مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص‌ص 255-264

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

# بررسی تأثیر فرآیند اتوفرتاژ در استوانه با مواد تابعی مدرج روی پارامترهای ترک سطحی خارجی با استفاده از گسسته سازی عددی میدان تنش

رحمن سیفی[1*]، علیرضا دژم[2]

1- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

2- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

*همدان، صندوق پستی 4161-65175 rseifi@basu.ac.ir

**اطلاعات مقاله**

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 آذر 1393

پذیرش: 11 بهمن 1393

ارائه در سایت: 11 اسفند 1393

*کلید واژگان:*

اتوفرتاژ، تنش پسماند

ضریب شدت تنش،

نرخ رهایی انرژی

ترک خارجی سطحی

**چکیده**

در این مقاله، تغییرات ضریب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی بر اساس روش همبستگی جابجایی و روش اصلاح شده‌ی انتگرال بسته شدن ترک برای ترک‌های سطحی خارجی در استوانه اتوفرتاژ شده از جنس مواد تابعی مدرج بررسی شده است. خواص مکانیکی بر اساس تابع مورد نظر در راستای شعاع استوانه متغیر است. فرض شده است که رفتار مواد ایزوتروپیک بوده و دارای رابطه تنش-کرنش کشسان-خمیری به صورت دوخطی است. فرآیند اتوفرتاژ باعث ایجاد تنش پسماند کششی در قسمت‌های بیرونی دیواره استوانه می‌شود که تأثیر نامطلوبی بر رفتار ترک خارجی خواهد داشت. متغیرهای مختلفی بر مقدار تنش پسماند کششی اثر دارند. تأثیر نسبت اتوفرتاژ، کسر حجمی مواد و ضخامت استوانه بر تغییرات تنش پسماند و علاوه بر آن‌ها، تغییرات ابعاد و امتداد ترک سطحی بر ضریب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که تغییر کسر حجمی بیش‌ترین تأثیر را بر هر دو پارامتر ترک دارد. ترک محوری از ترک‌های مایل و محیطی بحرانی‌تر است. از اصل جمع آثار می‌توان برای تعیین اثر تنش پسماند و بار اعمالی بر رفتار ترک در مواد تابعی مدرج استفاده نمود.

# Study the effect of autofrettaging of functionally graded cylinder on the external surface crack parameters using numerical discretizing of stress fields

Rahman Seifi*, Alireza Dejam

Department of Mechanical Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran
*P.O.B 65175-4161, Hamedan, Iran, rseifi@basu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 December 2014
Accepted 31 January 2015
Available Online 02 March 2015

*Keywords:*
Autofrettage, residual stress
stress intensity factor
energy release rate
external surface crack

ABSTRACT

In this paper, the variations of the stress intensity factor and energy release rate have been investigated based on the displacement correlation and modified crack closure integral methods for external surface cracks in the autofrettaged functionally graded cylinder (FGC). Mechanical properties vary in the radial direction according to the desired function. Isotropic material behavior and bilinear elastoplastic stress-strain relationship are considered for the FGC. Autofrettage process induces the tensile residual stresses in the outer parts of the cylinder wall, which cause undesirable effects on the external surface cracks. Many variables affect the distribution of tensile residual stresses. Effects of autofrettage ratio, volume fraction of material and cylinder thickness on the residual stress changes and, in addition, changes in the size and direction of surface cracks on the stress intensity factor and energy release rate are studied. The results show that the volume fraction has the greatest effects on both crack parameters. The axial cracks are critical compared with circumferential and angled cracks. The principle of superposition can be used to determine the combinational effects of the residual stresses and applied loads on the behavior of cracks in the graded materials.

## 1- مقدمه

اتوفرتاژ فرایندی است که در آن استوانه تحت فشار داخلی با اندازه مشخصی قرار می‌گیرد، به گونه‌ای که قسمتی از دیواره داخلی آن دچار تغییر شکل خمیری می‌شود. پس از حذف فشار داخلی، قسمت کشسان تمایل دارد به حالت اولیه برگردد، ولی قسمت خمیری این اجازه را نمی‌دهد. بنابراین قسمت خمیری تحت فشار قرار می‌گیرد. این به معنی ایجاد تنش پسماند فشاری در قسمت داخلی (در قسمت خمیری شده) و تنش پسماند کششی در قسمت خارجی استوانه است.

مواد تابعی مدرج[1]، موادی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها از نقطه‌ای به نقطه دیگر( یا از سطحی به سطح دیگر) به طور ملایم و پیوسته تغییر می‌کند. این مواد به دلیل دارا بودن خواص مکانیکی و حرارتی مطلوب،

1- Functionally graded materials

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

R. Seifi, A. Dejam, Study the effect of autofrettaging of functionally graded cylinder on the external surface crack parameters using numerical discretizing of stress fields, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 4, pp. 255-264, 2015 (In Persian)

کاربردهای فراوانی در صنعت دارند. همچنین این مواد به عنوان جایگزینی برای عایق‌های حرارتی و مقاومت در دماهای بالا، در صنایع هوافضا کاربرد گسترده‌ای دارند.

ماده‌ی تابعی مدرج، نوعی ماده مرکب است که در آن کسر حجمی مواد تشکیل دهنده به طور پیوسته و بر اساس تابعی مشخص بر حسب موقعیت تغییر می‌کند. بنابراین ناپیوستگی خواص مکانیکی و حرارتی در آن‌ها وجود ندارد. از این مواد می‌توان به عنوان اتصال دهنده بین دو لایه با جنس‌های متفاوت استفاده نمود که باعث بهبود استحکام اتصال می‌شود [1]. می‌تواند باعث از بین رفتن تورق(لایه لایه شدن) [2] و تمرکز تنش [3،4] شود. به دلیل وجود مزیت‌های ذکر شده در مواد تابعی مدرج نسبت به کامپوزیت‌ها و مواد همگن، این مواد در سازه‌های مهندسی و زمینه‌های تحقیقاتی دیگر مورد توجه قرارگرفته‌اند. کیم و پائولینو [5] به کاربردهای وسیعی از مواد تابعی مدرج اشاره کرده‌اند. آن‌ها تأثیر تابع توزیع ذرات بر خواص مواد با هندسه‌ها و بارگذاری‌های مختلف را بررسی کرده‌اند.

امروزه مخازن تحت فشار، کاربرد بسیار وسیعی در صنایع مختلف مانند هوافضا، پتروشیمی، انتقال گاز و ... دارند. همزمان با پیشرفت‌های جدید صنعتی، استفاده از مواد متداول در استوانه‌های با فشار بسیار بالا پاسخگوی نیازها نیست. لذا استفاده از استوانه‌های ساخته شده از مواد تابعی مدرج در شرایط غیر متعارف دمایی، فشار و شرایط محیطی گریزناپذیر شده است [6]. شرایط و محیط کارکرد این استوانه‌ها می‌تواند باعث ایجاد عیوبی مانند حفره‌ها و ترک‌ها در سطوح داخلی و خارجی گردد. ترک‌های سطحی می‌توانند در حین فرایند تولید و یا در زمان به‌کارگیری آن‌ها ایجاد شوند. بنابراین در نظر گرفتن معیارهای مکانیک شکست در فرایند طراحی چنین تجهیزاتی لازم به نظر می‌رسد. بر این اساس، تحلیل رفتار ترک در مواد تابعی مدرج و سازه‌های نوین مهندسی یک امر ضروری است.

در زمینه‌ی بررسی پارامترهای مکانیک شکست در مواد مدرج فعالیت‌های قابل توجهی صورت گرفته است. یانگ و شیه [7] فرایند ایجاد ترک و شکست در ماده تابعی بین دو لایه‌ی غیر همگن متفاوت را مطالعه کرده‌اند. اردوگان [3] طبیعت منفرد بودن تنش‌ها در نزدیکی نوک ترک در مواد غیر همگن را بررسی کرد. جین و باترا [8] مفاهیم پایه‌ی مکانیک شکست کلاسیک در مواد تابعی مدرج را ارائه دادند.

کیم و پائولینو [5] با استفاده از روش المان محدود و روش اصلاح شده‌ی انتگرال بازشدگی ترک[1]، به بررسی ضریب شدت تنش در مواد تابعی مدرج پرداختند. والترز و همکارانش [9] ضرایب شدت تنش[2] در ترک‌های موجود در ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی مدرج را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ترک‌های سطحی تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی را به روش المان محدود مدل کردند و با استفاده از جابجایی‌های دهانه ترک ضرایب شدت تنش را محاسبه کردند. نظری و همکارانش [10] ضرایب شدت تنش را در مواد تابعی مدرج تحت اثر تنش‌های حرارتی با روش بدون المان[3] به دست آوردند. طالع‌زاده و صدیقی [11] به بررسی تغییرات ضریب شدت تنش در مود اول و دوم شکست ترک در جسم نیمه بینهایت با مواد تابعی مدرج تحت اثر نیروهای تماسی پرداختند. همچنین عبداللهی‌فر و نامی [12] اثر جهتِ تغییر مواد تابعی مدرج بر ضریب شدت تنش در مود ترکیبی را با روش بدون المان تعیین نمودند.

1- Modified crack closure integral(MCCI) method
2- Stress intensity factors
3- Meshless method

ییلدیریم و همکارانش [13] تحلیل شکست پوشش‌های ساخته شده از مواد تابعی مدرج را مورد بررسی قرار دادند. ژنگ و همکارانش [14] مشخصات ترک‌های سه بعدی را در مواد تابعی مدرج به دست آوردند. آن‌ها با استفاده از روش المان‌های مرزی ابتدا جابجایی‌های دهانه ترک را محاسبه نموده و سپس ضرایب شدت تنش را از روابط موجود محاسبه کردند.

افسر و انیزوزمان [6] استوانه جدار ضخیم ساخته شده از مواد تابعی مدرج با دو ترک محوری داخلی را بررسی نموده و ضریب شدت تنش را با روش عددی محاسبه کردند. آن‌ها استوانه مواد تابعی مدرج را به صورت لایه‌های استوانه‌ای با ضخامت محدود در نظر گرفتند که خواص مکانیکی در هر لایه ثابت است. چن [15] ضرایب شدت تنش برای ترک‌های داخلی و خارجی محیطی کامل، در استوانه با مواد تابعی مدرج تحت کشش طولی را تعیین کرد. نامی و اسکندری [16] ضرایب شدت تنش را برای یک ترک سطحی در استوانه ساخته شده از مواد تابعی مدرج مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش المان محدود استوانه را تحت بارگذاری مکانیکی-حرارتی قرار دادند و برای به دست آوردن جابجایی‌های دهانه ترک از روش زیر-مدل[4] استفاده کردند.

در این مقاله اثر تنش پسماند ناشی از فرآیند اتوفرتاژ استوانه با مواد تابعی مدرج بر ترک سطحی نیم بیضی در سطح خارجی بررسی شده است. تأثیر عواملی همچون ابعاد و امتداد ترک، کسر حجمی مواد تابعی مدرج، ضخامت استوانه و نسبت اتوفرتاژ مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

## 2- معادلات ساختاری ماده تابعی

برای محاسبه خواص مکانیکی در مواد تابعی مدرج، مدل‌های مختلفی ارائه شده است. یکی از این مدل‌های مهم و کاربردی، مدل TTO[5] است. تمورا و همکارانش [17] بر اساس قانون مخلوط‌ها، مدل ساده‌ای را برای نشان دادن منحنی تنش-کرنش ماده‌ی تابعی ارائه دادند. مدل آن‌ها توسط ویلیامسون و همکارانش [18]، گیاناکوپولس و همکارانش [19] و کرپنتر و همکارانش [20] برای مطالعه‌ی مواد تابعی مدرج به کار گرفته شد. مدل TTO طبق رابطه‌ی (1) تنش و کرنش تک محوری ماده‌ی مرکب را با استفاده از تنش و کرنش‌های متوسط دو ماده‌ی تشکیل دهنده، ترکیب می‌کند.

$$\sigma = f\sigma_1 + (1-f)\sigma_2$$
$$\varepsilon = f\varepsilon_1 + (1-f)\varepsilon_2 \qquad (1)$$

که در آن $\varepsilon_i, \sigma_i (i=1,2)$ تنش‌ها و کرنش‌های متوسط دو فاز تشکیل دهنده و $f$ کسر حجمی ماده 1 است.

مدل TTO پارامتر جدیدی را برای نشان دادن نسبت انتقال تنش به کرنش تعریف می‌کند. این پارامتر به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود:

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \qquad (2)$$

ثابت $q$ اثر متقابل اجزاء در مواد تابعی مدرج را کنترل می‌کند. این ثابت به صورت تقریبی از روش‌های تجربی قابل محاسبه است. در این مدل، مدول یانگ از رابطه‌ی (3) تعیین می‌شود:

$$E = \frac{(1-f)E_m\left(\frac{q+E_c}{q+E_m}\right) + fE_c}{(1-f)\left(\frac{q+E_c}{q+E_m}\right) + f} \qquad (3)$$

4- Sub model
5- Tamura-Tomota-Ozawa model

که در آن $E_m$ و $E_c$ مدول یانگ فازهای تشکیل دهنده ماده (معمولاً فلز و سرامیک) و $f$ اندازه کسر حجمی سرامیک است.

برای به کار بردن مدل TTO برای مخلوط سرامیک-فلز (ترد-نرم)، تنش تسلیم ماده‌ی مرکب بر اساس تنش تسلیم ماده نرم با رابطه‌ی (4) داده می‌شود.

$$\sigma_y = \sigma_{ym}[(1-f)+f\frac{q+E_m}{q+E_c}\frac{E_c}{E_m}] \quad (4)$$

که در آن $\sigma_{ym}$ تنش تسلیم فلز است. اگر فلز به عنوان یک ماده‌ی دو خطی با مدول مماسی $H_m$ در نظر گرفته شود، ماده‌ی مرکبی را نتیجه می‌دهد که مدول مماسی آن از رابطه‌ی (5) قابل محاسبه است:

$$H = \frac{(1-f)H_m\frac{q+E_c}{q+E_m}+fE_c}{(1-f)\frac{q+E_c}{q+E_m}+f} \quad (5)$$

مدل TTO و تغییرات منحنی تنش-کرنش در شکل 1 به صورت شماتیک نشان داده شده است.

## 3- روش همبستگی جابه‌جایی[1] در محاسبه ضریب شدت تنش

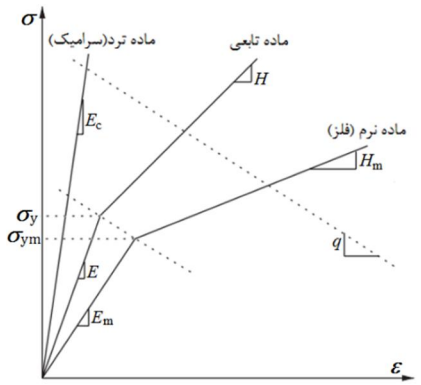
روش همبستگی جابه‌جایی از ساده‌ترین روش‌های محاسبه‌ی ضریب شدت تنش است. این روش شامل تعیین رابطه بین ضریب شدت تنش و جابه‌جایی‌های نقاط خاص در نزدیک نوک ترک است [20].

برای المان‌های منفرد، جابجایی بازشدگی ترک[2] در نقطه‌ای با مختصات $x_1=-r$ در لبه ترک از رابطه (6) محاسبه می‌شود:

$$COD(-r) = (4\Delta u_{2,i-1} - \Delta u_{2,i-2})\sqrt{\frac{r}{\Delta a}} \quad (6)$$

که در آن $\Delta u_{2,i-1}$ و $\Delta u_{2,i-2}$ به ترتیب اندازه اختلاف جابه‌جایی‌های نسبی (نسبت به نوک ترک) در جهت $x_2$ در موقعیت $(i-1)$ و $(i-2)$ هستند. همچنین $r$ فاصله‌ی نقطه تا نوک ترک در امتداد $x_1$ است. $\Delta a$ طول مشخصه المان منفرد چسبیده به نوک ترک است. پارامترهای مذکور به صورت شماتیک در شکل 2 آورده شده است.

برای مواد تابعی مدرج، لازم است که خواص مواد در موقعیت نوک ترک در نظر گرفته شود. بنابراین مقدار تحلیلی برای $COD(-r)$ بر اساس




**شکل 1** منحنی تنش کرنش ماده تابعی در مدل TTO [17]

1- Displacement Correlation Technique (DCT)
2- Crack opening displacement (COD)

روش‌های مکانیک شکست کلاسیک با صرف‌نظر از جملات مرتبه‌ی بالاتر، با رابطه (7) بیان می‌شود:

$$COD(-r) = K_I(\frac{\kappa+1}{\mu})_{tip}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (7)$$

که در آن مقدار $\kappa$ در نوک ترک، برای حالت کرنش صفحه‌ای و سه بعدی برابر $\kappa_{tip}=3-4\nu_{tip}$ و برای حالت تنش صفحه‌ای برابر $\kappa_{tip}=(3-\nu_{tip})/(1+\nu_{tip})$ است.

$\mu_{tip}$ و $\nu_{tip}$ به ترتیب مدول برشی و ضریب پواسون ماده در نوک ترک را نشان می‌دهند. با ترکیب دو معادله‌ی (6) و(7) مقدار ضریب شدت تنش برای مود اول شکست ($K_I$)، با معادله (8) محاسبه می‌شود:

$$K_I = (\frac{\mu}{\kappa+1})_{tip}\sqrt{\frac{2\pi}{\Delta a}}[4\Delta u_{2,i-1} - \Delta u_{2,i-2}] \quad (8)$$

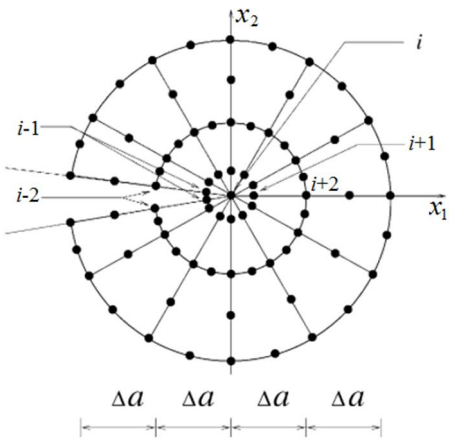
در این مقاله برای بررسی ترک‌های سطحی محوری از این روش استفاده شده است.

## 4- روش اصلاح شده‌ی انتگرال بسته شدن ترک

روش اصلاح شده‌ی انتگرال بسته شدن ترک توسط رایبیکی و کنینن بر پایه‌ی روش بسته شدن مجازی دهانه‌ی ترکِ ایروین پیشنهاد شد [4]. در روش ایروین از تنش‌های نقاط جلو نوک ترک و جابه‌جایی‌های نقاط پشت ترک برای محاسبه نرخ رهایی انرژی[3] استفاده می‌کند، این روش توسط راجو [21] برای المان‌های منفرد که تحت فشار در سطوح ترک بودند، نیز استفاده گردید.

در این روش نرخ رهایی انرژی بر اساس تنش‌ها و جابجایی‌های گسسته که از روش‌های عددی به دست می‌آیند، محاسبه می‌شود و هیچ فرضی برای همگن یا همسان گرد بودن مواد در اطراف نوک ترک لازم نیست. بنابراین، این روش می‌تواند روشی مناسب برای بررسی ترک در مواد تابعی مدرج باشد.

نرخ رهایی انرژی، G، با تعریف گسترش مجازی ترک تخمین زده می‌شود و مقدار آن با استفاده از مقادیر کار انجام شده توسط تنش‌ها (یا نیروهای گره‌ای معادل) با جابه‌جایی‌های نقاط پشت ترک محاسبه می‌شود. مقدار G برای مود اول شکست ($G_I$) طبق رابطه‌ی (9) بیان می‌گردد [4]:




**شکل 2** المان‌های منفرد در اطراف نوک ترک (نقطه $i$) و نحوه شماره‌گذاری آن‌ها [21]

3- Energy release rate

$$G_{\mathrm{I}} = \lim_{\delta a \to 0} \frac{2}{\Delta a} \int_{x_1=0}^{x_1=\Delta a} \frac{1}{2} \sigma_{22}(r = x_1, \theta = 0, a) \\ u_2(r = \Delta a - x_1, \theta = \pi, a + \Delta a) dx_1 \quad (9)$$

نرخ رهایی انرژی برای مود دوم ($G_{\mathrm{II}}$) نیز با جایگزینی $\sigma_{12}$ به جای $\sigma_{22}$ و $u_1$ به جای $u_2$ در معادله (9) به دست می‌آید. $\sigma_{22}$ و $\sigma_{12}$ به ترتیب تنش عمودی و برشی در جلوی نوک ترک و $u_1$ و $u_2$ نیز به ترتیب جابه‌جایی عمودی و افقی لبه‌های ترک نسبت به نوک هستند.

راجو [21] و رامورتی و همکارانش [22] نشان دادند اگر در اطراف نوک ترک از المان‌های منفرد مثلثی (همانند المان‌های نشان داده شده در شکل 2)، استفاده شود، مقادیر G را می‌توان با استفاده از نیروهای گره‌ای معادل و جابه‌جایی نسبی گره‌ای محاسبه نمود. رابطه $G_{\mathrm{I}}$ به صورت رابطه (10) ارائه شده است:

$$G_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\Delta a}[F_{2,i}(t_{11}u_{2,i-2} + t_{12}u_{2,i-1}) + \\ F_{2,i+1}(t_{21}u_{2,i-2} + t_{22}u_{2,i-1}) + \\ F^{\mathrm{T}}_{2,i+2}(t_{31}\bar{u}_{2,i-2} + t_{32}\bar{u}_{2,i-1}) + \\ F^{\mathrm{B}}_{2,i+2}(t_{31}\hat{u}_{2,i-2} + t_{32}\hat{u}_{2,i-1})] \quad (10)$$

در این معادله، اولین زیرنویس مربوط به مختصات کارتزین ($x_1$ و $x_2$) و دومین زیرنویس نشانگر شماره گره مطابق شکل 2 است. پارامترهای $t_{ij}$ عبارت‌اند از:

$$t_{11} = 14 - 33\pi/8, \quad t_{12} = -52 - 33\pi/2 \\ t_{21} = -7/2 + 21\pi/16, \quad t_{22} = 17 - 21\pi/4 \\ t_{31} = 8 - 21\pi/8, \quad t_{32} = -32 + 21\pi/2 \quad (11)$$

بالانویس های T و B به ترتیب، نشان دهنده‌ی گره‌های بالایی و پایینی ترک نسبت به محور $x_1$ هستند لذا $F^{\mathrm{T}}$ و $F^{\mathrm{B}}$ به ترتیب نیروها در گره‌های بالایی و پایینی را نشان می‌دهند. $\bar{u}$ و $\hat{u}$ نیز جابه‌جایی نسبی در گره‌های بالایی و پایینی ترک را نشان می‌دهند. به عنوان نمونه در گره $(i-1)$ می‌توان رابطه (12) را نوشت:

$$\bar{u}_{2,i\text{-}1} = u^{\mathrm{T}}_{2,i\text{-}1} - u_{2,i}, \hat{u}_{2,i\text{-}1} = u^{\mathrm{B}}_{2,i\text{-}1} - u_{2,i} \quad (12)$$

روابط لازم برای محاسبه $G_{\mathrm{II}}$ نیز همانند روابط (10-12) خواهد بود که در آن‌ها برای اندیس مختصات به جای 2 (جهت عمودی) از عدد 1 (جهت افقی) استفاده می‌گردد.

از این روش برای محاسبه مقادیر نرخ رهایی انرژی در ترک‌های مایل در استوانه استفاده شده است.

## 5- معادلات بنیادی برای مواد تابعی مدرج در مدل‌سازی المان محدود

در مدل‌سازی رفتار مواد تابعی مدرج، باید از روشی استفاده کرد که در هر مرحله از محاسبات با در نظر گرفتن موقعیت المان در دستگاه مختصات، خواص مکانیکی را به المان اختصاص دهد. در اکثر نرم‌افزارهای المان محدود این قابلیت به صورت مستقیم وجود ندارد. ولی جهت تعریف خواص مکانیکی دلخواه توسط کاربر، تدابیری اندیشیده شده است. در نرم‌افزار المان محدود آباکوس این امر با برنامه‌نویسی به زبان فرترن در زیر روال UMAT صورت می‌گیرد.

برای نوشتن زیر روال UMAT، لازم است معادلات بنیادی برای رفتار ماده تعریف شوند. این معادلات بنیادی معمولاً تعریف صریح تنش‌ها (مانند تنش‌های کوشی برای تغییر شکل‌های بزرگ) می‌باشند.گام بعدی محاسبه‌ی ژاکوبین (تغییرات نسبت تنش به کرنش) است. برای مسائل با تغییر شکل‌های کوچک (مانند الاستیسیته خطی) و یا مسائل تغییر شکل‌های بزرگ با تغییرات حجمی کم (مانند پلاستیسیته فلزات) ژاکوبین به صورت رابطه (13) تعریف می‌شود [23]:

$$C = \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} \quad (13)$$

که در آن $\Delta\sigma$ نمو (تغییرات) تنش‌ها (کوشی) و $\Delta\varepsilon$ نمو کرنش است (در مسائل کرنش محدود، $\varepsilon$ تقریبی از کرنش لگاریتمی است).

در حالت رفتار کشسان، معادله‌ی بنیادی کوشی به شکل رابطه (14) مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (14)$$

که در آن ثابت‌های لامه، $\lambda$ و $\mu$، عبارت‌اند از:

$$\lambda = \frac{k_{\mathrm{b}} - 2\mu}{3}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, k_{\mathrm{b}} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (15)$$

با استفاده از معادله‌ی (14) می‌توان نمو تنش‌ها بر حسب نمو کرنش‌ها را با رابطه (16) بیان نمود:

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\Delta\varepsilon^{\mathrm{el}}_{kk} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} \quad (16)$$

در تحلیل قسمت خمیری رفتار ماده، معادلات حاکم شامل چهار مورد است:

- تابع تسلیم: با استفاده از نظریه تسلیم ون‌میسز، سطح تسلیم محاسبه می‌شود. در این صورت، تابع تسلیم از رابطه‌ی (17) محاسبه می‌شود:

$$\sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij})} - \sigma_{\mathrm{y}} = 0 \quad (17)$$

که در آن $\sigma_{\mathrm{y}}$ تنش تسلیم، $s_{ij}$ تنش‌های انحرافی (کاهیده) و $\alpha_{ij}$ مؤلفه‌های جریان مرکز سطح تسلیم هستند.

- کرنش خمیری موثر که با رابطه (18) تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^{\mathrm{pl}} = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon^{\mathrm{pl}}_{ij}\varepsilon^{\mathrm{pl}}_{ij}} \quad (18)$$

- قانون جریان خمیری : برای تغییر شکل‌های کوچک از روابط لوی-میسز بر اساس رابطه‌ی (19) استفاده می‌شود:

$$\varepsilon^{\mathrm{pl}}_{ij} = \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij})\frac{\varepsilon^{\mathrm{pl}}}{\sigma_{\mathrm{y}}} \quad (19)$$

- سخت شوندگی: با در نظر گرفتن سخت شوندگی سینماتیک خطی پراگر-زیگلر رابطه‌ی سخت شوندگی به صورت رابطه‌ی (20) خواهد بود:

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{3}h\varepsilon^{\mathrm{pl}}_{ij} \quad (20)$$

که در آن $h$ شیب قسمت خمیری منحنی تنش-کرنش، $h = \partial\sigma_{\mathrm{y}} / \partial\varepsilon^{\mathrm{pl}}$ است. در تعیین تنش و کرنش در حالت کشسان-خمیری، تنش موثر بر پایه‌ی رفتار کاملاً کشسان، $\bar{\sigma}^{\mathrm{pr}}$، محاسبه می‌شود تا حدسی برای شروع جریان خمیری به صورت رابطه‌ی (21) باشد:

$$\bar{\sigma}^{\mathrm{pr}} = \sqrt{\frac{3}{2}(s^{\mathrm{pr}}_{ij} - \alpha^0_{ij})(s^{\mathrm{pr}}_{ij} - \alpha^0_{ij})}, \quad s^{\mathrm{pr}}_{ij} = s^0_{ij} + 2\mu\Delta e_{ij} \quad (21)$$

اگر تنش کشسان حدس زده شده، بزرگ‌تر از تنش تسلیم باشد، جریان خمیری اتفاق می‌افتد. در این حالت نمو کرنش خمیری از معادله (19) به

دست می‌آید:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl}} = \frac{3}{2}(s^{\mathrm{pr}}_{ij} - \alpha^{0}_{ij})\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}}{\bar{\sigma}^{\mathrm{pr}}} \tag{22}$$

بعد از ساده‌سازی روابط، می‌توان حل بسته‌ای به صورت رابطه‌ی (23) برای نمو کرنش خمیری موثر تعیین کرد:

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} = \frac{(\bar{\sigma}^{\mathrm{pr}} - \sigma_{\mathrm{y}})}{(h+3\mu)} \tag{23}$$

بر اساس روابط اخیر، تغییرات نهایی کرنش و مقادیر صریح تنش عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \alpha_{ij}^{0} + \Delta\alpha_{ij} + \eta_{ij}\sigma_{\mathrm{y}} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma^{\mathrm{pr}}_{kk} \\ \Delta\varepsilon_{ij}^{\mathrm{pl}} &= \frac{3}{2}\eta_{ij}\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} \\ \Delta\alpha_{ij} &= \eta_{ij}h\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}} \end{aligned} \tag{24}$$

که در آن $\eta_{ij} = \frac{(s^{\mathrm{pr}}_{ij} - \alpha^{0}_{ij})}{\bar{\sigma}^{\mathrm{pr}}}$ است.

حال می‌توان رابطه‌ی کاربردی ماتریس ژاکوبین را به صورت رابطه‌ی (25) نوشت:

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda^{*}\delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk} + 2\mu^{*}\Delta\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3\mu h}{3\mu+h} - 3\mu^{*}\right)\eta_{ij}\eta_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} \tag{25}$$

که در آن $\mu^{*} = \frac{\mu(\sigma_{\mathrm{y}} + h\Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{pl}})}{\bar{\sigma}^{\mathrm{pr}}}$ و $\lambda^{*} = k - \frac{2}{3}\mu^{*}$ تعریف می‌شوند.

## 6- مدل‌سازی استوانه ترکدار و تغییرات مشخصات آن

در این مقاله ترک‌های سطحی خارجی به صورت نیم بیضی در استوانه اتوفرتاژ شده با مواد تابعی مدرج در نظر گرفته شده است. ترک‌ها به صورت محوری ($\theta = 0^{\circ}$) و مایل($\theta = 45^{\circ}$) در استوانه ایجاد می‌شوند که در آن‌ها $a$ عمق ترک و $c$ نصف طول دهانه ترک است. زاویه ترک، $\theta$، نیز زاویه با محور استوانه فرض شده است. شکل 3 متغیرهای هندسی و شکل ترک را به صورت شماتیک نشان می‌دهد. A عمیق‌ترین نقطه و B نقطه سطحی از پیشانی ترک می‌باشند.

قطر داخلی استوانه مقدار ثابتی برابر $R_{\mathrm{i}} = 60\mathrm{mm}$ خواهد داشت. تغییرات کسر حجمی سرامیک نیز به صورت توانی بر حسب شعاع و به صورت $f = f_0\sqrt{(r - R_{\mathrm{i}})/t}$ در نظر گرفته شده است.

جهت بررسی تأثیر کسر حجمی از مقادیر $f_0 = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ استفاده شده است. تأثیر میزان اتوفرتاژ نیز به ازای نسبت اتوفرتاژ (نسبت ضخامت خمیری شده به ضخامت کل دیواره استوانه) $afr = 40\%, 50\%, 60\%$ بررسی شده است. برای شعاع خارجی استوانه نیز از مقادیر $R_{\mathrm{o}} = 105, 120, 135\mathrm{mm}$ استفاده شده است. برای ایجاد حالت کرنش صفحه‌ای، دو انتهای استوانه در راستای محوری مقید شده است.

با توجه به آنکه استوانه دارای ترک است و در حالت ترک مایل شرایط تقارن وجود ندارد، باید مدل کامل به صورت سه بعدی المان بندی شده و تحلیل گردد. در این حالت تعداد المان‌ها زیاد بوده و لذا محاسبات زمان‌بر و طولانی می‌شود. همچنین به دلیل تغییرات سریع در هندسه اطراف پیشانی ترک، ایجاد المان در این ناحیه باید با دقت زیادی انجام پذیرد. برای حل این مشکلات از روش زیر-مدل در نرم‌افزار المان استفاده شده است. اگر مرزهای زیر مدل به طور معقول و قابل قبولی انتخاب شوند و المان‌های آن ریز باشند، نتایج دقت بالایی خواهند داشت. شکل 4 نمونه‌ای از زیر-مدل انتخاب شده را نشان می‌دهد.

در مرحله اول و دوم تحلیل ( مدل‌سازی فرآیند اتوفرتاژ)، نمونه المان محدود استوانه به صورت کامل با المان‌هایی با اندازه معمولی ایجاد می‌شود. در مرحله سوم، ناحیه اطراف ترک برش داده شده و شرایط مرزی جابجایی به دست آمده در مرحله قبلی، روی مرزهای جدید زیر-مدل اعمال می‌شوند. نهایتاً این زیر-مدل می‌تواند با استفاده از یک مش متراکم و دقیق تحلیل شود. شکل5 نمونه‌ای از المان بندی متراکم در اطراف پیشانی ترک را نشان می‌دهد.

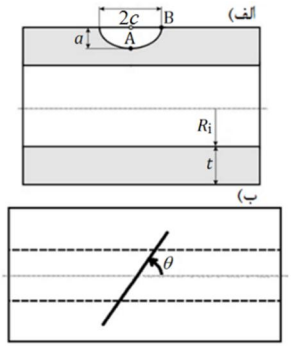
المان‌های اطراف پیشانی ترک، المان‌های منفرد و بقیه المان‌ها، از نوع ایزوپارامتریک آجری می‌باشند.

## 7- نتایج و بررسی آن‌ها

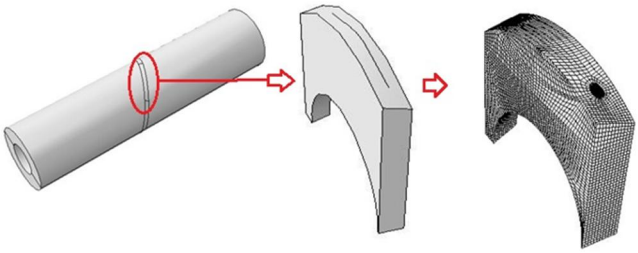
### 7-1- اعتبارسنجی روش تحلیل

برای بررسی صحت روش مورد استفاده در تحلیل عددی مواد تابعی مدرج و نیز تعیین دقت روش DCT در محاسبه ضریب شدت تنش، از هندسه و مواد ارائه شده در مرجع [14] استفاده شده است. هندسه قطعه به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع 100mm، پهنای 50mm و ضخامت 40mm است که دارای ترک نیم بیضی با مشخصات $a/t = c/a = 0.5$ است. مدول کشسان ماده به صورت توانی و با رابطه $E = E_0 e^{z\beta}$ در جهت ضخامت مکعب تغییر می‌کند و از مقدار $E_0 = 1000\mathrm{GPa}$ در سطح ترک‌دار تا $5E_0$ در پشت ترک (سطح بدون ترک) تغییر می‌کند. ضریب پواسون نیز دارای مقدار ثابت 0/25 است.

نمونه تحت کشش یکنواخت 30MPa عمود بر سطح ترک قرار گرفته که موجب باز شدن دهانه می‌شود. مدل المان محدود متقارن آن، بعد از تغییر شکل در شکل6 آورده شده است. با اندازه‌گیری جابجایی‌های مورد نیاز




**شکل 3** نمایش مشخصات هندسی استوانه و ترک. الف)ترک محوری ب)ترک مایل



**شکل 4** استفاده از زیر-مدل در تحلیل استوانه ترک‌دار

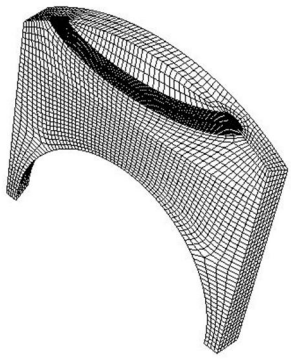
در اطراف پیشانی ترک و استفاده از رابطه 8 مقدار ضریب شدت تنش به دست می‌آید. این کار برای عمیق‌ترین نقطه (A) و نقطه سطحی (B) انجام شده و در جدول 1 با نتایج مرجع مقایسه شده است. همان طور که ملاحظه می‌گردد نتایج تحقیق حاضر تطابق خوبی با نتایج مرجع دارند.

### 7-2- بررسی تأثیر عوامل مختلف

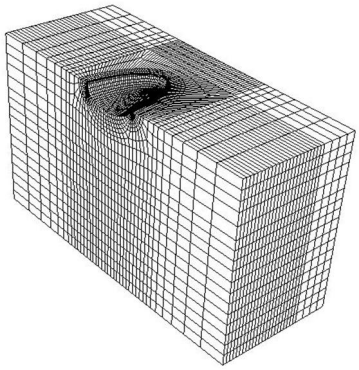
در این مقاله، بر اساس مرجع [24]، مدول یانگ سرامیک برابر 80 گیگاپاسکال و ضریب پواسون آن 0/25 در نظر گرفته شده است. برای فلز نیز مدول یانگ برابر 56 گیگاپاسکال، تنش تسلیم 106 مگاپاسکال، ضریب پواسون 0/25 و مدول مماسی در تغییرشکل خمیری برابر 12 گیگاپاسکال منظور شده است.

در شکل 7 توزیع تنش پسماند محیطی در استوانه با مواد تابعی مدرج به ازای فشار اتوفرتاژ برابر 300 مگاپاسکال آورده شده است. نتایج به دست آمده همخوانی قابل قبولی با نتایج مرجع [24] دارند. همان‌گونه که دیده می‌شود با افزایش مقدار سرامیک در ماده استوانه، تنش پسماند کششی و فشاری افزایش می‌یابد. تا مقدار $f_0=0.5$ ، حساسیت تنش پسماند به تغییرات مقدار سرامیک در ماده تابعی زیاد است ولی بعد از آن نرخ افزایش تنش پسماند فشاری کمتر می‌شود.

در قسمت بیرونی استوانه به ازای همه حالات، تنش پسماند از نوع کششی است، هرچند که تغییرات آن به ازای تغییر درصد سرامیک ($f_0$) حساسیت کمتری دارد. وجود تنش پسماند کششی در این ناحیه باعث افزایش مقادیر ضریب شدت تنش ناشی از اعمال بار خارجی خواهد بود. بررسی تغییرات آن به ازای تغییر خواص، هندسه و شرایط استوانه می‌تواند در بررسی رفتار کلی سازه مهم و قابل توجه باشد. وجود فقط تنش پسماند می‌تواند باعث ایجاد تغییر شکل‌های ناخواسته گردد. به عنوان نمونه در شکل



**شکل 5** المان متراکم در اطراف پیشانی ترک در زیر-مدل



**شکل 6** مدل المان محدود مکعب ترک‌دار بعد از تغییر شکل

8 میزان باز شدگی دهانه ترک به ازای وجود تنش پسماند آورده شده است.

برای ترک‌های محوری خارجی با نسبت‌های مختلف طول دهانه به عمق ترک، ضریب شدت تنش در نقطه سطحی (B) و عمیق‌ترین نقطه (A) از پیشانی ترک محاسبه شده است.

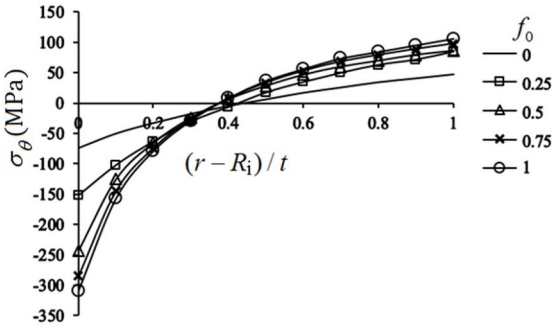
### 7-3- اثر تنش پسماند ناشی از اتوفرتاژ بر ضریب شدت تنش

شکل 9 تغییرات ضریب شدت تنش در عمق ترک ($K_{IA}$) برای ترک‌های نیم‌دایره‌ای و نیم بیضی با ابعاد مختلف را نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، مقادیر $K_{IA}$ برای ترک‌های نیم بیضی بزرگ‌تر از مقدار آن برای ترک‌های نیم‌دایره‌ای با عمق یکسان است. همچنین با افزایش نسبت عمق ترک به ضخامت استوانه ضریب شدت تنش کاهش پیدا می‌کند. این امر به دلیل کاهش تنش‌های پسماند محیطی در امتداد ضخامت استوانه است.

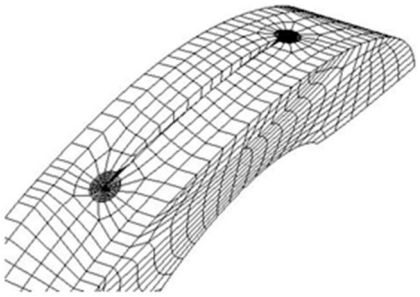
در شکل 10 ضریب شدت تنش برای نقطه سطحی ($K_{IB}$) در ترک‌های محوری خارجی مقایسه گردیده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت عمق ترک به ضخامت استوانه مقادیر ضریب شدت تنش افزایش پیدا می‌کند ولی تغییرات نسبت عمق به طول تأثیر زیادی ندارد، هرچند که برای نقطه سطحی مقدار $K_I$ بزرگ‌تر از نقطه عمقی است.

مقادیر $K_{IB}$ در $a/t=0.1$ برای ترک‌ها تقریباً برابر است ولی با افزایش نسبت $a/t$ اختلاف بیشتر می‌شود. این افزایش در ترک‌های با طول بزرگ‌تر بیشتر است.

در ادامه به بررسی تأثیر کسر حجمی پرداخته شده است. برای این




**شکل 7** توزیع تنش پسماند محیطی در استوانه به ازای فشار اتوفرتاژ 300 مگاپاسکال



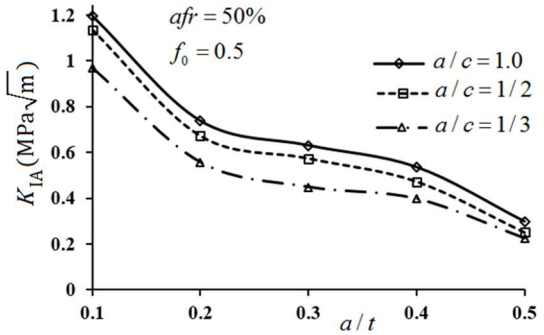
**شکل 8** بازشدگی دهانه ترک به ازای وجود تنش پسماند ناشی از اتوفرتاژ

**جدول 1** مقایسه نتایج ضریب شدت تنش در مکعب ترک‌دار با نتایج مرجع [14]

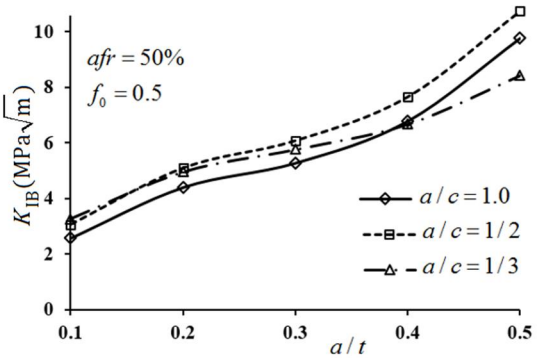
| | $K_I(MPa\sqrt{m})$ در تحقیق حاضر | $K_I(MPa\sqrt{m})$ در مرجع [14] | درصد خطا |
|---|---|---|---|
| نقطه A | 2/6477 | 2/6433 | 0/2 |
| نقطه B | 2/5116 | 2/5291 | 0/7 |

منظور ترک‌های نیم‌دایره‌ای در ضخامت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج برای $K_{IB}$ در شکل 11 آورده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش کسر حجمی سرامیک در ترک‌های با عمق یکسان، ضریب شدت تنش افزایش پیدا می‌کند. در استوانه تمام فلزی، $f_0 = 0$ ، با افزایش نسبت $a/t$ تا حدود 0/4 ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد ولی به ازای مقادیر بزرگ‌تر، کاهش می‌یابد.

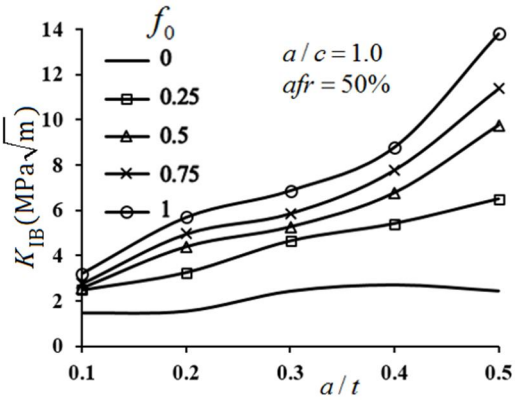
این افزایش برای $f_0 = 0.25$ نسبت به نمونه تمام فلزی بسیار بیشتر است. برای کسرهای حجمی 0/5 و 0/75 و 1 در $a/t$ کمتر افزایش چشمگیری دیده نمی‌شود ولی با افزایش $a/t$ اختلاف مقادیر ضریب شدت تنش در کسرهای حجمی مختلف بیشتر می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت تقویت استوانه به وسیله ذرات سرامیکی موجب افزایش ضریب شدت تنش در ترک‌های سطحی محوری خارجی می‌گردد. این امر به دلیل بالاتر بودن مقادیر تنش پسماند کششی روی سطح خارجی استوانه با مواد تابعی مدرج نسبت به استوانه تمام فلزی است.




**شکل 9** تغییرات ضریب شدت تنش برای عمقی‌ترین نقطه در ترک محوری خارجی




**شکل 10** ضریب شدت تنش برای سطحی‌ترین نقطه در ترک نیم بیضی محوری خارجی




**شکل 11** تأثیر تغییرات کسر حجمی بر ضریب شدت تنش در سطحی‌ترین نقطه

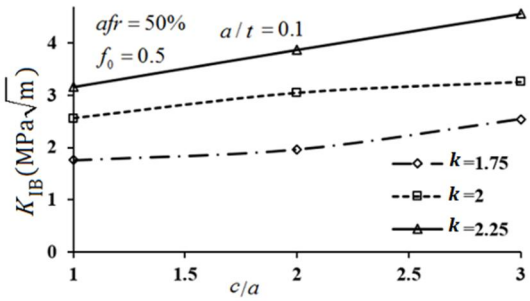
در شکل 12 مقادیر ضریب شدت تنش در استوانه با نسبت شعاع خارجی به داخلی ($k$) برابر 1/75 ، 2 و 2/25 آورده شده است. شعاع داخلی این استوانه‌ها 60 میلی متر در نظر گرفته شده است. با افزایش نسبت شعاع خارجی به داخلی برای ترک‌های با اندازه‌های نسبی یکسان و نیز نسبت اتوفرتاژ برابر، ضریب شدت تنش افزایش پیدا می‌کند. تغییرات ضریب شدت تنش برای استوانه‌ای با نسبت شعاع خارجی به داخلی برابر با 2/25 به ازای افزایش نسبت عمق ترک به ضخامت استوانه به صورت یکنواخت است درحالی‌که در دیگر استوانه‌ها این تغییرات دارای شیب‌های متفاوتی می‌باشند.

به منظور بررسی تأثیر میزان اتوفرتاژ بر ضریب شدت تنش، استوانه‌ای با کسر حجمی 0/5 مورد بررسی قرار گرفته و مقادیر ضریب شدت تنش برای سه درصد مختلف 40%، 50 % و 60 % محاسبه شده است. توزیع تنش پسماند برای حالت‌های مذکور در شکل 13 آورده شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود، با افزایش نسبت اتوفرتاژ اندازه تنش پسماند فشاری و کششی، هردو افزایش می‌یابد. هرچند که در قسمت فشاری این میزان بیشتر است.

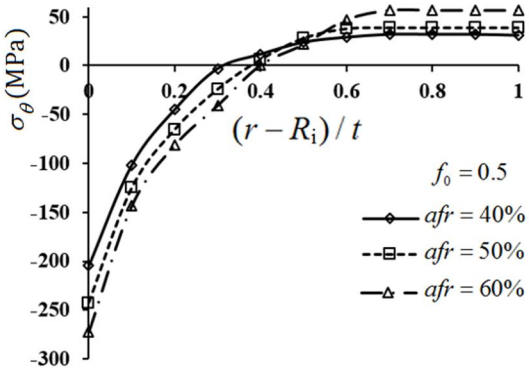
شکل 14 نشان می‌دهد که ضریب شدت تنش برای ترک‌های با اندازه یکسان با افزایش میزان اتوفرتاژ افزایش می‌یابد. این افزایش برای ترک‌های دایره‌ای بیشتر از بقیه ترک‌ها است. با افزایش نسبت $c/a$، تأثیر میزان اتوفرتاژ کمتر شده و مقادیر به هم نزدیک‌تر می‌شوند.

### 7-4- اثر بار اعمالی بر ضریب شدت تنش در استوانه اتوفرتاژ شده

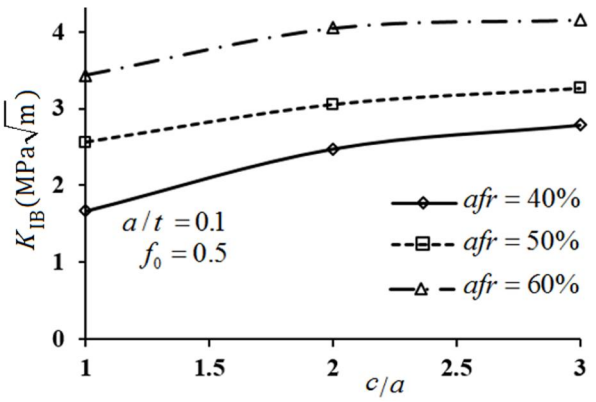
در این قسمت به بررسی تأثیر اتوفرتاژ بر ضریب شدت تنش در ترک‌های محوری خارجی به ازای فشار کارکرد پرداخته شده است. فشار اعمالی بعد از اتوفرتاژ برابر 250 مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. توزیع تنش محیطی به ازای اعمال فشار برای حالت اتوفرتاژ شده و بدون آن در شکل 15 آورده شده است.



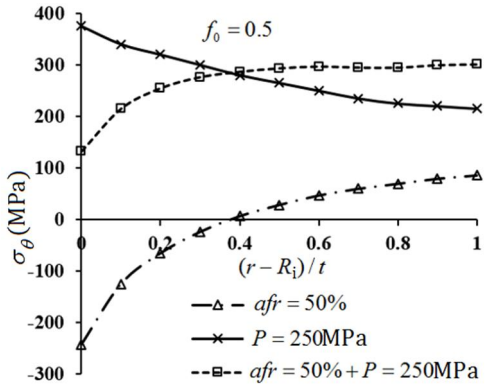

**شکل 12** تأثیر نسبت شعاع بر ضریب شدت تنش برای سطحی‌ترین نقطه ترک محوری خارجی




**شکل 13** اثر نسبت اتوفرتاژ بر توزیع تنش پسماند




**شکل 14** تأثیر میزان اتوفرتاژ بر ضریب شدت تنش برای سطحی‌ترین نقطه در ترک محوری خارجی




**شکل 15** توزیع تنش با اعمال فشار داخلی به استوانه اتوفرتاژ شده

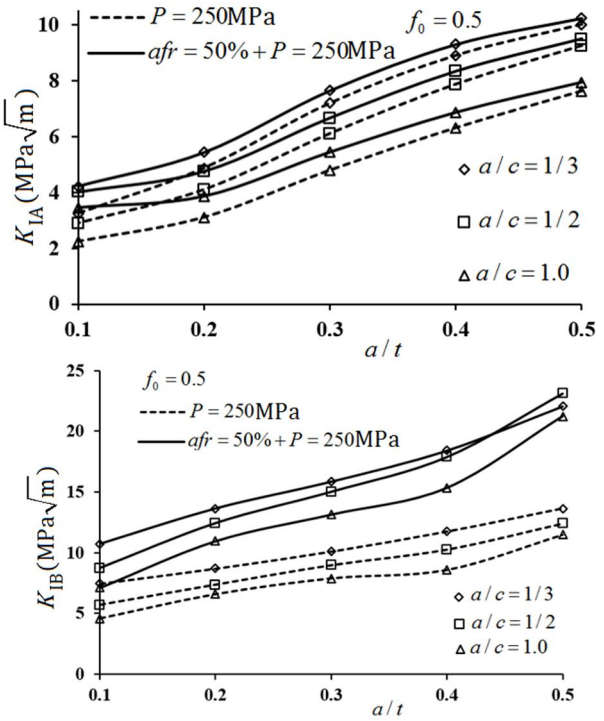
شکل 16 تغییرات ضریب شدت تنش در استوانه اتوفرتاژ شده به واسطه اعمال فشار داخلی را نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل‌ها پیداست، فرآیند اتوفرتاژ باعث بالا رفتن مقدار ضریب شدت تنش برای ترک‌های خارجی می‌گردد. بنابراین فرآیند اتوفرتاژ بر استوانه‌ای با ترک خارجی، تأثیر نامناسبی دارد. این تأثیر در مورد ترک‌های کم عمق ($a/t = 0.1$) کمتر از حالت‌های دیگر است. تأثیر فرایند اتوفرتاژ، در سطحی‌ترین نقطه بسیار بیشتر از عمقی‌ترین نقطه ترک است.

### 7-5- ترک خارجی مایل

در این قسمت به بررسی تأثیر عوامل مختلف بر ترک مایل با زاویه $\theta = 45^\circ$ روی سطح خارجی پرداخته شده است. به دلیل نحوه قرارگیری این ترک‌ها روی سطح استوانه اتوفرتاژ شده، مودهای ترکیبی شکست ایجاد می‌شود. به همین خاطر نرخ رهایی انرژی ($G$) برابر مجموع مقدار آن برای دو مود اول و دوم شکست محاسبه شده است. این مقادیر برای استوانه‌ای با شعاع داخلی 60 میلی متر و نسبت شعاع خارجی به داخلی 2 محاسبه شده‌اند.

اثر درصد سرامیک، $f_0$، بر تغییرات $G$ در شکل 17 نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش نسبت $c/a$ نرخ رهایی انرژی افزایش می‌یابد. این افزایش در استوانه تمام فلزی ($f_0 = 0$) کمتر از بقیه حالت‌هاست.

با افزایش کسر حجمی سرامیک، در ترک‌هایی با ابعاد یکسان، نرخ رهایی انرژی افزایش می‌یابد. این تغییرات برای افزایش کسر حجمی از 0/25 تا 0/5 کمتر از بقیه حالت‌ها است. طوری که در ترک‌های دایره‌ای($c/a = 1$) با افزایش کسر حجمی از 0/25 تا 0/5، تقریباً تغییری در میزان نرخ رهایی

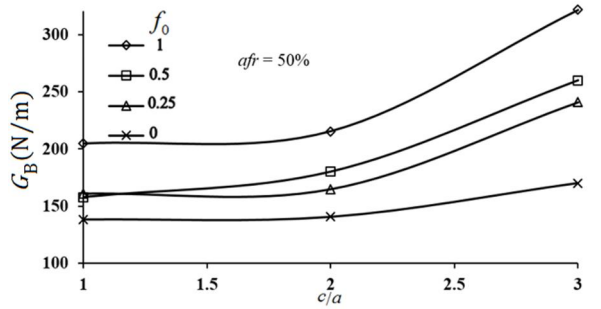



**شکل 16** تغییرات $K_{IA}$ و $K_{IB}$ برای ترک محوری خارجی در استوانه اتوفرتاژ شده تحت فشار داخلی

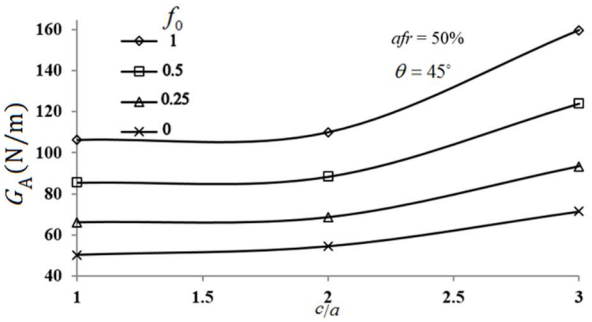
انرژی مشاهده نمی‌شود. این تغییرات در ترک‌های نیم بیضی مشابه نیز، بسیار کم است.

در شکل 18 تغییرات نرخ رهایی انرژی برای عمیق‌ترین نقطه ترک مشاهده می‌شود. در این جا نیز برای استوانه فلزی کم‌ترین تغییرات وجود دارد و با افزایش کسر حجمی سرامیک در ترک‌های با ابعاد یکسان نرخ رهایی انرژی افزایش می‌یابد. با دقت در مقادیر نرخ رهایی انرژی و مقایسه با شکل 18 مشاهده می‌شود که این مقادیر در عمیق‌ترین نقطه کوچک‌تر از مقادیر مشابه در سطحی‌ترین نقطه است. تأثیر افزایش کسر حجمی از 0/25 تا 0/5 در عمقی‌ترین نقطه با سطحی‌ترین نقطه متفاوت است. در عمقی‌ترین نقطه، به ازای کسرهای حجمی مختلف با افزایش $c/a$ روند تغییرات مشابه است.

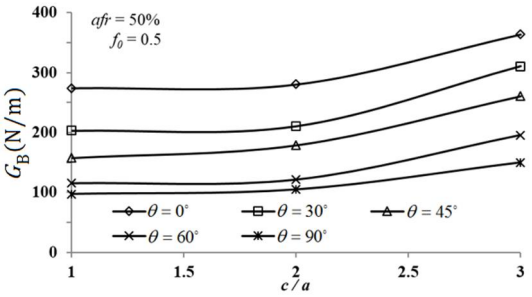
در شکل 19 تغییرات زاویه ترک و تأثیر آن بر نرخ رهایی انرژی در نقطه سطحی ترک مایل ارائه شده است. مقادیر رهایی انرژی برای ترک 90 درجه( ترک محیطی) کم‌ترین مقدار و ترک صفر درجه(محوری) بیش‌ترین مقدار را در همه حالات دارد. با افزایش زاویه ترک از0 تا 90 درجه، مقدار G کاهش پیدا می‌کند. این کاهش در تغییر زاویه ترک از 60 تا 90 درجه بسیار کمتر از بقیه حالت‌هاست. این به دلیل کاهش تأثیر تنش‌های پسماند محیطی در این حالت‌ها است.




**شکل 17** تأثیر کسر حجمی بر نرخ رهایی انرژی برای سطحی‌ترین نقطه ترک مایل




**شکل 18** تأثیر کسر حجمی بر نرخ رهایی انرژی برای عمیق‌ترین نقطه ترک سطحی خارجی 45 درجه

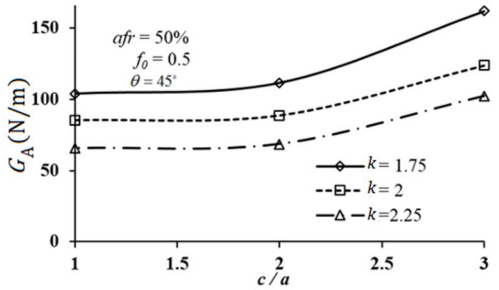



**شکل 19** تأثیر زاویه قرارگیری ترک بر نرخ رهایی انرژی در نقطه سطحی ترک مایل

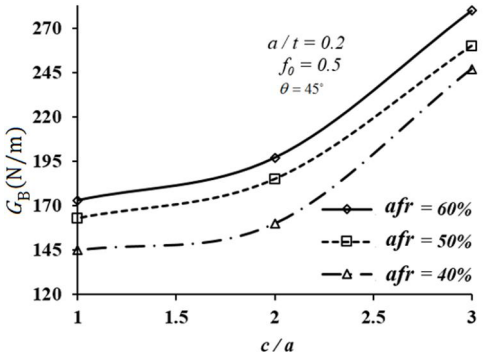
اثر نسبت ضخامت، $k$، بر نرخ رهایی انرژی در عمیق‌ترین نقطه پیشانی ترک نیز در شکل 20 آورده شده است. برای این منظور ترک 45 درجه در سطح خارجی استوانه‌هایی با نسبت شعاع خارجی به داخلی1/75 و2 و 2/25 در نظر گرفته شده‌اند. با افزایش نسبت شعاع خارجی به داخلی استوانه نرخ رهایی انرژی کاهش می‌یابد. روند این تغییرات کاهشی با افزایش نسبت شعاع خارجی به داخلی کاهش می‌یابد.

در شکل 21 تأثیرات تغییر در میزان اتوفرتاژ بر روی نرخ رهایی انرژی در نقطه سطحی پیشانی ترک مایل نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در ترک‌های با ابعاد یکسان، با افزایش میزان اتوفرتاژ، نرخ رهایی انرژی افزایش می‌یابد. این تغییرات برای نسبت اتوفرتاژ 50% و 60% مشابه یکدیگر است.

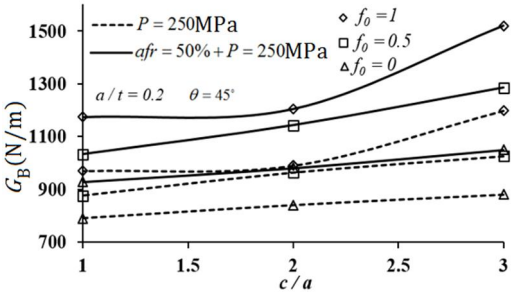
شکل22 تأثیر تغییر در درصد مقدار سرامیک در ماده تابعی بر تغییرات نرخ رهایی انرژی در ترک خارجی مایل را نشان می‌دهد. این تغییرات به ازای تنش پسماند ناشی از اتوفرتاژ به همراه اعمال فشار داخلی بر استوانه آورده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود فرایند اتوفرتاژ باعث افزایش قابل ملاحظه‌ای در نرخ رهایی انرژی می‌گردد. با مقایسه نتایج حالت با اتوفرتاژ و بدون آن در این شکل، می‌توان نتیجه گرفت که حالت جمع آثار قابل استفاده است.




**شکل 20** تأثیر نسبت ضخامت بر نرخ رهایی انرژی برای ترک مایل سطحی خارجی 45 درجه




**شکل 21** تأثیر درصد اتوفرتاژ بر روی نرخ رهایی انرژی در نقطه سطحی برای ترک مایل خارجی 45 درجه




**شکل 22** تأثیر درصد سرامیک و اتوفرتاژ بر روی نرخ رهایی انرژی ناشی از فشار داخلی برای ترک سطحی خارجی با زاویه 45 درجه

## 8-نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی تأثیر عوامل مختلف بر روی ضریب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی برای ترک‌های سطحی در استوانه با مواد تابعی مدرج اتوفرتاژ شده پرداخته شده است. از این بررسی نتایج زیر حاصل شده است:

- با افزایش نسبت $a/t$ ضریب شدت تنش برای عمیق‌ترین نقطه ترک کاهش می‌یابد. در ترک‌های نیم بیضی ضریب شدت تنش در مقایسه با ترک نیم‌دایره‌ای با عمق یکسان بزرگ‌تر است.
- با افزایش نسبت $a/t$ ضریب شدت تنش برای سطحی‌ترین نقطه ترک افزایش می‌یابد. در بیشتر حالت‌ها ضریب شدت تنش برای ترک‌های نیم بیضی بزرگ‌تر از مقدار آن برای ترک‌های نیم‌دایره‌ای با عمق یکسان است.
- با افزایش کسر حجمی سرامیک در مواد تابعی مدرج ، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. این افزایش برای کسر حجمی از صفر تا 0/25 بیشتر از بقیه حالت‌هاست.
- با افزایش نسبت ضخامت، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد.
- با افزایش درصد اتوفرتاژ، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد. این افزایش در ترک‌های محوری بیشتر از ترک‌های محیطی است.
- مقدار ضریب شدت تنش در ترک‌های محوری بزرگ‌تر از ترک‌های محیطی است.
- در ترک‌های مایل با افزایش کسر حجمی سرامیک، نرخ رهایی انرژی افزایش می‌یابد.
- با افزایش زاویه قرارگیری ترک از صفر (ترک محوری) نرخ رهایی انرژی کاهش می‌یابد.
- در ترک‌های مایل با افزایش نسبت ضخامت، نرخ رهایی انرژی کاهش می‌یابد.

- با افزایش درصد اتوفرتاژ، نرخ رهایی انرژی افزایش می‌یابد.
- برای ترک‌های سطحی در مواد تابعی مدرج با وجود تنش پسماند، می‌توان از اصل جمع آثار استفاده کرد.

## 9- مراجع


[1] K. Kurihara, K Sasaki, M.Kawarada, Adhesion improvement of diamond films, *First International Symposium on functionally gradient materials,* Tokyo, Japan, pp. 65-69, 1990.

[2] Y.D. Lee, F. Erdogan, Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings, *International Journal of Fracture,* Vol. 69, pp. 145-165, 1995.

[3] F. Erdogan, Fracture mechanics of functionally graded materials, *Composites Engineering ,* Vol. 5, pp. 753-770, 1995.

[4] J.H. Kim, G.H. Paulino, Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, pp. 502-514, 2002.

[5] J.H. Kim, G.H. Paulino, Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 53, pp. 1903-1935, 2002.

[6] A.M. Afsar, M. Anisuzzaman, Stress intensity factors of two diametrical opposed edge cracks in a thick-walled functionally graded material cylinder, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 74, pp. 1617-1636, 2007.

[7] W. Yang, C.F. Shih, Fracture along an interlayer, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 31, pp. 985–1002, 1994.

[8] Z.H. Jin, R.C. Batra, Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* Vol. 44, pp. 1221–1235, 1996.

[9] M.C.Walters, G.H.Paulino, R.H.Dodds, Stress-intensity factors for surface cracks in functionally graded materials under mode I thermomechanical loading, *International Journal Solids and Structures,* Vol. 41, pp. 1081-1118, 2004.

[10] M.B. Nazari, M. Shariati, M.R. Eslami, B. Hassani, Meshless analysis of cracked functionally graded plates under thermal loading, *Aerospace Mechanics Journal,* Vol. 9, pp. 1-16, 2014. (In Persian)

[11] A. Talezadeh, M. Sedighi, Numerical analysis of the fracture parameters in the sliding contact problem between a rigid flat punch and a FG semi-infinite medium in the presence of a surface crack, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 12, pp. 14-24, 2014. (In Persian)

[12] A. Abdollahifar, M.R. Nami, Investigation the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, No. 1, pp. 138-150, 2013. (In Persian)

[13] B. Yildirim, S. Dag, F. Erdogan, Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading, *International Journal of Fracture,* Vol. 32, pp. 369-395, 2005.

[14] C.H. Zhang, M. Cui, J. Wang, X.W. Gao, J. Sladek, V. Sladek, 3D crack analysis in functionally graded materials, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 78, pp. 585-604, 2011.

[15] Y.Z. Chen, Stress intensity factors in a finite cracked cylinder made of functionally graded materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 81, pp. 941-947, 2004.

[16] M.R. Nami, H. Eskandari, Three-dimensional investigations of stress intensity factors in a thermo-mechanically loaded cracked FGM hollow cylinder, *International Journal of Pressure Vessels and Piping,* Vol. 89, pp. 222-229, 2012.

[17] I. Tamura, Y. Tomota, H. Ozawa, Strength and ductility of Fe-Ni-C alloys composed of austenite and martensite with various strength, *3rd International Conference on Strength of Metals and Alloys, Institute of Metals, Cambridge,* pp. 611-615, 1973.

[18] R.L. Williamson, B.H. Rabin, J.T. Drake, Finite element analysis of thermal residual stresses at graded ceramic-metal interfaces: Part I. Model description and geometrical effects, *Journal of Applied Physics,* Vol. 74, pp. 1310–1320, 1993.

[19] A.E. Giannakopoulos, S. Suresh, M. Finot, M. Olsson, Elastoplastic analysis of thermal cycling: layered materials with compositional gradients, *Acta Metallurgica et Materialia,* Vol. 43, pp. 1335–1354, 1995.

[20] R.D. Carpenter, W.W. Liang, G.H. Paulino, J.C. Gibeling, Z.A. Munir, Fracture testing and analysis of a layered functionally graded Ti/TiB beam in 3-point bending, *Material Science,* Vol. 24, pp. 308–311, 1999.

[21] I.S. Raju, Calculation of strain-energy release rates with high order and singular finite elements, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 28, pp. 251–274, 1987.

[22] T.S. Ramamurthy, T. Krishmamurthy, K.B. Narayana, K. Vijayakumar, B. Dataguru, Modified crack closure integral method with quarter point elements, *Mechanics Research Communications,* Vol. 13, pp. 179–186, 1986.

[23] H. Jahed, R.N. Dubey, An axisymmetric method of elastic-plastic analysis capable of predicting residual stress field, *Journal of Pressure Vessel Technology,* Vol. 119, pp. 264-273, 1997.

[24] B.H. Jahromi, G.H. Farrahi, M. Maleki, H. Nayeb-Hashemi, A. Vaziri, Residual stresses in autofrettaged vessel made of functionally graded material, *Engineering Structures,* Vol. 31, pp. 2930–2935, 2009.