\eta)} e^{-2i\alpha} (H \bar{\phi}'_0(H)) + \bar{\Psi}_0(H) \quad (32)$$



شکل 6 کانتور L در صفحه بی نهایت

1- Modified Complex Potential (MCP)

4- الگوریتم ایجاد مسیر رشد ترک

در این مدل با فرض این که ترک تحت مود بازشوندگی رشد می کند برای تعیین جهت رشد ترک و همچنین ضریب شدت تنش معادل از معیار ماکزیمم تنش مماسی استفاده گردیده است. براساس این معیار، رشد ترک در جهتی رخ می دهد که تنش مماسی $\sigma_{\theta\theta}$ دارای بیشترین مقدار باشد. بنابراین براساس این معیار زاویه رشد ترک به صورت رابطه (33) به دست می آید:

$$\theta^* = 2 \tan^{-1} [(K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}) / (4K_{II})] \quad (33)$$

مقدار ضریب شدت تنش معادل نیز در زاویه θ^* با $K_{I\theta}$ نشان داده می شود که به صورت رابطه (34) در می آید:

$$K = K_{I\theta} = \cos^3\left(\frac{\theta^*}{2}\right) [K_I - 3 \tan\left(\frac{\theta^*}{2}\right) K_{II}] \quad (34)$$

در این مدل با فرض این که در هر مرحله از ایجاد ترک (رشد ترک) بازه ای از تغییرات پارامتر λ وجود دارد که در آن وجوه ترک در تماس نیستند ($K_I(\lambda) > 0$)، این امکان وجود دارد تا با حل اولین مسئله ای اساسی تئوری الاستیسیته برای یک نیم صفحه بی نهایت با ترک لبه ای، بتوان مقدار $K^*_{I\theta\max}$ را در هر مرحله از ایجاد مسیر ترک تعیین نمود. در حل مسئله مشاهده شده است که با دور شدن از لبه های ترک مقدار $K_{I\theta}$ بسیار کوچک شده در نتیجه مقدار $K^*_{I\theta\min}$ برابر صفر در نظر گرفته شده است. بنابراین:

$$K^*_{I\theta\max} = K_{I\theta\max} \quad (35)$$

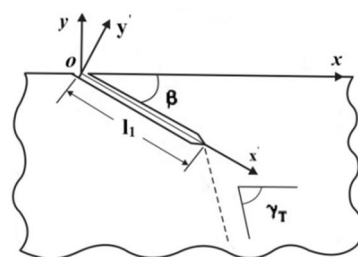
$$\Delta K_{I\theta} = K_{I\theta\max} \quad (36)$$

یک نیم صفحه بی نهایت ایزوتروپیک الاستیک را در نظر بگیرید. این نیم صفحه منطبق بر نیم صفحه پایینی صفحه مختلط $z = x + iy$ ($y \leq 0$) بوده و دارای ترک لبه ای منحنی شکل هموار اولیه ای به طول l_1 می باشد. این ترک منطبق بر کانتور L_1 بوده که معادله پارامتریک آن در دستگاه مختصات محلی $x'o'y'$ تعریف شده و از نقطه a بر روی مرز نیم صفحه آغاز و در نقطه b پایان می یابد. رابطه بین دستگاه مختصات محلی با دستگاه مختصات مرجع به صورت رابطه (37) تعریف می گردد (شکل 7):

$$z = z' e^{i\alpha} + z'_0 \quad (37)$$

که در آن z' متغیر مختلط در دستگاه مختصات محلی است ($z' = x' + iy'$). z'_0 مختصات مبدأ دستگاه مختصات محلی در دستگاه مختصات مرجع و α زاویه بین محورهای x' از دستگاه مختصات محلی و x از دستگاه مختصات مرجع می باشد.

با توجه به مطالب و فرضیات ذکر شده، ایجاد قسمت جدید مسیر ترک در مرحله ای λ_m به حل اولین مسئله ای اساسی تئوری الاستیسیته برای یک نیم صفحه بی نهایت شامل ترک لبه ای منحنی شکل با معادله پارامتریک L_j و تحت بارهای تماسی وارد شده در ناحیه تماسی (به مرکز $x_0 + \lambda$ و x_0)، کاهش می یابد. معادله پارامتریک برای کانتور ترک در مرحله ای λ_m (L_j) به صورت رابطه (38) بیان می گردد [9]:



شکل 7 دستگاه مختصات محلی و مرجع

$$t = \omega(\xi) = x'(\xi) + iy'(\xi) \quad (38)$$

در این رابطه $x'(\xi)$ برابر $Re[(b-a)\xi + b+a]/2$ است. متغیر مختلط b مختصات نوک ترک در دستگاه مختصات محلی می باشد. $y'(\xi)$ نیز تابع مختصات y' کانتور L_j در دستگاه مختصات محلی می باشد. دستگاه مختصات محلی $x'o'y'$ به گونه ای انتخاب می گردد که تابع $y'(\xi)$ در تمام مراحل ایجاد مسیر ترک یکتا باشد. در شکل 6 نحوه انتخاب دستگاه مختصات محلی نشان داده شده است.

معادله انتگرالی (26) به صورت عددی و به وسیله روش انتگرال گیری عددی حل می گردد [9]. تابع نامشخص $\phi(\xi)$ به فرم رابطه (39) تعریف می گردد:

$$\phi(\xi) = \frac{u(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (39)$$

که در آن $u(\xi)$ در بازه ی بسته $[-1, 1]$ پیوسته بوده و شرایط رابطه ی (40) را ارضا می نماید:

$$u(-1) = 0 \quad (40)$$

به دلیل این که نقطه $\xi = -1$ رأس ترک لبه ای نمی باشد، تابع $g'(t)$ باید در این نقطه دارای ناکرانداری مرتبه ی پایین تری از $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}$ باشد بنابراین این شرط محدود کننده برای حل مسأله در نظر گرفته شده است چرا که نقطه ی $\xi = -1$ متناظر با انتهای ترک لبه ای که بر روی مرز نیم صفحه بی نهایت قرار می گیرد، می باشد.

به کمک انتگرال گیری عددی به روش چند جمله ای های چبیشف می توان مقدار انتگرال های زیر را محاسبه نمود و تابع مجهول $u(\xi)$ را بدست آورد و در نهایت این تابع با استفاده از چند جمله ای های لاگرانژ تقریب زده می شود [9]:

$$\sum_{k=1}^M [R(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + S(\xi_k, \eta_m) \bar{u}(\xi_k)] = MP(\eta_m, \lambda), \quad |\eta| < 1, \quad m = 1, \dots, M-1 \quad (41)$$

$$\sum_{k=1}^M [(-1)^k \tan\left(\frac{2k-1}{4M}\pi\right) u(\xi_k)] = 0 \quad (42)$$

با استخراج مقادیر $u(\xi_k)$ ضرایب شدت تنش مود اول و دوم به صورت زیر قابل محاسبه می باشند [9]:

$$K_I - iK_{II} = \frac{1}{M} \frac{\sqrt{\pi\omega'(1)}}{\omega'(1)} \sum_{k=1}^M (-1)^k u(\xi_k) \cot\left(\frac{2k-1}{4M}\pi\right) \quad (43)$$

با محاسبه ی ضرایب شدت تنش مود اول و دوم، می توان مقادیر $K_{I\theta}$ و θ^* را محاسبه نمود. پس از انجام محاسبات فوق می توان مقدار λ^* را λ هنگامی که $K_{I\theta}$ مقدار بیشینه خود را ($K^*_{I\theta\max}$) اختیار می کند، به دست آورد. جستجو جهت یافتن مقدار λ^* به صورت عددی و گام به گام انجام می شود. در مرحله ی اول ایجاد مسیر ترک تمام بازه های مقادیر λ^* که در آن دهانه ی ترک باز می باشد، تست می شوند. در مراحل بعدی بازه های در نزدیکی مقدار قبلی λ^* تست می شوند. این موضوع را به فرم ریاضی به صورت رابطه (44) می توان بیان نمود:

$$\lambda_j^* = \lambda_{j-1}^* \pm mH_1, \quad j = 2, 3, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

در این رابطه $H_1 > 0$ گام تغییرات پارامتر λ می باشد، که دارای مقدار ثابتی است و m تعداد گام ها می باشد. در هر گام معادله ی (26) حل می گردد. پس از

$$N_c \approx \sum_{k=1}^{j_c} \frac{\Delta l_k}{v_k(K_{I\theta\max})} = H_2 \sum_{k=1}^{j_c} v_k^{-1}(K_{I\theta\max}) \quad (48)$$

نکته‌ی مهم در این رابطه تقریب تغییر طول ترک در هر مرحله، با مقدار H_2 می‌باشد. همچنین j_c مرحله‌ای است که در آن طول ترک به مقدار بحرانی خود خواهد رسید.

5- تحلیل نتایج

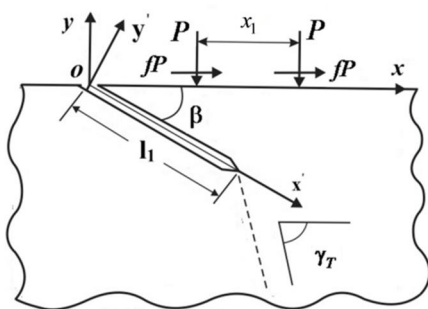
پس از بررسی و معرفی مدل ارائه شده همراه با چندین بار متحرک، در این بخش نتایج حاصل از این مدل برای تخمین عمر باقیمانده جسمی از جنس فولاد پرلیت لایه‌ای 75XFGT تحت تأثیر یک و دو بار متمرکز متحرک ارائه شده است. در ابتدا نتایج به‌دست آمده از مدل حاضر در حالت خاص یک بار متمرکز متحرک بر روی مرز نیم صفحه برای مسیر رشد ترک در حالتی که ترک اولیه با مرز نیم صفحه زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌سازد با نتایج حاصل از کار داتسیشین و همکارانش [5] مورد مقایسه قرار گرفته است. در نهایت نتایج به‌دست آمده برای عمر با نتایج حاصل از کار داتسیشین و همکارانش [5] که در آن عمر باقیمانده‌ی جسمی تحت تأثیر یک بار متحرک متمرکز تخمین زده شده است، مقایسه شده است.

ترک لبه‌ای اولیه به صورت یک ترک مستقیم به طول 1mm در نظر گرفته شده است. زاویه‌ی بین این ترک و مرز نیم صفحه برابر β فرض شده است. مبدأ دستگاه مختصات محلی و مرجع مطابق شکل 9 منطبق بر هم می‌باشند. در نتیجه، a و α برابر صفر می‌باشند، محور $o'x'$ منطبق بر ترک اولیه در نظر گرفته شده است. در نتیجه α برابر β و b_1 برابر l_1 می‌باشند. بار تماسی غلتشی به‌صورت یک و دو نیروی متمرکز متحرک هر یک با فاصله‌ی $x_1 = 3 \text{ mm}$ مدل گردیده‌اند که در شکل 9 نمایش شماتیکی از فیزیک مسئله همراه با دو بار متمرکز متحرک نشان داده شده است. مؤلفه‌ی عمودی این نیروها دارای مقدار یکسان و برابر p_0 و مؤلفه‌ی مماسی آن‌ها برابر $f p_0$ بوده و این نیروها در نقاط $x_0 + x_1$ و x_0 بر روی مرز نیم صفحه عمل می‌کنند. با این فرضیات، معادله‌ی پارامتریک کانتور ترک اولیه در دستگاه مختصات محلی به فرم زیر می‌باشد:

$$t = \omega(\xi) = l_1(\xi + 1)/2 \quad (49)$$

همچنین سمت راست معادله انتگرالی (26) عبارت است از:

$$P(\eta, \lambda) = \frac{p_0}{\pi} \left\{ \text{Re} \left[\frac{(f-i)e^{-i\alpha}}{\zeta(\eta, \lambda)} \right] \omega'(\eta) - \frac{\text{Re}[\zeta(\eta, \lambda)(f+i)e^{i\alpha}]}{\bar{\zeta}^2(\eta, \lambda)} \bar{\omega}'(\eta) \right\} + \frac{p_0}{\pi} \left\{ \text{Re} \left[\frac{(f-i)e^{-i\alpha}}{\zeta(\eta, \lambda + x_1)} \right] \omega'(\eta) - \frac{\text{Re}[\zeta(\eta, \lambda)(f+i)e^{i\alpha}]}{\bar{\zeta}^2(\eta, \lambda + x_1)} \bar{\omega}'(\eta) \right\} \quad (50)$$



شکل 9 مدل فیزیکی مسئله مورد بررسی همراه با دو بار متمرکز متحرک

تعیین λ_j^* زاویه‌ی θ_j^* که پارامتر اساسی جهت ایجاد $j+1$ لایمین قسمت مسیر است، از طریق معادله‌ی (36) تعیین می‌گردد. مؤلفه‌ی افقی مختصه‌ی نوک ترک (در دستگاه مختصات محلی) در هر مرحله به‌وسیله‌ی رابطه‌ی (45) محاسبه می‌شود:

$$x'_{j+1} = \text{Re}b_1 + \sum_{k=1}^j h_k \quad (45)$$

که در آن $h_k = H_2 \cos \gamma_k$ تصویر گام افزایشی در هر مرحله از ایجاد ترک، بر روی محور افقی (x') می‌باشد. $H_2 > 0$ گام افزایشی در هر مرحله از ایجاد ترک در راستای رشد ترک بوده که دارای مقداری ثابتی است. γ_k زاویه‌ی بین محور $o'x'$ و مسیر رشد ترک می‌باشد. در شکل 7 پارامترهای ذکر شده نشان داده شده‌اند.

معادله‌ی پارامتریک کانتور ترک اولیه (l_1) معلوم بوده که این کانتور هموار می‌باشد. در هر مرحله، به‌منظور هموار باقی ماندن کانتور ترک، قسمت‌های جدید مسیر ترک به وسیله‌ی چند جمله‌ای‌های درجه سه تقریب زده می‌شوند. معادله‌ی قسمت‌های جدید اضافه شده به صورت رابطه‌ی (46) می‌باشند:

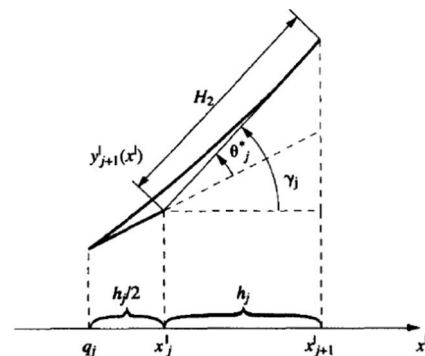
$$y_{j+1} = a_{j+1}(x' - q_j)^3 + b_{j+1}(x' - q_j)^2 + c_{j+1}(x' - q_j) + d_{j+1}(q_j \leq x' \leq x'_{j+1}) \quad (46)$$

که در آن $q_j = x'_j - \delta_j$ می‌باشد. ضرایب این چند جمله‌ای با توجه به شرط هموار باقی ماندن کانتور ترک در مرحله‌ی $j+1$ لام، تعیین می‌گردند [9]. در نهایت معادله‌ی کل کانتور ترک در مرحله‌ی $j+1$ لام (در دستگاه مختصات محلی) به صورت رابطه‌ی (47) در می‌آید:

$$y'(x') = \begin{cases} y_1(x') \text{Re}a \leq x' \leq q_1 = \text{Re}b_1 - \frac{h_1}{2} \\ y_j(x') q_{k-1} \leq x' \leq q_k = \text{Re}b_1 - \frac{h_1}{2} & k = 2, \dots, j \\ y_{j+1}(x') q_j \leq x' \leq x'_{j+1} = \text{Re}b_1 - \frac{h_1}{2} \end{cases} \quad (47)$$

در این رابطه $y_1(x')$ معادله‌ی منحنی اولیه ترک در بازه‌ی $[\text{Re} a, \text{Re} b_1]$ می‌باشد. در شکل 8 نمودار قسمت $j+1$ لام ترک و تمامی پارامترهای معرفی شده جهت رشد ترک در این مرحله، نشان داده شده‌اند.

در نهایت با گسسته‌سازی ترم دوم رابطه‌ی (17)، می‌توان عمر باقیمانده‌ی (N_c) جسم دارای ترک سطحی و تحت تماس غلتشی را به صورت رابطه (48) محاسبه نمود:



شکل 8 منحنی $j+1$ لامین قسمت ترک

که در آن:

$$\varsigma(\eta, \lambda) = \omega(\eta) + (z'_0 - \lambda l_1) e^{-i\alpha} \quad (51)$$

$$\varsigma(\eta, \lambda + x_1) = \omega(\eta) + (z'_0 - (\lambda + x_1) l_1) e^{-i\alpha} \quad (52)$$

بار p_0 نیز به صورت رابطه (53) در نظر گرفته شده است [5]:

$$p_0 = BK_{2-3} \sqrt{\pi l_1} \quad (53)$$

در این رابطه K_{2-3} ضریب شدت تنش جدا کننده ناحیه دوم و سوم نمودار خستگی شکست¹ بوده و مقدار آن برابر $29/1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ می باشد. همچنین K_{1-2} ضریب شدت تنش جدا کننده ناحیه اول و دوم نمودار خستگی شکست² بوده و مقدار آن برابر $5/2 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ می باشد. ضریب B به گونه ای انتخاب می گردد که شرط (16) و همچنین شرط رابطه ی (54) ارضاء گردد:

$$K_{1-2} \leq K_{I\theta\max} \leq K_{2-3} \quad (54)$$

برای استفاده از رابطه ی (48) طول بحرانی ترک برابر 4 mm فرض شده است.

ثوابت رابطه ی پاریس نیز عبارتند از [5]:

$$C = 3.09 \times 10^{-12} \text{ MPa}^{-n} \text{ m}^{1-n/2} \quad (55)$$

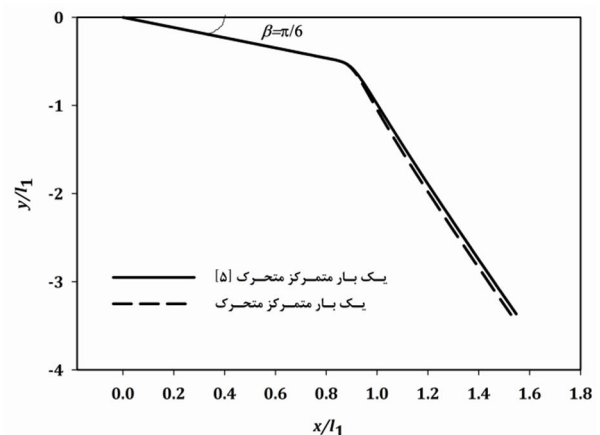
$$n = 3.48 \quad (56)$$

در این تحلیل دو ضریب اصطکاک برابر $0/25$ و $0/3$ در نظر گرفته شده است [5].

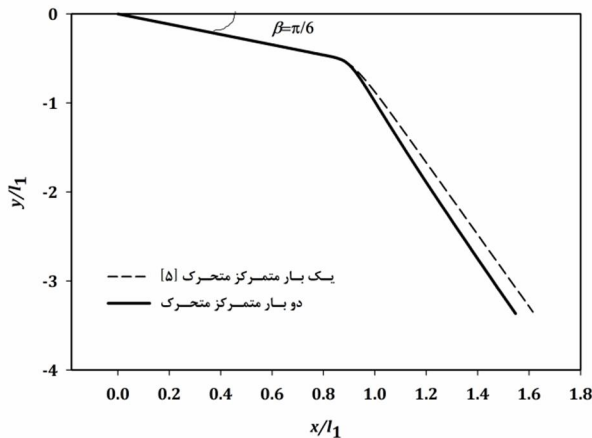
اگر جهت نیروی مماسی مطابق با شکل 9 انتخاب گردد، نتایج حاصل از مدل حاضر و مدل دانسیشین و همکارانش [5] برای مسیر رشد ترک در حالت خاص یک بار متمرکز متحرک بر روی مرز نیم صفحه در حالتی که ترک اولیه با مرز نیم صفحه زاویه $\frac{\pi}{6}$ می سازد در شکل 10 مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به این شکل نتایج حاصل از مدل حاضر به خوبی با نتایج مدل مرجع [5] هم خوانی دارد.

متحرک بر روی مرز نیم صفحه در ضریب اصطکاک $f=0/3$ در زاویه $\beta = \pi/6$ اگر جهت نیروی مماسی مطابق با شکل 9 انتخاب گردد، مسیر رشد ترک برای زوایای مختلف ترک اولیه نسبت به مرز نیم صفحه برای دو حالت مختلف یک بار متمرکز و دو بار متمرکز متحرک بر روی مرز نیم صفحه و برای ضریب اصطکاک $f=0/3$ در اشکال 11، 12 و 13 نشان داده شده و با یکدیگر مقایسه گردیده اند.

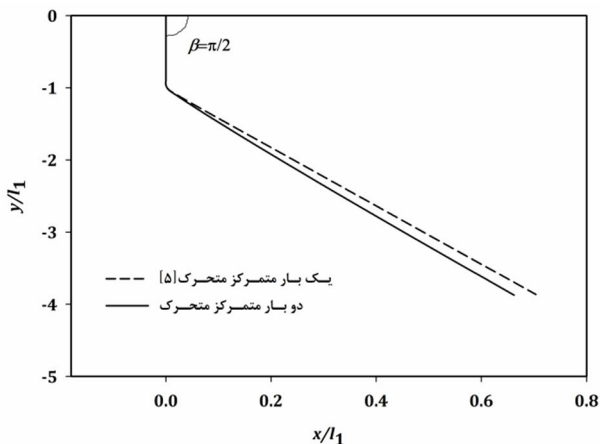
با توجه به شکل های 11 تا 13 با افزایش تعداد بارهای متحرک تماسی بر روی مرز نیم صفحه زاویه رشد ترک نسبت به ترک اولیه بسته تر شده و



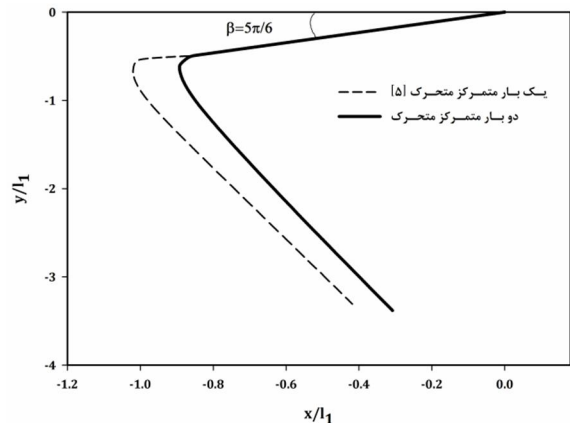
شکل 10 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای حالت یک بار متمرکز



شکل 11 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای دو حالت بارگذاری مختلف در ضریب اصطکاک $f=0/3$ در زاویه $\beta = \pi/6$



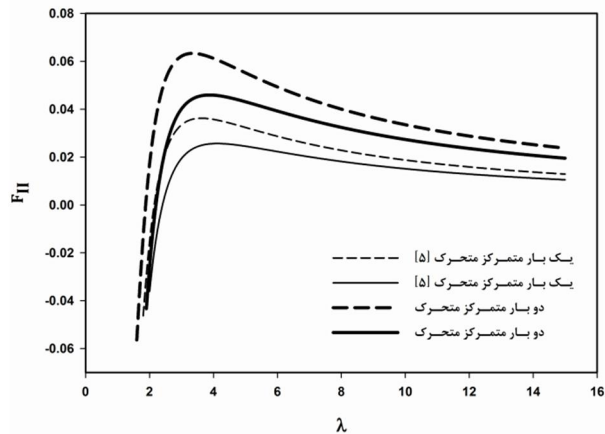
شکل 12 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای دو حالت بارگذاری مختلف در ضریب اصطکاک $f=0/3$ در زاویه $\beta = \pi/2$



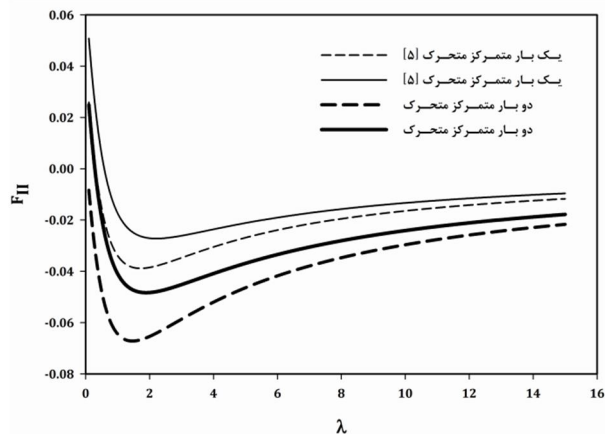
شکل 13 مسیر رشد ترک بر حسب مود بازشوندگی برای دو حالت بارگذاری مختلف در ضریب اصطکاک $f=0/3$ در زاویه $\beta = 5\pi/6$

ترک بیشتر به سمت داخل سطح منحرف می گردد در نتیجه امکان این که ترک های سطحی به یکدیگر پیوندند و به سمت سطح رشد کنند و باعث ایجاد کندی سطحی² شوند کاهش می یابد.

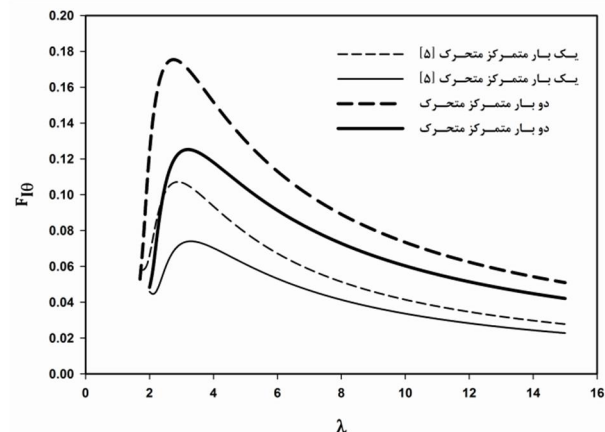
نحوه ی تغییرات مشخصات حالت تنش از جمله F_I ، F_{II} و $F_{I\theta}$ در نوک ترک در مرحله ی اول ایجاد مسیر ترک بر حسب تغییرات پارامتر λ در اشکال 14 تا 20 برای دو حالت یک بار متمرکز و دو بار متمرکز متحرک نشان داده



شکل 17 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_{II} = \sqrt{\pi l_1} K_{II}/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = \pi/6$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند)



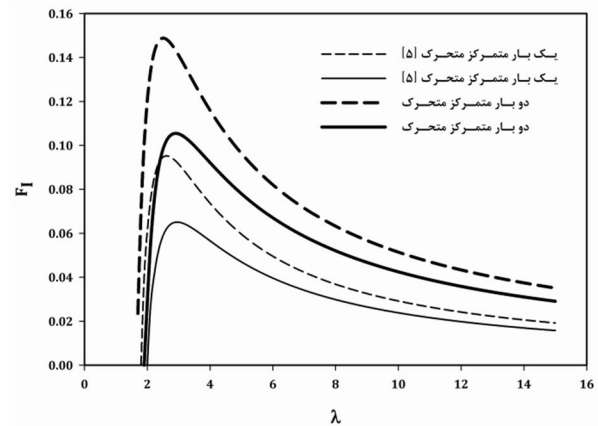
شکل 18 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_{II} = \sqrt{\pi l_1} K_{II}/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = 5\pi/6$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند)



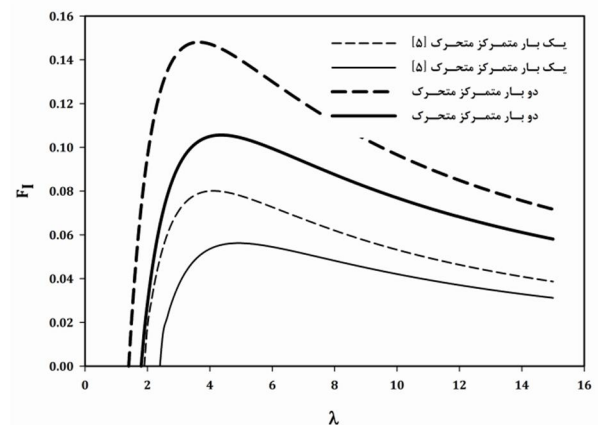
شکل 19 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_{I0} = \sqrt{\pi l_1} K_{I0}/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = \pi/6$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند)

محدوده تغییرات پارامتر λ برای حالتی که ترک اولیه کاملاً باز می باشد یعنی $K_I(\lambda) > 0$ براساس تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی به دست آمده، استخراج گردیده است. اگر جهت نیروی مماسی مطابق با شکل 9 انتخاب گردد، محدوده متناظر تغییرات λ در سمت راست دهانه ترک واقع می شود،

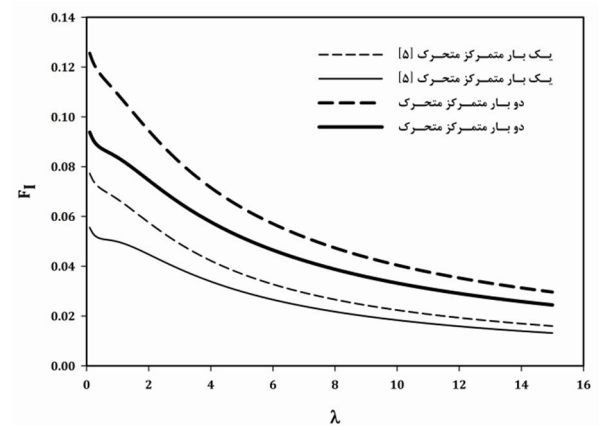
شده است. نتایج در این نمودارها براساس ترک اولیه ای به طول l_1 با زاویه ای نسبت به مرز نیم صفحه بدست آمده است که در آن فاصله نیروهای متمرکز از دهانه ترک برابر $x_0 + x_1 + x_0 = l_1 \lambda$ بوده و خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند.



شکل 14 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_I = \sqrt{\pi l_1} K_I/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = \pi/6$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند)



شکل 15 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_I = \sqrt{\pi l_1} K_I/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = \pi/2$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند)



شکل 16 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_I = \sqrt{\pi l_1} K_I/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = 5\pi/6$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می باشند)

گسترش ترکی دلخواه با مکانیزم بازشوندگی را در یک ضریب اصطکاک f معین به دست آورد. پیش‌بینی جهت رشد ترک براساس زاویه اولیه آن یعنی β ممکن است باعث ایجاد خطا گردد، به عنوان مثال با توجه به شکل 13 زاویه $\beta = \frac{5\pi}{6}$ و مسیر مربوط به این زاویه را در نظر بگیرید که مسیر رشد این زاویه به صورت منحنی بوده و پس از کمی رشد تغییر کرده است. نتایج حاصل از مدل بررسی شده برای تخمین عمر فولاد 75XGCT تحت تماس غلتشی در جداول 1 و 2 آورده شده است.

6- نتیجه‌گیری

یاتاقان‌های غلتشی از مهم‌ترین اجزای به کار رفته در ماشین‌آلات دوار می‌باشند، به همین دلیل تعیین عمر باقیمانده‌ی این اجزا از موضوعات مهم در مباحث مربوط به ماشین‌آلات دوار می‌باشد. این اجسام تحت تماس سیکلی غلتشی قرار داشته و اگر در این اجسام از دیگر حالت‌های خرابی جلوگیری شود، نهایتاً خستگی تماس غلتشی باعث خرابی آن‌ها می‌گردد. در هنگام بارگذاری یک یاتاقان غلتشی، بیش از یک المان غلتشی تحت بار قرار خواهد گرفت؛ بنابراین جهت تخمین دقیق‌تر عمر یاتاقان و مدل‌سازی ریاضی واقعی‌تر مسئله، لازم است همه‌ی المان‌های غلتشی تحت بار در مدل ریاضی مسئله لحاظ گردند. تا به حال در مراجع مدلی جهت تخمین عمر باقیمانده‌ی اجزای دوار در تماس با در نظر گرفتن چندین بار متحرک تماسی ارائه نشده است.

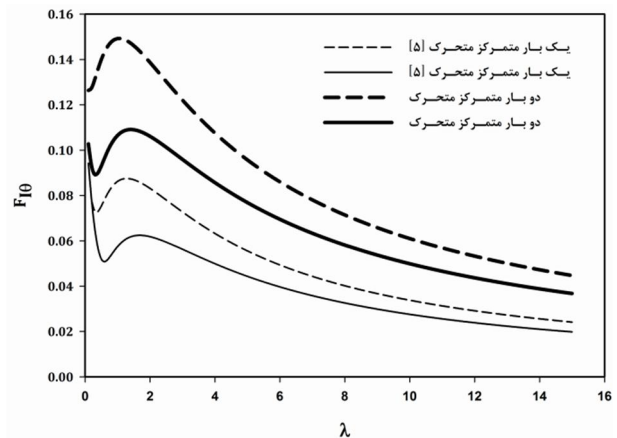
با توجه به توضیحات داده شده در مورد نحوه‌ی بارگذاری در اجزای دوار در تماس در یاتاقان‌های غلتشی در این مقاله مدلی مشابه مدل داتسیشین و همکارانش جهت بررسی اثر در نظر گرفتن چندین بار متحرک بر روی مسیر رشد ترک و عمر باقیمانده‌ی اجسام تحت خستگی تماس غلتشی ارائه گردیده است. این مدل، مدلی دو بعدی جهت تخمین عمر باقیمانده این اجسام

جدول 1 عمر باقیمانده فولاد 75XGCT تحت تماس غلتشی در حالت یک بار

متمرکز [5]							
β (rad)	B	H_1	H_2	λ_1^*	λ_c^*	Δl (mm)	N_c (cycle)
$f = 0/25$							
$\pi/6$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	3/3	18	3	2×10^5
$\pi/2$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	4/9	19/5	3	3×10^5
$5\pi/6$	10	0/1 h_1	0/01 h_1	0/1	12/8	3	1×10^5
$f = 0/3$							
$\pi/6$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	2/9	15/2	3	6×10^4
$\pi/2$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	4/1	16/4	3	8×10^4
$5\pi/6$	10	0/1 h_1	0/01 h_1	0/1	10/6	3	5×10^4

جدول 2 عمر باقیمانده فولاد 75XGCT تحت تماس غلتشی در شرایط متفاوت در

حالت دو بار متمرکز							
β (rad)	B	H_1	H_2	λ_1^*	λ_c^*	Δl (mm)	N_c (cycle)
$f = 0/25$							
$\pi/6$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	3/1	16/86	3	$1/89 \times 10^4$
$\pi/2$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	4/4	18/2	3	$2/66 \times 10^4$
$5\pi/6$	10	0/1 h_1	0/01 h_1	1/4	15/03	3	$1/92 \times 10^4$
$f = 0/3$							
$\pi/6$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	2/7	14/17	3	$5/49 \times 10^3$
$\pi/2$	10	0/1 h_1	0/05 h_1	3/6	15/3	3	$7/67 \times 10^3$
$5\pi/6$	10	0/1 h_1	0/01 h_1	1/1	12/41	3	$5/58 \times 10^3$



شکل 20 تغییرات ضریب شدت تنش نرمالیزه شده $F_{10} = \sqrt{\pi l_1} K_{I0}/P$ برحسب تغییرات λ برای زاویه $\beta = 5\pi/6$ (خطوط خط چین مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/3$ و خطوط تو پر مربوط به ضریب اصطکاک $f=0/25$ می‌باشند)

یعنی در این حالت λ مثبت می‌باشد. تجزیه و تحلیل دقیق‌تر را می‌توان براساس نمودار شکل‌های 14، 15 و 16 که در آن مقادیر ضریب شدت تنش K_I نرمالیزه شده ارائه شده است، به دست آورد. با توجه به این شکل‌ها در یک ضریب اصطکاک ثابت، محدوده‌ی تغییرات $K_I(\lambda) > 0$ برای زوایای بزرگتر از 90 درجه بیشتر می‌باشد، به طور مثال در ضریب اصطکاک 0/25 برای زاویه‌ی $\frac{\pi}{6}$ تغییرات λ از تقریباً 2 شروع شده است، اما برای زاویه‌ی $\frac{5\pi}{6}$ تغییرات λ از صفر شروع می‌شود، که این امر به دلیل جهت فرض شده در شکل 9 برای نیروی مماسی fP اتفاق می‌افتد. همچنین با توجه به این شکل‌ها در یک زاویه خاص β مثلاً $\frac{\pi}{6}$ ، با افزایش ضریب اصطکاک محدوده‌ی تغییرات λ که در آن ترک در مود بازشوندگی قرار دارد، پهن‌تر است یعنی در ضریب اصطکاک بزرگ‌تر نمودارها از λ های کوچک‌تری شروع می‌شوند.

براساس نمودار شکل‌های 14، 15 و 16 مقادیر ضریب شدت تنش K_I نرمالیزه شده با افزایش تعداد بارهای متحرک در نظر گرفته شده به شدت افزایش یافته و همچنین در یک بار خاص نیز با افزایش ضریب اصطکاک مقدار این ضریب شدت افزایش می‌یابد.

با توجه به اشکال 14 تا 18 تغییرات مقادیر ضریب شدت تنش نرمالیزه شده برای λ های کوچک (یعنی مکان‌هایی که نیروی متمرکز نزدیک دهانه‌ی ترک می‌باشد) به شدت زیاد بوده، که همین رفتار در نمودارهای F_{10} نیز مشاهده می‌گردد. با توجه به اشکال 14 تا 16 و اشکال 19 و 20 با افزایش فاصله‌ی نقطه‌ی تماس با دهانه‌ی ترک یعنی افزایش مقدار λ ، مقادیر ضرایب شدت تنش نرمالیزه شده‌ی K_I و K_{I0} به تدریج به سمت صفر کاهش پیدا می‌کنند از این رو $K_{I0,min}$ برابر صفر در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که نتایج عددی به دست آمده برای K_I و K_{II} با نتایج تحلیلی ترک عمود بر مرز نیم صفحه برای یک بار متمرکز متحرک در مرجع [16] هم‌خوانی خوبی دارند.

براساس تجزیه و تحلیل مسیر رشد ترک در اشکال 11 تا 13 مشخص می‌گردد که جهت انتشار ترک کمی به زاویه اولیه آن وابسته بوده و پس از کمی گسترش، ترک بر روی یک خط صاف در عمق ماده تحت زاویه γ_T نسبت به مرز نیم صفحه رشد می‌کند.

واضح است که، یک زاویه جهت‌گیری اولیه ($\beta = \gamma_T$) برای ترک وجود دارد که در آن θ_1^* تقریباً برابر صفر می‌گردد و ترک در امتداد همان زاویه γ گسترش پیدا می‌کند. پس از بدست آوردن مقدار این زاویه، می‌توان جهت

- [4] M. D. Bryant, G. R. Miller and L. M. Keer, Line Contact between a rigid indenter and a damaged elastic body, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 37, pp. 468-478, 1984.
- [5] V. V. Panasyuk, O. P. Datsyshyn and H. P. Marchenko, The Crack Propagation Theory Under Rolling Contact, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, pp. 179-191, 1995.
- [6] T. A. Harris and M. N. Kotzalas, *Essential Concepts of Bearing Technology*, Fifth Edition, New York: Taylor & Francis, 2006.
- [7] V. V. Panasyuk, A. Ye. Andreykiv, and V. Z. Parton, *Base of Fracture Mechanics of Materials*, in *Fracture Mechanics and Material Strength (Handbook)*, Kyiv: Naukova Dumka, 1988.
- [8] S. Ye. Yarema and A. I. Zboromirski, Analytical Study of Growth of a Fatigue Crack Arbitrarily Oriented in the Biaxial Nonuniform Stress Fields, *Fiz-Khim. Mekh. Mater.*, Vol. 20, pp. 54-62, 1984.
- [9] M. P. Savruk, *Two Dimensional Elasticity Problems for Bodies With Cracks*, Kyiv: Naukova Dumka, 1981 (in Russian).
- [10] M. P. Savruk and P. N. Osiv, On Calculations of Cracks Propagation Static Path, *Probl. Prochn.*, Vol. 11, pp. 19-23, 1982.
- [11] D. A. Hills, D. Nowell and A. Sackfield, *Mechanics of Elastic Contact*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993.
- [12] Y. Z. Chen, Stress Intensity Factors in Finite Plate Having Contour with Cusps and Applied by Concentrated Forces, *Engineering Fracture Mech.*, Vol. 22, pp. 635-644, 1985.
- [13] T. Henein and G. Hermmann, On Bonded Inclusions with Circular or Straight Boundaries in Plane Elastostatics, *J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 850-856, 1990.
- [14] Y. Z. Chen, A Survey of New Integral Equations in Plane Elasticity Crack Problem, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, pp. 97-134, 1995.
- [15] O. P. Datsyshyn and H. P. Marchenko, Curvilinear Cracks and Elastic Half-Plane Boundary Interaction, *Fiz. Khim. Mekh. Mater.*, Vol. 20, pp. 64-71, 1984.
- [16] D. P. Rooke and D. A. Jones, Stress Intensity Factors in Fretting Fatigue, *J. Strain Anal.*, Vol. 14, pp. 1-6, 1979.

می‌باشد. نکته مهم در این مدل نحوه ایجاد مسیر رشد ترک در جسم حاوی ترک بوده است.

با توجه به نتایج بدست آمده برای عمر باقیمانده مشخص است که با افزایش تعداد بارهای تماسی متحرک بر روی سطح تماس مقدار عمر باقیمانده کاهش پیدا کرده و به حالت واقعی نزدیک‌تر می‌گردد. در حالت دو بار متحرک متمرکز مقدار عمر یک دهم برابر شده است بنابراین در نظر گرفتن حالت واقعی‌تر بارگذاری در تخمین عمر باقیمانده‌ی جسم بسیار مهم می‌باشد. همچنین در یک بار خاص به عنوان مثال دو بار متمرکز متحرک با افزایش ضریب اصطکاک عمر باقیمانده سطح تحت خستگی تماس غلتشی کاهش می‌یابد. با توجه به جداول 1 تا 2 مشخص است که با افزایش فاصله‌ی بین نوک ترک اولیه با مرز نیم صفحه، عمر باقیمانده افزایش می‌یابد به‌عنوان مثال در زاویه $\beta = \frac{\pi}{2}$ نوک ترک بیش‌ترین فاصله نسبت با مرز نیم صفحه را داراست لذا دارای بیش‌ترین عمر باقیمانده می‌باشد.

7- مراجع

- [1] S. Way, Pitting due to rolling contact, *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*, Vol. 2, pp. 49-58, 1935.
- [2] L. M. Keer, M. D. Bryant, and G. K. Haritos, Subsurface and Surface Cracking due to Hertzian Contact, *Trans. ASME: J. Lubric. Technol.*, Vol. 104, pp. 347-351, 1982.
- [3] L. M. Keer and M. D. Bryant, A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue, *Trans. ASME: J. Lubric. Technol.*, Vol. 105, pp. 198-205, 1983.