مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص‌ص 292-300

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تخمین‌گر ورودی نامعلوم برای تشخیص نقص حسگر در سیستم‌های خطی با عدم‌قطعیت نامنطبق

اسماعیل باقرپور اردکانی[1]، محمدرضا حائری یزدی[2*]، محمد محجوب[2]

1- دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 14395-515، myazdi@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 12 آبان 1393

پذیرش: 30 دی 1393

ارائه در سایت: 16 اسفند 1393

کلید واژگان:

تخمین‌گر ورودی-نامعلوم

شرط تطابق تخمین‌گر

تولید مانده

تشخیص نقص

نقص حسگر

چکیده

در این مقاله، بر پایهٔ تخمین‌گر (رویت‌گر)، الگوریتمی پیشنهاد شده است که قادر به تشخیص نقص حسگر در سیستم‌های خطی است. سیستم خطی مورد مطالعه در این پژوهش بواسطهٔ ورودی نامعلوم (اغتشاش) توأم با عدم‌قطعیت ساختاری فرض می‌شود. افزون بر این، فرض می‌شود که شرط تطابق تخمین‌گر نیز برقرار نباشد. برای جبران تأثیر ورودی نامعلوم و فراهم آوردن امکان تخمین در چنین شرایطی، یک سیستم دینامیکی معادل توسعه داده شده و به کمک مجموعه‌ای از ورودی‌های کمکی، امکان مستقل‌سازی دینامیک معادل از ورودی نامعلوم فراهم آمده است. این فرایند به کمک یک فیلتر انتگرالی موسوم به فیلتر انتگرالی-بافری انجام پذیرفته است. فیلتر معرفی شده پاسخ فرکانسی مشابهی چون فیلتر کم-گذر دارد؛ لذا، امکان مدیریت نویز در تخمین‌گر را نیز فراهم می‌سازد. تعداد این فیلتر که باید برای توسعهٔ سیستم معادل بکار گرفته شوند، از درجهٔ نسبت بین خروجی و ورودی نامعلوم تبعیت می‌کند. سپس از یک تخمین‌گر ورودی نامعلوم برای تخمین متغیرهای حالت سیستم معادل استفاده شده که در شرایط بروز نقص، بردار مانده‌ای حساس به نقص و مستقل از ورودی نامعلوم نامنطبق ایجاد خواهد کرد. از نتایج روش پیشنهادی این مقاله می‌توان در مسائل تشخیص نقص -اعم از نقص حسگر یا عملگر- استفاده کرد. در عین‌حال، تمرکز مقاله حاضر منحصر به تشخیص بروز نقص حسگر خواهد بود. کارآمدی روش پیشنهادی به کمک نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی یک مدل دینامیکی خطی ارائه شده است.

Unknown input observer for sensor fault detection in linear systems with unmatched uncertainties

Esmaeel Bagherpour-Ardakani, Mohammad Reza Hairi-Yazdi*, Mohammad Mahjoob

School of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.
* P.O.B. 515-14395 Tehran, Iran. myazdi@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 November 2014
Accepted 20 January 2015
Available Online 07 March 2015

Keywords:
Unknown Input Observer
Observer Matching Condition
Residual Generation
Fault Detection
Sensor Fault

ABSTRACT

This paper is devoted to sensor fault detection in linear systems with observer-based approach. It is assumed that the system has linear dynamics with the presence of uncertainties. The uncertainties are modeled as unknown input (disturbance), while it is assumed that the well-known observer matching condition is not necessarily satisfied. To decouple the unknown-input effects, and distinguish their effects from the fault effects, an equivalent dynamic system is proposed that is independent from the unknown input. The equivalent system is constructed by the use of a unique integral filter. The introduced integral-filter, which is called buffer-based integral filter in this paper, has frequency response similar to the low-pass filter. Hence, the capability of noise filtration will also be provided. The construction of the equivalent dynamic system is achieved from the use of multiple successive buffer-based integrators and the number of successive filters is related to relative degree between the unknown input and the sensor output. Then, an unknown input observer is proposed for the equivalent system, and therefore, a disturbance-decoupled and fault-sensitive with exponential-convergent toward-zero residual vector will be generated. Although the generated residual vector can be used for sensor and actuator fault diagnosis problems, the focus of this paper will be on the sensor fault detection. Finally, the applicability of the proposed method will be investigated via simulation of a simple inverted-pendulum on a horizontal-moving cart.

1- مقدمه

الگوریتم‌های تشخیص نقص[1] باید توانایی اعلان بروز نقص را داشته باشند تا بروز نقص در سیستم، بلادرنگ (و یا با حداقل تأخیر ممکن) تشخیص داده شود. بسیاری از الگوریتم‌های نقص‌یابی از تخمین‌گر (رویت‌گر) متغیرهای حالت استفاده می‌کنند و با ایجاد بردار مانده[2] از تفاضل خروجی واقعی سیستم و خروجی تخمین‌گر، امکان نقص‌یابی را فراهم می‌آورند.

1- Fault Detection

2- Residual Vector

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

E. Bagherpour-Ardakani, M.R. Hairi-Yazdi, M. Mahjoob, Unknown input observer for sensor fault detection in linear systems with unmatched uncertainties, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 4, pp. 292-300, 2015 (In Persian)

در شرایط ایده‌آل، خروجی تخمین‌گرهای نقص‌یابی در غیاب نقص، به سمت خروجی سیستم همگرا خواهد شد و در نتیجه، مانده‌ای برابر با صفر تولید خواهد کرد. پیش‌شرط فراهم آمدن چنین شرایطی، انطباق مدل تخمین‌گر و رفتار دینامیکی حاکم بر سیستم است. البته چنین شرایطی به ندرت رخ می‌دهد و عموماً توصیف مدل دینامیکی با عباراتی غیرقطعی و یا غیرقابل اندازه‌گیری مواجه است. علاوه بر آن، بروز نویز در حین اندازه‌گیری پارامترها توسط انواع حسگر از جمله عواملی خواهد بود که در مسائل طراحی تخمین‌گرهای نقص‌یاب چالش آفرینند. تحت چنین شرایطی، بردار مانده حتی در شرایط بدون نقص، الزاما، صفر نخواهد شد. البته، هر چه مدل دینامیکی از دقت بالاتری برخوردار باشد، بردار مانده در شرایط عملکرد سالم مقادیری نزدیک‌تر به صفر را خواهد داشت.

بروز نقص اختلاف بین خروجی تخمین‌گر و خروجی حسگرهای سیستم را تشدید کرده و مقدار بردار مانده را از صفر دور خواهد کرد. پارامتری موسوم به حد آستانه[1] برای ایجاد تمایز بین تأثیرات ناشی از عدم‌قطعیت و نقص بکار گرفته می‌شود. طراحی تخمین‌گر نقص‌یابی و انتخاب حد آستانه باید به نحوی انجام پذیرد که عبور بردار مانده از حد آستانه بیانگر بروز نقص باشد. به همین ترتیب، کمتر ماندن مقدار بردار مانده از حد آستانه نیز نشانی از عملکرد سالم سیستم خواهد بود [1].

همان‌گونه که اشاره شد، عدم‌قطعیت در مدل دینامیکی سیستم می‌تواند تأثیر نامناسبی بر دقت تشخیص نقص داشته باشد. لذا، رویکردهای متنوعی در تحقیقات مختلف به منظور مواجهه با آثار عدم قطعیت مورد توجه قرار گرفته است که از این جمله، تخمین‌گرهای ورودی-نامعلوم[2] هستند. در تخمین‌گرهای ورودی نامعلوم، بنابر شرایطی، قابلیت تخمین متغیرهای حالت باوجود ورودی نامعلوم (اغتشاش) فراهم خواهد شد. ورودی‌های نامعلوم می‌توانند دینامیک مدل نشده، خطای مدل‌سازی، انواع اغتشاشات و ورودی‌های پیش‌بینی نشده و یا ورودی‌های غیرقابل اندازه‌گیری (یا غیرقابل دسترس) باشند. اولین پژوهش منتشر شده در این زمینه به دهۀ 70 میلادی باز می‌گردد که وانگ و همکارانش تخمین‌گر ورودی-نامعلوم کاهش‌مرتبه-یافته‌ای[3] را برای سیستم‌های خطی پیشنهاد دادند [2]. کودوا و همکارانش شرط لازم و کافی برای تخمین‌گر وانگ را ارائه دادند [3]، که بعدها در مقالات دیگر نیز تأیید و تکرار شد، برای نمونه [5،4]. تاکنون طراحی تخمین‌گرهای مرتبه-کامل یا کاهش‌مرتبه-یافته بسیاری در سیستم‌های خطی [7،6] و یا غیرخطی [9،8] ارائه شده است. به موازات این پژوهش‌ها، مشاهده‌پذیری ورودی نیز از جمله مباحث مهم مورد توجه بوده و بواسطۀ آن، بازساخت ورودی از خروجی مدنظر است [10].

از جمله شرایط محدود کننده در طراحی تخمین‌گر ورودی نامعلوم شرط تطابق تخمین‌گر[4] است که در قسمت بعدی مقاله به آن پرداخته خواهد شد (در رابطۀ (3)). بر اساس این شرط، تخمین متغیرهای حالت در حالتی میسر است که کوپل دینامیکی مستقیم بین خروجی‌ها و ورودی‌های نامعلوم برقرار باشد؛ در غیر این صورت جبران اثر ورودی نامعلوم در تخمین متغیرهای حالت ممکن نخواهد بود [11،3].

برای تشریح بهتر محدودیت ناشی از شرط تطابق تخمین‌گر می‌توان از مثالی ساده کمک گرفت: عموماً در سیستم‌های مکانیکی-کنترلی از فیدبک موقعیت استفاده می‌شود که بواسطۀ حسگرهای موقعیت فراهم است. حسگرهای موقعیت متداول‌تر، دقیق‌تر و کم‌هزینه‌تر هستند. مقدار پارامترهای دیگر و از جمله سرعت به کمک تخمین‌گر بدست می‌آید. این در حالی است که اغتشاش غالباً به صورت نیرو مدل شده که به واسطۀ قانون دوم نیوتن کوپل دینامیکی مستقیم با سرعت دارد. بنابراین خروجی حسگرهای موقعیت شرط تطابق تخمین‌گر را تأمین نخواهند کرد. لذا تأمین شرط تطابق محدودیتی رایج در سیستم‌های مکانیکی است و تنها به شرط اندازه‌گیری مستقل سیگنال سرعت برقرار خواهد بود.

برای مواجهه با این محدودیت در بحث نقص‌یابی به کمک تخمین‌گر ورودی نامعلوم، راه‌کار دیگری در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. اساس این راهکار بدست آوردن سیگنال‌هایی به کمک مشتق‌گیری مستقیم از سیگنال‌های موجود و در دسترس است که قادر به تأمین شرط تطابق تخمین‌گر باشند [12–15].

در [13] و [14]، مجموعه‌ای از خروجی‌های کمکی[5] معرفی شده است که شرط تطابق را تأمین می‌کنند. خروجی‌های کمکی با مشتق‌گیری از سیگنال‌های موجود بر مبنای درجۀ نسبت[6] بین ورودی نامعلوم و خروجی بدست خواهند آمد. برای مشتق‌گیری در [13] از تخمین‌گرهای لغزشی مراتب بالا[7] (ارائه شده در [16]) استفاده شده است. در [14] نیز مشتق‌گیری به کمک تخمین‌گر بهره-زیاد[8] (پیشنهاد شده در [17]) انجام شده و سپس از تخمین‌گر مود لغزشی [18] برای تخمین متغیرهای حالت استفاده کرده است. مقالۀ [15] نیز بر اساس همین ایده به طراحی تخمین‌گر ورودی-نامعلوم پرداخته و علاوه بر تخمین متغیرهای حالت، تخمینی از ورودی نامعلوم را نیز ارائه داده است.

استفاده از ایده ورودی کمکی در مسائل نقص‌یابی به علت حساسیت مشتق به نویز، احتمال تشخیص نقص توأم با خطا را افزایش می‌دهد. لذا، چند پژوهش ذکر شده یا به نقص‌یابی نپرداخته‌اند و صرفا در تخمین متغیرهای حالت خلاصه شده‌اند، و یا بروز نقص را در شرایط بدون نویز بررسی کرده‌اند. نویسندگان مقالۀ حاضر، پیش از این در چند پژوهش منتشر شده به ارائۀ روشی پرداخته‌اند که اساس آن کاهش حساسیت بردار مانده به نویز در شرایط وجود اغتشاش نامنطبق است [19–21]. در [19]، برای نخستین بار ایدۀ ایجاد سیستم معادل به کمک انتگرال‌گیری متوالی مطرح شد. سپس، از نتایج این ایده در تحلیل نقص عملگر [20] و نقص حسگر [21] نیز استفاده شده است. انتگرال‌گیری نه تنها تأثیر نویز اندازه‌گیری را خواهد کاست، که دقت بالاتری در طراحی تخمین‌گر نقص‌یاب نیز فراهم خواهد کرد.

البته، انتگرال‌گیری متوالی از آن‌جا که منجر به ظهور مقدار اولیۀ سیستم خطی در روابط دینامیک معادل می‌شود، محدودیت‌ها و پیچیدگی‌هایی را به تخمین‌گر طراحی شده تحمیل می‌کند که شرح و بسط آن در [21] قابل رصد است. بر مبنای این نکته، نویسندگان در مقاله حاضر به توسعۀ فیلتری پرداخته‌اند که هم نکات مثبت انتگرال ساده برای تولید سیستم معادل را حفظ می‌کند و هم از ظهور شرایط اولیه متغیر حالت در روابط دینامیک معادل جلوگیری می‌کند. این راهکار به تخمین‌گری ساده‌تر و الگوریتم نقص‌یابی توانمندتری منجر شده است.

لذا نوآوری مقالۀ حاضر به صورت مشخص مبتنی بر توسعۀ یک سیستم معادل دینامیکی برای جبران آثار عدم‌قطعیت نامنطبق است. وجه مهم دیگر پیشنهاد این مقاله، توانایی ایجاد بردار مانده‌ای مستقل از عدم‌قطعیت

1- Threshold
2- Unknown Input Observer (UIO)
3- Reduced-Order
4- Observer Matching Condition

5- Auxiliary Output
6- Relative Degree
7- Higher-order Sliding Observer
8- High-Gain Observer

نامنطبق و حساس به بروز نقص در حسگر است، بردار مانده پیشنهادی با حساسیت کمتری که نسبت به نویز دارد در مقایسه با روش‌ها و پیشنهادات مرتبط در سابقهٔ پژوهش کارآمدتر است و احتمال تشخیص اشتباه نقص را به مراتب کاهش می‌دهد.

در ادامه ، مقدماتی از مسالهٔ مورد بحث در این مقاله تشریح شده و طراحی تخمین‌گر ورودی-نامعلوم به صورت کلی مورد بحث قرار خواهد گرفت، همچنین به طراحی تخمین‌گر در صورتی که شرط تطابق تخمین‌گر تأمین نشود، اشاره خواهد شد. در قسمت سوم، فیلتر انتگرالی پیشنهادی تشریح و پاسخ فرکانسی آن با فیلتر کم-گذر[1] مقایسه خواهد شد. سپس ایدهٔ اصلی این مقاله که توسعهٔ سیستم دینامیک معادل و طراحی تخمین‌گر نقص‌یابی بر مبنای آن است، در قسمت چهارم شرح داده می‌شود. حساسیت تخمین‌گر پیشنهادی به بروز نقص حسگر در قسمت بعدی مقاله بررسی خواهد شد و در بخش ششم، کارآمدی الگوریتم پیشنهادی با ارائهٔ نتایج شبیه‌سازی یک مدل دینامیکی خطی ارزیابی خواهد شد. در انتها نیز از مباحث مطرح شده نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

2- شرح مسأله

2-1- مستقل ساختن سیستم خطی از اغتشاش

برای تشریح مسأله طراحی تخمین‌گر در سیستم‌هایی که عدم‌قطعیت در معادلات سیستم به صورت ورودی نامعلوم (اغتشاش) مدل می‌شود، سیستم خطی (1) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), x_0 = x(t_0)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \tag{1}$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^n$، $y(t) \in \mathbb{R}^p$، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و $d(t) \in \mathbb{R}^q$ به ترتیب متغیرهای حالت، خروجی، ورودی معلوم و ورودی نامعلوم (اغتشاش) فرض شده‌اند، مقدار اولیه متغیر حالت با x_0 مشخص شده است. ماتریس‌های A، B، C و E نیز معلوم و با ابعاد متناسب فرض می‌شوند.

بدون خدشه به کلیت مسأله، می‌توان ماتریس خروجی C را با مرتبهٔ سطری کامل و ماتریس توزیع ورودی نامعلوم E را با مرتبهٔ ستونی کامل فرض کرد، مشروط به این که تعداد ورودی‌های نامعلوم از تعداد خروجی‌ها بیشتر نباشد ($q \le p$). جفت (A, C) نیز مشاهده‌پذیر فرض می‌شود.

تعریف 1: یک سیستم دینامیکی را تخمین‌گر ورودی-نامعلوم برای سیستم خطی معادله (1) می‌نامند اگر بتواند فارغ از مقدار ورودی نامعلوم، $d(t)$، تخمینی از متغیرهای حالت را در اختیار گذارد.

تعریف 2: عدد مختلط s_0 را صفر نامتغیر (صفر انتقالی)[2] سه‌گانهٔ (A, E, C) می‌نامند اگر $\mathrm{rank}(\Re(s_0)) < n + q$ که $\Re(s)$ ماتریس رزنبروک[3] به شرح رابطه (2) است:

$$\Re(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -E \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ضمناً، سیستم خطی متشکل از این سه ماتریس کمینه‌فاز[4] محسوب می‌شود، اگر تمامی صفرهای انتقالی از ورودی نامعلوم به خروجی پایدار باشند.

شرایط لازم و کافی برای وجود تخمین‌گر ورودی نامعلوم برای سیستم رابطهٔ (1) در بسیاری از مقالات به صورت زیر تصریح شده‌اند [22،7]:

الف- تأمین شرط تطابق تخمین‌گر:

$$\mathrm{rank}(CE) = \mathrm{rank}(E) \tag{3}$$

ب- صفرهای انتقالی از ورودی نامعلوم به خروجی پایدار باشند، به عبارتی دیگر، سیستم نسبت به ورودی نامعلوم کمینه‌فاز باشد.

واضح است که شرایط فوق، محدودیت‌هایی را در طراحی تخمین‌گر تحمیل خواهد کرد، حال می‌توان به کمک مشتق خروجی و سیستم رابطهٔ (1)، رابطهٔ (4) را بدست آورد:

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) + CEd(t) \tag{4}$$

با جابجایی عبارات در معادلهٔ فوق، رابطهٔ (5) حاصل خواهد شد:

$$CEd(t) = \dot{y}(t) - CAx(t) - CBu(t) \tag{5}$$

که با فرض در اختیار داشتن مشتق خروجی، سمت راست معادلهٔ (5) در هر لحظه قابل محاسبه خواهد بود، واضح است که این رابطه یک سیستم از معادلات خطی با p معادله و q مجهول (آرایه‌های بردار ورودی نامعلوم) است، اگر $p \ge q$ و ماتریس (CE) مرتبهٔ ستونی کاملی داشته باشد، یا به عبارتی، شرط تطابق تخمین‌گر در معادلهٔ (3) برقرار باشد، آن گاه بردار مجهول $d(t)$ دارای جواب ویژه‌ای به صورت رابطه (6) خواهد بود:

$$d^*(t) = (CE)^+[\dot{y}(t) - CAx(t) - CBu(t)] \tag{6}$$

که $(CE)^+$ شبه معکوس مور-پنروز[5] ماتریس (CE) است. از بکارگیری رابطهٔ (6) در رابطهٔ (1)، می‌توان به راحتی نشان داد که:

$$\frac{d}{dt}\big(x(t) - Hy(t)\big) = TAx(t) + TBu(t) \tag{7}$$

در واقع سیستم دینامیکی رابطهٔ (7) به شرط برقرار بودن «شرط تطابق تخمین‌گر» معادل سیستم رابطهٔ (1) خواهد بود. در عین حال، مزیت رابطهٔ (7)، استقلال آن از مقدار ورودی نامعلوم است. در عبارت فوق روابط (8) برقرارند:

$$\begin{aligned} H &= E(CE)^+ \\ (CE)^+ &= ((CE)^{\mathrm{T}}CE)^{-1}(CE)^{\mathrm{T}} \\ T &= I_n - HC \end{aligned} \tag{8}$$

و I_n ماتریس همانی $n \times n$ فرض شده‌اند.

اشاره به این نکته جالب توجه است که $TE = 0$. از این رو ماتریس T مرتبهٔ کاملی نداشته[6] و منفک‌سازی ورودی نامعلوم می‌تواند توأم با ازدست رفتن برخی از درجات آزادی سیستم باشد. لذا مشاهده‌پذیری جفت (A, C) تضمینی برای مشاهده‌پذیری جفت (TA, C) نخواهد بود.

حال می‌توان برای سیستم دینامیکی معادلهٔ (7)، تخمین‌گر شبه-لیونبرگری[7] را توسعه داد تا به واسطهٔ آن، امکان تخمین متغیرهای حالت سیستم رابطهٔ (1) فراهم شود:

$$\frac{d}{dt}\big(\hat{x}(t) - Hy(t)\big) = TA\hat{x}(t) + TBu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \tag{9}$$

که در این‌جا، L ماتریس بهرهٔ تخمین‌گر است. اگر خطای تخمین متغیر حالت، $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ فرض شود، دینامیک خطای تخمین از مقایسهٔ رابطهٔ (7) و (9) بدست می‌آید:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (TA - LC)e(t) \tag{10}$$

بر اساس دینامیک خطا، به شرط آن‌که تمامی مقادیر ویژه ماتریس $(TA - LC)$ پایدار باشند، خطای تخمین به سمت صفر همگرا شده و در نتیجه، $\hat{x}(t) \to x(t)$.

لم 1 [7]: شرایط لازم و کافی برای آن که رابطهٔ (9) تخمین‌گر ورودی-نامعلوم برای سیستم (1) باشد آن است که یکم، شرط تطابق تخمین‌گر برقرار باشد و دوم، صفرهای انتقال از ورودی نامعلوم به خروجی سیستم پایدار باشند.

2-2- عدم تأمین شرط تطابق تخمین‌گر

توضیح داده شد که در بسیاری از سیستم‌ها، شرط تطابق تخمین‌گر در رابطهٔ

1- Low-pass Filter
2- Invariant Zero (Transmission Zero)
3- Rosenbrock Matrix
4- Minimum-Phase
5- Moore-Penrose Pseudo-Inverse
6- Rank-Deficient
7- Luenberger-like Observer

(3) برقرار نیست. برای غلبه بر این محدودیت، در [13] ایدۀ خروجی کمکی پیشنهاد شده تا به کمک آن شرط تطابق تخمین‌گر تأمین شود.

قبل از ورود به بحث، فرض می‌شود که با توجه به $q \le p$، ماتریس خروجی C را بتوان به صورت $C = \begin{bmatrix} C_q^{\mathrm{T}} & C_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ تنظیم کرد و $C_q \in \mathbb{R}^{q\times n}$، ماتریس C_q حائز شرایطی است که در ادامه تشریح می‌شود:

تعریف 3: فرض می‌شود c_i سطر iام از ماتریس خروجی C_q باشد و:

$$\begin{cases} c_i A^{r_i-2}E = \cdots = c_i E = 0 \\ c_i A^{r_i-1}E \neq 0, \qquad\qquad i = 1,\dots,q \end{cases} \tag{11}$$

به r_i درجه نسبت[1] خروجی به ورودی نامعلوم گفته می‌شود [23].

نکته: درجۀ نسبت را می‌توان با مشتق مراتب بالاتر خروجی برای بدست آوردن ورودی نامعلوم معادل دانست. از این رو، شرط تطابق تخمین‌گر که معادل با درجه نسبت یک بین خروجی و ورودی نامعلوم است، به معنای توانایی استخراج ورودی نامعلوم از مشتق مرتبۀ اول خروجی قابل تفسیر می‌باشد که اساس رابطۀ (6) همین نکته است.

بر این اساس، ماتریس خروجی کمکی به صورت (12) خواهد بود:

$$C_a = \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} \\ \vdots \\ c_i A^{r_i-1} \\ \vdots \\ c_q A^{r_q-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

که بنابر فرضیات تعریف 3، $\mathrm{rank}(C_aE) = \mathrm{rank}(E)$. به عبارتی دقیق‌تر، ماتریس کمکی C_a و خروجی کمکی متناسب با آن، $y_a = C_a x$، شرط تطابق تخمین‌گر در رابطۀ (3) را تأمین خواهد کرد. اگر خروجی کمکی y_a قابل محاسبه از سیگنال‌های معلوم باشد، می‌توان از مشتق خروجی کمکی برای ایجاد دینامیک مستقل از ورودی نامعلوم غیرمنطبق استفاده کرد (رابطه 13):

$$\frac{d}{dt}\big(\hat{x}(t) - H_a y_a(t)\big) = T_a A\hat{x}(t) + T_a Bu(t) \\ +L\big(y(t) - C\hat{x}(t)\big) \tag{13}$$

در عبارت فوق می‌توان رابطه (14) را نوشت:

$$H_a = E(C_aE)^{-1} \\ T_a = I_n - H_a C_a \tag{14}$$

واضح است که این بار با توجه به تعریف 3 و رابطۀ (12)، (C_aE) مربعی و با مرتبۀ کامل خواهد بود و لذا از معکوس آن استفاده شده است.

حال باید به این پرسش پاسخ داد که آیا می‌توان با استفاده از پارامترهای معلوم مقدار خروجی کمکی y_a را استخراج نمود؟ برای یافتن پاسخ، $y_{ai} = c_i A^{r_i-1}x$ و بردار $\bar{y}_{ai} = [\bar{y}_{i1} \quad \cdots \quad \bar{y}_{ir_i}]^{\mathrm{T}}$ فرض می‌شوند، به نحوی که $\bar{y}_{ij} = c_i A^{j-1}x$ برای $i = 1,\dots,q$ و $j = 1,\dots,r_i$. آن چه اهمیت دارد تعیین اسکالر مجهول $y_{ai} = \bar{y}_{ir_i}$ با کمک خروجی معلوم $y_i = \bar{y}_{i1}$ و دیگر پارامترهای در دسترس مسأله است، به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$\dot{\bar{y}}_{ai} = A_{ai}\bar{y}_{ai} + B_{ai}u + b_{ai}f(x,d) \tag{15}$$

به نحوی‌که A_{ai} و b_{ai} در فرم کانونی کنترل‌پذیر[2] باشند، همچنین $B_{ai} = [c_iB \quad \cdots \quad c_iA^{r_i-1}B]$ و $f(x,d) = c_iA^{r_i}x + c_iA^{r_i-1}Ed$. چالش در این‌جا، مقدار مجهول تابع اسکالر $f(x,d)$ است.

در مقالات مختلف عمدتاً از دو روش برای جبران مقدار تابع مجهول و تخمین خروجی کمکی استفاده شده است: یکم تخمین‌گرهای مقاوم مود لغزشی مراتب بالا که برای نمونه در [13] دیده می‌شود؛ دوم استفاده از تخمین‌گر بهره-زیاد که برای نمونه در [14] استفاده شده است. در واقع این دو نوع تخمین‌گر -فارغ از این‌که مقدار مشتق مراتب بالاتر، یعنی ترم نامعلوم $f(x,d)$، چقدر باشد- تخمینی از مشتق‌گیری متوالی ارائه می‌دهند. به همین خاطر این دو تخمین‌گر را گاهاً تخمین‌گر مشتق نیز می‌نامند. شرح کامل‌تر در مراجع مورد اشاره قابل پیگیری است. در این‌جا تنها اشاره‌ای گذرا به تخمین‌گر بهره-زیاد می‌شود.

تخمین‌گر بهره-زیاد برای تخمین متغیرهای حالت سیستم دینامیکی (15) به شرح رابطه (16) خواهد بود:

$$\dot{\hat{y}}_{ai} = A_{ai}\hat{y}_{ai} + B_{ai}u + l_{ai}(y_i - c_{ai}\hat{y}_{ai}) \tag{16}$$

که $c_{ai} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ و $\hat{y}_{ai}$ تخمینی از $\bar{y}_{ai}$ است. همچنین:

$$l_{ai} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{i1}}{\varepsilon} & \cdots & \frac{\alpha_{ir_i}}{\varepsilon^{r_i}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

و $\varepsilon \in [0\ 1]$ پارامتر طراحی است. در ضمن، α_{ij}ها باید به نحوی انتخاب شوند که ریشه‌های معادلۀ مشخصه (17) در نیمۀ سمت چپ صفحۀ اعداد مختلط واقع شوند.

$$s^{r_i} + \alpha_{i1}s^{r_i-1} + \cdots + \alpha_{ir_i} = 0 \tag{17}$$

هر چه ε کوچک‌تر باشد، یا به عبارتی بهره بزرگ‌تر باشد، مشتق‌گیری ایده‌آل‌تر بدست می‌آید و سرعت همگرایی نیز بیشتر خواهد شد. البته تخمین‌گرهای ضریب بهره-زیاد در دورۀ گذار با پدیدۀ حداکثر شدن[3] ناگهانی روبرو هستند که ناشی از خطای تخمین و تشدید آن توسط بهرۀ تخمین‌گر است. همچنین، نسبت به وجود نویز در خروجی به شدت حساس است و آثار نویز خروجی را تشدید می‌کند. از این‌رو، دقت مشتق کاهش می‌یابد. حساسیت نسبت به نویز در تخمین‌گر مودلغزشی نیز همانند تخمین‌گر بهره-زیاد بالا است.

مسألۀ نویز در انواع روش‌های دیگری تخمین مشتق (روش‌های عددی مانند تفاضل محدود) هم عموماً محدود کننده است و دقت روش را کاهش می‌دهد. این در حالی است که نویز در اندازه‌گیری اجتناب‌ناپذیر است. بنابراین استفاده از خروجی‌های کمکی بدست آمده از رویکردهای مشتق-محور نیز متأثر از نویز خواهد بود و دقت تخمین‌گرهای ورودی نامعلوم را کاهش خواهد داد؛ خصوصاً در مسائلی چون نقص‌یابی که حداقل ساختن آثار نویز از سویی و جبران عدم قطعیت از سوی دیگر حائز اهمیت است.

3- فیلتر انتگرالی-بافری

به شرط مشتق‌پذیری تابع $f(t)$ می‌توان به راحتی نشان داد که رابطۀ (18) همواره برقرار است:

$$\int_{t_0}^{t}\left[\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right]d\tau = \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau\right] - f(t_0) \tag{18}$$

حضور ترم $f(t_0)$ در رابطۀ فوق ایدۀ ایجاد سیستم معادل دینامیکی را تا حدودی مختل می‌سازد؛ چنان‌چه در روش مقالات پیشینی در [19–21] پیشنهاد شده‌اند، پیدایش مقدار اولیه طراحی تخمین‌گر را پیچیده‌تر کرده است. در واقع مطلوب نظر آن است که خاصیت مشارکت‌پذیری بین اپراتور انتگرال و اپراتور دیفرانسیل بدون دخالت عبارات دیگر فراهم باشد.

برای این مهم می‌توان حدود انتگرال در رابطۀ فوق را بجای بازۀ $[t_0, t]$، به بازۀ $[t-\Delta, t]$ تغییر داد، با این فرض که پارامتر تاخیر زمانی Δ معلوم و از پیش مشخص باشد. بنابراین برای $t \ge \Delta$ به راحتی رابطه (19) قابل اثبات است:

$$\int_{t-\Delta}^{t}\left[\frac{d}{d\tau}f(\tau)\right]d\tau = \frac{d}{dt}\left[\int_{t-\Delta}^{t}f(\tau)d\tau\right] \tag{19}$$

تمایز و برتری رابطۀ (19) نسبت به رابطۀ (18)، چنان‌چه ذکر شد، مشارکت‌پذیری اپراتورهای انتگرال و مشتق است. از این الگو می‌توان در توسعۀ فیلتر انتگرالی رابطه (20) بهره برد:

$$\mathbb{I}_1[f]_{t,\Delta} = \int_{t-\Delta}^{t}f(\tau)d\tau \tag{20}$$

1- Relative Degree
2- Canonical Controllable Form
3- Peaking Phenomenon

نویسهٔ $\mathbb{I}_1[\cdot]_{t,\Delta}$ صرفا به منظور سادگی در بکارگیری فیلتر معرفی شده در فوق معرفی شده است. تبدیل لاپلاس این فیلتر نیز به صورت رابطه (21) است:

$$\mathcal{L}\{\mathbb{I}_1[f]_{t,\Delta}\} = \frac{1-\exp(-\Delta s)}{s}F(s) \tag{21}$$

ملاحظه می‌شود که فیلتر پیشنهادی ترکیبی از یک انتگرال ساده و تأخیری به اندازهٔ Δ-ثانیه است. در واقع عبارت تأخیر همانند یک بافر عمل می‌کند، بافر داده‌ها را برای مدت Δ-ثانیه نگه داشته و دوباره به صورت فیدبک منفی در اختیار فیلتر قرار می‌دهد. لذا این فیلتر را می‌توان به کمک مکانیزمش توصیف کرد و آن را تحت عنوان «فیلتر انتگرالی-بافری» نام‌گذاری نمود، چنان‌چه ترکیبی از یک انتگرال‌گیر و یک بافر است. این نام‌گذاری صرفاً در این مقاله به کار گرفته شده که به منظور ایجاد تمایز با انواع دیگر فیلترهای حوزهٔ کنترل انجام پذیرفته است. نمودار جعبه‌ای فیلتر ساده (مرتبهٔ یک) و چندگانه (مرتبهٔ k) در شکل 1 ترسیم شده‌اند.

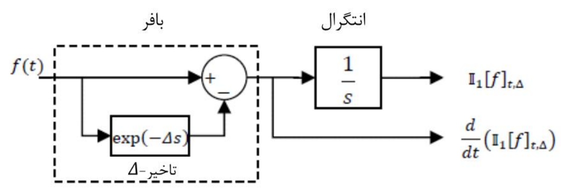
پاسخ فرکانسی فیلتر انتگرالی-بافری به کمک نمودار بود قابل ارزیابی است، بدین منظور، نمودار بود فیلتر انتگرالی-بافری در شکل 2- الف ترسیم شده و علاوه بر آن، با نمودار بود فیلتر کم-گذر $\Delta/(1+\Delta s)$ نیز مقایسه شده است. همان‌طور که واضح است، پارامتر تأخیر Δ تأثیر بسزایی در عرض باند هر دو فیلتر دارند. البته فیلتر انتگرالی معرفی شده پاسخ فرکانسی نسبتاً بهتری، در محدودهٔ عرض باند خود، داشته و از این جهت عملکرد مطلوب‌تری خواهد داشت.

اگر j فیلتر متوالی انتگرالی بافری، به منظور راحتی، با نویسهٔ $\mathbb{I}_j[\cdot]_{t,\Delta}$ مشخص شود، می‌توان رابطه (22) را نوشت:

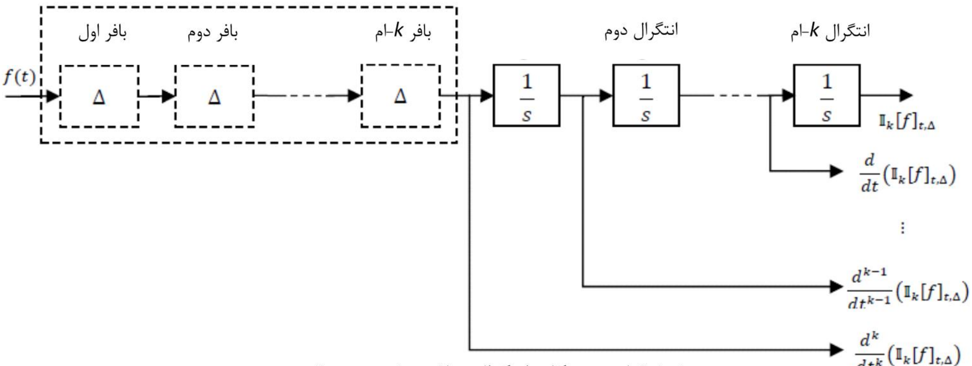
$$\mathbb{I}_j[f]_{t,\Delta} = \int_{t-\Delta}^{t}\int_{\tau_1-\Delta}^{\tau_1}\cdots\int_{\tau_{j-1}-\Delta}^{\tau_{j-1}} f(\tau_j)d\tau_j\cdots d\tau_2 d\tau_1 \tag{22}$$

همچنین با استفاده از خاصیت مشارکت‌پذیری این فیلتر می‌توان به راحتی نشان داد که برای $t \geq j\Delta$ رابطه (23) برقرار است:

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_j[f]_{t,\Delta}) = \mathbb{I}_1\left[\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_{j-1}[f]_{t,\Delta})\right]_{t,\Delta} = \cdots = \mathbb{I}_j\left[\frac{df}{dt}\right]_{t,\Delta} \tag{23}$$

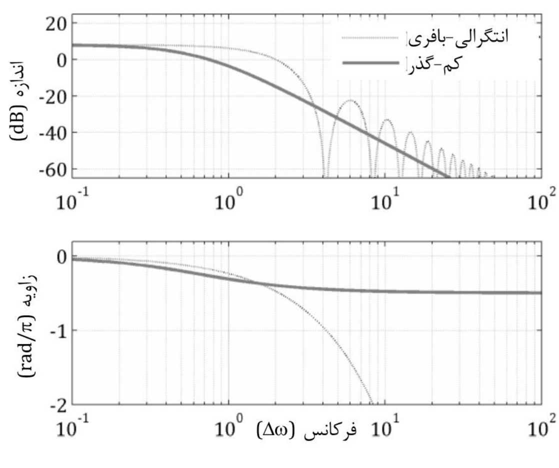


(الف) فیلتر انتگرالی-بافری ساده (مرتبه یک)

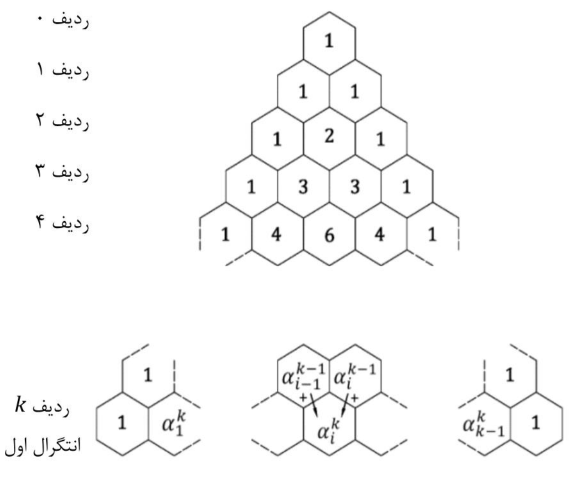


(ب) فیلتر چندگانه انتگرالی-بافری (مرتبه‌ی k)

شکل 1 الف) نمودار جعبه‌ای فیلتر انتگرالی بافری و ب) فیلتر چندگانهٔ انتگرالی بافری



(الف)



(ب)

شکل 2 الف) مقایسهٔ پاسخ فرکانسی فیلتر انتگرالی بافری با «فیلتر کم-گذر». ب) مثلث خیام-پاسکال

علاوه بر این، برای هر عدد طبیعی دلخواهی مانند k، به شرط $k \le j$، و برای $t \ge j\Delta$ می‌توان رابطه (24) را نوشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_j[f]_{t,\Delta}\right) = \mathbb{I}_{j-1}[f]_{t,\Delta} - \mathbb{I}_{j-1}[f]_{t-\Delta,\Delta}\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathbb{I}_j[f]_{t,\Delta}\right) = \mathbb{I}_{j-2}[f]_{t,\Delta} - 2\mathbb{I}_{j-2}[f]_{t-\Delta,\Delta} + \mathbb{I}_{j-2}[f]_{t-2\Delta,\Delta}\\
&\vdots\\
&\frac{d^k}{dt^k}\left(\mathbb{I}_j[f]_{t,\Delta}\right) = \mathbb{I}_{j-k}[f]_{t,\Delta} - \alpha_1^k\mathbb{I}_{j-k}[f]_{t-\Delta,\Delta} + \cdots\\
&+(-1)^{k-1}\alpha_{k-1}^k\mathbb{I}_{j-k}[f]_{t-(k-1)\Delta,\Delta}\\
&+(-1)^k\mathbb{I}_{j-k}[f]_{t-k\Delta,\Delta}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\left[(-1)^i\alpha_i^k\mathbb{I}_{j-k}[f]_{t-i\Delta,\Delta}\right]
\end{aligned} \quad (24)$$

که در روابط فوق برای $i = 1, \dots, k-1$ و با فرض این‌که α_0^k و α_k^k برابر با یک باشد، $\alpha_i^k = \alpha_{i-1}^{k-1} + \alpha_i^{k-1}$ خواهد بود. بنابراین α_i^kها را می‌توان از مثلث خیام (شکل 2) بدست آورد. البته می‌توان برای اجتناب از پیچیدگی معادلات رابطهٔ (24)، مدل دینامیکی ساده‌تری را ملاک عمل قرار داد که به کمک نمودارهای جعبه‌ای در شکل 1- ب ترسیم شده است.

4- تولید بردار مانده مبتنی بر انتگرال‌گیری متوالی

4-1- توسعهٔ سیستم معادل و خروجی کمکی

با اعمال r-فیلتر متوالی انتگرالی-بافری به سیستم خطی رابطهٔ (1) می‌توان نشان داد که برای $t \ge r\Delta$، سیستم دینامیکی معادلی به شرح رابطه (25) حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta}\right) = \mathbb{I}_r\left[\frac{d}{dt}x\right]_{t,\Delta}\\
&= A\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} + B\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta} + E\mathbb{I}_r[d]_{t,\Delta}
\end{aligned} \quad (25)$$

واضح است که فیلتر معرفی شده ساختار دینامیکی سیستم خطی را حفظ می‌کند. مهم‌ترین نکته در عبارت فوق این است که برای $t < r\Delta$، رابطهٔ (25) معادل با سیستم دینامیکی رابطهٔ (1) نخواهد بود.

چنان‌چه عنوان شد، شرط تطابق تخمین‌گر شرطی محدود کننده است و در بسیاری از سیستم‌ها $\mathrm{rank}(CE) \neq \mathrm{rank}(E)$. با یادآوری روشی که در بخش قبل نیز استفاده شد، می‌توان برای محاسبهٔ خروجی‌های کمکی متناسب با سیستم معادل در رابطهٔ (25) به ترتیب زیر اقدام کرد. با ارجاع به تعریف 3، می‌توان به راحتی نشان داد که برای تمامی $r_i \in \{r_1, \cdots, r_q\}$ و با فرض این‌که $r_1 \le \cdots \le r_q$ و تعداد فیلترهای متوالی $r = r_q - 1$ انتخاب شده باشد، برای $t \ge r\Delta$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{r_i-1}}{dt^{r_i-1}}\left(\mathbb{I}_r[y_i]_{t,\Delta}\right) = c_iA^{r_i-1}\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta}\\
&+c_iA^{r_i-2}B\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta} + c_iA^{r_i-3}B\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta}\right)\\
&+\cdots + c_iB\frac{d^{r_i-2}}{dt^{r_i-2}}\left(\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta}\right)
\end{aligned} \quad (26)$$

بنابراین بردار خروجی کمکی که متناسب با سیستم دینامیکی معادله (25) است، از توسعهٔ رابطهٔ (26) برای تمامی خروجی‌های کمکی استخراج خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&Y_a(t) = C_a\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta}\\
&= Y_\mu(t) - \left(C_{a_1}B\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta} + \cdots + C_{a_r}B\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\left(\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta}\right)\right)
\end{aligned} \quad (27)$$

که در رابطهٔ فوق می‌توان رابطه (28) را نوشت:

$$Y_\mu = \begin{bmatrix} \frac{d^{r_1-1}}{dt^{r_1-1}}\left(\mathbb{I}_r[y_1]_{t,\Delta}\right)\\ \vdots \\ \frac{d^{r_i-1}}{dt^{r_i-1}}\left(\mathbb{I}_r[y_i]_{t,\Delta}\right)\\ \vdots \\ \frac{d^{r_q-1}}{dt^{r_q-1}}\left(\mathbb{I}_r[y_q]_{t,\Delta}\right)\end{bmatrix}, C_{a_1} = \begin{bmatrix} c_1A^{r_1-2}\\ \vdots \\ c_iA^{r_i-2} \\ \vdots \\ c_qA^{r_q-2}\end{bmatrix}, \dots, C_{a_r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_q\end{bmatrix} \quad (28)$$

همان‌طور که در معادلات رابطهٔ (24) توضیح داده شد و در نمودار بلوکی شکل 2 نیز به صورت شماتیکی ترسیم شد، مشتقات مراتب بالاتر فیلتر $\mathbb{I}_r[\cdot]_{t,\Delta}$ تا مرتبهٔ r را می‌توان بدون مشتق‌گیری مستقیم و به شرط $t \ge r\Delta$ بدست آورد. بنابراین خروجی کمکی رابطهٔ (27) با استفاده سیگنال‌های موجود $y(t)$ و $u(t)$ قابل محاسبه خواهد بود.

حال با توجه به در اختیار بودن (قابل محاسبه بودن) خروجی کمکی و برقراری شرط $\mathrm{rank}(C_aE) = \mathrm{rank}(E)$، فرم مستقل از اغتشاش سیستم دینامیکی معادل را، می‌توان با استفاده از خروجی کمکی، از رابطه (29) بدست آورد:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} - H_aY_a\right) = T_aA\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} + T_aB\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta}\\
&Y(t) = C\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta}.
\end{aligned} \quad (29)$$

4-2- توسعهٔ تخمین‌گر ورودی نامعلوم برای سیستم معادل

حال یک تخمین‌گر شبه لیونبرگر خطی نیز می‌تواند تخمینی از متغیر حالت سیستم دینامیکی معادل در رابطهٔ (29) را ارائه کند (رابطه 30):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta} - H_aY_a(t)\right) = T_aA\mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta} + T_aB\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta}\\
&+L\left(Y(t) - C\mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta}\right)
\end{aligned} \quad (30)$$

که نویسهٔ $\mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta}$ تخمینی از متغیر حالت سیستم دینامیکی معادل، $\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta}$، فرض شده است. بردار ماندهٔ را نیز می‌توان به کمک تخمین رابطه (31) بدست آورد:

$$R(t) = C\,\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} - C\mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta} \quad (31)$$

از مقایسه دینامیک تخمین‌گر و دینامیک سیستم معادل، دینامیک خطای تخمین به شرح رابطه (3) بدست خواهد آمد:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[\tilde{x}]_{t,\Delta}\right) = (T_aA - LC)\mathbb{I}_r[\tilde{x}]_{t,\Delta} \quad (32)$$

نویسهٔ $\mathbb{I}_r[\tilde{x}]_{t,\Delta} = \mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} - \mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta}$ صرفا برای توصیف خطای تخمین متغیر حالت سیستم معادل در نظر گرفته شده است.

قضیه: تخمین‌گر رابطهٔ (30) یک تخمین‌گر مجانبی برای سیستم معادل رابطهٔ (25) است اگر و فقط اگر

الف. $\mathrm{Rank}(C_aE) = \mathrm{Rank}(E)$،

ب. جفت (T_aA, C) آشکارپذیر باشد.

اثبات: این قضیه به راحتی با تعمیم نتایج لم 1 و با توجه به روابط بالا اثبات می‌شود.

آشکار است تا زمانی که دینامیک یک سیستم از رابطهٔ (1) تبعیت کند، برای $t \ge r\Delta$، سیستم دینامیکی رابطهٔ (25) با سیستم دینامیکی رابطهٔ (1) معادل است. بنابراین، تخمین‌گر (30) همگرا و بردار مانده در رابطهٔ (31) نیز مستقل از ورودی نامعلوم $d(t)$ خواهد بود. همچنین در شرایط بدون نقص، این همگرایی به سمت صفر خواهد بود، مشروط به آن‌که نویز در اندازه‌گیری وجود نداشته باشد. در صورت وجود نویز، باوجود خاصیت فیلتر در کم‌دامنه ساختن سیگنال‌های با فرکانس زیاد، تأثیری، هر چند اندک، از نویز در خروجی و بردار مانده، قاعدتاً، باقی خواهد ماند.

4-3- انتخاب پارامتر فیلتر انتگرالی-بافری

همان‌طورکه پیش از این اشاره شد، فیلتر انتگرالی بافری در محدودهٔ پهنای باند خویش مشابه فیلتر کم-گذر عمل می‌کند و پارامتر طراحی Δ متناظر با پهنای باند این فیلتر است. بنابراین فیلتر انتگرالی بافری، نویزهایی را که در محدودهٔ فرکانسی خارج از پهنای باند قرار می‌گیرند، کم اثر می‌کند. از سویی دیگر، رابطهٔ (25) برای $t < r\Delta$ از نظر دینامیکی معادل با سیستم رابطهٔ (1) نیست. اگر مدت زمان همگرایی تخمین‌گر نیز معادل با زمان نشست t_s در

نظر گرفته شود، می‌توان نتیجه گرفت که خروجی تخمین‌گر و در نتیجه بردار ماندهٔ پیشنهادی در بازهٔ زمانی $t < r\Delta + t_s$ معتبر نیست و ارزیابی بروز نقص باید موکول به زمانی شود که $t \geq r\Delta + t_s$ باشد. بر این اساس، انتخاب مقدار مناسب برای پارامتر تأخیر Δ وابسته به یک برآورد بین پهنای باند فیلتر و مدت زمان اولیه تا معتبر بودن داده‌های تخمین‌گر $t \geq r\Delta + t_s$ است. واضح است که پهنای باند مناسب متناسب با فرکانس تحریک ورودی معلوم و فرکانس‌های طبیعی سیستم دینامیکی قابل تعیین خواهد بود.

5- تحلیل بردار مانده در شرایط بروز نقص حسگر

بروز نقص در حسگر از محتمل‌ترین انواع نقص در یک سیستم کنترلی است، با این فرض که $y_f(t)$ بیانگر نقص در خروجی باشد، مدل دینامیکی رابطهٔ (1) باید به صورت (33) بازنویسی شود:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t), x_0 = x(t_0)\\&y(t) = Cx(t) + y_f(t)\end{aligned} \tag{33}$$

مقدار $y_f(t)$ قبل از لحظهٔ بروز، $t < t_f$، برابر با صفر فرض می‌شود و به محض بروز نقص $t \geq t_f$، مقداری غیرصفر و متناسب با شدت نقص خواهد داشت.

بر این اساس، تمامی پارامترهایی که در قسمت قبل از طریق خروجی استخراج شد نیز باید در شرایط بروز نقص اصلاح شوند. از این رو می‌توان رابطهٔ (34) را نوشت:

$$\begin{aligned}&Y_a(t) = C_a\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} + Y_{af}(t)\\&= Y_\mu - \left(C_{a_1}B\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta} + \cdots + C_{a_r}B\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\left(\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta}\right)\right)\end{aligned} \tag{34}$$

که در این رابطه، عبارت ناشی از نقص، Y_{af} از رابطهٔ (35) بدست می‌آید:

$$Y_{af}(t) = \begin{bmatrix}\frac{d^{r_1-1}}{dt^{r_1-1}}\left(\mathbb{I}_r\left[y_{f_1}\right]_{t,\Delta}\right)\\ \vdots \\ \frac{d^{r_i-1}}{dt^{r_i-1}}\left(\mathbb{I}_r\left[y_{f_i}\right]_{t,\Delta}\right)\\ \vdots \\ \frac{d^{r_q-1}}{dt^{r_q-1}}\left(\mathbb{I}_r\left[y_{f_q}\right]_{t,\Delta}\right)\end{bmatrix} \tag{35}$$

در رابطهٔ فوق $y_{fi}(t)$، i-امین مولفه بردار نقص $y_f(t)$ است. به همین ترتیب دینامیک معادل در رابطهٔ (29) نیز به صورت رابطه (36) تغییر خواهد کرد:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} - H_aY_a\right) = T_aA\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} + T_aB\mathbb{I}_r[u]_{t,\Delta} - H_a\dot{Y}_{af}\\&Y(t) = C\,\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} + \mathbb{I}_r\left[y_f\right]_{t,\Delta}\end{aligned} \tag{36}$$

بدین ترتیب به شرط استفاده از تخمین‌گر رابطهٔ (30)، دینامیک خطای تخمین در رابطهٔ (32) بایستی به صورت رابطه (37) اصلاح شود:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_r[\tilde{x}]_{t,\Delta}\right) = (T_aA - LC)\mathbb{I}_r[\tilde{x}]_{t,\Delta} - H_a\dot{Y}_{af} - L\mathbb{I}_r\left[y_f\right]_{t,\Delta} \tag{37}$$

و بردار مانده نیز برابر با رابطه (38) خواهد شد.

$$R(t) = \left(C\mathbb{I}_r[x]_{t,\Delta} - C\mathbb{I}_r[\hat{x}]_{t,\Delta}\right) + \mathbb{I}_r\left[y_f\right]_{t,\Delta} \tag{38}$$

از دو رابطهٔ فوق واضح است که بروز نقص در حسگر بلافاصله در خطای تخمین و متعاقب آن، در بردار مانده بروز نموده و از طریق بردار مانده قابل مشاهده خواهد بود، این در حالی است که تأثیر اغتشاش در معادلات حاکم بر خطای تخمین و بردار مانده به کلی کنار زده شده است. بنابراین الگوریتم پیشنهادی در عین این‌که امکان تفکیک آثار ورودی نامعلوم نامنطبق را فراهم می‌سازد، توانایی تشخیص بروز نقص در حسگر را نیز ایجاد می‌کند. بروز نقص با انتخاب حد آستانهٔ مناسب و مانیتورینگ بردار مانده قابل تشخیص خواهد بود.

6- شبیه‌سازی عددی و بحث در نتایج

شبیه‌سازی مدل دینامیکی ترسیم شده در شکل 3 به کمک الگوریتم پیشنهادی این مقاله مدنظر است. معادلات حاکم بر حرکت این سیستم دینامیکی را می‌توان به صورت رابطه (39) نوشت:

$$\begin{aligned}&M\ddot{z} + F_z\dot{z} + K_zz + k(z - v) = f\mathrm{sgn}(\dot{v} - \dot{z}) + u\\&m\ddot{v} + k(v - z) = -f\mathrm{sgn}(\dot{v} - \dot{z})\end{aligned} \tag{39}$$

که پارامترهای عبارات فوق در شکل 3 نشان داده شده‌اند. مقادیر پارامترهای سیستم بر اساس جدول 1 خواهد بود. با بازنویسی معادلات دینامیکی فوق در فضای حالت و با فرض، $x = [v \quad z \quad \dot{v} \quad \dot{z}]^{\mathrm{T}}$ می‌توان دینامیک این سیستم را در قالب سیستم خطی رابطه (1) توصیف کرد. همچنین، نیروی اصطکاک بین جسم بالا و پایین که با مقدار f و تابع علامت sgn مشخص شده، در سیستم دینامیکی به صورت اغتشاش ($d = f\mathrm{sgn}(\dot{v} - \dot{z})$) مدل می‌شود. بدین ترتیب، ماتریس‌های سیستم رابطهٔ (1) برای مدل دینامیکی معرفی شده در این قسمت، به صورت رابطه (40) بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned}&A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-k/m & k/m & 0 & 0\\k/M & (-k - K_z)/M & 0 & -F_z/M\end{bmatrix}\\&B = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1/M\end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix}0\\0\\-1/m\\1/M\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{40}$$

موقعیت اولیهٔ متغیر حالت $x_0 = [-0.1 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، فرض می‌شود که سیگنال‌های موقعیت خطی جرم زیرین، z، و موقعیت خطی جرم زبرین نسبت به جرم بزرگ، $v - z$، اندازه‌گیری می‌شوند. بنابراین، ماتریس خروجی به صورت رابطه (41) خواهد بود:

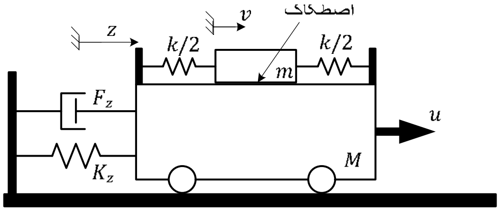
$$C = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{41}$$

ورودی معلوم $u(t)$، به صورت موج سینوسی با دامنهٔ دو و با فرکانس یک هرتز اعمال می‌شود. علاوه بر این، و به منظور بررسی تأثیر نویز خروجی، نویزی با توزیع نرمال گوسی و قدرت 0/0005 و زمان نمونهٔ 0/001 به هر کدام از سیگنال‌های اندازه‌گیری شده اضافه می‌شود.

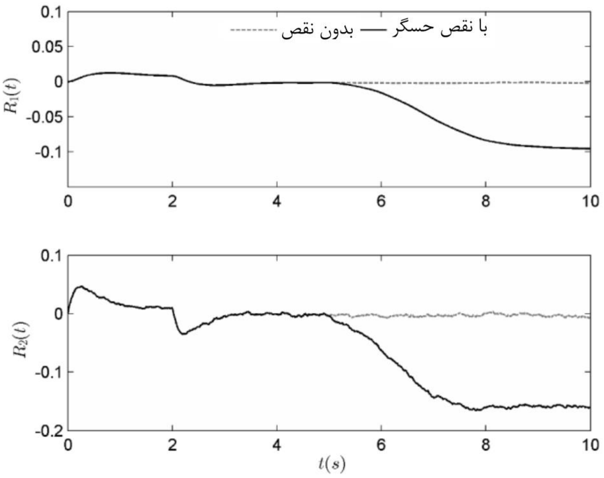
برای بررسی دو قابلیت الگوریتم پیشنهادی در این مقاله (بردار مانده مستقل از اغتشاش و توانایی تشخیص بروز نقص حسگر)، دو شبیه‌سازی مستقل انجام پذیرفته است: نخست، سیستم در شرایط عملکرد سالم مدل شده و بردار مانده حاصل از آن استحصال شده است. سپس، با فرض بروز نقص در حسگر موقعیت جسم زیرین، الگوریتم پیشنهادی شبیه‌سازی شده است. فرض شبیه‌سازی دوم بروز نقص در ثانیهٔ 5 ($t_f = 5\mathrm{s}$) لحاظ شده به نحوی که خروجی حسگر به اندازهٔ 0/02 متر از مقدار واقعی بایاس داشته باشد. بنابراین، بردار نقص برابر با ($y_f(t) = [0.02 \quad 0]^{\mathrm{T}};\ t \geq 5\mathrm{s}$) خواهد بود.

جدول 1 مقادیر پارامترهای دینامیکی سیستم

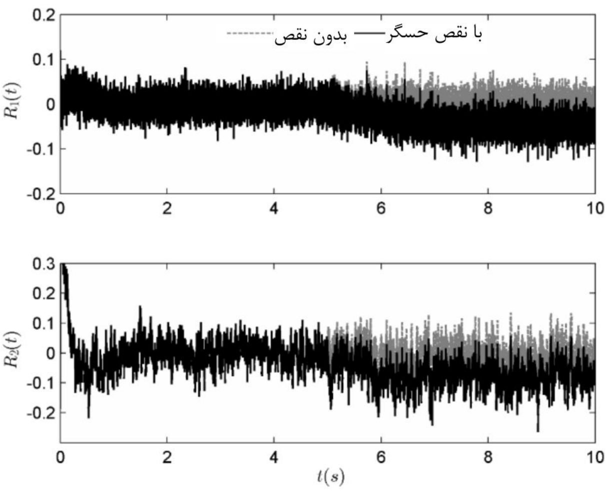
پارامتر	مقدار
M	3 کیلوگرم
m	0/5 کیلوگرم
k	15 نیوتن بر متر
K_z	50 نیوتن بر متر
f	3 نیوتن
F_z	6 کیلوگرم بر ثانیه



شکل 3 شماتیکی از مسأله دینامیکی شبیه‌سازی



شکل 4 مؤلفه‌های بردار مانده ایجاد شده توسط الگوریتم پیشنهادی این مقاله، بروز نقص از ثانیه پنجم به بعد به خوبی در بردار مانده انعکاس یافته است.



شکل 5 مؤلفه‌های بردار مانده‌ای که با استفاده از روش مشتق-محور و تخمین‌گر بهره-زیاد بدست آمده که مبتنی بر روش پیشنهادی در [14] است.

بر اساس داده‌های مسأله، واضح است که شرط تطابق تخمین‌گر تأمین نمی‌شود ($\text{rank}(CE) \neq \text{rank}(E)$)، بلافاصله می‌توان نشان داد که $c_1AE \neq 0$ در حالی‌که $c_1E = 0$، بنابراین درجۀ نسبت بین ورودی نامعلوم و خروجی اول $r_1 = 2$ است، با روش پیشنهادی این مقاله، $r = 1$ و لذا، تعداد فیلترهای انتگرالی-بافری برابر یک خواهد بود، همچنین می‌توان رابطه (42) را نوشت:

$$C_a = [c_2A] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$
$$C_{a_1} = [c_2] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$Y_\mu(t) = \left[\frac{d}{dt}\mathbb{I}_1[y_1(t)]_{t,\Delta} = y_1(t) - y_1(t-\Delta)\right] \tag{42}$$

با انتخاب ماتریس بهرۀ تخمین‌گر به صورت رابطه (43):

$$L = \begin{bmatrix} 4.5533 & 8.1465 \\ 5.0388 & -0.8147 \\ -102.9581 & 18.8281 \\ 4.6045 & -2.8093 \end{bmatrix} \tag{43}$$

مقادیر ویژۀ $(T_aA - LC)$ در $\{-5, -4, -3, -2\}$ واقع خواهند شد.

همچنین با توجه به فرکانس ورودی (یک هرتز) و فرکانس‌های طبیعی سیستم دینامیکی (فرکانس اول 0/57 و فرکانس دوم 0/99 است)، و با استناد به پاسخ فرکانسی فیلتر انتگرالی-بافری و پهنای باند آن که متناسب با پارامتر تاخیر Δ است، مقدار پارامتر تأخیر در این شبیه‌سازی برابر با 2 ثانیه فرض می‌شود، بدین ترتیب، نویز در خروجی که فرکانس‌هایی به مراتب بالاتر دارد، باید به خوبی فیلتر شود. نتایج شبیه‌سازی مؤید این ادعاست.

با توجه به نمودارهای شکل 4، تا قبل از وقوع نقص در حسگر، تمامی مؤلفه‌های بردار مانده بعد از طی یک دورۀ زمانی (حداکثر 4 ثانیه) به سمت صفر همگرا شده‌اند، چنان‌چه مشاهده می‌شود، در شرایط عملکرد سالم، این همگرایی به سمت صفر تداوم دارد. این مهم به خوبی نشان می‌دهد که بردار مانده پیشنهادی کاملا مستقل از مقدار اغتشاش است. البته نکتۀ مهم دیگر این‌که بردار مانده در شرایطی بدست آمده که خروجی حسگرها متاثر از نویز است و بنابر توانایی فیلتر انتگرالی-بافری معرفی شده، تأثیر نویز در بردار مانده نیز بسیار کم و ناچیز است. از این رو، بردار مانده پیشنهادی دقت خوبی دارد. در لحظۀ بروز نقص در حسگر موقعیت خطی جسم زیرین (خروجی اول)، هر دو مولفۀ بردار مانده از نزدیکی صفر فاصله می‌گیرند (شکل 4). لذا بردار مانده پیشنهادی، در عین بی‌تأثیر ماندن از اغتشاش، نسبت به بروز نقص در حسگر کاملاً حساس است و بلافاصله، بروز نقص را آشکار می‌سازد.

برای آن‌که بتوان به مقایسه‌ای از تأثیر نویز در بردار مانده دست یافت، شبیه‌سازی به کمک الگوریتم‌های مشتق-محور ضریب-بهرۀ زیاد نیز انجام پذیرفته است که در بخش دوم مقاله و به کمک روابط (15) و (16) تشریح شد، بردار مانده حاصل از شبیه‌سازی این روش در شکل 5 ترسیم شده است، چنان‌چه آشکار است، شرایط نویزی تأثیری شدید بر خروجی بردار مانده دارد و چنان‌چه در شکل 5 نیز مشاهده می‌شود، این تأثیر، تشخیص نقص را سخت و خصوصا در نقص‌های کوچک، عملا ناممکن می‌سازد.

از مقایسۀ نمودارهای شکل‌های 4 و 5، که هر دو در شرایط اندازه‌گیری نویزی بدست آمده‌اند، می‌توان نتیجه گرفت که بنابر انتظار، روش پیشنهادی این مقاله مؤثرتر از روش‌های مشتق-محور است و با دقت بمراتب بالاتری، خروجی بردار مانده را در اختیار خواهد گذاشت.

7- نتایج

در این مقاله، ایجاد بردار مانده به منظور تشخیص نقص حسگر در سیستم‌های خطی به کمک تخمین‌گرهای ورودی-نامعلوم مورد توجه قرار گرفته است. برای این مهم فرض شده که دینامیک حاکم بر سیستم خطی متأثر از عبارات غیرقطعی در قالب ورودی نامعلوم (اغتشاش) باشد و خروجی‌ها نیز شرط تطابق تخمین‌گر را تأمین نکنند. روش پیشنهاد شده بر مبنای یک سیستم دینامیکی معادل و با کمک مجموعه‌ای از خروجی‌های کمکی است که قادر به تأمین شرط تطابق تخمین‌گر باشند تا به واسطۀ آن‌ها امکان تفکیک آثار اغتشاش فراهم آید. در این فرایند از یک فیلتر انتگرالی موسوم به فیلتر انتگرالی-بافری استفاده شده است.

نتایج بدست آمده مؤید آن است که روش پیشنهادی به خوبی امکان جبران آثار عدم‌قطعیت‌های نامنطبق را فراهم می‌آورد و در عین حال، خدشه‌ای به تأثیرات ناشی از نقص حسگر وارد نمی‌سازد. بدین ترتیب، بروز نقص در حسگر به راحتی از بردار مانده قابل تشخیص خواهد بود. همچنین، مزیت مهم دیگر پیشنهاد مقاله حاضر در امکان مدیریت نویزهای اندازه‌گیری است که به واسطه آن بردار مانده‌ای با کیفیت بالاتر و امکان اشتباه کمتر در تشخیص نقص ایجاد خواهد شد. ارزیابی عملکرد الگوریتم پیشنهادی و کارآمدی آن به کمک شبیه‌سازی یک سیستم دینامیکی خطی انجام گرفته که بخوبی موید موارد ادعا شده در این مقاله است.

8- مراجع

[1] C. Edwards, S. K. Spurgeon, *Sliding mode control: theory and application*, vol. 7. London: Taylor & Francis, 1998.

[2] E. Wang, P. Dorato, Observing the states of systems with unmeasurable disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 20, No. 5, pp. 716–717, Oct. 1975.

[3] P. Kudva, N. Viswanadham, A. Ramakrishna, Observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 25, No. 1, pp. 113–115, Feb. 1980.

[4] M. Hou, P. C. Muller, Design of observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 871–875, Jun. 1992.

[5] M. Darouach, On the novel approach to the design of unknown input observers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 3, pp. 698–699, Mar. 1994.

[6] K. Watanabe, D. M. Himmelblau, Instrument fault detection in systems with uncertainties, *International Journal of Systems Science*, Vol. 13, No. 2, pp. 137–158, 1982.

[7] J. Chen, R. J. Patton, H.-Y. Zhang, Design of unknown input observers and robust fault detection filters, *International Journal of Control*, Vol. 63, No. 1, pp. 85–105, Jan. 1996.

[8] A. M. Pertew, H. J. Marquez, Q. Zhao, Design of unknown input observers for Lipschitz nonlinear systems, in *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005,* pp. 4198–4203, 2005.

[9] W. Chen, M. Saif, Unknown input observer design for a class of nonlinear systems: an LMI approach, in *American Control Conference, 2006,* No. 1, pp. 5129–5134, 2006.

[10] M. Hou, R. J. Patton, Input observability and input reconstruction, *Automatica,* Vol. 34, No. 6, pp. 789–794, 1998.

[11] S. Bhattacharyya, Observer design for linear systems with unknown inputs, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 23, No. 3, pp. 483–484, Jun. 1978.

[12] T. Floquet, J. P. Barbot, A sliding mode approach of unknown input observers for linear systems, in *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*, Vol. 2, pp. 1724–1729 Vol.2, 2004.

[13] T. Floquet, C. Edwards, S. K. Spurgeon, On sliding mode observers for systems with unknown inputs, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing,* Vol. 21, No. 8–9, pp. 638–656, Oct. 2007.

[14] K. Kalsi, J. Lian, S. Hui, S. H. Żak, Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: A high-gain approach, *Automatica,* Vol. 46, No. 2, pp. 347–353, Feb. 2010.

[15] F. Zhu, State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers, *Journal of Process Control,* Vol. 22, No. 1, pp. 296–302, Jan. 2012.

[16] A. Levant, Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 9–10, pp. 924–941, Jan. 2003.

[17] A. Dabroom, H. K. Khalil, Numerical differentiation using high-gain observers, in *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control,* Vol. 5, No. December, pp. 4790–4795, 1997.

[18] S. Hui, S. H. S. Zak, Observer design for systems with unknown inputs, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science,* Vol. 15, No. 4, pp. 431–446, 2005.

[19] E. A. Bagherpour, M. Hairi-Yazdi, Disturbance decoupled residual generation with unknown input observer for linear systems, in *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol),* pp. 178–183, 2013.

[20] E. A. Bagherpour, M. Hairi-Yazdi, M. J. Mahjoob, Residual Generation with Unknown Input Observer for Linear Systems in the presence of Unmatched Uncertainties, *Journal of Mechanical Science and Technology,* Vol. 28, No. 12, pp. 5159–5167, 2014.

[21] E. A. Bagherpour, M. Hairi-Yazdi, M. J. Mahjoob, Residual Generation in Linear Systems with Unmatched Uncertainties for Fault Detection Problems, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 7, pp. 191–198, 2014.

[22] L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, X.-G. Yan, Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* Vol. 18, No. 4–5, pp. 399–412, Mar. 2008.

[23] H. K. Khalil, J. W. Grizzle, *Nonlinear systems,* Vol. 3. Upper Saddle River: Prentice hall, 2002.