



بررسی اختلاط در ریزمخلوط گرهای الکترواسموتیکی با حل معادلات ارنست-پلانک

جعفر جماعتی¹، علی رضا فراهی نیا²، حمید نیازمند^{3*}

1- دانش آموخته دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

*مشهد، صندوق پستی 91775-1111، niazmand@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 دی 1393

پذیرش: 23 بهمن 1393

ارائه در سایت: 06 اسفند 1393

کلید واژگان:

اختلاط

ریزمخلوط گر

معادلات ارنست-پلانک

جریان الکترواسموتیک

مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی

چکیده

در این مقاله اختلاط درون ریزمخلوط گرهای تحت اثرات الکتروکنتیکی به صورت عددی مطالعه شده است. ریزمخلوط گر مورد مطالعه یک ریزمجرای تخت با خواص ناهمگن در دیواره است که جریان الکترواسموتیک از آن عبور می کند. برای مدل سازی کامل این مسئله، معادلات به هم مرتبط ناویر-استوکس، ارنست-پلانک، پواسن-بولتزمن و معادله غلظت به ترتیب برای حرکت سیال، بارهای الکتریکی، توزیع میدان الکتریکی و غلظت حل می شوند. حل عددی این معادلات برای ریزمجرای با زتابانسلیل غیریکنواخت پیچیده و دشوار است. به همین دلیل مدل های ساده و تقریبی مانند مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی نیز برای حل این جریان ها پیشنهاد شده است که بیشتر برای ریزمجرای با خواص همگن معتبر هستند. اعتبار مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی برای پیش بینی میدان های جریان دوبعدی به خوبی ارزیابی شده اما دقت آن برای میدان غلظت و راندمان اختلاط کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله اختلاط ناشی از جریان الکترواسموتیک درون ریزمجرای ناهمگن با استفاده از معادلات ارنست-پلانک و نیز با استفاده از مدل تقریبی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی به دست آمده و دقت مدل تقریبی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی مورد ارزیابی قرار گرفته شده است. مقایسه نتایج دو مدل نشان می دهد که در شرایط مناسب مدل تقریبی می تواند با دقت قابل قبولی راندمان اختلاط را در طول ریزمخلوط گر پیش بینی نماید.

Investigation of Mixing in Electroosmotic Micromixers using Nernst-Planck Equations

Jafar Jamaati, Ali Reza Farahinia, Hamid Niazmand*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

*P.O.B. 91775-1111, Mashhad, Iran, niazmand@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 January 2015
Accepted 12 February 2015
Available Online 25 February 2015

Keywords:
Mixing
Micromixer
Nernst-Planck Equations
Electroosmotic Flow
Helmholtz-Smoluchowski Model

ABSTRACT

Mixing within electrokinetic micromixers is studied numerically in this article. The micromixer studied here is simply a heterogeneous parallel plate microchannel which is imposed to the electroosmotic flow field. For the thorough modeling of such flows, the coupled equations of Navier-Stokes, Nernst-Planck, Poisson-Boltzmann and concentration equations are solved for the flow motion, electric charges transport, electric field and species concentrations, respectively. Numerical solution of these set of equations for the heterogeneous microchannels is complicated and difficult. Therefore, a simple and approximate model such as Helmholtz-Smoluchowski has been proposed which is appropriate for the case of microchannels with the homogenous properties on the walls. Validation of Helmholtz-Smoluchowski model has been well-used for the prediction of two dimensional flow fields, yet its application is rarely validated for the prediction of concentration field and mixing performance. In this article mixing due to electroosmotic flow field is investigated using Nernst-Planck equations as well as Helmholtz-Smoluchowski models and the accuracy of the Helmholtz-Smoluchowski model is evaluated. Comparison of the results indicates that in the proper condition the approximate model can predict the mixing performance accurately along the micromixer length.

1- مقدمه

دینامیک اختلاط مربوط به محلول الکترولیت که درون یک ریزمجرا جریان دارد، دارای اهمیت ویژه ای در شناخت و طراحی این دستگاه ها است. به دلیل ماهیت آرام جریان در ریزابزارها، اختلاط گونه ها غالباً توسط پخش مولکولی صورت می گیرد. در صورت فقدان هر گونه اغتشاشی بهبود اختلاط فقط از طریق پخش مولکولی بسیار دشوار است، بنابراین ریزمخلوط گرهای¹ با قابلیت

یکی از وظایف اساسی سیستم های ریزجریانی، اختلاط نمونه های سیال است. این سیستم ها در مسایل متنوعی مانند تجزیه و تحلیل های بیولوژیکی و با تشخیص های پزشکی دارای کاربرد هستند [1-3]. یک جنبه اساسی و مهم در اغلب این دستگاه ها، اختلاط گونه ها است، چون واکنش های بیوشیمیایی برای عملکرد موفقیت آمیز، نیازمند اختلاط مناسب هستند، از این رو مطالعه

1- Micromixer

شده است [38,37,5].

اعتبار مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی برای پیش‌بینی میدان‌های جریان دوبعدی به خوبی مورد بررسی قرار گرفته است [39] اما تاکنون میزان دقت نتایج حاصله از آن برای میدان غلظت و راندمان اختلاط در جریان‌های دوبعدی کمتر ارزیابی شده است. در این مقاله حل جریان درون ریزمجراهای مستقیم با زتاپتانسیل غیریکنواخت روی دیواره با استفاده از معادلات ارنست-پلانک⁶ انجام شده است و حل میدان غلظت و راندمان اختلاط با استفاده از حل کامل و نیز حل تقریبی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی به دست آمده است. برای هر دو روش تأثیر مقدار زتاپتانسیل و آرایش ناهمگنی و نیز مقدار پارامتر دیبای-هوک⁷ بر راندمان اختلاط بررسی شده و برای مقادیر مختلف نتایج دو مدل به منظور تعیین دقت مدل تقریبی با یکدیگر مورد مقایسه قرار گرفته شده است.

2- فرمول‌بندی ریاضی

شکل 1 هندسه ریزمخلوط‌گر الکتروکنتیکی مورد مطالعه را نشان می‌دهد که در معرض یک میدان الکتریکی طولی قرار گرفته است. در این مدل، H و L نشان دهنده عرض و طول ریزمجرا هستند و مقدار زتاپتانسیل در دیواره ریزمجرا به صورت غیریکنواخت در نظر گرفته شده است و با $\zeta_t(x)$ در دیواره بالا و $\zeta_b(x)$ در دیواره پایین نشان داده شده است.

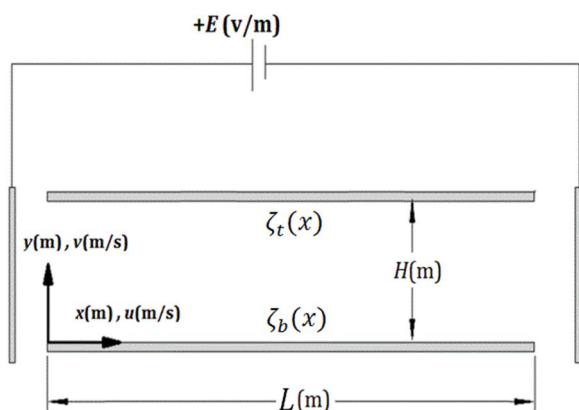
2-1- معادلات حاکم

در تجزیه و تحلیل حاضر فرض شده است که محلول درون ریزمجرا یک سیال نیوتنی تراکم ناپذیر است و از اثرات شناوری و گرانشی در جریان سیال چشم‌پوشی شده است. علاوه بر این دوگونه مورد اختلاط دارای ضرایب پخش مولکولی یکسان هستند و هیچ واکنش شیمیایی در بین خود گونه‌ها و یا بین گونه‌ها و دیواره ریزمجرا رخ نمی‌دهد. تحت این شرایط معادلات حاکم مختلف در بخش زیر معرفی شده‌اند.

2-1-1- معادله پواسن-بولتزمان

بر مبنای نظریه الکترواستاتیک، ارتباط بین توزیع پتانسیل الکتریکی و توزیع بارهای الکتریکی توسط معادله پواسن-بولتزمان مشخص می‌شود که شکل بی بعد آن به صورت رابطه (1) است [38-40]:

$$\nabla^2(\psi + \Phi) = \frac{K^2}{2}(n^+ - n^-) \quad (1)$$



شکل 1 محوره‌های مختصات و هندسه ریزمجرا

اختلاط سریع در بسیاری از مسائل مورد تقاضا هستند. ریزمخلوط‌گرهای موجود به دو دسته فعال¹ و غیرفعال² تقسیم می‌شوند [4]. در ریزمخلوط‌گرهای فعال یک منبع انرژی خارجی علاوه بر محرک اصلی جریان برای ایجاد آشفتگی به کار گرفته می‌شود. این انرژی می‌تواند توسط روش‌های مختلفی مانند میدان الکتریکی [6,5]، میدان مغناطیسی [8,7]، میدان حرارتی [10,9]، دی الکتروفورسیس³ [11]، ایجاد ارتعاشات فراصوتی [12]، استفاده از همزن‌های کوچک [13] و یا استفاده از ورودی نوسانی در میکروکانال‌ها [15,14] تأمین گردد.

ریزمخلوط‌گرهای غیرفعال دارای مزایای زیادی از قبیل هزینه کم، سادگی ساخت و عدم نیاز به قطعات متحرک یا توان اضافی هستند و فقط به کمک ساختار خود اختلاط را مهیا می‌کنند. با کمک ساختارهای غیرفعال سیال وادار به تغییر جهت، تقسیم یا ترکیب شدن و یا افزایش سطح تماس می‌شود [16-20]. ریزمخلوط‌گرهای غیرفعال بر حسب نوع مکانیزم اختلاطی، به دو مکانیزم جابجایی آشوبه‌ای⁴ و مکانیزم پخش مولکولی تقسیم می‌شوند. در اختلاط آشوبه‌ای افزایش سطح تماس بین گونه‌های مورد اختلاط و ایجاد جریان‌های ثانویه و عرضی، باعث دست‌کاری در طرح جریان آرام حاکم بر ریزمجرا می‌شود و پیرو آن با کاهش طول پخش مولکولی، اختلاط بهبود می‌یابد [22,21]. روش پخش مولکولی بر پایه افزایش سطوح مرزی با استفاده از لایه‌سازی‌های سری و موازی است. در سیستم‌هایی با لایه‌سازی سری، جریان ابتدا به دو جریان متفاوت در امتداد عمودی جدا شده و سپس این دو جریان مجدداً با یکدیگر مخلوط می‌شوند [23]. تکرار این فرآیند موجب اختلاط بهتر و سریع‌تر در این ریزمخلوط‌گرها می‌گردد. اختلاط لایه‌ای بیشتر تحت تأثیر نحوه ترکیب اجزا در ورودی ریزمجرا است [24]. ریزمخلوط‌گرهای با لایه‌سازی موازی، جریان را در امتداد کانال به صورت موازی مخلوط می‌کنند لذا از نظر ساخت بسیار آسان‌تر و مقرون به صرفه‌تر خواهند بود [26,25].

یکی از روش‌های موثر برای ایجاد اختلاط در ریزمجراها استفاده از جریان الکترواسموتیک⁵ [29-27,10] است که در آن بر اثر اعمال میدان الکتریکی، سیال حاوی یون در مجاورت سطح به حرکت واداشته می‌شود. میدان جریان الکترواسموتیک به شدت وابسته به خواص الکتروشیمیایی سطح دیواره ریزمجرا و سیال است و در ریزمجراهایی که خواص دیواره آن‌ها به ویژه مقدار زتاپتانسیل دیواره ناهمگن باشد، جریان‌های الکترواسموتیک بسیار پیچیده و دارای نواحی چرخشی هستند. در این جریان‌ها می‌توان به صورت هم‌زمان از مزایای روش‌های فعال و غیرفعال بهره‌مند شد [31,30,28]. به این صورت که طراحی مناسب ناهمگنی‌های سطحی [33,32,6] به صورت مکانیزم غیرفعال و استفاده از میدان الکتریکی به عنوان مکانیزم فعال باعث ایجاد اختلاط می‌شوند [35,34]. ریزمجراهایی که در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته‌اند در این شاخه قرار می‌گیرند.

برای تعیین میدان جریان الکترواسموتیک علاوه بر حل معادلات پیوستگی و انتقال مومنتم، معادلات پتانسیل الکتریکی و انتقال بارهای الکتریکی نیز بایستی حل شوند. حل این معادلات برای هندسه و یا خواص دیواره ناهمگن، نیازمند روش‌های عددی کارآمدی می‌باشد که حجم محاسباتی آن‌ها قابل توجه است [36,6]. از این رو برخی مدل‌سازی‌های ساده‌تر مانند مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی نیز برای حل این جریان‌ها ارائه

- 1-Active
- 2- Passive
- 3- Electrophoretic
- 4- Chaotic advection
- 5- Electroosmotic

6- Ernest-Planck
7- Debye-Huckel

2-2- مدل‌سازی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی

تحت شرایط خاص از قبیل یکنواختی زتاپتانسیل در طول دیواره، نازکی لایه دوگانه الکتريکی در مقایسه با عرض کانال، نارسا بودن دیواره‌های کانال، کم بودن عدد رینولدز جریان و یکنواخت بودن خواص و دمای الکترولیت [42,41] می‌توان همه اثرات مربوط به بارهای الکتريکی و میدان الکتريکی را توسط یک شرط مرزی مناسب برای معادله مومنتوم مدل‌سازی نمود. این شرط مرزی لغزشی بر مبنای میدان الکتريکی اعمالی و اندازه بارهای دیواره به صورت رابطه (6) تعیین می‌شود:

$$u_s = -\frac{\varepsilon E_{\text{ext}}}{\mu} \zeta \quad (6)$$

که مقدار سرعت لغزشی سیال در مجاورت دیواره (یا به تعبیر بهتر در لبه لایه دوگانه الکتريکی)، ε ثابت دی الکتريک محلول، E_{ext} شدت میدان خارجی، ζ مقدار زتاپتانسیل دیواره و μ لزجت سیال است. در حقیقت با اعمال شرط بالا، اثر لایه دوگانه الکتريکی و حضور یون‌ها بر سیال به صورت یک شرط مرزی لغزشی روی دیواره‌ی جامد اعمال می‌شود. با این کار اثر نیروی الکتريکی در معادله ناویر-استوکس از طریق شرط لغزش اعمال می‌شود و میدان سرعت الکترواسموتیک، بدون نیاز به حل میدان بارهای الکتريکی و پتانسیل، فقط از حل معادلات ناویر-استوکس بدون نیروی حجمی و با شرط لغزشی مذکور حل می‌شوند، یعنی رابطه (7):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{v} \quad (7)$$

بنابراین حل اختلاط توسط جریان الکترواسموتیک با مدل‌سازی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی از حل معادلات (6-7) به دست می‌آید. در حالی که مدل‌سازی کامل این مسئله بدون این ساده‌سازی بسیار پیچیده و شامل حل چندین معادله به هم مرتبط (1-5) است.

2-3- تعیین معیار مناسب برای ارزیابی غلظت

برای مطالعه کمی میزان اختلاط استفاده از یک معیار مناسب ضروری می‌باشد. در جریان‌های ساده و یک‌راهه استفاده از انحراف معیار غلظت‌ها نسبتاً رایج است و نتایج مطلوبی دارد [44,43,24]. انحراف معیار غلظت گونه‌ها در هر مقطع از ریزمجرا به صورت رابطه (8) تعریف می‌شود:

$$\sigma^2 = \frac{\int_0^H (C(y) - C_m)^2 dy}{\int_0^H dy} \quad (8)$$

که C_m مقدار غلظت متوسط در هر مقطع توسط رابطه (9) محاسبه می‌شود:

$$C_m = \frac{\int_0^H u(y) C(y) dy}{\int_0^H u(y) dy} \quad (9)$$

برای تعیین قابلیت معیار فوق در برآورد اختلاط در جریان‌های پیچیده، با استفاده از مدل H-S و شرایط مرزی لغزشی مناسب یک جریان فرضی درون ریزمجرا مورد مطالعه قرار گرفته و میزان اختلاط گونه‌ها محاسبه شده است. شرایط مربوط به سرعت لغزشی این ریزمجرا روی دیواره بالا و پایین به صورت روابط (10) و (11) در نظر گرفته شده است:

$$u_b(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2 \\ 1 + 4 \sin\left(\phi + \frac{6\pi x}{L}\right), & 2 < x \leq 4 \\ 1, & 4 < x \leq 6 \end{cases} \quad (10)$$

$$u_t(x) = u_b(x) \quad (11)$$

که ϕ در اینجا یک پارامتر است. در ورودی ریزمجرا غلظت گونه مورد مطالعه

ψ توزیع پتانسیل الکتريکی ناشی از لایه دوگانه الکتريکی¹، Φ توزیع پتانسیل الکتريکی خارجی ناشی از الکترودها، ρ_e چگالی خالص بارهای الکتريکی، n^+ غلظت عددی یون‌های مثبت، n^- غلظت عددی یون‌های منفی و $K = \kappa H$ پارامتری بعد دیبای هوکل است. پارامتر $\kappa^{-1} = (\varepsilon K_b T / 2 n_0 z^2 e^2)^{1/2}$ ضخامت مشخصه لایه دوگانه الکتريکی و K_b ، ε ، n_0 ، e ، z و T به ترتیب عدد والانس الکترولیت متقارن، بار پایه الکترون، غلظت عددی توده یون‌ها در محلول یکنواخت، ثابت دی الکتريک محلول، ثابت بولتزمن و دمای مطلق الکترولیت هستند.

2-1-2- معادلات ارنست-پلانک

محاسبه غلظت‌های یونی از حل معادلات انتقال یون‌ها به دست می‌آید که با نام معادلات ارنست-پلانک شناخته می‌شوند. شکل بی بعد این معادلات به صورت روابط (2) و (3) می‌باشد [40-38]:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} n^+) = \frac{\{\nabla^2 n^+ + \vec{\nabla} \cdot [n^+ (\vec{\nabla} \psi + A \vec{\nabla} \Phi)]\}}{\text{Re Sc}^+} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} n^-) = \frac{\{\nabla^2 n^- + \vec{\nabla} \cdot [n^- (\vec{\nabla} \psi + A \vec{\nabla} \Phi)]\}}{\text{Re Sc}^-} \quad (3)$$

$\vec{v}$ بردار سرعت، $\text{Sc}^\pm = \mu / \rho D^\pm$ عدد اشمیت، Re عدد رینولدز بر مبنای سرعت مرجع در جریان الکترواسموتیک $U_{\text{ref}} = \varepsilon E_{\text{ref}} \zeta / \mu$ است. D^+ و D^- به ترتیب ضرایب پخش مولکولی برای یون‌های مثبت و منفی و $A = E_{\text{ref}} H / (K_b T / ze)$ یک پارامتری بی بعد است که معرف نسبت ولتاژ اعمالی خارجی به ولتاژ مبنا است. در معادلات (2) و (3) جمله سمت چپ تساوی مربوط به جابجایی یون‌ها است، جمله اول در سمت راست تساوی در صورت کسر مربوط به پخش مولکولی یون‌ها و جمله بعدی مربوط به پخش ناشی از مهاجرت یون‌ها بر اثر پتانسیل الکتريکی می‌باشند.

2-1-3- معادلات ناویر-استوکس

برای جریان سیال در شرایط دائمی و با خواص فیزیکی ثابت، معادلات جریان در یک سیستم تحت اثرات الکتروکنیتیک در شکل بی‌بعد به صورت رابطه (4) نوشته می‌شوند [40-38]:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{v} - B \rho_e (\vec{\nabla} \psi + A \vec{\nabla} \Phi) \quad (4)$$

که $B = n_0 K_b T / \rho U_{\text{ref}}^2$ یک پارامتری بی‌بعد است که معرف نسبت فشار یونی به فشار دینامیکی است، فشار بی‌بعد به صورت $P = P^* / \rho U_{\text{ref}}^2$ تعریف می‌شود. جمله آخر در معادله (4) نیروی حجمی ناشی از اثرات میدان الکتريکی و یون‌های باردار درون سیال است. این نیروی الکتريکی مشابه با نیروی گرانشی به صورت یک نیروی حجمی اثر می‌کند و در جریان‌های الکترواسموتیک این نیرو عامل حرکت سیال است.

2-1-4- معادله غلظت گونه‌ها

برای بررسی پدیده اختلاط، میدان اسکالر برای غلظت یک گونه بایستی حل شود. معادله حاکم بر میدان غلظت به شکل رابطه (5) است [38].

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} C = \frac{1}{\text{Re Sc}} \nabla^2 C \quad (5)$$

که در آن $\text{Sc} = \mu / \rho D$ عدد اشمیت مربوط به گونه مورد نظر و Re عدد رینولدز می‌باشد.

طبق رابطه (12) به جای اینکه در ارزیابی میزان اختلاط از انحراف معیار استفاده شود، از انحراف معیار وزن دار با تابع وزنی سرعت استفاده می شود. در این حالت سنجش میزان اختلاط در طول ریزمجرا مطابق با شکل 4 می باشد. در شکل 4 دیده می شود که با استفاده از انحراف معیار وزن دار در ارزیابی اختلاط، بر خلاف معیار قبلی (8)، منحنی مربوط به میزان اختلاط در مجاورت گردابه ها نوسانی نیست و وجود گردابه در مسیر حرکت جریان باعث کاهش سریع تر انحراف معیار غلظت می شود که از جنبه فیزیکی معرف این است که مقدار اختلاط سریع تر افزایش یافته است. مطالعه سایر جریان های دارای گردابه نشان داد که استفاده از انحراف معیار وزن دار در جریان های دارای گردابه به نحو بهتری اختلاط را ارزیابی می کند.

2-3-1- کارایی اختلاط

طبق معادله (12)، مقدار انحراف معیار غلظت ها در هر مقطع، معرف میزان ناهمگنی در آن مقطع است، بنابراین مقدار $1 - \sigma_w$ می تواند به عنوان معیاری از میزان همگنی یا اختلاط تعبیر شود. بنابراین بر مبنای استفاده از انحراف معیار وزن دار غلظت ها در هر مقطع از ریزمجرا، کارایی اختلاط را به عنوان نسبت میزان همگنی در هر مقطع به میزان همگنی حداکثر به صورت رابطه (13) تعریف می کنیم:

$$\epsilon_m = \frac{1 - \sigma_w}{1 - \sigma_{w,\min}} \quad (13)$$

در صورتی که همگنی یا اختلاط کامل به وجود آید، $\sigma_{w,\min} = 0$ شده، لذا مخرج کسر معادله (13) برابر با 1 می شود و کارایی اختلاط به صورت $\epsilon_m = 1 - \sigma_w$ محاسبه می گردد.

بر مبنای این تعریف، میزان کارایی اختلاط برای میدان سرعت و غلظت ارائه شده در شکل 2 محاسبه و نمودار مربوط به آن در شکل 5 رسم شده است. برای نمودارهای بررسی شده در شکل 5، میزان کارایی اختلاط تا قبل از تکه ناهمگن (یعنی بازه $2 < x \leq 4$) تقریباً برای همه ریزمجراها مشابه می باشد و عمده اختلاف بعد از تکه ناهمگنی رخ می دهد و این اختلاف تا پایان ریزمجرا باقی می ماند.

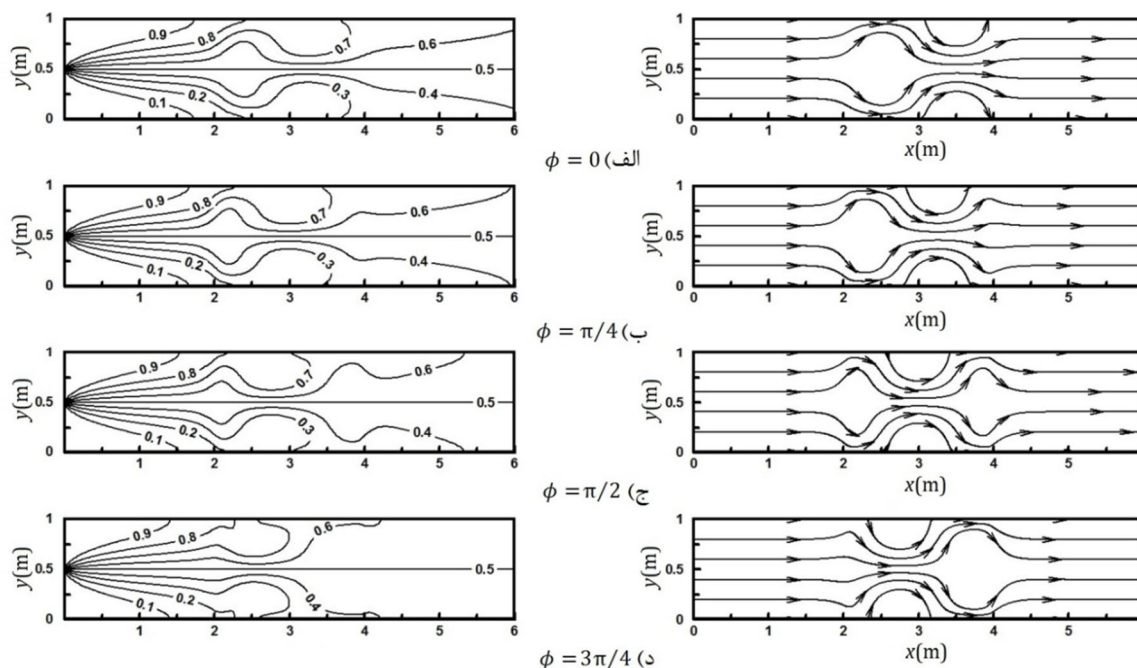
در نیمه پایینی ریزمجرا برابر با صفر و در نیمه بالایی برابر با یک فرض شده است. میدان جریان و میدان غلظت به ازای $Sc = 50$ و برای مقادیر مختلف زاویه ϕ در شکل 2 نشان داده شده است. همان طور که به لحاظ کیفی دیده می شود، ناحیه ناهمگن (یعنی حوزه $2 < x \leq 4$) به شکل قابل ملاحظه ای میزان اختلاط را بهبود داده است.

برای میدان های غلظت نشان داده شده در شکل 2 با استفاده از انحراف معیار معرفی شده توسط معادله (8)، میزان اختلاط در طول این ریزمجراهای ناهمگن مورد مطالعه قرار گرفته است و نتایج مربوط به آن در شکل 3 نشان داده شده است.

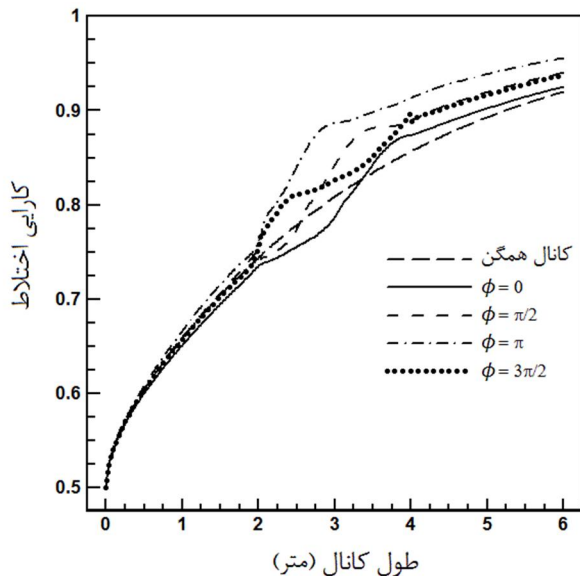
همان گونه که مشاهده می شود در نواحی که سیال دارای جریان چرخشی باشد میزان اختلاط در مجاورت این نواحی دچار نوسان می گردد. به لحاظ فیزیکی قابل پیش بینی بود که میزان انحراف معیار غلظت ها در مجاورت گردابه ها کاهش یابد، اما افزایش انحراف معیار غلظت ها در نزدیکی گردابه ها چندان موجه به نظر نمی رسد چون کاهش انحراف معیار دلالت بر این دارد که مقدار اختلاط کاهش یافته است.

در برخی از مطالعات موجود این پدیده به گردایان های غلظت ربط داده شده است و ادعا می شود که وجود گردابه ها باعث ایجاد نواحی با گردایان شدید غلظت می شود. از طرف دیگر شاهد هستیم که در جریان های آرام و لزج، جابجایی ذرات می تواند به صورت بازگشت پذیر انجام شود، به این معنا که ممکن است در بخشی از مسیر، سیال مخلوط شود و در قسمت های بعدی سیال مخلوط شده به حالت اولیه باز گردد. با علم به این مطالب می خواهیم برای اختلاط معیاری ایجاد کنیم که اثرات توزیع سرعت را نیز در نظر بگیرد و کم یا زیاد بودن سرعت و یا منفی بودن سرعت را نادیده نگیرد. بنابراین برای پرهیز از ایجاد نوسان در میزان اختلاط در طول ریزمجرا از معیار زیر برای محاسبه کارایی اختلاط استفاده شده است که در آن اثر سرعت ذرات نیز گنجانده شده است (رابطه 12):

$$\sigma_w^2 = \frac{\int_0^H u(y)(C(y) - C_m)^2 dy}{\int_0^H u(y) dy} \quad (12)$$



شکل 2 میدان های جریان مربوط به معادله (10): خطوط جریان (سمت راست) و خطوط هم تراز غلظت (سمت چپ)



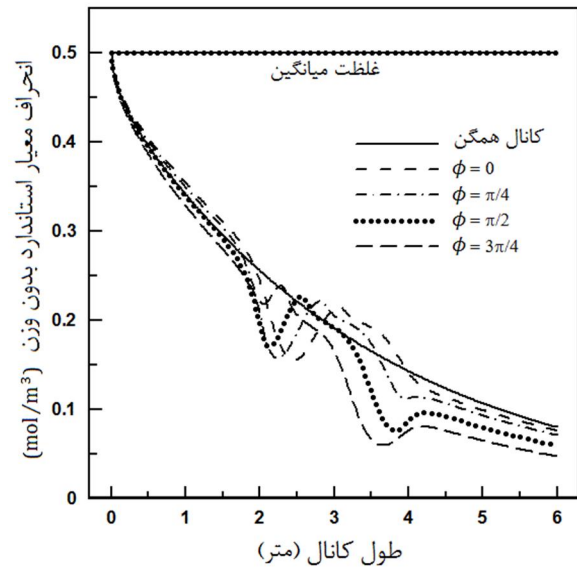
شکل 5 کارایی اختلاط برای میدان‌های جریان شکل 2

مثبت و منفی یعنی n^+ و n^- به دست آید. سپس چگالی بارهای الکتریکی ρ_e از رابطه $\rho_e = n^+ - n^-$ به دست می‌آید.

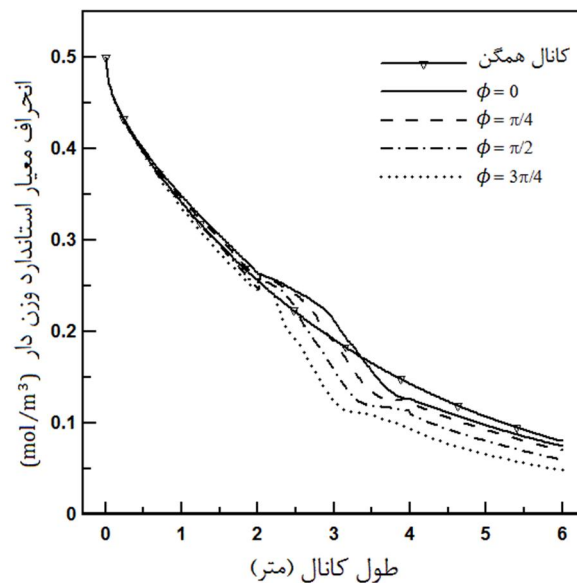
در این مرحله اولین تخمین برای نیروی الکتریکی حجمی قابل محاسبه است و می‌توان با استفاده از آن میدان جریان را به دست آورد. برای محاسبه میدان جریان ابتدا فشار حدس زده می‌شود و سپس معادلات اندازه حرکت برای حل میدان سرعت حل می‌گردد. برای این کار، از روش حجم محدود با متغیرهای هم‌مکان در شبکه‌ی غیریکنواخت استفاده شده است. ارتباط میدان سرعت و فشار توسط طرح سیمپل¹ تعیین می‌شود و برای پرهیز از جواب‌های شطرنجی در میدان جریان، در محاسبه نرخ جریان جرم جابجایی از طرح میان‌یابی رای-چو استفاده شده است. با استفاده از میدان سرعت به دست آمده، معادله پیوستگی جهت اصلاح میدان‌های فشار و سرعت حل می‌شود. از آن جا که میدان جریان، چگالی بار الکتریکی را تحت تأثیر قرار می‌دهد، لذا مجدداً معادلات ارنست-پلانک حل می‌شوند تا توزیع غلظت‌های یونی و چگالی خالص بارهای الکتریکی به دست آید. در ادامه توزیع پتانسیل خارجی و داخلی محاسبه می‌شود. این مراحل آن قدر تکرار می‌شود تا همگرایی مناسب حاصل شود. به عنوان اولین اعتبارسنجی، حل عددی میدان سرعت مربوط به جریان الکترواسموتیک درون ریزمجرای مستقیم و با سطح مقطع یکنواخت در حالتی که خواص دیواره همگن باشد، برای $E_{ext} = 14.59 \text{ V/mm}$ و $K = 41$ و $\zeta^* = 25 \text{ mV}$ به صورت عددی حل شده است و در شکل 6 با حل تحلیلی مقایسه شده است. تحت این شرایط در ناحیه توسعه یافته، توزیع سرعت تحلیلی برای یک جریان الکترواسموتیک خالص ناشی از میدان خارجی E_{ext} به صورت رابطه (14) است:

$$u(y) = \frac{\varepsilon E_{ext} \zeta}{\mu} \left(1 - \frac{\psi(y)}{\zeta} \right) \quad (14)$$

پروفیل جریان الکترواسموتیک درون ریزمجرای همگن مطابق با شکل 6 به جز ناحیه‌ی کوچکی در مجاورت دیواره، تقریباً مقدار یکنواختی است. ضخامت این ناحیه‌ی کوچک که تحت اثر دیواره قرار دارد، بستگی به پارامتر بدون بعد دیبای-هوکل K ، دارد. هر چه مقدار K بزرگ‌تر باشد، ضخامت این ناحیه کمتر است.



شکل 3 میزان غلظت متوسط و انحراف معیار برای میدان‌های جریان شکل 2



شکل 4 انحراف معیار وزن دار با تابع وزنی سرعت برای میدان‌های جریان شکل 2

میزان کارایی اختلاط در انتهای هر ریزمجرا معرف عملکرد آن ریزمجرا در اختلاط می‌باشد و می‌تواند به عنوان یک معیار برای مقایسه عملکرد دو ریزمجرای مختلف باشد. به عنوان مثال در شکل 5 میزان اختلاط نهایی برای ریزمجرای همگن برابر با 91/9% و میزان کارایی ریزمجرا برای حالت $\phi = \pi$ برابر با 96% است.

3- روش عددی و اعتبارسنجی

برای حل عددی معادلات ابتدا میدان الکتریکی خارجی، ϕ ، به دست می‌آید. سپس به عنوان اولین حدس، مقدار پتانسیل ناشی از لایه دوگانه الکتریکی یعنی ψ ، درون حوزه برابر با صفر و روی دیواره‌ها برابر با مقدار زتاپتانسیل در نظر گرفته می‌شود.

سپس معادلات مربوط به میدان الکتریکی داخلی و خارجی با مقدار اولیه $n^+ = n^- = 0$ حل می‌شوند و میدان پتانسیل داخلی، ψ ، توسعه می‌یابد و بعد از آن معادلات ارنست-پلانک حل می‌شود تا توزیع غلظت برای یون‌های

یکی از اهداف این مقاله بررسی میزان کارایی این مدل تقریبی در محاسبه میدان غلظت و راندمان اختلاط درون ریزمخلوط‌گرها می‌باشد، بنابراین ریزمجراهایی که در این مقاله بررسی شده‌اند به منظور استفاده در یک ریزمخلوط‌گر طراحی گردیده‌اند و همگی به صورت یک ریزمجرای تخت دوبعدی دارای ارتفاع H و طول $L = 10H$ می‌باشند که طول آن‌ها به سه قسمت ابتدایی، میانی و انتهایی به ترتیب با طول‌های $L_{in} = 4H$ ، $L_{mid} = 2H$ و $L_{out} = 4H$ تقسیم شده است. (شکل 8) در قسمت‌های ابتدایی و انتهایی دیواره‌ها همگن و در قسمت میانی دیواره‌ها دارای تکه‌های ناهمگنی بار الکتریکی غیریکنواخت هستند به طوری که زتاپتانسیل وابسته به آن‌ها، $\zeta(x)$ ، شامل مقادیر مثبت و منفی می‌باشد. ریزمجراهای مورد بررسی در بخش میانی خود دارای چهار تکه ناهمگنی هستند. در قسمت میانی هر یک از دیواره‌های بالایی و پایینی متشکل از دو قطعه ناهمگنی با طول‌های مساوی است که در هر قطعه، مقدار بار الکتریکی ثابت و یکنواخت است.

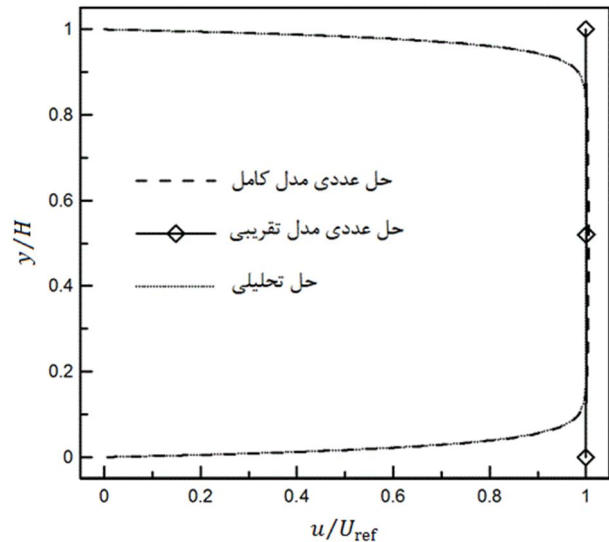
بسته به مقدار بار، نوع بار و نحوه آرایش مکانی قطعات ناهمگنی، مقدار و جهت سرعت لغزشی در مجاورت دیواره‌ها متفاوت خواهد بود و به تبع آن طرح‌های جریان به دست آمده، نقش‌های متفاوتی در فرآیند اختلاط بازی می‌کنند. در حالتی که مقدار بارهای قطعات با هم مساوی باشد، با حذف وضعیت‌های آینه‌ای، سه وضعیت متمایز برای آرایش بارها قابل تصور است. برای اولین آرایش، جزییات مربوط به توزیع بار در قسمت میانی ریزمجرا و طرح جریان الکترواسموتیک مربوطه در حضور میدان الکتریکی مثبت به صورت شماتیک در شکل 9 نشان داده شده است.

برای حالت نشان داده شده در شکل 9، قسمت میانی دارای 4 تکه ناهمگنی است. روی دیواره بالایی از راست به چپ ابتدا یک تکه ناهمگنی با بار منفی (n) و سپس یک تکه ناهمگنی با بار مثبت (p) قرار دارد و در دیواره پایینی همین وضعیت تکرار شده است. زمانی که اندازه بارها در این 4 تکه ناهمگنی برابر باشد، این وضعیت با نماد (np-np) مشخص می‌شود.

با توجه به جهت مثبت E_{ext} (از چپ به راست)، برای حالتی که $E_{ext} = 14.59 \text{ V/mm}$ و $\zeta^* = 25 \text{ mV}$ باشد، طبق مدل H-S سرعت لغزشی - در مجاورت دیواره با زتاپتانسیل منفی مقدار مثبتی است و اندازه عددی آن $u_n = +1 \text{ mm/s}$ است. تحت همین شرایط سرعت لغزشی در مجاورت دیواره با زتاپتانسیل مثبت مقدار منفی است و برابر $u_p = -1 \text{ mm/s}$ است. (رابطه 15)

$$u^t(x) = u^b(x) = \begin{cases} u_p = -1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}, & 4 < x < 5 \\ u_n = +1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}, & 5 < x < 6 \end{cases} \quad (15)$$

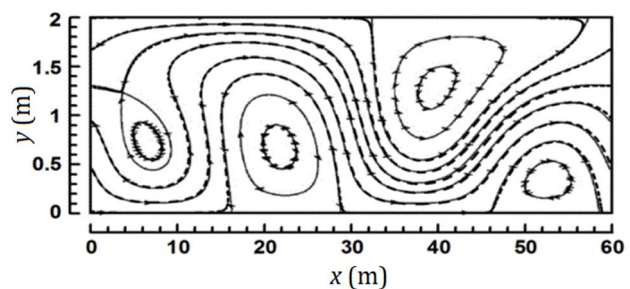
که در آن زیرنویس‌های p یا n برای سرعت u نشان دهنده بار مثبت یا منفی در قطعات است. برای چیدمان بارها در قسمت میانی بر حسب علامت‌های مربوط به سرعت‌های u_n و u_p می‌توان سه نوع آرایش متفاوت (یا حذف حالات متقارن) بیان نمود. دو آرایش متفاوت دیگر که با همین 4 تکه ناهمگنی شکل می‌گیرد عبارت‌اند از (pn-np) و (pp-nn). میدان غلظت برای این آرایش‌ها توسط مدل تقریبی H-S و حل کامل معادلات ارنست-پلانک در قسمت بعدی مورد تحلیل قرار می‌گیرد.



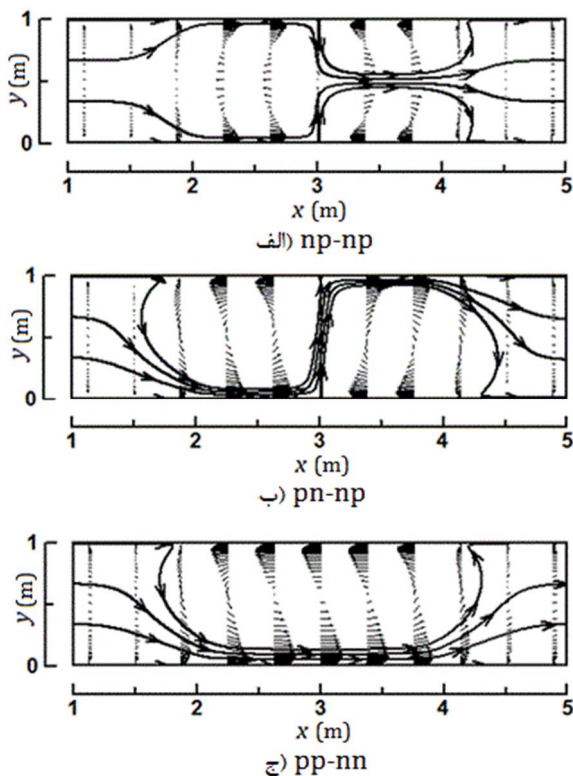
شکل 6 تغییرات سرعت درون ریزمجرای همگن توسط حل عددی مدل کامل، مدل تقریبی H-S و حل تحلیلی میدان سرعت الکترواسموتیک

این مشخصه‌ها باعث شده است تا در شرایط خاص بتوان راه حل ساده‌ای برای حل میدان سرعت ارائه نمود. این راه ساده و تقریبی مبتنی بر مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی است. در این روش میدان جریان توسط حل معادلات ناویر-استوکس با شرایط مرزی لغزشی که از روی میدان الکتریکی اعمالی و بارهای دیواره تعیین می‌شوند، صورت می‌گیرد. در واقع در مدل تقریبی از لایه دوگانه الکتریکی و تغییرات زتاپتانسیل آن ناحیه صرف‌نظر می‌گردد و این تغییرات به صورت شرط مرزی لغزشی روی دیواره اعمال می‌شود.

به عنوان یک مثال دیگر برای اعتبارسنجی، میدان جریان الکترواسموتیک درون ریزمجرای ناهمگن به طول L حل شده است که در آن مقدار زتاپتانسیل روی دیواره‌ی بالا برابر با $\zeta^t(x) = \zeta_0(1 + 4 \sin(2\pi x/L))$ و روی دیواره‌ی پایینی برابر با $\zeta^b(x) = \zeta_0(1 + 4 \sin(4\pi x/L))$ است. به علت توزیع ناهمگن بارهای سطحی روی دیواره، سرعت‌های لغزشی به صورت ناهمگن ایجاد می‌شوند. برای شرایط گفته شده، طبق مدل H-S در دیواره بالا شرط مرزی لغزش به صورت $u^b(x)/u_0 = 1 + 4 \sin(2\pi x/L)$ و روی دیواره پایینی $u^t(x)/u_0 = 1 + 4 \sin(4\pi x/L)$ محاسبه می‌شود. نتایج عددی میدان جریان با استفاده از یک شبکه یکنواخت با 330×80 گره محاسباتی با میدان جریان به دست آمده از حل تحلیلی در شکل 7 مقایسه شده است [45].



شکل 7 خطوط جریان به دست آمده توسط حل تحلیلی (خطوط توپر) و حل عددی (خط چین)



شکل 10 خطوط جریان و بردارهای سرعت در ریزمجرای ناهمگن بر مبنای حل عددی معادلات ارنست-پلانک با الگوی بار قسمت میانی

وجود زتاپتانسیل روی دیواره قسمت پمپاژ باعث شده است تا خطوط بسته گردابه‌های ایجاد شده در ناحیه میانی شکسته شود و اختلاط موثرتر همراه با جریان جرمی خالص به وجود آید.

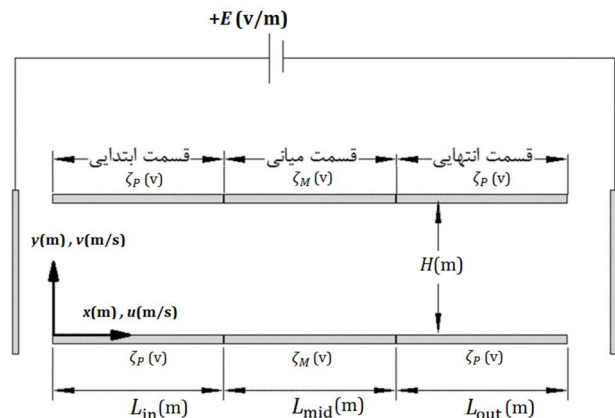
همان گونه که گفته شد مقایسه مدل تقریبی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی با شبیه‌سازی کامل در میدان‌های جریان دوبعدی به خوبی مورد بررسی قرار گرفته است؛ نتایج نشان دهنده آن است که مدل تقریبی تطابق خوبی با مدل حل کامل دارد [39]، اما در این مقاله میزان دقت نتایج حاصله از مدل تقریبی را برای میدان غلظت و راندمان اختلاط در جریان‌های دوبعدی ارزیابی خواهیم کرد.

4-2- مقایسه مدل‌سازی کامل و مدل تقریبی هلمهولتز-اسمولوکوفسکی: میدان غلظت و راندمان اختلاط

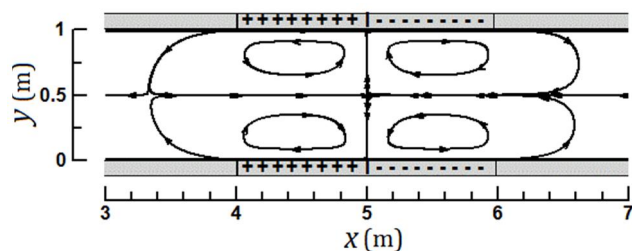
مطالعه و بررسی دقت نتایج مدل H-S برای میدان جریان در حالت دوبعدی به صورت گسترده مطالعه شده است اما دقت این روش برای محاسبه میدان غلظت مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا به منظور بررسی میزان دقت مدل H-S در پیش‌بینی میدان غلظت و راندمان اختلاط، اختلاط دو سیال مجزا از هم در ورودی ریزمجرا مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای مدل‌سازی این کار همه خواص فیزیکی دو سیال مشابه فرض شده است و دو سیال فقط در یک خاصیت اسکالر (غلظت) متفاوت می‌باشند.

در نیمه بالایی ریزمجرا در ورودی مقدار غلظت برابر با 1 و در نیمه پایینی مقدار غلظت برابر با صفر اعمال شده است. میدان غلظت مربوط به چنین وضعیتی پس از حل میدان سرعت قابل محاسبه است و خطوط هم‌تراز غلظت برای آرایش‌های بار (np-np) و برای مقادیر مختلف ζ_p/ζ_m در محدوده $(0 < x < 4)$ در شکل 11 نمایش داده شده است.

مطابق با شکل 11، برای آرایش‌های بار (np-np) خطوط هم‌تراز غلظت



شکل 8 مشخصات توزیع ناهمگن روی دیواره ریزمجرا



شکل 9 یک نمونه از آرایش تکه‌های ناهمگنی بار و خطوط جریان الکترواسموتیک با E مثبت از چپ به راست

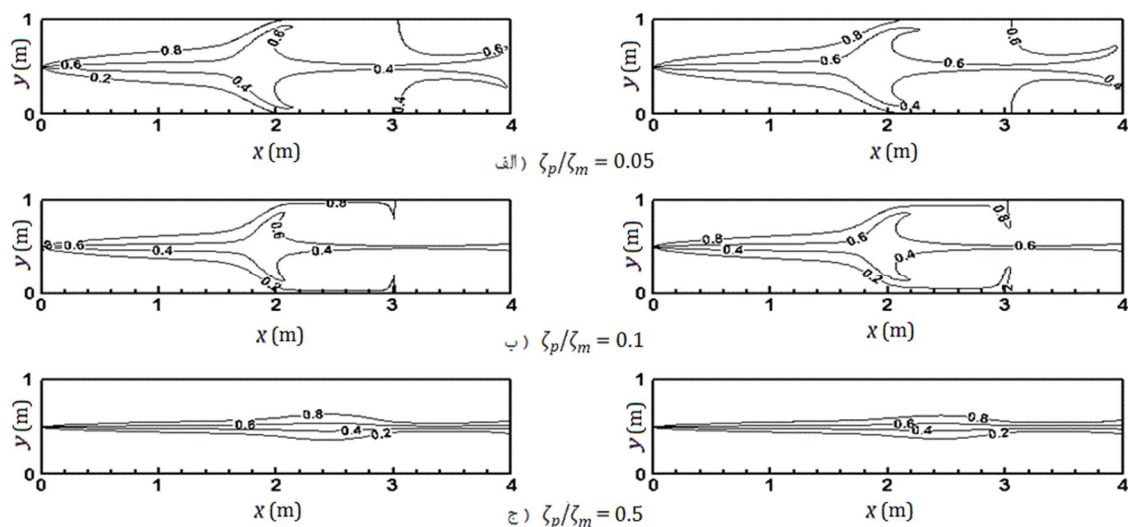
4- نتایج

در بخش اول برای آرایش‌های معرفی شده در قسمت قبلی میدان جریان با استفاده از شبیه‌سازی کامل توسط حل معادلات ارنست-پلانک ارائه می‌شود تا دید مناسبی نسبت به رفتار سیال و الگوی بار اعمالی روی دیواره ریزمجرا حاصل گردد. در قسمت بعدی نتایج حاصل از مقایسه دو مدل هلمهولتز-اسمولوکوفسکی و مدل کامل برای میدان غلظت و راندمان اختلاط بحث خواهد شد.

4-1- حل میدان جریان با کمک معادلات ارنست-پلانک

میزان نیروی محرکه‌ی سیال در یک جریان الکترواسموتیک خالص، مستقیماً به مقدار خالص بارها روی دیواره ریزمجرا بستگی دارد، بنابراین سیستم اختلاطی را به نحوی طراحی می‌کنیم که اختلاط و پمپاژ سیال را به صورت همزمان داشته باشیم. برای تأمین جریان جرمی مناسب مقدار بار الکتریکی در قسمت‌های ورودی و خروجی به صورت یکنواخت و برابر با یک مقدار غیر صفر در نظر گرفته می‌شود.

به منظور درک و تجسم بهتر میدان جریان حاصله از الگوهای بار ناهمگنی، میدان جریان مربوط به حالتی که مقدار زتاپتانسیل بخش پمپاژ (ζ_p) مقدار زتاپتانسیل روی دیواره به جز ناحیه میانی است) برابر با $\zeta_p = 0.05 \zeta_m$ (که ζ_m مقدار زتاپتانسیل در ناحیه میانی است) باشد، با استفاده از شبیه‌سازی کامل توسط حل معادلات ارنست-پلانک به دست آمده است و برای سه الگوی بار (np-np)، (pn-np) و (pp-nn) در شکل 10 نشان داده شده است. برای جلوگیری از نفوذ اغتشاشات در خروجی ریزمجرا به درون حوزه محاسباتی، خروجی ریزمجرا به اندازه‌ی سه برابر ارتفاع ریزمجرا گسترش داده شده است. برای ایجاد وضوح بیشتر میدان جریان در محدوده $1 < x < 5$ از ریزمجرا نشان داده شده است.

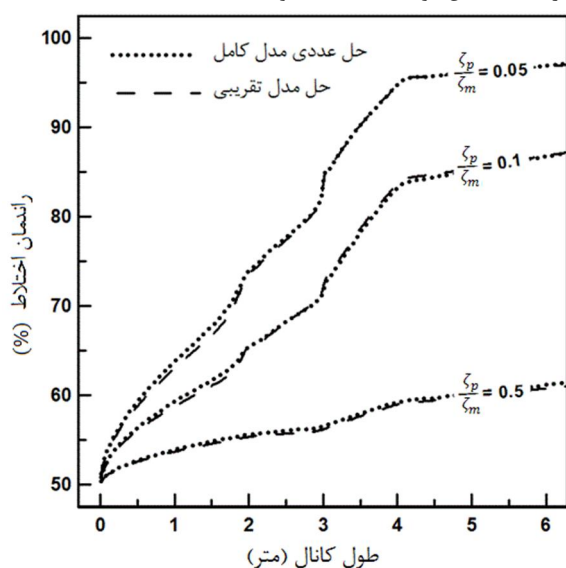


شکل 11 میدان غلظت ریزمجرای ناهمگن با الگوی بار (np-np) به ازای نسبت زتاپتانسیل‌های متفاوت توسط حل عددی مدل H-S (سمت چپ) و حل عددی معادلات ارنست-پلانک (سمت راست)

برای انجام یک مقایسه بی‌نقص به منظور ارزیابی مدل H-S در اختلاط الکتروکنتیکی دوبعدی، مقادیر راندمان اختلاط توسط شبیه‌سازی کامل و مدل H-S در طول ریزمجرا محاسبه و مقایسه شده‌اند. شکل 13 نمودار مربوط به راندمان اختلاط در طول ریزمجرا که توسط مدل H-S و شبیه‌سازی کامل به دست آمده است را نمایش می‌دهد.

شکل 13 نشان می‌دهد که مدل تقریبی H-S با دقت قابل قبولی راندمان اختلاط را در طول ریزمجرا دوبعدی پیش‌بینی می‌نماید، به نحوی که حداکثر خطای موجود کمتر از 1 درصد می‌باشد. مقادیر مربوط به شکل 13 در جدول 1 نشان داده شده است.

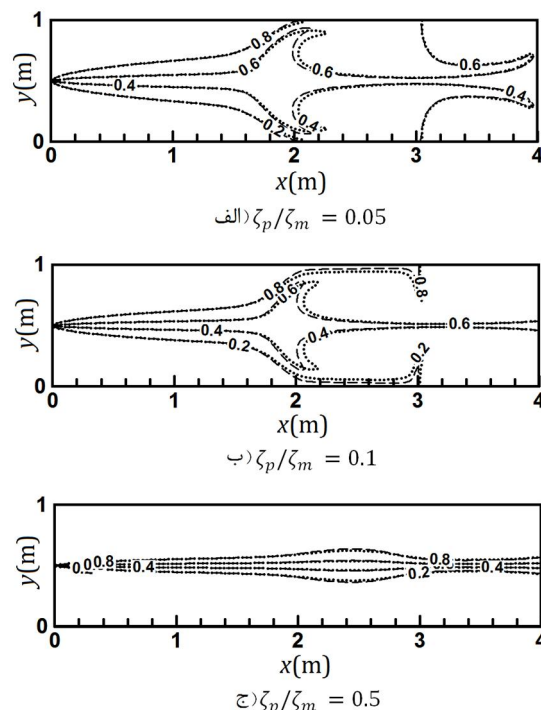
مقایسه انجام شده این اطمینان را ایجاد می‌کند که نتایج حاصله از مدل تقریبی H-S در مسئله مورد بحث به خوبی با نتایج شبیه‌سازی کامل جریان الکترواسموتیک دوبعدی هم‌خوانی و تطابق دارد. بنابراین می‌توان از روش تقریبی H-S در تحلیل راندمان اختلاط ریزمخلوط‌گرهای ساخته شده توسط ریزمجراهای ناهمگن دوبعدی استفاده نمود.



شکل 13 راندمان اختلاط محاسبه شده توسط مدل تقریبی H-S و حل عددی معادلات ارنست-پلانک با الگوی بار (np-np) به ازای نسبت زتاپتانسیل‌های متفاوت

به دست آمده از مدل تقریبی H-S بسیار مشابه با نتایج مربوط به شبیه‌سازی کامل جریان الکترواسموتیک است. میزان شباهت به حدی است که تشخیص تفاوت در نتایج دو روش مورد بحث، دشوار است.

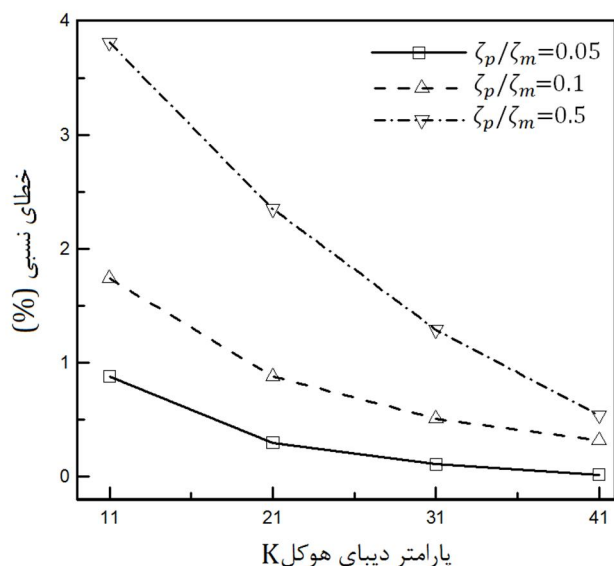
برای مقایسه دقیق‌تر نتایج مدل تقریبی H-S، شکل 12 تهیه شده است. در این شکل خطوط هم‌تراز غلظت مربوط به آرایش بار (np-np) با $\zeta_p/\zeta_m = 0.05$ برای مدل تقریبی H-S با خطوط خط‌چین و خطوط هم‌تراز غلظت مربوط به شبیه‌سازی کامل توسط خطوط نقطه‌چین نشان داده شده‌اند. هر چند که شکل 12 به صورت مناسبی مقایسه بین مدل H-S و شبیه‌سازی کامل را نشان می‌دهد، اما با توجه به این شکل نمی‌توان دقیقاً عملکرد مدل H-S را در ارزیابی اختلاط دوبعدی تعیین نمود.



شکل 12 خطوط هم‌تراز غلظت درون ریزمجرای ناهمگن با الگوی بار (np-np) استفاده از حل تقریبی H-S و حل عددی معادلات ارنست-پلانک به ازای نسبت زتاپتانسیل‌های متفاوت

جدول 2 تغییرات خطای راندمان اختلاط برای آرایش (np-pn) در مقادیر مختلف پارامتر دیبای هوکل و به ازای نسبت زتاپتانسیل‌های متفاوت

نسبت زتاپتانسیل	K=11	K=21	K=31	K=41
$\zeta_p/\zeta_m = 0/05$	0/88	0/3	0/11	0/02
$\zeta_p/\zeta_m = 0/1$	1/74	0/88	0/51	0/32
$\zeta_p/\zeta_m = 0/5$	3/81	2/35	1/29	0/54



شکل 14 تغییرات خطای راندمان اختلاط برای آرایش (np-pn) در مقادیر مختلف پارامتر دیبای هوکل و به ازای نسبت زتاپتانسیل‌های متفاوت

از طرف دیگر مقدار زتاپتانسیل دیواره نیز به طور مستقیم بر مقدار ضخامت لایه دوگانه الکتریکی تأثیر می‌گذارد و در نتیجه در مدل تقریبی هلمهولتز اسمولکوفسکی از ناحیه بزرگ‌تری نسبت به حل کامل معادلات ارنست-پلانک، صرف‌نظر می‌شود و این سبب افزایش خطای مدل H-S می‌شود. لازم به ذکر است که خطای نسبی مدل H-S که برای آرایش (np-pn) حداکثر برابر با 4 درصد به دست آمد، قابل چشم‌پوشی باشد، اما توجه به این نکته ضروری است که این خطا می‌تواند در بررسی و مقایسه عملکرد ریزمخلوط‌گرهای مختلف منجر به نتایج نادرست گردد.

5- نتیجه‌گیری

مدل‌سازی جریان و اختلاط الکتروکنتیکی می‌تواند با کمک مدل تقریبی هلمهولتز اسمولکوفسکی و یا از طریق حل کامل معادلات دقیق ارنست-پلانک انجام گردد که دارای دشواری‌های زیادی در حل عددی است. در این مقاله اختلاط ناشی از جریان الکترواسموتیک درون ریزمجرهای ناهمگن با استفاده از یک معیار مناسب اختلاطی، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته شد. برای بررسی اثر ناهمگنی‌ها بر عملکرد و ویژگی‌های اختلاط در ریزمجرهای ناهمگن، سه نوع ریزمخلوط‌گر معرفی شد که با وجود سادگی کارایی بالایی در ایجاد اختلاط دارند. مقایسه‌ی بین نتایج دو مدل تقریبی هلمهولتز-اسمولکوفسکی و مدل حل کامل با استفاده از معادلات ارنست-پلانک نشان می‌دهد که مدل تقریبی H-S برای زمانی که ضخامت لایه دوگانه الکتریکی نازک باشد ($K = 41$) با دقت قابل قبولی میدان غلظت و راندمان اختلاط را در طول ریزمجر دوبعدی پیش‌بینی می‌نماید، به نحوی که حداکثر خطای موجود حدود 0/5 درصد می‌باشد. برای این حالت و یا حالت‌های $K > 41$

در اینجا لازم است به دو نکته اساسی اشاره شود که تطابق خوب نتایج مدل تقریبی H-S را با شبیه‌سازی کامل در میدان‌های جریان دوبعدی توجیه می‌کند. اول اینکه در مسئله بررسی شده برای اختلاط، فصل مشترک دو جریان مورد اختلاط در وسط دو دیواره قرار گرفته است و لذا فرآیند اختلاط در دورترین فاصله از دیواره‌ها، یعنی مکانی که نتایج دو مدل اختلاف فاحش دارند، در حال شکل گرفتن است، بنابراین هر چند که میدان‌های جریان کاملاً مشابه نیستند، اما فرآیند اختلاط ناشی از آن‌ها نتایج مشابهی دارد.

نکته دیگر که باعث شده است مدل تقریبی H-S نتایج کاملاً ایده‌آلی ارائه نماید مربوط به نوع ناپیوستگی‌های اعمال شده در محل الگوی بار است. هر چند که در مدل فیزیکی مسئله توزیع زتاپتانسیل دیواره به صورت ناپیوسته است، در مدل عددی برای هر دو روش (یعنی مدل H-S و نیز شبیه‌سازی کامل) ناپیوستگی بین دو تکه ناهمگنی توسط یک پروفیل پیوسته جایگزین شده است. این پروفیل پیوسته می‌تواند به صورت خطی و یا توابع ریاضی دیگری باشد. استفاده از این پروفیل پیوسته کمک می‌کند که نتایج مدل H-S و نتایج مربوط به شبیه‌سازی کامل معادلات برای پدیده اختلاط تشابه بیشتری داشته باشند.

نتایجی که تاکنون ارائه شد، به ازای $K = 41$ برای پارامتر بی بعد دیبای هوکل به دست آمده است. برای تعیین اثر این پارامتر بر عملکرد مدل H-S جدول 2 تهیه شده است. در این جدول میزان خطای مدل H-S به ازای مقادیر مختلف K برای آرایش خاص (np-pn) و به ازای نسبت‌های زتاپتانسیل مختلف محاسبه شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش میزان K، خطای ناشی از مدل‌سازی هلمهولتز-اسمولکوفسکی برای محاسبه راندمان اختلاط بیشتر می‌گردد.

برای درک بهتر از جدول 2 داده‌های مربوطه در شکل 14 رسم شده است. نمودار رسم شده گویای این مطلب است که خطای مدل H-S با کاهش K افزایش می‌یابد. علاوه بر چقدر میزان نسبت زتاپتانسیل افزایش می‌یابد، مقدار خطا نیز زیاد می‌شود. برای مثال در نسبت $\zeta_p/\zeta_m = 0.05$ با کاهش K از 41 به 11 مقدار خطا نسبی حدود 1 درصد افزایش می‌یابد اما در نسبت $\zeta_p/\zeta_m = 0.50$ برای همین وضعیت مشابه یعنی با کاهش K از 41 به 11 مقدار خطا نسبی حدود 3 درصد افزایش یافته است.

بنابراین با کاهش پارامتر دیبای هوکل و یا با افزایش نسبت زتاپتانسیل اختلاف بین نتایج حل معادلات ارنست-پلانک و مدل هلمهولتز-اسمولکوفسکی برای محاسبه راندمان اختلاط زیاد می‌شود، زیرا در مدل تقریبی از لایه دوگانه الکتریکی صرف‌نظر می‌گردد، درحالی‌که ضخامت این لایه رابطه معکوسی با پارامتر دیبای هوکل دارد، هرچه مقدار این پارامتر کمتر شود، لایه دوگانه الکتریکی ضخیم‌تر می‌شود.

جدول 1 راندمان اختلاط حاصل از حل مدل کامل و حل مدل تقریبی برای آرایش (np-np) به ازای نسبت زتاپتانسیل‌های متفاوت

نسبت زتاپتانسیل	شبیه‌سازی کامل	حل مدل تقریبی H-S
$\zeta_p/\zeta_m = 0/05$	96/941	96/855
$\zeta_p/\zeta_m = 0/1$	86/763	86/847
$\zeta_p/\zeta_m = 0/5$	61/154	60/784

نتایج حاصل از مدل تقریبی H-S برای زتاپتانسیل های متفاوت و طرح های مختلف از ناهمگنی به خوبی با نتایج شبیه سازی کامل جریان الکترواسموتیک دویسعدی همخوانی و تطابق دارد. برای حالات $K = 31$ مقدار خطا (بسته به مقدار زتاپتانسیل دیوار) است و برای مقادیر کمتر K خطا با شیب بیشتری افزایش می یابد. این یافته ها می توانند برای طراحی ریزمخلوط گرها در تراشه های آزمایشگاهی مورد استفاده قرار گیرند.

6- فهرست علائم

C	غلظت $[mol\ m^{-3}]$
C_m	غلظت متوسط در هر مقطع $[mol\ m^{-3}]$
D	ضریب پخش مولکولی $[m^2\ s^{-1}]$
e	بار پایه الکترون $[C]$
E	شدت میدان الکتریکی $[V\ m^{-1}]$
E_{ext}	شدت میدان الکتریکی اعمالی $[V\ m^{-1}]$
H	عرض مجرا $[m]$
K	پارامتری بعد دیبای هوکل
K_b	ثابت بولتزمن $[J\ K^{-1}]$
L	طول مجرا $[m]$
n_0	غلظت عددی یون ها در محلول یکنواخت $[ions\ m^{-3}]$
P	فشار $[kg\ m^{-1}\ s^{-2}]$
Re	عدد رینولدز
Sc	عدد اشمیت
T	دمای مطلق الکترولیت $[K]$
u_{wall}	بردار سرعت روی دیواره $[m\ s^{-1}]$
$\vec{v}$	بردار سرعت $[m\ s^{-1}]$
Z	عدد والانس الکترولیت متقارن

علائم یونانی

ϵ_m	کارایی اختلاط
ϵ	ضریب گذردهی الکترولیت $[C\ v^{-1}\ m^{-1}]$
κ	معکوس ضخامت مشخصه لایه دو گانه الکتریکی $[m^{-1}]$
μ	لزجت دینامیکی $[kg\ m^{-1}\ s^{-1}]$
ζ	زتاپتانسیل $[V]$
ζ_p	زتاپتانسیل بخش پمپاژ $[V]$
ζ_m	زتاپتانسیل بخش میانی $[V]$
ζ_{wall}	زتاپتانسیل روی دیواره $[V]$
ρ	چگالی $[C\ m^{-3}]$
ρ_e	چگالی خالص بارهای الکتریکی $[C\ m^{-3}]$
ϕ	زاویه $[rad]$
Φ	میدان الکتریکی خارجی $[V]$
ψ	میدان الکتریکی ناشی از لایه دو گانه الکتریکی $[V]$
σ	انحراف معیار غلظت گونه ها بدون تابع وزنی $[mol\ m^{-3}]$
σ_w	انحراف معیار غلظت گونه ها با تابع وزنی سرعت $[mol\ m^{-3}]$

بالانویس ها

b	پایین
t	بالا
$*$	بی بعد
$+$	یون مثبت
$-$	یون منفی

زیرنویس ها

av	مقدار متوسط
ext	خارجی
in	ابتدا
mid	وسط
n	بار منفی روی قطعه
out	انتهای
p	بار مثبت روی قطعه
ref	مرجع
S	لغزش
$wall$	دیواره

7- مراجع

- [1] L. M. Fu, R. J. Yang, G. B. Lee, H. H. Liu, Electrokinetic injection techniques in microfluidic chips, *Anal Chem*, Vol. 74, No. 19, pp. 5084-91, 2002.
- [2] I. Glasgow, J. Batton, N. Aubry, Electroosmotic mixing in microchannels, *Lab on a Chip*, Vol. 4, pp. 558-562, 2004.
- [3] N. A. Patankar, H. H. Hu, Numerical simulation of electroosmotic flow, *Anal Chem*, Vol. 70 No. 9, pp. 1870-1881, 1998.
- [4] C. C. Chang, R. J. Yang, Electrokinetic mixing in microfluidic systems, *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 3, No. 5, pp. 501-525, 2007.
- [5] Y. Y. Liang, G. A. Fimbres Weihs, D. E. Wiley, Approximation for modelling electro-osmotic mixing in the boundary layer of membrane systems, *Journal of Membrane Science*, Vol. 450, pp. 18-27, 2014.
- [6] A. K. Nayak, Analysis of mixing for electroosmotic flow in micro/nano channels with heterogeneous surface potential, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 75, pp. 135-144, 2014.
- [7] Y. Wang, J. Zhe, B. T. F. Chung, P. Dutta, A rapid magnetic particle driven micromixer, *Microfluid. Nanofluid.*, Vol. 4, pp. 375-389, 2008.
- [8] H. H. Bau, J. Zhong, M. Yi, A minute magneto hydro dynamic (MHD) mixer, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 79, pp. 207-215, 2001.
- [9] B. Xu, T. Wong, N. Nguyen, Z. Che, J. Chai, Thermal mixing of two miscible fluids in a T-shaped microchannel, *Biomicrofluidics*, Vol. 4, No. 4, pp. 044102, 2010.
- [10] A. Alizadeh, L. Zhang, M. Wang, Mixing enhancement of low-Reynolds electro-osmotic flows in microchannels with temperature-patterned walls, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 431, pp. 50-63, 2014.
- [11] M. Campisi, D. Accoto, F. Damiani, P. Dario, A soft-lithographed chaotic electrokinetic micromixer for efficient chemical reactions in lab-on-chips, *J. Micro-Nano Mech.*, Vol. 5, pp. 69-76, 2009.
- [12] R. H. Liu, R. Lenigk, R. L. Druyor Sanchez, J. Yang, P. Grodzinski, Hybridization Enhancement Using Cavitation Microstreaming, *Analytical Chemistry*, Vol. 75, No. 8, pp. 1911-1917, 2003.
- [13] J. E. Curtis, B. A. Koss, D. G. Grier, Dynamic holographic optical tweezers, *Optics Communications*, Vol. 207, No. 1-6, pp. 169-175, 2002.
- [14] F. Bottausci, I. Mezic, C. D. Meinhardt, C. Cardonne, Mixing in the shear superposition micromixer: three-dimensional analysis: One contribution of 11 to a Theme 'Transport and mixing at the microscale', *Philosophical Transactions of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 362, No. 1818, pp. 1001-1018, 2004.
- [15] A. Goullet, I. Glasgow, N. Aubry, Effects of microchannel geometry on pulsed flow mixing, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, No. 5, pp. 739-746, 2006.
- [16] W. Buchegger, C. Wagner, B. Lendl, M. Kraft, M. Vellekoop, A highly uniform lamination micromixer with wedge shaped inlet channels for time resolved infrared spectroscopy, *Microfluid. Nanofluid.*, Vol. 10, pp. 889-897, 2011.
- [17] S. Hardt, H. Pennemann, F. Schönfeld, Theoretical and experimental characterization of a low-Reynolds number split-and-recombine mixer, *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 2, No. 3, pp. 237-248, 2006.
- [18] H. Khozayemnezhad, S. A. Mirbozorgi, Numerical Investigation of the effect of Cylinder Obstacle with Circle Cross-Section on Electroosmotic Flow inside a Flat Microchannel, *Joint Convention on Computer Engineering and Mechanics*, Miandoab, Iran, 2013. (In Persian)
- [19] H. Le The, H. Le Thanh, T. Dong, B. Q. Ta, N. Tran Minh, F. Karlsen, An effective passive micromixer with shifted trapezoidal blades using wide Reynolds number range, *Chemical Engineering Research and Design*, Vol. 93, pp. 1-11, 2015.
- [20] V. E. Papadopoulos, I. N. Kefala, G. Kaprou, G. Kokkoris, D. Moschou, G. Papadakis, E. Gizeli, A. Tserpi, A passive micromixer for enzymatic digestion of DNA, *Microelectronic Engineering*, Vol. 124, pp. 42-46, 2014.
- [21] J. J. Chen, C. H. Chen, S. R. Shie, Optimal Designs of Staggered Dean Vortex Micromixers, *International Journal of Molecular Sciences*, Vol. 12, No. 6, pp. 3500-24, 2011.

- [34] C. K. Chen, C. C. Cho, A combined active/passive scheme for enhancing the mixing efficiency of microfluidic devices, *Chemical Engineering Science*, Vol. 63, No. 12, pp. 3081-3087, 2008.
- [35] C. Y. Lim, Y. C. Lam, C. Yang, Mixing enhancement in microfluidic channel with a constriction under periodic electro-osmotic flow, *Biomicrofluidics*, Vol. 4, No. 1, pp. 014101, 2010.
- [36] S. Bera, S. Bhattacharyya, On mixed electroosmotic-pressure driven flow and mass transport in microchannels, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 62, pp. 165-176, 2013.
- [37] C. O. Ng, C. Qi, Electroosmotic flow of a power-law fluid in a non-uniform microchannel, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 208-209, pp. 118-125, 2014.
- [38] H. Niazmand, J. Jamaati, M. Renlitzbulut, Investigation of electrokinetic mixing in 3D non-homogenous microchannels, *Journal Of Computational And Applied Research In Mechanical Engineering*, Vol. 3, No. 1, pp. 41-52, 2013.
- [39] J. Jamaati, A. R. Farahinia, H. Niazmand, Numerical Investigate of Electroosmotic Flow in Heterogeneous Microchannels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 260-270, 2015. (In Persian)
- [40] J. H. Masliyah, *Electrokinetik transport phenomena*: Alberta Oil Sands Technology and Research Authority, 1994.
- [41] E. B. Cummings, S. K. Griffiths, R. H. Nilson, P. H. Paul, Conditions for similitude between the fluid velocity and electric field in electroosmotic flow, *Anal Chem*, Vol. 72, No. 11, pp. 2526-32, 2000.
- [42] J. G. Santiago, Electroosmotic Flows in Microchannels with Finite Inertial and Pressure Forces, *Analytical Chemistry*, Vol. 73, No. 10, pp. 2353-2365, 2001.
- [43] H. Bockelmann, V. Heuveline, D. P. Barz, Optimization of an electrokinetic mixer for microfluidic applications, *Biomicrofluidics*, Vol. 6, No. 2, pp. 24118-23, 2012.
- [44] J. M. Chen, T. L. Horng, W. Y. Tan, Analysis and measurements of mixing in pressure-driven microchannel flow, *Microfluidics and Nanofluidics*, Vol. 2, No. 6, pp. 455-469, 2006.
- [45] J. Zhang, G. He, F. Liu, Electro-osmotic flow and mixing in heterogeneous microchannels, *Physical Review E*, Vol. 73, No. 5, pp. 056305, 2006.
- [22] J. Jian Chen, Y. Ren Lai, R. Tang Tsai, J. Der Lin, C. Yang Wu, Crosswise ridge micromixers with split and recombination helical flows, *Chemical Engineering Science*, Vol. 66, No. 10, pp. 2164-2176, 2011.
- [23] S. H. Wong, M. C. L. Ward, C. W. Wharton, Micro T-mixer as a rapid mixing micromixer, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 100, No. 3, pp. 359-379, 2004.
- [24] J. Ou, G. Moss, J. Rothstein, Enhanced mixing in laminar flows using ultrahydrophobic surfaces, *Physical Review E*, Vol. 76, No. 1, pp. 016304, 2007.
- [25] S. Böhm, K. Greiner, S. Schlautmann, S. de Vries, A. van den Berg, A Rapid Vortex Micromixer for Studying High-Speed Chemical Reactions, *Micro Total Analysis Systems*, Vol. 9, pp. 25-27, 2001.
- [26] P. Löb, H. Pennemann, V. Hessel, Y. Men, Impact of fluid path geometry and operating parameters on I/I-dispersion in interdigital micromixers, *Chemical Engineering Science*, Vol. 61, No. 9, pp. 2959-2967, 2006.
- [27] A. Ahmadian Yazdi, A. Sadeghi, M. H. Saidi, Electrokinetic mixing at high zeta potentials: Ionic size effects on cross stream diffusion, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 442, pp. 8-14, 2015.
- [28] S. Ebrahimi, A. Hasanzadeh-Barforoushi, A. Nejat, F. Kowsary, Numerical study of mixing and heat transfer in mixed electroosmotic/pressure driven flow through T-shaped microchannels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 75, pp. 565-580, 2014.
- [29] R. Peng, D. Li, Effects of ionic concentration gradient on electroosmotic flow mixing in a microchannel, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 440, pp. 126-132, 2015.
- [30] S. Bhattacharyya, S. Bera, Combined electroosmosis-pressure driven flow and mixing in a microchannel with surface heterogeneity, *Applied Mathematical Modelling*, 2015.
- [31] S. Ganguly, S. Sarkar, T. Kumar Hota, M. Mishra, Thermally developing combined electroosmotic and pressure-driven flow of nanofluids in a microchannel under the effect of magnetic field, *Chemical Engineering Science*, Vol. 126, pp. 10-21, 2015.
- [32] W. L. W. Hau, D. W. Trau, N. J. Sucher, M. Wong, Y. Zohar, Surface-chemistry technology for microfluidics, *J. of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 13, No. 2, pp. 272-278, 2003.
- [33] A. Stroock, M. Weck, D. Chiu, W. Huck, P. Kenis, R. Ismagilov, G. Whitesides, Patterning Electro-osmotic Flow with Patterned Surface Charge, *Physical Review Letters*, Vol. 84, No. 15, pp. 3314-17, 2000.