



# تحلیل کرانه بالایی شکل هندسی ناحیه تغییرشکل در فرآیند کشش ورق‌های فلزی با قالب گوه‌ای شکل

سید هومن کاظمی<sup>1</sup>، حشمت اله حقیقت<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه

\* کرمانشاه، صندوق پستی 67149-67346، hhaghighat@razi.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 02 آبان 1393

پذیرش: 16 دی 1393

ارائه در سایت: 11 بهمن 1393

کلید واژگان:

شکل‌دهی فلزات

کشش ورق

نیروی کشش

تحلیل کرانه بالایی

شبیه‌سازی اجزا محدود

## چکیده

در مقاله حاضر، فرآیند کشش ورق‌های فلزی در قالب گوه‌ای شکل، با ارائه میدان سرعت جدید، به روش کرانه بالایی تحلیل و به روش اجزا محدود (نرم‌افزار آباکوس) شبیه‌سازی شده است. از جمله موارد مهم در تحلیل کرانه بالایی فرآیندهای شکل‌دهی، انتخاب مرزهای مناسب ناحیه تغییرشکل و نیز ارائه میدان سرعت مجازی است که علاوه بر برآورد نمودن شرط تراکم‌ناپذیری ماده و شرایط مرزی، مطابق با رفتار جریان فلز در ناحیه تغییرشکل باشد. مرز ورودی ناحیه تغییرشکل، سطح منحنی‌نمایی و مرز خروجی سطح استوانه‌ای فرض شده است. در تحلیل‌های گذشته، خطوط جریان فلز در ناحیه تغییرشکل مستقیم (خطی) فرض شده است ولی در واقعیت اینگونه نیست. در کار حاضر، میدان سرعت و همچنین شکل هندسی ارائه‌شده برای ناحیه تغییرشکل، خطوط جریان غیر مستقیم فلز را توجه می‌کند. بر اساس میدان سرعت ارائه شده، توان-های داخلی، برشی، اصطکاکی و نیز توان کل محاسبه شده است. سپس، با توجه به سرعت کشش ورق، نیروی کشش لازم به‌دست آمده است. در پایان نتایج روش تحلیلی با نتایج حاصل از حل اجزا محدود مقایسه شده‌اند. به منظور اعتباردهی به تحلیل حاضر، نتایج به‌دست آمده با نتایج سایر محققان مقایسه شده است. همچنین اثر پارامترهای مختلف شامل درصد کاهش ضخامت و ثابت اصطکاک برشی بر نیروی کشش و زاویه پهنه قالب بررسی شده است.

## An upper bound analysis of the geometric shape of the deformation zone in drawing process of the metal plates through wedge-shaped die

Seyed Hooman Kazemi, Heshmatollah Haghighat \*

Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran.

\* P.O.B. 67346-67149 Kermanshah, Iran, hhaghighat@razi.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 24 October 2014  
Accepted 06 January 2015  
Available Online 31 January 2015

### Keywords:

Metal Forming  
Plate Drawing  
Drawing Force  
Upper Bound Analysis  
Finite Element Method

## ABSTRACT

In the present paper, drawing process of metal plates through a wedge-shaped die, by proposing new velocity field, has been analyzed by upper bound method and simulated by finite element method (Abaqus software). Among the important cases in upper bound analysis of the forming processes is choosing the appropriate boundaries for the deformation zone and offering admissible velocity field that, in addition to satisfying the incompressibility condition and boundary conditions, is consistent with the behavior of metal flow in the deformation zone. The entrance boundary of deformation zone has been assumed exponential curve surface and boundary at exit has been assumed cylindrical surface. In the past analyses, metal flow lines in the deformation zone have been assumed straight but in reality they are not. In the present work, velocity field and also geometric shape of the deformation zone, show that metal flow lines are non-straight. Based on the proposed velocity field, internal powers, shear and frictional and also total power have been calculated. Then, according to the plate pulling velocity, required drawing force has been obtained. Finally, analytical results have been compared with the obtained results of FEM. In order to validate the present analysis, obtained results have been compared with other researchers. Also, the effect of various parameters, such as percentage reduction in thickness and shear friction constant on the drawing force and die optimum angle have been investigated.

## 1- مقدمه

می‌شود. بیشتر سیلان فلز درون قالب توسط نیروی فشاری که از اثر متقابل

فلز با قالب ناشی می‌شود، صورت می‌گیرد.

از مزایای این روش می‌توان به افزایش استقامت کششی ورق به علت

کرنش سخت شدن آن، صرفه‌جویی در ماده و نبود هزینه ماشین‌کاری،

یکی از مهم‌ترین و کم‌هزینه‌ترین فرآیندهای شکل‌دهی بمنظور کاهش سطح

مقطع و ضخامت ورق‌های فلزی، فرآیند کشش است که در آن ماده از درون

قالب مخروطی، گوه‌ای و یا منحنی شکل به‌وسیله نیروی کششی عبور داده

Please cite this article using:

S. H. Kazemi, H. Haghighat, An upper bound analysis of the geometric shape of the deformation zone in drawing process of the metal plates through wedge-shaped die, Modares Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 3, pp. 162-172, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

سرعت بالای انجام فرآیند، تolerانس ابعادی و سطح پایانی خوب نسبت به بعضی از فرایندها و هزینه پایین‌تر آن اشاره کرد.

از جمله روش‌های تحلیل فرآیند کشش می‌توان به کار ایده‌آل<sup>1</sup>، روش قاچی<sup>2</sup>، میدان خط لغزش<sup>3</sup>، روش‌های حدی<sup>4</sup> و روش اجزا محدود<sup>5</sup> اشاره کرد که هر کدام از این روش‌ها معایب و مزایای خود را دارند. به طور مختصر، در روش کار ایده‌آل، اصطکاک و همچنین کار اضافی<sup>6</sup> در نظر گرفته نمی‌شود، در روش قاچی که بر اساس موازنه نیروها است، تغییرات اضافی (کار اضافی) در نظر گرفته نمی‌شود و روش میدان خطوط لغزش تنها برای تغییر شکل‌های صفحه‌ای (دو بعدی) امکان‌پذیر است و به دلیل ترسیمی بودن، زمان‌بر است و روش مناسبی برای حل‌های پارامتریک نیست [1,2].

از میان روش‌های بالا، روش‌های حدی به‌عنوان یک روش تحلیلی و روش اجزا محدود، به صورت گسترده‌ای برای فرآیندهای شکل‌دهی از جمله کشش و اکستروژن به کار می‌روند. روش‌های تحلیل حدی، شامل دو روش تحلیل کرانه بالایی و کرانه پایینی است. در روش کرانه پایینی مقدار نیرویی که محاسبه می‌شود، کمتر از حد مورد نیاز برای انجام فرآیند است. در روش کرانه بالایی، با فرض یک میدان سرعت قابل قبول، نیرویی محاسبه می‌شود که برابر یا بزرگ‌تر از بار مورد نیاز برای ایجاد سیلان پلاستیک ماده است. در این روش اصطکاک و همچنین کار اضافی ناشی از ناپیوستگی‌های سرعت<sup>7</sup> نیز در نظر گرفته می‌شود و بنابراین نسبت به روش‌های دیگر ذکر شده برتری دارد.

باوجود اینکه روش اجزا محدود اطلاعات جزئی فرآیند را در اختیار می‌گذارد، در عین حال زمان قابل توجهی برای مدل‌سازی نیاز دارد و همچنین نمی‌تواند شبیه‌سازی پارامتریک انجام دهد و به ازای هرگونه تغییر در ورودی باید از ابتدا حل را آغاز کرد. در نتیجه استفاده از حل‌های تحلیلی اجازه مطالعه پارامتریک را به پژوهشگر می‌دهد تا به شرایط بهینه برای فرآیند دست یابد.

با توجه به اینکه تحلیل فرآیند اکستروژن نیز شبیه به تحلیل کشش (ورق یا میله) است، تعدادی از مقالات مهم و ایده‌دار اکستروژن نیز بررسی شد.

در سال 1967 اویترز و همکارانش، به بررسی کشش و اکستروژن کرنش صفحه‌ای با قالب گوه‌ای شکل پرداختند. ایشان با استفاده از تحلیل کرانه بالایی، به بررسی اثر پارامترهای مختلف از جمله کاهش سطح مقطع، نیم زاویه قالب و ثابت اصطکاک برشی<sup>8</sup> بر روی نیروی فرآیند پرداختند. آن‌ها مرزهای ناپیوستگی سرعت در ناحیه تغییر شکل<sup>9</sup> را استوانه‌ای فرض کردند و میدان سرعت ارائه شده توسط آن‌ها، فقط حرکت شعاعی جریان ماده در ناحیه تغییر شکل را توجیه می‌کند. در پایان نیز نتایج خود را با آزمایش‌هایی که لنکاستر و او انجام داده بودند، مقایسه کردند [3,4].

سوری و همکارانش در سال 1968، به بررسی کشش و اکستروژن کرنش صفحه‌ای ماده صلب-پلاستیک کامل، با استفاده از روش خطوط لغزش پرداختند. نتایج حاصل از این کار پیدا کردن فشار اکستروژن یا تنش کششی لازم به ازای زوایای مختلف قالب بود [5].

آتکینز و کدل در همان سال اثر کار سختی و کار اضافه را در فرآیند کشش میله از داخل قالب مخروطی با استفاده از تعادل نیروها بررسی کردند. به ازای ثابت‌های اصطکاک متغیوت، اختلاف تنش کششی حاصل از تأثیر دادن کار سختی و یا استفاده از تنش سیلان متوسط ماده<sup>10</sup>، بررسی شد و حداکثر اختلاف برابر با 8 درصد به دست آورده شد [6].

ازاکادا و نیمی در سال 1975، در فرآیند اکستروژن متقارن محوری با فرض ماده صلب-پلاستیک کامل، عبارتی تعمیم‌یافته برای مرز میدان جریان شعاعی ارائه دادند و مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل را به صورت حالت‌های خطی، کروی، تابعی خطی از  $\theta$ ، بیضوی و غیره فرض کرده و به بررسی آن‌ها پرداختند. نتیجه‌ای که بدست آوردند این بود که نتایج حاصل از مرز بیضوی نتیجه بهتری نسبت به بقیه حالت‌ها در مقایسه با آزمایش دارد [7].

اویترز در سال 1983، به بررسی میدان تغییر شکل کروی، مثلثی و دوزنقه‌ای در فرآیند کشش سیم با قالب مخروطی پرداخت و بیان کرد که مناسب‌ترین مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل، مرز کروی است. میدان سرعت وی فقط شامل مولفه شعاعی است [8].

در سال 1984 شیمین و آکسلی، به بررسی فرآیند کشش کرنش صفحه‌ای ماده در قالب دایروی با روش خطوط لغزش پرداختند و نتایج را با آزمایش و نتایج روش قاچی بدست آمده از مرجع دیگری، مقایسه کردند و یافتند که نتایج روش خطوط لغزش با نتایج آزمایش مطابقت بهتری دارد [9].

پنگ در سال 1990 به تحلیل کرانه بالایی اکستروژن میله در قالب مخروطی پرداخت، وی در این مقاله با رد نظر ازاکادا و اویترز، برای اولین بار عنوان کرد که مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل، یکسان نیست و هر دو مرز از یک الگو یکسان (کروی، منحنی دلخواه<sup>11</sup> و یا غیره) تبعیت نمی‌کنند. وی در پژوهش خود فرض کرد که مرز ناحیه ورودی، سطح منحنی بیضی‌وار است و مرز خروجی کروی به مرکز رأس زاویه قالب است [10].

توگنو در سال 1991، به آزمایش و تحلیل تغییر شکل فرآیند اکستروژن میله‌های تک‌لایه و چندلایه پرداخت، نتیجه مهم در آزمایش‌های وی این است که، خطوط جریان ماده در داخل ناحیه تغییر شکل، راست و مستقیم نیستند بلکه دارای خمیدگی هستند. ولی وی نتوانسته است این موضوع را در تحلیل خود بگنجانند و خطوط را مستقیم در نظر گرفت [11].

روبو و همکارانش در سال 2003، به تحلیل فرآیند کشش تحت شرایط کرنش صفحه‌ای در قالب گوه‌ای به روش کرانه بالایی پرداختند، ایده آن‌ها در این مقاله استفاده از چند بلوک صلب مثلثی<sup>12</sup> با مرز خطی، برای تحلیل ناحیه تغییر شکل است. در پایان نیز به بررسی تأثیر تعداد بلوک‌ها در مقدار نیروی کشش پرداخته شد. [12]. استفاده بلوک‌های صلب در ناحیه تغییر شکل، به این صورت است که این ناحیه، توسط چند مثلث با اضلاع دلخواه پوشانده می‌شود. بنابراین مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل نیز خطی است. تمام ذرات ماده در هر مثلث، فقط یک سرعت مشخص دارند. با بدست آوردن سرعت نسبی روی خطوط بین هر دو مثلث و استفاده از روابط محاسبه توان، توان کل مورد نیاز فرآیند بدست می‌آید. در این روش میدان سرعتی برای تمام ذرات داخل ناحیه تغییر شکل ارائه نمی‌شود و اصولاً نمی‌توان بر اساس این مدل‌سازی، خطوط جریان حرکت ماده را مدل کرد. در واقع ساده‌ترین مدلی که برای تحلیل با روش کرانه بالایی می‌توان در نظر

10- Mean Flow Stress  
11- Arbitrarily Curved  
12- Triangular Rigid Block

1- Ideal work  
2- Slab method  
3- Slip line field  
4- Limit analysis  
5- FEM  
6- Redundant Work  
7- Velocity Discontinuity  
8- Shear Friction Constant  
9- Deformation Zone

گرفت، این مدل است.

روپیو و همکارانش در سال 2005، از تحلیل قاچی برای بررسی فرآیند کشش ورق و میله استفاده کرده و نتایج آن را با حل اجزا مقایسه نمودند. نتیجه‌ای که بدست آوردند این است که نتایج شبیه‌سازی دقیق‌تر است ولی نتایج تحلیل قاچی در زمان کمتری بدست می‌آید و نیز دقت کمتری دارد [13].

روپیو و همکارانش در سال 2009 نیز، به تحلیل کرانه بالایی با استفاده از فقط یک بلوک مثلثی با مرز ورودی و خروجی مستقیم، در فرآیند کشش ورق از قالب گوه‌ای پرداختند، ایشان در این مقاله به جای ماده صلب-کاملاً پلاستیک از شیوه جدیدی برای تأثیر دادن کرنش سختی ماده، استفاده کردند و نتایج را با حالت صلب-پلاستیک کامل مقایسه کردند. نتیجه حاصل این بود که مقدار نیرو با تأثیر دادن کرنش سختی بیشتر از حالت صلب-پلاستیک کامل است اما زاویه بهینه قالب در دو حالت اختلاف ناچیزی دارد [14].

در سال 2014 پانتینی، حلی برای بدست آوردن نیروی فرآیند کشش ورق سه بعدی ارائه داد. با این تفاوت که قالب استفاده شده به گونه‌ای است که علاوه بر کاهش ضخامت ورق، عرض ورق نیز کاسته می‌شود. در واقع سطح مستطیلی ورق (عمود بر محور کشش)، پس از عبور از قالب به سطح با اضلاع کوچکتر تبدیل می‌شود. وی ناحیه تغییرشکل را به صورت بلوک‌های چهاروجهی<sup>1</sup> صلب با مرز خطی در نظر گرفت. ماده را پلاستیک کامل فرض کرده و از ضریب اصطکاک ثابت استفاده کرد. در پایان به مقایسه نتایج حل خود با شبیه‌سازی پرداخت و نتایج بدست آمده از حل خود را قابل قبول اعلام کرد [15].

به‌طور خلاصه در تعدادی از مقالات از روش قاچی استفاده شده است که به دلایل ذکر شده دقت کافی ندارد، در تعدادی دیگر از روش کرانه بالایی استفاده شده است ولی ناحیه تغییرشکل به صورت بلوک‌های صلب در نظر گرفته شده است که در این حالت مرزهای ناپیوستگی (مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییرشکل) سرعت به صورت خطوط مستقیم هستند و این با واقعیت فرآیند کشش متفاوت است. و در واقع در این تحلیل‌ها، میدان سرعتی که بتواند سرعت در تک تک نقاط ناحیه تغییرشکل را بدهد ارائه نمی‌شود در نتیجه خطوط جریان ذرات را نمی‌توانند پیش‌بینی کنند. در تعدادی دیگر هر دو مرز ورودی و خروجی یکسان در نظر گرفته شد، (مانند مرز استوانه‌ای یا کروی)، که این نیز با توجه به نتایج شبیه‌سازی اجزا محدود و مقاله پنگ [10] رد می‌شود. زیرا مرز ورودی و خروجی یکسان، هم‌خوانی با واقعیت فرآیند ندارد و معادله دو مرز باید با هم متفاوت باشد. [10].

در کار حاضر، علاوه بر استفاده از روش کرانه بالایی، با توجه به نتایج آزمایش‌ها و تحلیل مقالات [10,11] و همچنین نتایج شبیه‌سازی اجزا محدود، مرز ورودی ناحیه تغییرشکل، سطحی نمایی<sup>2</sup> و مرز خروجی سطحی استوانه‌ای در نظر گرفته شد.

با در نظر گرفتن مرز ورودی نمایی، برای اولین بار در فرآیندهای کشش و نیز در اکستروژن در قالب گوه‌ای شکل، میدان سرعتی در دستگاه استوانه‌ای ارائه شد که علاوه بر مؤلفه سرعت شعاعی، مؤلفه سرعت مماسی را نیز داراست که می‌توان بوسیله این مؤلفه سرعت، راست و مستقیم نبودن خطوط جریان ماده در ناحیه تغییرشکل را با توجه به نتایج شبیه‌سازی اجزا محدود و نیز نتایج آزمایش‌های مقاله [11]، توجیه و مدل‌سازی کرد. خطوط جریان

داخل ناحیه تغییرشکل با مرزهای ورودی و خروجی ناحیه نباید اشتباه گرفته شود.

## 2- تحلیل کرانه فوقانی و هندسه فرآیند

اویتر [8] در هندبوک خود اشاره کرده است که پراگر در کتاب خود در مورد اساس روش کرانه بالایی بیان می‌کند که: "از میان تمامی میدان‌های نرخ کرنش (میدان‌های سرعت)، تنها میدانی قابل قبول است که عبارت رابطه (1) را حداقل کند" [16].

$$J^* = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} dV + \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{S_v} |\Delta v| dS + \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{S_f} |\Delta v| dS \quad (1)$$

$J^*$  حد بالایی توان مورد نیاز برای انجام فرآیند، عبارت اول سمت راست تساوی، توان داخلی تغییرشکل است که بر مبنای میدان سرعت در نظر گرفته شده، نرخ‌های کرنش<sup>3</sup> محاسبه و در عبارت قرار می‌گیرد، عبارت دوم، توان سطوح ناپیوستگی سرعت و عبارت سوم، توان اصطکاکی است.  $\sigma_0$  تنش سیلان متوسط ماده،  $\varepsilon_{ij}$  نرخ کرنش،  $\Delta v$  مقدار سرعت نسبی روی سطوح ناپیوستگی سرعت و سطوح اصطکاکی،  $m$  ثابت اصطکاک برشی،  $V$  حجم ناحیه تغییرشکل پلاستیک،  $S_v$  و  $S_f$  به ترتیب مساحت سطوح ناپیوستگی سرعت و اصطکاکی است. با توجه به تقارن هندسی فرآیند، فقط نیمه آن در شکل 1 آورده شد. ورق با ضخامت  $2t_f$  به قالب با زاویه رأس  $2\alpha$  وارد و با ضخامت  $2t_f$  از آن خارج می‌گردد.

گاهی هندسه فرآیند بصورتی است که میدان سرعت را تنها با یک عبارت ریاضی نمی‌توان بیان کرد. در این حالت، بهترین کار تقسیم حوزه تغییرشکل به تعدادی ناحیه جدا از هم می‌باشد [8]. در این صورت ناپیوستگی سرعت در طول مرزهای جداکننده نواحی (در کار حاضر مرز  $S_1$  و  $S_2$ )، به وجود می‌آید که سطوح ناپیوستگی سرعت نامیده می‌شوند.

در فرآیندهای کشش، عرض ورق نسبت به ضخامت آن بسیار بیشتر است، بنابراین در اینجا فرآیند کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شد. برای تحلیل، فلز به سه ناحیه تقسیم شد. مرکز مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  در  $O$  محل تقاطع پروفیل قالب و خط میانی قرار دارد. مرز  $S_2$  در خروج ماده از ناحیه تغییرشکل، سطحی استوانه‌ای، و مرز  $S_1$  در ورود ماده، سطحی نمایشی شکل است. معادلات این دو مرز به ترتیب رابطه (2) و (3) است.

$$r(\theta, \rho_f) = \rho_f \quad (2)$$

$$r(\theta, \rho_i) = \rho_i \exp\left[\frac{b(\theta - \alpha)}{\alpha}\right] \quad (3)$$

تابع مرز در داخل ناحیه تغییرشکل توسط رابطه (4) بیان می‌شود.

$$r(\theta, \rho) = \rho \exp\left[\frac{b(\theta - \alpha)}{\alpha} \frac{\rho - \rho_f}{\rho_i - \rho_f}\right] = \rho g(\theta, \rho) \quad (4)$$

$$g(\theta, \rho) = \exp\left[\frac{b(\theta - \alpha)}{\alpha} \frac{\rho - \rho_f}{\rho_i - \rho_f}\right]$$

$\rho$  محور شعاعی به مرکز  $O$  و روی سطح قالب است و مقدار آن از  $\rho_f$  تا  $\rho_i$  تغییر می‌کند (شکل 1).  $b$  پارامتر هندسی شکل مرزهای ناحیه تغییرشکل است. با توجه به شکل 2، برای مرز ورودی، اگر  $b < 0$  باشد مرز باز می‌شود (از رأس  $O$  فاصله می‌گیرد) و اگر  $b > 0$  باشد مرز در جهت رأس  $O$  حرکت می‌کند. اگر  $b = 0$  باشد، مرز به استوانه تبدیل می‌شود که همان نمونه ارائه‌شده توسط اویتر است [3]. در واقع  $b = 0$  حالت خاصی از تحلیل حاضر

3- Strain Rates

1- Tetrahedral  
2- Exponential Surface

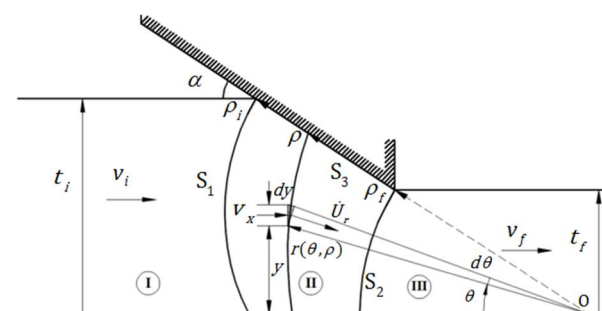
است.

باید به این نکته اشاره کرد که  $b$  یک مقدار بحرانی دارد (رابطه 5) و آن زمانی است که مرز ورودی و خروجی در  $\theta = 0$  به هم می‌رسند (شکل 3) بنابراین:

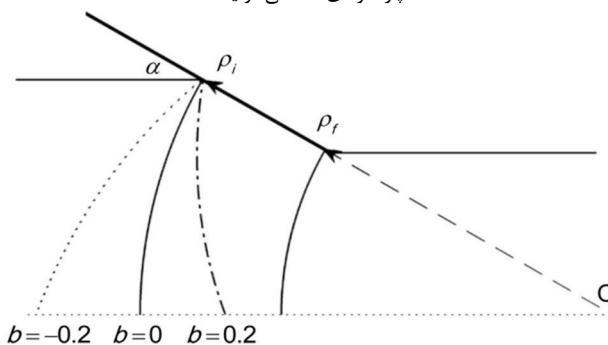
$$\begin{aligned} r_i(\theta = 0, \rho_i) &= r_f(\theta = 0, \rho_f) \\ \rho_i \exp[-b] &= \rho_f \\ b_{\max} = \varepsilon_1 &= \ln\left(\frac{\rho_i}{\rho_f}\right) = \ln\left(\frac{t_i}{t_f}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

## 1-2- میدان سرعت مجاز و نرخ کرنش هر ناحیه

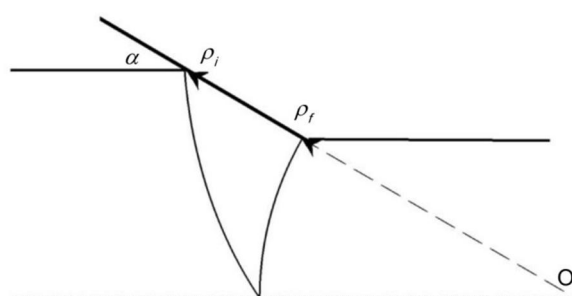
اولین گام برای حل یک مسأله توسط روش کرانه بالایی، مشخص کردن یک میدان مجاز سرعت است. با انتخاب مرز ورودی و خروجی ناحیه تغییر شکل، می‌توان میدان سرعت را بدست آورد. هر چه این میدان بتواند خطوط جریان ماده در ناحیه تغییر شکل را به‌خوبی مدل کند، نتایج حاصل از حل به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود.



شکل 1 شماتیک کشش ورق فلزی به داخل قالب گوه‌ای، نواحی تغییر شکل و پارامترهای هندسی فرآیند



شکل 2 اثر پارامتر  $b$  روی مرز ورودی ناحیه تغییر شکل



شکل 3 نمایش حالت بحرانی  $b$

در حل حاضر، سه ناحیه در نظر گرفته شده است (شکل 1)، در ناحیه 1 ماده تغییر شکل نیافته (صلب) است و سرعت ماده در این قسمت  $v_i$  است. ماده در ناحیه 2 تغییر شکل می‌یابد و ضخامت آن کم می‌شود، سپس وارد ناحیه 3 می‌شود و از آنجا بدون تغییر شکل بیشتر خارج می‌شود. سرعت ماده در این ناحیه  $v_f$  است.

از آنجا که تغییر شکل پلاستیک در فلزات بدون تغییر حجم می‌دهد، بنابراین میدان سرعت هر ناحیه باید در شرط تراکم‌ناپذیری صدق کند و نیز شرایط مرزی را برآورد نماید. قانون تراکم‌ناپذیری (حجم ثابت) در سیستم مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (6) است [8].

$$\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + \dot{\varepsilon}_{zz} = 0 \quad (6)$$

روابط (7) میدان نرخ کرنش برحسب میدان سرعت، در مختصات استوانه‌ای است [8].

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r} \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{U}_r}{r} \\ \dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial z} \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial \theta} - \frac{\dot{U}_\theta}{r} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial \theta} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial z} + \frac{\partial \dot{U}_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

## 1-1-2- ناحیه ورودی

در ناحیه ورودی سرعت ماده ثابت و به مقدار  $v_i$  است. با توجه به کرنش صفحه‌ای بودن فرآیند، سرعت در راستای  $z$  صفر خواهد بود و میدان سرعت در مختصات استوانه‌ای به صورت رابطه (8) است.

$$\begin{aligned} \dot{U}_r &= -v_i \cos \theta \\ \dot{U}_\theta &= +v_i \sin \theta \\ \dot{U}_z &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

با توجه به روابط (7) و این‌که ماده در این ناحیه تغییر شکل نمی‌یابد، تمام مؤلفه‌های نرخ کرنش در این ناحیه صفر است.

## 2-1-2- ناحیه خروجی

ماده از ناحیه تغییر شکل با سرعت ثابت  $v_f$  وارد این ناحیه می‌شود. سرعت در راستای  $z$  صفر است و بنابراین میدان سرعت به صورت رابطه (9) خواهد بود. مانند ناحیه اول، تمام مؤلفه‌های نرخ کرنش صفر است.

$$\begin{aligned} \dot{U}_r &= -v_f \cos \theta \\ \dot{U}_\theta &= +v_f \sin \theta \\ \dot{U}_z &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

## 3-1-2- ناحیه تغییر شکل

ماده در این ناحیه تغییر شکل می‌یابد و ضخامت آن با عبور از قالب کم می‌شود. این ناحیه بین قالب، سطوح  $S_1$ ،  $S_2$  و خط میانی قرار دارد. با توجه به کرنش صفحه‌ای بودن فرآیند،  $\dot{U}_z = 0$  است.

با توجه به وجود تعادل جریان حجمی در ناحیه تغییر شکل، مؤلفه شعاعی میدان سرعت ( $\dot{U}_r$ )، به‌دست می‌آید (شکل 1). نرخ جریان حجمی افقی عبوری از  $dy$ :

جابجایی ذرات در ناحیه تغییرشکل با استفاده از روابط میدان سرعت (17) در برنامه متلب<sup>3</sup> برنامه‌نویسی و به‌دست آورده شد و برای یک نمونه، خطوط جریان در شکل 4 نشان داده شد.

خطوط جریان ماده در نواحی 1 و 3، مستقیم است و ماده با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بعد از رسیدن ماده به ناحیه تغییرشکل، خطوط جریان ماده دیگر خطی و مستقیم نیست بلکه با توجه به مولفه سرعت مماسی (زاویه‌ای)<sup>4</sup>، دارای خمیدگی می‌باشد. به منظور بهتر دیده شدن خمیدگی خطوط، خط‌چین‌های مستقیم و صاف در ناحیه تغییرشکل در شکل 4 رسم شد.

با توجه به روابط (7)، (17) و اینکه  $U_z = 0$  است، نرخ‌های کرنش غیر صفر ناحیه تغییرشکل برابر رابطه (18) است:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{rr} &= -\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = v_i \frac{\rho_i}{\rho^2 g} \left[ \left( 1 - \rho \frac{\partial g}{\partial r} \right) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \right] \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} v_i \frac{\rho_i}{\rho^2 g} \left\{ \left[ \rho^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{g^2} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho \frac{\partial g}{\partial r} - 1 \right] \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cos \theta \right\}\end{aligned}\quad (18)$$

## 2-2- محاسبه توان شکل‌دهی

با توجه به رابطه (1)، توان کل شکل‌دهی در این فرآیند شامل سه قسمت است.

الف) توان داخلی تغییرشکل

ب) توان مصرفی برشی روی سطوح ناپیوستگی سرعت

ج) توان مصرفی اصطکاکی روی سطح اصطکاکی

## 2-2-1- توان داخلی

توان داخلی تغییرشکل از رابطه (19) به‌دست می‌آید.

$$\dot{W}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \quad (19)$$

در نواحی 1 و 3، توان داخلی به علت تغییرشکل نیافتن، صفر است. برای ناحیه تغییرشکل،  $dV$  جزء المان حجمی ماده است و از رابطه (20) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}dV &= r dr d\theta \\ dV &= \rho g \left( g + \rho \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) d\rho d\theta\end{aligned}\quad (20)$$

توان داخلی ناحیه تغییرشکل با قرار دادن روابط نرخ کرنش (18) و رابطه (20) در رابطه (19) به‌دست می‌آید. پس:

$$\dot{W}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_0^\alpha \int_{\rho_f}^{\rho_i} \sqrt{\dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{r\theta}^2} \rho g \left( g + \rho \frac{\partial g}{\partial \rho} \right) d\rho d\theta \quad (21)$$

کرنش موثر در حالت کرنش صفحه‌ای بر اساس معیار وون میزز برابر رابطه (22) است:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{t_i}{t_f} \quad (22)$$

$\sigma$  رابطه تنش-کرنش موثر (رابطه توانی) ماده مورد استفاده در فرآیند

$$dQ = v_x (dy) \quad (10)$$

نرخ جریان حجمی شعاعی عبوری از  $rd\theta$ :

$$dQ = -\dot{U}_r (rd\theta) \quad (11)$$

با توجه به تعادل جریان حجمی، نرخ جریان ورودی و خروجی (شکل 1) با هم برابرند، بنابراین طبق رابطه (12) داریم:

$$\dot{U}_r = -\frac{v_x dy}{r d\theta} \quad (12)$$

با توجه به قانون حجم ثابت (ثابت بودن دبی جریان عبوری از هر مقطع) طبق رابطه (13) داریم:

$$v_x = v_i \frac{\rho_i}{\rho} \quad (13)$$

از هندسه فرآیند در شکل 1 داریم:

$$y = r \sin \theta \quad (14)$$

با دیفرانسیل گرفتن از طرفین رابطه (14) و استفاده از روابط 3، 12 و 13،  $\dot{U}_r$  برابر رابطه (15) می‌شود:

$$\dot{U}_r = -v_i \frac{\rho_i}{\rho} \left( \cos \theta + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \theta} \sin \theta \right) \quad (15)$$

باید توجه کرد که سرعت زاویه‌ای با توجه به قانون تراکم‌ناپذیری (6) محاسبه خواهد شد و تاثیری در جریان شعاعی ندارد. حال با توجه به رابطه تراکم‌ناپذیری (6)، رابطه (4)، رابطه سرعت  $\dot{U}_r$  و شرایط مرزی روی صفحه میانی و سطح قالب، می‌توان  $\dot{U}_\theta$  در داخل ناحیه دوم را یافت. به دلیل کرنش صفحه‌ای بودن فرآیند و نبود سرعت در راستای  $z$ ،  $\dot{\epsilon}_{zz} = 0$  است. بنابراین:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{U}_r}{r} = 0 \\ r \frac{\partial \dot{U}_r}{\partial r} + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} + \dot{U}_r &= \frac{\partial}{\partial r} (r \dot{U}_r) + \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ v_i \rho_i \frac{\partial}{\partial r} \left[ g \left( \cos \theta + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \theta} \sin \theta \right) \right] &= \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} \\ v_i \rho_i \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (g \sin \theta) \right] &= v_i \rho_i \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (g \sin \theta) \right] = \frac{\partial \dot{U}_\theta}{\partial \theta} \\ \dot{U}_\theta &= v_i \rho_i \frac{\partial}{\partial r} (g \sin \theta) \\ \dot{U}_\theta &= v_i \rho_i \frac{\partial g}{\partial r} \sin \theta = v_f \rho_f \frac{\partial g}{\partial r} \sin \theta \\ \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial \rho}} = \\ &= \frac{b(\theta - \alpha)}{\alpha} \frac{1}{\rho_i - \rho_f} \frac{1}{1 + \frac{b(\theta - \alpha)}{\alpha} \frac{\rho}{\rho_i - \rho_f}}\end{aligned}\quad (16)$$

همان‌طور که از  $\dot{U}_\theta$  در رابطه (16) مشخص است در  $\theta = 0$ ،  $\dot{U}_\theta = 0$  و در سطح قالب  $\theta = \alpha$  نیز با توجه به صفر شدن  $\frac{\partial g}{\partial r}$ ،  $\dot{U}_\theta = 0$  است، بنابراین هر دو شرط مرزی نیز برقرار است.

به طور خلاصه، میدان سرعت برای ناحیه تغییرشکل برابر است با:

$$\begin{aligned}\dot{U}_r &= -v_i \frac{\rho_i}{\rho} \left( \cos \theta + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ \dot{U}_\theta &= v_i \rho_i \frac{\partial g}{\partial r} \sin \theta \\ \dot{U}_z &= 0\end{aligned}\quad (17)$$

این اولین بار است که در فرآیند کشش و نیز اکستروژن ورق‌های تک فلزی یا چندفلزی<sup>1</sup> در قالب خطی، مولفه  $\dot{U}_\theta$  ارائه می‌شود.  $\dot{U}_\theta$  می‌تواند حرکت غیر مستقیم خطوط جریان ماده داخل ناحیه تغییرشکل را توجیه کند. با استفاده از روش اویلر<sup>2</sup> در حل عددی معادلات دیفرانسیل درجه یک،

3- Matlab  
4- Angular Velocity

1- Multi Metal  
2- Euler

$$\cos \beta = \frac{1}{(1 + (\frac{b}{a})^{2.05})} \quad (32)$$

با توجه به قسمت بزرگ‌نمایی شده در شکل 6، و با استفاده از رابطه (32) سرعت نسبی مماسی برای سطح ناپیوستگی  $S_1$  برابر است با:

$$|\Delta v_1| = \left| v_i \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta + \beta \right) - \dot{U}_r|_{(\theta, \rho_i)} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) - \dot{U}_\theta|_{(\theta, \rho_i)} \cos \beta \right|$$

$$|\Delta v_1| = \left| v_i \left( 1 - \rho_i \frac{\partial g}{\partial r} \frac{1}{1 + (\frac{b}{a})^2} \right) \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} \sin \theta \right| \quad (33)$$

با بدست آمدن المان‌های دو مرز و سرعت نسبی روی آن‌ها، مقدار توان برشی روی سطوح ناپیوستگی بدست می‌آید. پس:

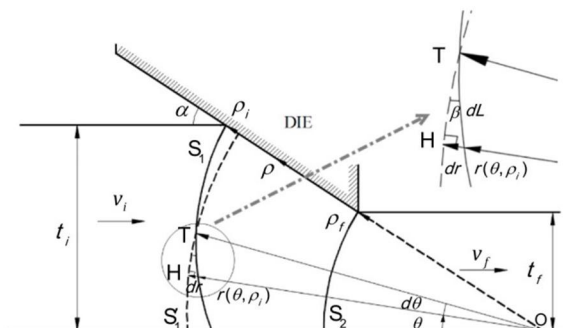
$$\dot{W}_{S_1} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_i \rho_i \left( 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \int_0^\alpha g(\theta, \rho_i) \left( 1 - \rho_i \frac{\partial g}{\partial r} \frac{1}{1 + (\frac{b}{a})^2} \right) \sin \theta d\theta \quad (34)$$

$$\dot{W}_{S_2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_f \rho_f \int_0^\alpha \left( 1 - \rho_f \frac{\partial g}{\partial r} \right) \sin \theta d\theta \quad (35)$$

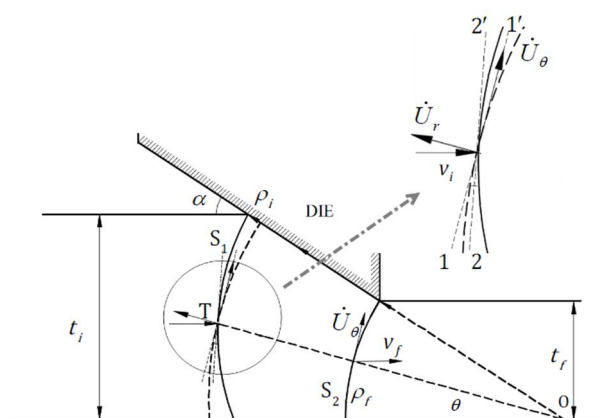
### 2-2-3- توان اصطکاکی

توان مصرفی سطح اصطکاکی بین قالب و ماده از رابطه (36) محاسبه می‌شود.

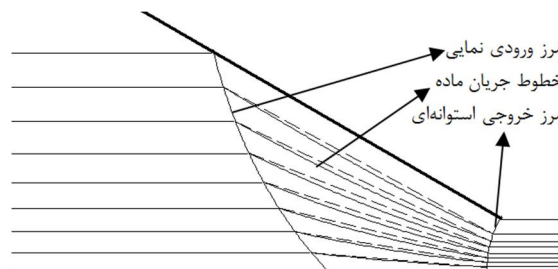
$$\dot{W}_f = \frac{m \sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{S_3} |\Delta v| dS \quad (36)$$



شکل 5 شماتیک مرز ورودی و خروجی برای محاسبه المان سطح



شکل 6 شماتیک مرز ورودی و خروجی و نمایش بردارهای سرعت روی مرزها



شکل 4 حرکت غیر خطی خطوط جریان ماده در ناحیه تغییر شکل ( $b > 0$ )

است. بنابراین  $\sigma_0$  (تنش سیلان متوسط ماده)، با استفاده از رابطه (23) به دست می‌آید.

$$\sigma_0 = \frac{\int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma d\epsilon}{\bar{\epsilon}} \quad (23)$$

### 2-2-2- توان برشی

توان مصرفی روی سطوح ناپیوستگی سرعت از رابطه (24) محاسبه می‌شود.

$$\dot{W}_s = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{S_v} |\Delta v| dS \quad (24)$$

با توجه به شکل 5، برای  $dS$  مربوط به مرز  $S_2$  داریم:

$$dS_2 = \rho_f d\theta \quad (25)$$

برای تاکید دوباره، باید ذکر شود که عرض ورق، با توجه به کرنش صفحه‌ای بودن فرآیند، در روابط ظاهر نمی‌شود. برای محاسبه  $dS$  مربوط به مرز  $S_1$ ، با توجه به مثلث با راس  $H$  در شکل 5، با کمک گرفتن از خط‌چین دایروی  $S_1$ ، داریم:

$$@S_1 \rightarrow r = r(\theta, \rho_i) = \rho_i g(\theta, \rho_i) \quad (26)$$

$$(dL)^2 = (dr)^2 + [(r + dr)d\theta]^2 \quad (27)$$

$$(dL)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (drd\theta)^2 + 2rdr(d\theta)^2$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های درجه بالا، رابطه (28) نتیجه می‌شود:

$$dL = ((rd\theta)^2 + (dr)^2)^{0.5} \quad (28)$$

حال با توجه به رابطه (4):

$$\left. \frac{dr}{d\theta} \right|_{\rho=\rho_i} = \frac{b}{a} \rho_i g(\theta, \rho_i) \quad (29)$$

با جایگذاری روابط (26) و (29) در رابطه (28) و با توجه به این که عرض ورق واحد است ( $dL=dS_1$ )، بنابراین:

$$dS_1 = \rho_i g(\theta, \rho_i) \sqrt{1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2} d\theta \quad (30)$$

حال باید سرعت نسبی مماسی روی هر دو مرز  $S_1$  و  $S_2$  محاسبه شود. جهت  $\dot{U}_r$  و  $\dot{U}_\theta$  در جهت مثبت  $r, \theta$  رسم شد (شکل 6). سرعت نسبی مماسی برای سطح ناپیوستگی  $S_2$  برابر است با (رابطه 31):

$$|\Delta v_2| = \left| v_f \sin \theta - \dot{U}_\theta|_{r=\rho_f} \right| = \left| v_f \left( 1 - \rho_f \frac{\partial g}{\partial r} \right) \sin \theta \right| \quad (31)$$

خط 1'-1 مماس بر قوس دایروی و خط 2'-2 مماس بر  $S_2$  در نقطه  $T$  هستند (شکل 6). باید مؤلفه‌های سرعت در جهت مماس بر سطح  $S_1$  (خط 2'-2) مشخص شوند تا بتوان سرعت نسبی روی این سطح را بدست آورد. زاویه بین خطوط 1'-1 و 2'-2 همان زاویه  $\beta$  (زاویه تقاطع قوس دایروی و خط نمایی در شکل 5) است. پس با توجه به شکل 6، برای سطح ناپیوستگی  $S_1$  داریم:

$$\tan \beta = \left. \frac{dr}{rd\theta} \right|_{r=\rho_i} = \frac{\frac{b}{a} \rho_i g(\theta, \rho_i)}{\rho_i g(\theta, \rho_i)} = \frac{b}{a}$$

$dS$  جزء المان سطح برای سطح  $S_3$  و  $m$  ثابت اصطکاک برشی بین دیواره قالب و ماده است.

$$dS = dp$$

$$|\Delta v| = \left| \dot{U}_r \right|_{\theta=\alpha} = v_i \frac{\rho_i}{\rho} (\cos \alpha + \frac{b}{\alpha} \frac{\rho - \rho_f}{\rho_i - \rho_f} \sin \alpha)$$

$$\dot{W}_f = \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}} v_i \rho_i \int_{\rho_f}^{\rho_i} \frac{1}{\rho} (\cos \alpha + \frac{b}{\alpha} \frac{\rho - \rho_f}{\rho_i - \rho_f} \sin \alpha) d\rho \quad (37)$$

#### 2-2-4- نیروی شکل‌دهی

مجموع توان داخلی، برشی و اصطکاکی، توان خارجی مورد نیاز برای انجام فرآیند است. با توجه به ضخامت نهایی ماده، سرعت آن در قسمت خروجی قالب و روابط (39، 40)، می‌توان مقدار تنش کششی و نیروی مورد نیاز برای انجام فرآیند را به‌دست آورد.

توان، نیرو و تنش کششی مورد نیاز برای انجام فرآیند به ترتیب برابرند با:

$$J^* = \dot{W}_i + \dot{W}_{s1} + \dot{W}_{s2} + \dot{W}_f \quad (38)$$

$$F_d = \frac{\dot{W}_i + \dot{W}_{s1} + \dot{W}_{s2} + \dot{W}_f}{v_f} \quad (39)$$

$$\sigma_d = \frac{F_d}{t_f} \quad (40)$$

علت اینکه عرض ورق در روابط ظاهر نشد، کرنش صفحه‌ای بودن فرآیند است و عرض ورق، واحد در نظر گرفته شد. روابط (21، 23، 34، 35، 37، 38، 39 و 40) با استفاده از متلب کدنویسی شد.

#### 3- شبیه‌سازی اجزا محدود

برای مقایسه و اعتباردهی به نتایج تحلیلی، از شبیه‌سازی اجزا محدود در نرم‌افزار آباکوس<sup>1</sup> استفاده شد. قالب صلب و ورق شکل‌پذیر در بخش ایجاد قطعه، به صورت دو بعدی مدل شدند. به دلیل تقارن هندسه، نصف فرآیند مدل شد. طول ورق 60 میلی‌متر، ضخامت اولیه آن 10 میلی‌متر است. ضخامت نهایی ورق با توجه به میزان کاهش ضخامت‌های مختلف محاسبه و وارد شد و فرآیند به ازای زوایای مختلف قالب انجام شد. برای اینکه تحلیل کرنش صفحه‌ای باشد، مقدار عرض ورق 1 میلی‌متر در قسمت مدیریت بخش<sup>2</sup> در بخش خاصیت<sup>3</sup> اعمال شد.

در بخش خاصیت، مشخصات مکانیکی و منحنی تنش-کرنش موثر (کرنش سختی) جدول 1، برای ورق آلومینیوم 1100-0 وارد نرم‌افزار شد [19]. به دلیل اینکه حل تحلیلی باید با واقعیت فرآیند شکل‌دهی ورق مقایسه شود، در شبیه‌سازی از منحنی تنش-کرنش مؤثر استفاده شد و از تنش سیلان میانگین استفاده نشد.

به علت این که سرعت شکل‌دهی (کشش ورق) پایین است و همچنین عموماً فرآیندهای شکل‌دهی به صورت شبه‌استاتیکی مدل می‌شوند [17]، در کار حاضر نیز فرآیند شبه‌استاتیکی<sup>4</sup> در نظر گرفته شد و برای این کار، حلگر صریح دینامیکی<sup>5</sup> در بخش گام<sup>6</sup> نرم‌افزار انتخاب شد. در تحلیل فرآیند شبه-استاتیکی با حلگر دینامیکی باید توجه داشت که مقدار انرژی جنبشی در طول فرآیند نباید از 5 تا 10 درصد انرژی داخلی بیشتر شود زیرا در این صورت تحلیل شبه‌استاتیکی نخواهد بود [17]. در تحلیل حاضر این نکته نیز

در نظر گرفته شد.

به دلیل تغییر شکل‌های بزرگ در فرآیندهای شکل‌دهی و در فرآیند حاضر و بمنظور جلوگیری از اعوجاج المان‌ها<sup>7</sup>، المان بندی انطباقی<sup>8</sup> در بخش گام نرم‌افزار، اعمال شد. مش‌بندی تطبیقی اجازه می‌دهد یک مش با کیفیت بالا را در سرتاسر حل، حتی زمانی که تغییر شکل‌های بزرگ اتفاق می‌افتد، با اجازه دادن به مش برای حرکت مستقلانه نسبت به ماده، حفظ کرد. در مش-بندی تطبیقی تنها گره‌ها حرکت می‌کند و هندسه مش بدون تغییر باقی می‌ماند [17].

مقدار  $m$  در فرآیندهای شکل‌دهی سرد، 0/05 تا 0/15 فرض می‌شود [18]، که در این مقاله با توجه به اینکه میزان اصطکاک بین ورق و قالب ناچیز نیست، این مقدار، 0/15 در نظر گرفته شد. در نرم‌افزار آباکوس برای اعمال ضریب  $m$  (بر خلاف ضریب اصطکاک کولومب که مستقیماً به صورت ضریب در نرم‌افزار وارد می‌شود)، باید تنش اصطکاک برشی وارد شود. بنابراین مقدار تنش برشی ثابت بین ورق و قالب، از رابطه  $\tau = mk$  محاسبه و در قسمت برهم‌کنش<sup>9</sup> نرم‌افزار وارد شد.  $k$  تنش سیلان متوسط برشی ماده است و بر اساس معیار وون-میزز برابر است با  $\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  [8].  $\sigma_0$  با توجه به میزان کاهش ضخامت ورق، از رابطه (22 و 23) محاسبه شد.

در بخش نیرو و شرایط مرزی، مقدار جابجایی افقی ورق 40 میلی‌متر و سرعت کشش ورق ( $v_f$ )، 1 میلی‌متر بر ثانیه اعمال شد. با توجه به اینکه نصف ورق مدل شد، شرط مرزی تقارن محوری نیز اعمال شد تا جابجایی قسمت زیرین (خط تقارن) ورق به سمت پایین محدود شود و فقط جابجایی افقی صورت گیرد.

نیرو به ازای 1 میلی‌متر عرض ورق (فرض حالت کرنش صفحه‌ای) محاسبه خواهد شد، بنابراین برای محاسبه نیرو به ازای عرض‌های دیگر، باید مقدار نیرو در مقدار عرض مورد نظر ضرب شود. برای مش‌بندی ورق از 600 المان چهار گره‌ای کرنش صفحه‌ای CPE4R استفاده شد و سائز مش، با امتحان کردن چند سائز مختلف و همگرا شدن نتایج، 1 میلی‌متر در نظر گرفته شد. بصورتی که ریزتر شدن بیشتر مش‌ها، تأثیر چندانی در نتایج نداشت. شبیه‌سازی فرآیند به ازای زوایای مختلف انجام شد و نتایج آن در قسمت 4 مشاهده خواهد شد.

#### 4- نتایج و بحث

با توجه به تعریف روش کرانه بالایی، میدان سرعتی قابل قبول است که مقدار توان را کمینه کند. با توجه به روابط، مشاهده می‌شود که توان کل برای انجام فرآیند کشش یک ورق با جنس مشخص، تابعی از کاهش ضخامت<sup>10</sup> ( $R$ )، ثابت اصطکاک برشی،  $b$ ، نیم زاویه قالب و سرعت کشش ورق است (رابطه 41).

$$J^* = f(R, m, b, \alpha, v_f) \quad (41)$$

در فرآیند کشش، ضخامت اولیه و نهایی، سرعت اولیه و ثابت اصطکاک

جدول 1 مشخصات مکانیکی ورق آلومینیوم 1100-0 [19]

چگالی (kgm <sup>-3</sup> )	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پوآسون	تنش تسلیم (MPa)	منحنی تنش-کرنش موثر (MPa)
2710	69	0/33	34/5	210 $\epsilon^{0/3}$

7- Element Distortion

8- Adaptive Meshing, Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE)

9- Interaction

10- Reduction of Thickness

1- Abaqus

2- Section Manager

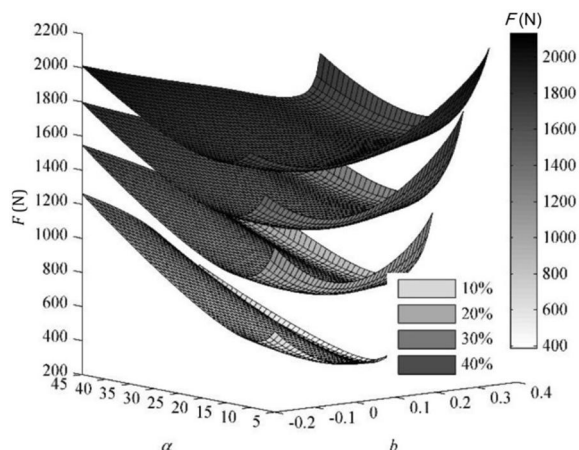
3- Property

4- Quasi-Static

5- Dynamic Explicit

6- Step

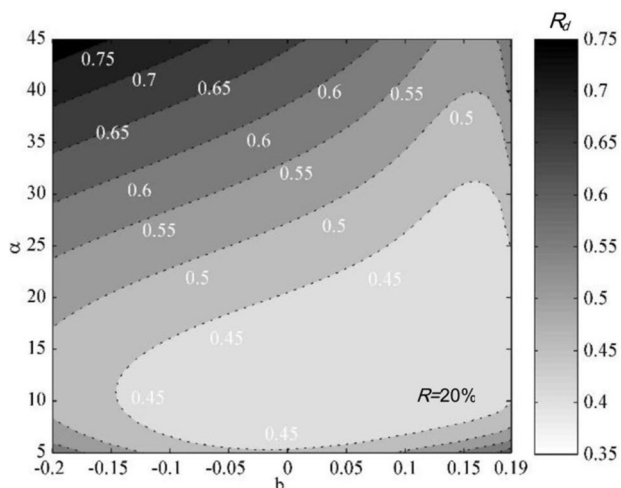




شکل 7 رویه‌های نیروی محاسبه شده بر حسب مقادیر  $b$  و  $\alpha$  به ازای درصد کاهش ضخامت‌های مختلف ( $t_i$  10 میلی‌متر)

جدول 2 مقایسه حل کرانه بالایی کار حاضر، حل اویترز [3] و حل اجزا محدود به ازای کاهش ضخامت مختلف

درصد کاهش ضخامت	پارامترهای محاسبه شده	حل اجزا محدود	حل حاضر	حل اویترز [3]
40	$F(N)$	1351	1501/4	1502/9
	$\alpha_{opt}$	-	16	16
	$b_{opt}$	-	0/03	0
30	$F(N)$	1060	1172/9	1175/2
	$\alpha_{opt}$	-	14	13
	$b_{opt}$	-	0/04	0
20	$F(N)$	728/6	800/6	806/3
	$\alpha_{opt}$	-	12	10
	$b_{opt}$	-	0/06	0
10	$F(N)$	371	389	412/6
	$\alpha_{opt}$	-	10	7
	$b_{opt}$	-	0/07	0



شکل 8 خطوط تراز رویه نسبت تنش کششی بر حسب مقادیر مختلف  $b$  و  $\alpha$

جدول 3 بیشینه نیروی مورد نیاز به ازای زوایای مختلف

$\alpha$	5	8	10	12	15	25
$F(N)$	899	750/2	746/4	728/6	781	898

برشی جزء ورودی مساله محسوب می‌شود پس طبق رابطه (42) داریم:

$$J^* = f(b, \alpha) \quad (42)$$

بنابراین دو پارامتر مستقل برای بهینه کردن مقدار  $J^*$  وجود دارد و می‌توان با رسم منحنی  $J^*$  (یا نیرو) بر حسب  $b$  و  $\alpha$  مقدار بهینه آن‌ها را یافت. با مشخص شدن این دو پارامتر، میدان سرعت (17) و معادله مرز (3) تعیین می‌شود. بازه در نظر گرفته شده نیم زاویه قالب و پارامتر  $b$ ، برای محاسبه توان کل در رابطه (43) است. مقدار حداکثر  $b$  رابطه (5) است و مقدار حداقل آن به اختیار انتخاب شد. (با توجه به نتایج در ادامه متن، مشخص خواهد شد که  $b$  بهینه منفی نخواهد شد ولی برای رسم رویه نیرو، مقدار منفی نیز در نظر گرفته شد).

$$5^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ, \quad -0.2 \leq b \leq \varepsilon_{\max} \quad (43)$$

توسط برنامه نوشته شده، با توجه به روابط میدان سرعت (17)، نرخ‌های کرنش (18) محاسبه می‌شوند و سپس با محاسبه توان داخلی (21)، توان برشی (34) و (35) و توان اصطکاکی (37)، نیرو از رابطه (39) محاسبه و رسم شد.

با توجه به جدول 1 و موارد ذکر شده در قسمت 3، رویه‌های نیروی محاسبه شده از حل تحلیلی بر حسب مقادیر مختلف  $b$  و  $\alpha$  به ازای کاهش ضخامت‌های مختلف، در شکل 7 مشخص است. با توجه به شکل 7 مشاهده شد که در هر رویه، مقدار کمینه‌ای برای نیرو وجود دارد. با استفاده از متلب این مقدار محاسبه شد و در جدول 2، مقادیر بهینه نیروی کشش،  $b$  و  $\alpha$  مربوط به حل حاضر، نتایج حل اویترز در شرایط مشابه و نتایج شبیه‌سازی اجزا محدود مشاهده خواهد شد.

با توجه به جدول 2 مشخص است که نیروهای محاسبه شده از حل تحلیلی کار حاضر، نتایج بهتر و نزدیک‌تری به حل اجزا محدود نسبت به حل اویترز [3] دارند.

برای دقیق‌تر شدن در نتایج و بحث پیرامون آن، با توجه به جدول 2 به بررسی بیشتر حالت کاهش ضخامت 20% پرداخته شد. رویه نیروی حاصل از این نمونه در شکل 7 و مقدار بهینه نیرو،  $b$  و  $\alpha$  در این حالت در جدول 2 مشخص است.

تنش سیلان ماده در حالت کرنش صفحه‌ای بر اساس معیار فون میزز است. رابطه (44) نسبت تنش کششی ماده را بیان می‌کند. بیشینه این نسبت 1 است، زیرا تنش کششی ورق نمی‌تواند از میزان تنش مؤثر در شرایط کرنش صفحه‌ای بیشتر باشد. این نسبت تابع جنس ورق نیست.

$$R_d = \frac{\sigma_d}{\sqrt{3}\sigma_0} \quad (44)$$

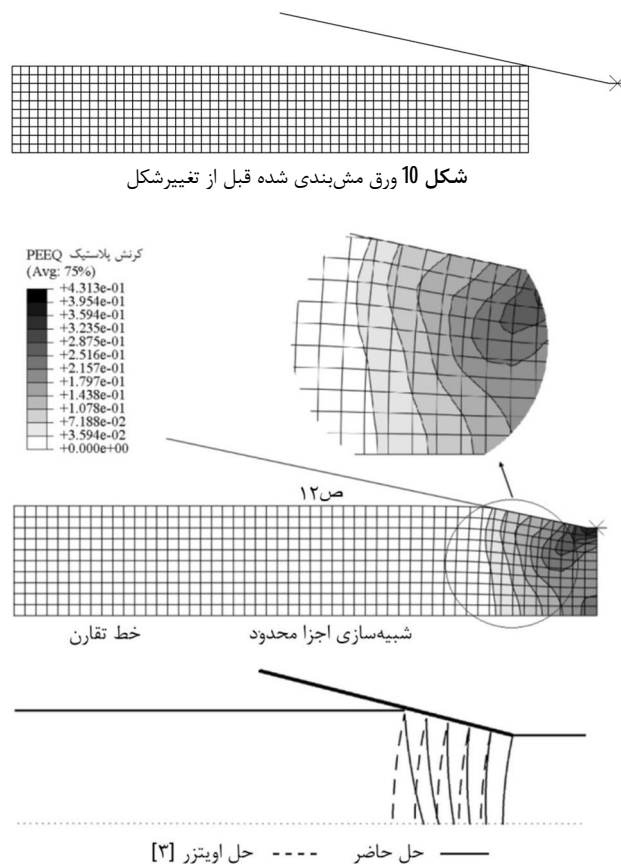
شکل 8، خطوط تراز رویه نسبت تنش کششی برای کاهش ضخامت 20% است. به ازای کاهش ضخامت 20%، مقدار این نسبت به ازای تمامی مقادیر  $b$  و  $\alpha$  کمتر از 1 است که نشان‌دهنده این است که فرآیند در تمام زوایای 5 تا 45 درجه می‌تواند انجام شود، ولی به ازای مقادیر  $b$  و  $\alpha$  که در داخل ناحیه 0/45 هستند، مقدار نسبت از بقیه نواحی کمتر است. مقدار دقیق  $b$  و  $\alpha$  بهینه برای این نسبت در جدول 2 است.

برای مقایسه شبیه‌سازی اجزا محدود (آباکوس) و نتایج حل کرانه بالایی کاهش ضخامت 20%، شبیه‌سازی به ازای زوایای مختلف قالب انجام شد. مقدار نیرو بر حسب جابجایی ورق در شکل 9 نمایش داده شد.

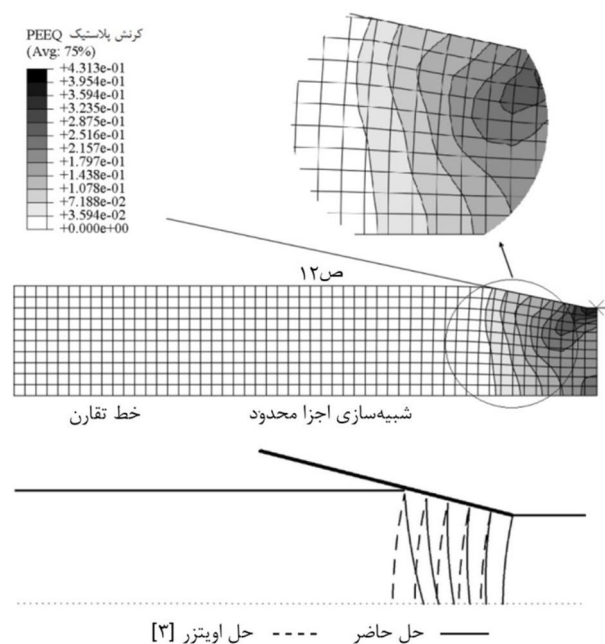
با توجه به شکل 9، بیشینه نیرو در هر نیم زاویه، برای مقایسه در جدول 3 آورده شد.



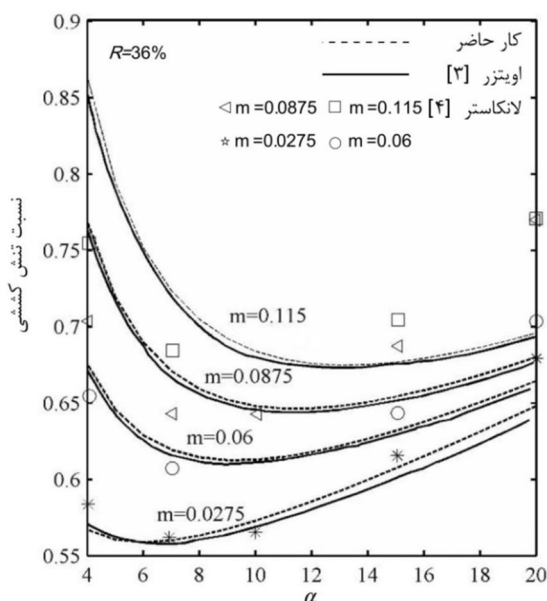
کامل، با حل حاضر و حل دیگر وی که با فرض در نظر گرفتن کرنش سختی است، فاصله دارد. حل حاضر با در نظر نگرفتن کرنش سختی و استفاده از فرض صلب- پلاستیک کامل، نتیجه قابل قبول و نزدیکی با حل روبیو با فرض کرنش سختی دارد و این به علت میدان سرعتی است که در کار حاضر ارائه شد. در حل روبیو، کل ناحیه تغییرشکل یکپارچه و به صورت بلوک صلب در



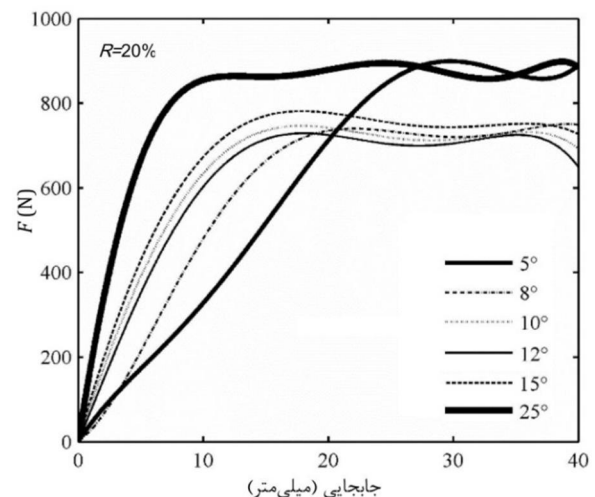
شکل 10 ورق مش‌بندی شده قبل از تغییرشکل



شکل 11 ورق بعد از تغییرشکل و مقایسه مرزهای ناحیه تغییرشکل حل حاضر، حل اویترز و حل اجزا محدود (میدان کرنش)



شکل 12 مقایسه حل کرانه بالایی کار حاضر، اویترز [3] و آزمایش‌های لانکاستر [4] در فرآیند کشش از قالب گوه‌ای به ازای کاهش ضخامت 36%



شکل 9 منحنی‌های نیرو بر حسب جابجایی ورق به ازای زوایای مختلف

با توجه به جدول 3، کمترین مقدار نیرو، مربوط به نیم زاویه 12 درجه است که دقیقاً نتیجه حاصل از حل کرانه بالایی را تأیید می‌کند. نیروی بهینه محاسبه شده در حل کرانه بالایی 9/8% بیشتر از حل اجزا محدود است و این هم به دلیل ماهیت روش کرانه بالایی است ولی با توجه به جدول 2، حل اویترز نیم زاویه بهینه را 10 درجه پیش‌بینی کرده است و درصد اختلاف نیروی بدست آورده با حل اجزا محدود نیز 10/7% است.

شکل 10 ورق مش‌بندی شده قبل از تغییرشکل است. در شکل 11 مرزهای تغییرشکل در حل کرانه بالایی کار حاضر، حل اجزا محدود و همچنین حل تحلیلی اویترز [3] برای حالت بهینه کاهش ضخامت 20% با هم مقایسه شده‌اند.

اویترز در حل خود فرض کرد که مرزهای ناحیه تغییرشکل، استوانه‌ای هستند ولی همان‌طور که از شکل 11 مشخص است، این مرزها در نتایج شبه‌سازی اجزا محدود استوانه‌ای نیستند و به فرض حالت نمایی حل حاضر نزدیک می‌باشد. حل حاضر با دقت بهتری نسبت به حل وی توانسته است مرزهای ناحیه تغییرشکل را پیش‌بینی و مدل کند.

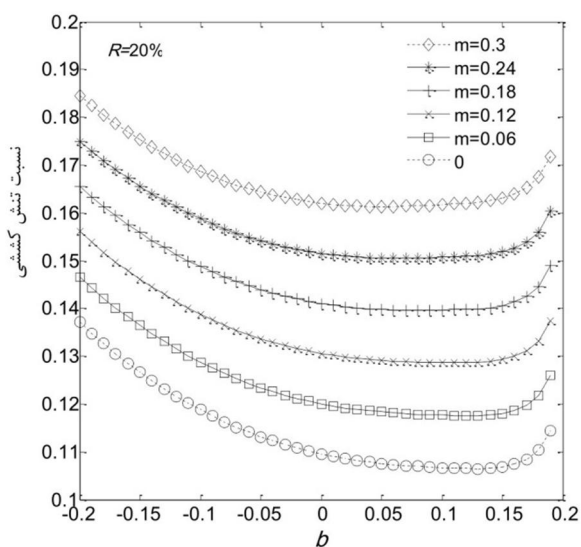
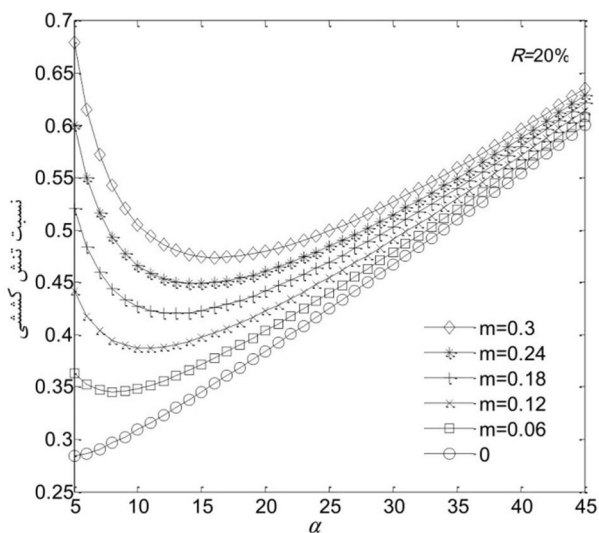
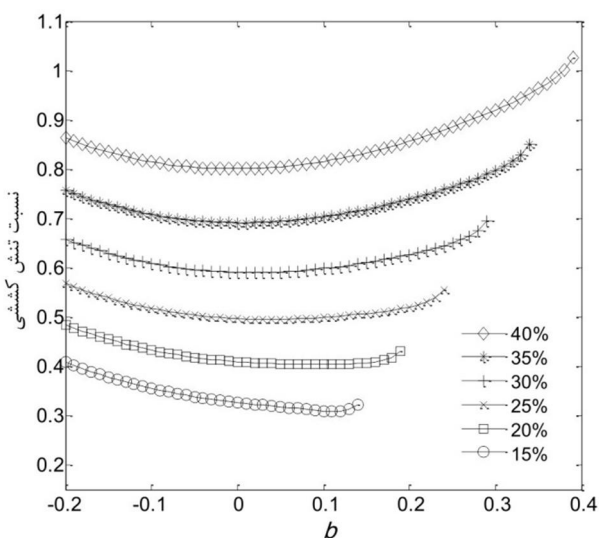
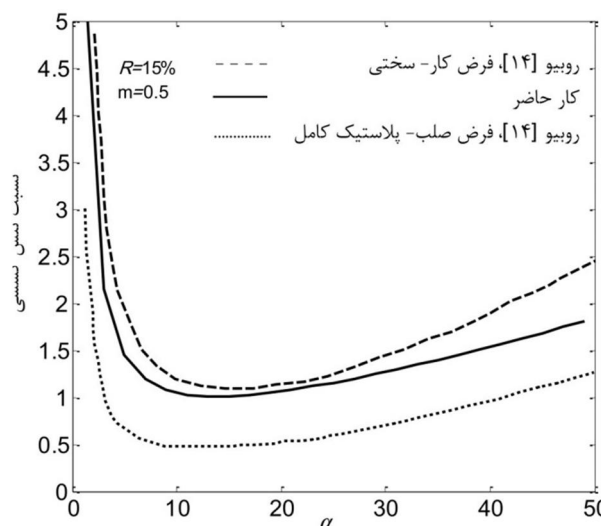
مقایسه دیگری که اویترز [3] به آن پرداخت، مقایسه نمودارهای نسبت تنش کششی حل تحلیلی خود با آزمایش‌هایی است که لانکاستر [4] انجام داده بود. در این مقایسه، نمودارهای نسبت تنش کششی بر حسب تغییرات نیم زاویه قالب و به ازای چند ثابت اصطکاک برشی، رسم شد (شکل 12).

در شکل 12 مقایسه حل کرانه بالایی حاضر با حل تحلیلی اویترز و آزمایش‌های لانکاستر به ازای کاهش ضخامت 36% نشان داده شد.

برای هر نمودار رسم شده در شکل 12، ابتدا مقدار  $b$  و  $\alpha$  بهینه به ازای رسم رویه برای کاهش ضخامت 36% و هر یک از  $m$  ها، محاسبه و سپس بر اساس  $b$  بدست آمده، نمودار نسبت تنش کششی بر حسب زوایای مختلف ترسیم شد. نزدیکی نتایج حل کرانه بالایی حاضر و حل اویترز در شکل 12 به این دلیل است که در کاهش ضخامت‌های بالا، مقدار  $b$  بهینه، به صفر نزدیک است و به همین دلیل شکل مرز به استوانه (فرض اویترز) نزدیک می‌شود.

در مقایسه‌ای دیگر، حل تحلیلی کرانه بالایی حاضر با حل کرانه بالایی روبیو [14] مقایسه شد. روبیو در حل خود، یکبار از فرض صلب-پلاستیک کامل و بار دیگر توسط مدلی برای تأثیر دادن کار سختی، استفاده و تحلیل را انجام داد. وی ناحیه تغییرشکل را توسط یک مثلث صلب با مرز مستقیم مدل کرد. از شکل 13 مشخص است که نتایج حل روبیو [15] با فرض پلاستیک

پیشنهاد می‌شود.

شکل 14 تأثیر ثابت اصطکاک برشی بر مقدار بهینه  $b$ شکل 15 تأثیر ثابت اصطکاک برشی بر مقدار بهینه  $\alpha$ شکل 16 تأثیر درصد کاهش ضخامت بر مقدار بهینه  $b$ 

شکل 13 مقایسه حل کرانه بالایی کار حاضر و روبیو [14] در فرآیند کشش از قالب گوه‌ای به ازای کاهش ضخامت 15% و ثابت اصطکاک برشی 0/5

نظر گرفته شد، بنابراین ناحیه دارای فقط یک سرعت ثابت می‌باشد. به همین دلیل به راحتی می‌توان کرنش سختی را در روابط تأثیر داد چون تعداد انتگرال‌ها برای محاسبه توان کم است. ولی در کار حاضر چون میدان سرعت ارائه شد، به ازای هر نقطه یک سرعت وجود دارد و هر ذره در این ناحیه دارای جابجایی و کرنش مشخص است. بنابراین تأثیر دادن کرنش سختی دشوار است و حل بسیار طولانی خواهد شد. چنانچه مشاهده شد با فرض صلب-پلاستیک کامل نیز نتایج قابل قبول هستند.

نتایج حل حاضر را نمی‌توان با مرجع [15] مقایسه کرد، زیرا در این مرجع شکل قالب متفاوت است و عرض و ضخامت ورق همزمان کاهش پیدا می‌کنند. در حالی که فرآیند حاضر کشش ورق با عرض ثابت است.

در ادامه به تأثیر پارامترهای مختلف بر روی حالت بهینه کاهش ضخامت 20% پرداخته خواهد شد. در شکل 14 تغییرات نسبت تنش کششی بر حسب پارامتر  $b$  به ازای ثابت اصطکاک برشی مختلف ترسیم شد. با افزایش مقدار  $m$ ، مقدار بهینه پارامتر  $b$  تغییر می‌کند و کاهش می‌یابد.

در شکل 15 تغییرات نسبت تنش کششی بر حسب نیم زاویه قالب با تغییر ثابت اصطکاک برشی ترسیم شد. با توجه به شکل مشخص است که با افزایش مقدار پارامتر  $m$ ، نسبت تنش کششی و مقدار بهینه نیم زاویه قالب افزایش می‌یابد.

در شکل 16 تغییرات نسبت تنش کششی بر حسب پارامتر  $b$  به ازای تغییرات درصد کاهش ضخامت ترسیم شد. مقدار بهینه  $b$  با افزایش درصد کاهش ضخامت، کم می‌شود.

در شکل 17 نسبت تنش کششی بر حسب نیم زاویه قالب به ازای تغییرات درصد کاهش ضخامت ترسیم شد. مقدار بهینه  $\alpha$  با افزایش درصد کاهش ضخامت، افزایش می‌یابد.

## 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تحلیل کرانه بالایی و شبیه‌سازی اجزا محدود شکل هندسی ناحیه تغییرشکل در فرآیند کشش ورق با قالب گوه‌ای و مقایسه با پژوهشهای دیگر پرداخته شد. نتایج به شرح زیر است:

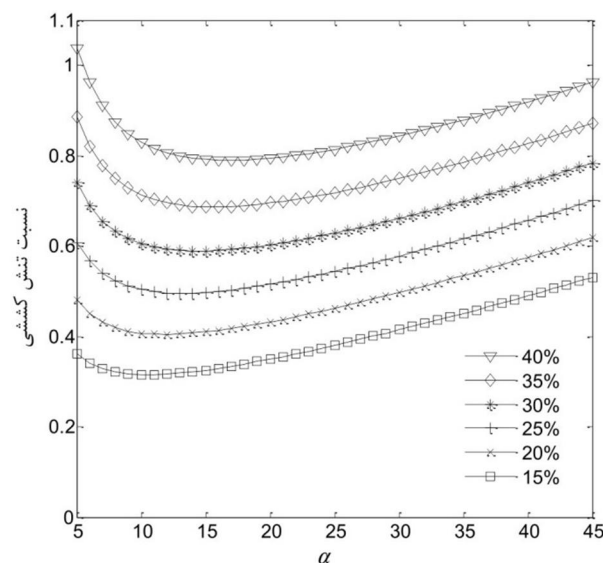
- 1- با توجه به نتایج مشاهده شده، استفاده از روش کرانه فوقانی به دلیل پارامتریک بودن به جای شبیه‌سازی اجزا محدود که زمان‌بر نیز است،

شکل‌دهی لازم و نیم زاویه بهینه قالب افزایش می‌یابد (شکل 16 و 17).

8- از تحلیل حاضر می‌توان برای فرآیندهای کشش میله و اکستروژن ورق یا میله بهره برد. زیرا تحلیل این فرآیندها شبیه به هم می‌باشد و این که در این فرآیندها نیز خطوط جریان ماده غیر مستقیم است. بنابراین از میدان سرعت حاضر (با تبدیل مختصات و تبدیل روابط) استفاده نمود. همچنین در فرآیندهای کشش و اکستروژن چند فلزی نیز می‌توان خط جابجایی بین لایه‌ها را بدست آورد و ضخامت نهایی هر لایه را محاسبه نمود.

## 6- مراجع

- [1] W. F. Hosford, R. M. Caddell, *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*, 3rd Edition, Cambridge University Press, (2007).
- [2] G. E. Dieter, H. A. Kuhn, S. L. Semiatin, *Handbook of Workability and Process Design*, ASM International, Materials Park-OH, (2003).
- [3] B. Avitzur, J. Fueyo, J. Thompson, Analysis of plastic flow through inclined planes in plane strain, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, Vol. 89, No. 2, pp. 361-375, (1967).
- [4] P. R. Lancaster, G. W. Rowe, Experimental study of the influence of lubrication upon cold drawing under approximately plane-strain conditions at low speeds, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 178, No. 1, pp. 69-86, (1963).
- [5] R. Sowerby, W. Johnson, S. K. Samanta, Plane strain drawing and extrusion of a rigid-perfectly plastic material through concave dies, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10, No. 4, pp. 231-238, (1968).
- [6] A. G. Atkins, R. M. Caddell, The incorporation of work hardening and redundant work in rod-drawing analyses, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10, No. 1, pp. 15-28, (1968).
- [7] K. Osakada, Y. Niimi, A study on radial flow field for extrusion through conical dies, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 17, No 4, pp. 241-254, (1975).
- [8] B. Avitzur, *Handbook of Metal-Forming Processes*, New York, Wiley, (1983).
- [9] E. W. Shimmin, P. L. B. Oxley, Plane strain drawing of a strain hardening material through circular dies, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 26, No. 3, pp. 201-216, (1984).
- [10] D. S. Peng, An upper-bound analysis of the geometric shape of the deformation zone in rod extrusion, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 21, No 3, pp. 303-311, (1990).
- [11] H. Tokuno, Analysis of deformation in extrusion of composite rods, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 323-335, (1991).
- [12] E. M. Rubio, M. A. S. Perez, A. S. Lobera, Mechanical solutions for drawing processes under plane strain conditions by the upper bound method, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 143-144, pp. 539-545, (2003).
- [13] E. M. Rubio, A. M. Camacho, L. Sevilla, M. A. Sebastian, Calculation of the forward tension in drawing processes, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 162-163, pp. 551-557, (2005).
- [14] E. M. Rubio, M. Marin, R. Domingo, M. A. Sebastian, Analysis of plate drawing processes by the upper bound method using theoretical work-hardening materials, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 40, No 3-4, pp. 261-269, (2009).
- [15] A. Panteghini, An analytical solution for the estimation of the drawing force in three dimensional plate drawing processes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, pp. 147-157, (2014).
- [16] W. Prager, P. G. Hodge, *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley & Sons, NY, (1951).
- [17] Abaqus 6.10 Documentation Collection.
- [18] Sh. Kobayashi, S. OH, T. Altan, *Metal Forming and the Finite-Element Method*, Oxford Series on Advanced Manufacturing, (1989).
- [19] A. K. Taheri, S. A. Majlessi, An investigation into the production of bi- and tri-layered strip by drawing through wedge-shaped dies, *Journal of Materials Engineering and Performance*, Vol. 1, pp. 285-291, (1992).



شکل 17 تأثیر درصد کاهش ضخامت بر مقدار بهینه  $\alpha$

2- میدان سرعت جدیدی که بر مبنای مرز غیر خطی (نمایی) ناحیه تغییرشکل، حاصل شد، می‌تواند حرکت غیرخطی خطوط جریان فلز در ناحیه تغییرشکل را که تاکنون مدل و ارائه نشده (با توجه به آزمایشات منبع [11] و با توجه به شبیه‌سازی) توجیه و مدل کند.

3- نیروی شکل‌دهی و نیم زاویه بهینه به‌دست آمده از حل حاضر، نتایج نزدیک‌تر و بهتری به شبیه‌سازی اجزا محدود نسبت به حل اویترز [3] دارد.

4- مرزهای تغییرشکل پیش‌بینی شده توسط حل حاضر نتایج دقیق‌تر و نزدیک‌تری به شبیه‌سازی اجزا محدود نسبت به حل اویترز دارد (شکل 11).

5- مقایسه نتایج حل حاضر، حل اویترز و آزمایش لانکاستر (شکل 12)، در ثابت اصطکاک پایین، حل حاضر نتایج مناسبی با نتایج آزمایش دارد. ولی در ثابت اصطکاک بالا و به ازای زوایای بالا، حل حاضر با آزمایش فاصله دارد. توجیه این مسئله این است که در کاهش ضخامت‌های زیاد (در این مقایسه 36%)، مقدار  $b$  بهینه به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین حل حاضر به حل اویترز نزدیک و مرز از حالت نمایی به استوانه‌ای ( $b=0$ ) تبدیل می‌شود. ولی در صنعت اصولاً کاهش ضخامت‌ها پایین‌تر هستند و یا برای کاهش‌های زیاد از چند کاهش ضخامت استفاده می‌شود، بنابراین مقدار  $b$  بهینه زیادتر است و بنابراین مرز به حالت نمایی تبدیل شده و تأثیر مرز نمایی روی نتایج مشخص‌تر خواهد بود.

6- با افزایش ثابت اصطکاک، مقدار  $b$  بهینه کاهش، مقدار نیروی شکل‌دهی لازم و نیم زاویه بهینه قالب افزایش می‌یابد (شکل 14 و 15).

7- با افزایش درصد کاهش ضخامت، مقدار  $b$  بهینه کاهش، مقدار نیروی