مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص ص 310-320

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی تحلیلی پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم عمق از جنس مواد مدرج تابعی

علی اصغر عطایی[1*]، مهدی علیزاده[2]

1- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- کارشناسی ارشد طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 4563-11155، aataee@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 12 آذر 1393

پذیرش: 22 بهمن 1393

ارائه در سایت: 16 اسفند 1393

کلید واژگان:

پایداری دینامیکی

مواد مدرج تابعی

فروجهش دینامیکی

تیرهای قوسی کم‌عمق

چکیده

مشخصه مهم تیرهای قوسی کم‌عمق تحت بارگذاری جانبی، ناپایداری آنها در برابر نیروهای بحرانی است که در اثر آن سازه دستخوش یک جابجایی بزرگ ناگهانی بسوی ساختار تعادلی جدیدی می‌شود که اصطلاحاً فروجهش نامیده می‌شود. با معرفی مواد مدرج تابعی و ترکیب آن با بحث تیرهای قوسی، می‌توان سازه‌هایی با مشخصات پایداری مطلوب برای شرایط خاص ایجاد کرد. از اینرو در این تحقیق به بررسی رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق با مواد مدرج تابعی پرداخته شده است. یک تیر قوسی کم‌عمق با شکل اولیه سینوسی و دارای تکیه‌گاه‌های لولایی که تحت تأثیر توزیع نیروی ضربه‌ای قرار دارد در نظر گرفته شده و تأثیر متغیر بودن مدول الاسیتسیته در طول ضخامت بر روی پایداری این نوع تیرها در برابر پدیده فروجهش دینامیکی بررسی شده است. روابط غیرخطی حاکم بر تیر قوسی کم‌عمق با فرض تیر اویلر برنولی بدست آمده و معادله حرکت آن با استفاده از یک معادله دیفرانسیلی– انتگرالی غیرخطی بیان شده و با در نظر گرفتن یک پاسخ فوریه به حل معادله حرکت پرداخته شده است. رویکرد اتخاذ شده در تحلیل ناپایداری دینامیکی، استفاده از انرژی کل سیستم و صفحه فازی است. فرایند تحلیل عبارتست از: 1. تعیین ساختارهای تعادلی با استفاده از معادله حرکت 2. بررسی پایداری دینامیکی موضعی هریک از ساختارهای تعادلی با استفاده از تراز انرژی و تابع لیاپانوف 3. چنانچه ساختار اولیه در معرض ناپایداری فروجهش قرار گیرد، شرایط مورد نیاز (وضعیت اولیه تیر قوسی، نحوه توزیع مواد مدرج تابعی و میزان بار بحرانی اعمال شده) جهت پایداری در مقابل پدیده فروجهش تعیین خواهد شد.

Analytical investigation of dynamic stability of FGM shallow arches

Ali Asghar Atai*, Mehdi Alizadeh

Department of Mechanical Engineering, Tehran University, Tehran, Iran.

* P.O.B. 11155-4563 Tehran, Iran, aataee@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 03 December 2014
Accepted 11 February 2015
Available Online 07 March 2015

Keywords:
Shallow Arch
Dynamic Stability
Snap-Through
Functionally Graded Material

ABSTRACT

The major concern in Shallow arches behavior under lateral loading is their instability at a critical load, which can cause the structure to collapse or displace to another stable configuration, a phenomenon called snap through. By introduction of functionally graded materials in recent years, and incorporating them into this problem, interesting results can be obtained which can produce structures with favorable stability properties. In this work, dynamic stability of the hinged-hinged functionally graded shallow arch under impulsive loading is investigated. Material properties vary through the thickness by power law. Nonlinear governing equations are derived using Euler-Bernoulli beam assumption and equations of motion are expressed by a nonlinear differential-integral equation. The solution utilizes a Fourier form of response. The procedure of analysis of dynamic stability that is followed in this work uses the total energy of the system and the Lyapunov function in the phase space that consists of essentially three steps: First, one finds all the possible equilibrium configurations of the shallow arch. Next, the local dynamic stability of each of the equilibrium configurations is studied.. Last, when the preferred configuration from which a snap through may occur is locally stable and when there is at least one other locally stable equilibrium configuration, then we proceed to find a sufficient condition for stability against snap through. The effect of gradation on stability and critical load of the arch is investigated in detail.

1- مقدمه

تیر قوسی کم‌عمق به‌صورت گسترده به عنوان یک سازه در مهندسی راه و ساختمان یا به‌عنوان زیرسازه برای سازه‌های بسیار پیچیده در مهندسی مکانیک و هوافضا بکار برده می‌شود. در حقیقت تیرهای قوسی کم‌عمق، سازه‌های یک بعدی خمیده‌ای هستند که می‌توانند به‌عنوان انتقال دهنده نیرو در سیستم‌های سازه‌ای، نگه‌دارنده سازه‌های بام و گنبد، قطعه تقویتی برای خودرو و قطعات هواپیما، به‌عنوان تجهیزات الکترومکانیکی برای تغییر وضعیت بین چندین وضعیت تعادلی، به‌عنوان المان‌های مکانیکی در سوئیچ‌های حرارتی چند وضعیتی یا سوئیچ‌های فشاری مورد استفاده قرار گیرند. علاوه بر موارد فوق تیرهای قوسی همچنین می‌توانند به‌عنوان عایق ارتعاشی [1] و جاذب ارتعاشی استفاده شوند [2،3]. علاوه بر کاربردهای متنوع تیرهای قوسی می‌توان از آنها در درک و تحلیل بهتر سازه‌های

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. A. Atai, M. Alizadeh, Analytical investigation of dynamic stability of FGM shallow arches, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 4, pp. 310-320, 2015 (In Persian)

پیچیده‌تر که رفتاری شبیه تیر قوسی کم‌عمق دارند، مانند پوسته‌های کم‌عمق و صفحات خمیده استفاده کرد. مسأله بحرانی در رفتار تیرهای قوسی کم عمق تحت بارهای جانبی، ناپایداری هندسه آنهاست که می‌تواند منجر به تخریب سازه یا جابجایی‌های بیش از حد شود. در واقع اگر میزان نیروی فشاری درونی تیرهای قوسی به بیش از مقدار حدی برسد در این صورت سازه دستخوش یک جابجایی بزرگ ناگهانی بسوی ساختار تعادلی جدیدی می‌شود. این پدیده می‌تواند هم مطلوب باشد (تغییر وضعیت سوئیچ) و هم خطرناک (فروپاشی یک گنبد یا خرپا). بطور کلی دو حالت برای کمانش تیرهای قوسی وجود دارد[4]:

1- اگر مرتبه ارتفاع اولیه تیر قوسی شکل 1، با فاصله دو تکیه‌گاه تیر قوسی یکسان باشد، این امکان برای تیر قوسی وجود دارد تا تحت فشار بحرانی در مود نشان داده شده (نقطه چین) کمانش نماید. برای نمونه، تیرهای قوسی دایروی تحت نیروی عرضی گسترده غیر یکنواخت با انواع گوناگون تکیه‌گاه‌ها می‌تواند برای این مدل در نظر گرفته شود.

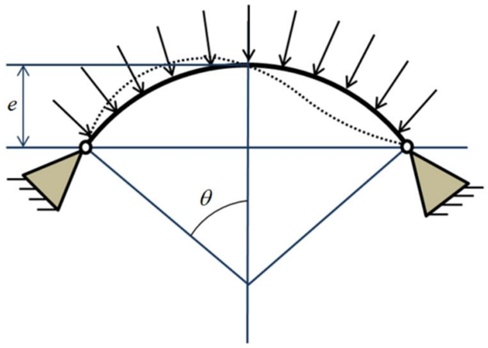
2- اگر ارتفاع اولیه یک تیر قوسی شکل بسیار کوچکتر از فاصله دو تکیه‌گاه آن باشد که در اینصورت تیر قوسی، کم‌عمق[1] نامیده می‌شود (شکل 2)، نیروی محوری که به دلیل ثابت بودن دو انتهای تیر ایجاد می‌شود نقش مهمی را در پایداری الاستیکی ایفا می‌کند. تیر ممکن است ناپایدار شود و بطور ناگهانی معکوس انحنای اولیه شود که در شکل 2 تغییر انحنا از خط ممتد به خط نقطه چین بیانگر این پدیده است.

پارامتر نیرویی که یک تغییر زیاد در پاسخ ایجاد کند، نیروی بحرانی نامیده می‌شود. پس از تخطی نیرو از سطح نیرویی بحرانی، تیر قوسی کم‌عمق بطور ناگهانی از یک حالت تعادلی پایدار به یک ساختار تعادلی پایدار غیرمجاور آن جهش می‌کند. این پدیده ناپایدار، فروجهش[2] نامیده می‌شود که یک مشخصه مهم از تیرهای قوسی کم‌عمق است. پژوهش‌ها در بررسی پایداری تیرهای قوسی کم‌عمق باتوجه به چگونگی بار عرضی اعمال شده بر آنها می‌تواند به دو دسته تقسیم‌بندی شود: پایداری استاتیکی و پایداری دینامیکی. در بحث پایداری استاتیکی فرض می‌شود که بارگذاری عرضی در یک حالت شبه استاتیکی اعمال شده است. به علت رفتار غیرخطی تغییر شکل تیر قوسی، وضعیت‌های تعادلی پایدار چندگانه‌ای ممکن است وجود داشته باشد و ساختار تیر قوسی ممکن است از یک حالت تعادلی پایدار به حالت تعادلی پایدار دیگری جهش کند.

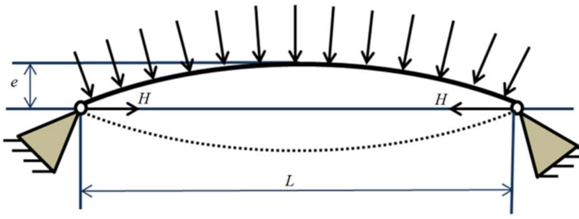
زمانی که نیروهای عرضی بجای حالت شبه تعادلی، بطور ناگهانی اعمال شوند، این پدیده دینامیکی بوده و پیچیده‌تر است و مهمتر اینکه نیروهای بحرانی محاسبه شده متفاوت از حالت استاتیکی خواهند بود. بطور نمونه اگر یک نیروی عرضی بطور ناگهانی اعمال شود نیروی بحرانی حدود 80% حالت نیروی شبه استاتیکی خواهد بود [5] و همچنین فروجهش تیر قوسی به یک ساختار تعادلی دیگر نیز سریع‌تر از حالت شبه استاتیکی اتفاق خواهد افتاد.

اولین مطالعات نظری بر روی نیروی بحرانی استاتیکی تیرهای قوسی بوسیله تیموشنکو [6] صورت گرفت و در ادامه سایر پژوهشگران کار مقدماتی تیموشنکو را بسط دادند. فونگ و کاپلن [4] پایداری استاتیکی تیر قوسی کم‌عمق با تکیه‌گاه لولایی را بطور جامع مطالعه کردند. با توجه به اهمیت پایداری دینامیکی سازه‌ها، بطورکلی راهکارهای استفاده شده در برآورد نیروهای بحرانی دینامیکی سازه‌های الاستیک که دارای بارگذاری دینامیکی هستند، در دو رویکرد می‌تواند دسته‌بندی شود: رویکرد اول استفاده

1- Shallow Arch
2- Snap-Through Buckling



شکل 1 مود کمانشی برای تیر قوسی دایروی



شکل 2 مود کمانشی برای تیر قوسی کم‌عمق

از روش‌های عددی در تحلیل معادلات حرکت این سیستم‌ها است تا کمانش دینامیکی یک سازه تحت بار متداول دینامیکی برای انواع مقادیر پارامتر نیرویی بررسی شود و پاسخ سازه سیستم در پایداری دینامیکی احراز شود. به‌منظور ساده‌سازی تحلیل عددی برای حل معادله دیفرانسیلی حرکت، یک سازه پیوسته بایستی به مدلی با چندین درجه آزادی تفکیک شود و اغلب تعداد درجات آزادی که برای چنین سیستم‌هایی در نظر گرفته می‌شود زیاد بوده و محاسبات بسیاری را می‌طلبد. دقت رویکرد عددی اغلب وابسته به تعداد درجات آزادی سیستم تقلیل یافته و دقت روش محاسبه عددی اتخاذ شده می‌باشد. لاک [7] به بررسی رفتار دینامیکی یک تیر قوسی کم‌عمق سینوسی با تکیه‌گاه‌های لولایی که تحت تأثیر نیروی فشاری یکنواخت سینوسی-پله‌ای قرار گرفته بود پرداخت و نیروی فشاری بحرانی را به‌وسیله انتگرال‌گیری عددی از معادله حرکت و تحلیل پایداری بینهایت کوچک تعیین کرد و در پایان نتایج حاصل از هردو روش را باهم مقایسه کرد. لویتاس و همکارانش [8] کارهای تئوری و آزمایشگاهی روی پاسخ‌های غیرخطی دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق انجام دادند. آنها با استفاده از نگاشت سلولی پوانکاره که یک ابزار عددی برای تحلیل جامع سیستم‌های دینامیکی غیرخطی می‌باشد، به مطالعه رفتار دینامیکی و پایداری دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق الاستیک که تحت نیروی شعاعی یکنواخت ثابت قرارگرفته بود پرداختند. مالون [9] و همکارانش تأثیر انحنای اولیه تیر قوسی کم‌عمق نازک را بر میزان نیروی کمانش ضربه‌ای دینامیکی آزمایش کردند. آنها با بکارگیری روش‌های عددی و یک مدل نیمه تحلیلی چند درجه آزادی، تحلیل‌های شبه استاتیکی و دینامیکی گذرای غیرخطی را انجام دادند تا نیروی کمانش دینامیکی را تعیین کنند. چن و رو [10] بر روی پاسخ فروجهش دینامیکی یک تیر قوسی کم‌عمق سینوسی با تکیه‌گاه لولایی که تحت یک جفت گشتاور مساوی و مخالف جهت هم که بطور ناگهانی در دو انتها اعمال شده بود مطالعه کردند. بررسی آن‌ها شامل حل عددی و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی بود. چاندرا [11] و همکارانش یک بررسی عددی بر روی رفتار دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق سینوسی تحت بارگذاری سینوسی که پدیده فروجهش را نیز تجربه کرده بود انجام دادند. آنها مسأله تیر قوسی را به‌صورت

سیستم یک درجه آزادی با برخی فرضیات مشخص ساده کردند و نتایج حاصل از مدل ساده شده را با نتایج بدست آمده از مدل المان محدود مقایسه کردند.

رویکرد دوم مطالعه انرژی کلی سیستم است که به‌عنوان روش‌های انرژی نیز شناخته می‌شود، در این رویکرد به دو طریق به مطالعه سیستم پرداخته می‌شود، در روش اول انرژی کلی سیستم در صفحه فازی بررسی می‌شود [12] که در آن شرایط بحرانی سیستم به مشخصات صفحه فازی آن وابسته است، از اینرو ابتدا با تعیین نقاط بحرانی از روی معادله حرکت، ویژگی‌های این نقاط در صفحه فازی بررسی می‌شود و اهمیت آن در این است که با استفاده از این ویژگی‌ها می‌توان کلیه شرایط کافی برای پایداری و ناپایداری دینامیکی سیستم را تعیین کرد، در روش دوم که براساس اصل پایستاری انرژی استوار است [13] با استفاده از معادله انرژی کلی سیستم، شرایط بحرانی و نیروهای بحرانی تعیین می‌شوند، مزیت اصلی این رویکرد در این است که معیاری در تعیین نیروی بحرانی کمانش دینامیکی فراهم می‌کند و در عمل پژوهشگران نیازی به حل معادلات حرکت سیستم ندارند، اولین محاسبه تئوری نیروی کمانش دینامیکی بوسیله هاف و بروس [14] ، انجام گرفت، آنها پایداری تیر قوسی سینوسی را تحت بارگذاری پله واحد و نیروی ضربه‌ای ایده‌آل مطالعه کردند، سو و همکارانش [12،15،16]، از سال 1966 تا 1968 تعدادی مقاله منتشر کردند که مسأله پایداری دینامیکی تیر قوسی سینوسی و اثر پارامترهای مختلف روی پایداری آن را با تکیه‌گاه‌های منعطف که تحت نیروی ضربه‌ای و سایر نیروهای مختلف زمانی قرار داشت بررسی کردند، در اصل در این مقالات آنها پایداری دینامیکی سیستم‌های پیوسته را با مطالعه رفتار خطوط سیر و استفاده از معیار انرژی در فضای حالت تابعی تحقیق کردند و میزان بار بحرانی را برای انواع بارگذاری بدست آوردند، سیمتسز [13]، در کتاب خود یک نگاه جامع بر روی پایداری دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق و همین‌طور سایر سازه‌هایی چون پوسته استوانه‌ای و کلاهک کروی داشت، و با استفاده از رویکرد انرژی کلی سیستم، حد بالا و پایینی برای نیروی کمانش دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق با فرضیات شکل اولیه سینوسی، تکیه‌گاه‌های لولایی یا گیردار که تحت بار ناگهانی سینوسی قرار گرفته بود، بدست آورد، لین و چن [18،17،5] در سال‌های بین 2003 تا 2006 در تعدادی مقاله رفتار دینامیکی تیرهای قوسی در مقابل فروجهش دینامیکی را با انواع بارگذاری‌ها از قبیل حرکت تکیه‌گاه یا حرکت بار عرضی وارده با سرعت ثابت به کمک روش انرژی بررسی کردند، پی و برادفورد نیز در تعدادی مقاله [19-21]، یک تحلیل جامع با استفاده از روش انرژی بر روی رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق و دایروی انجام دادند، آنها در این مقالات به بررسی تیرهای قوسی با تکیه‌گاه‌های مختلف اعم از لولایی،گیردار و لولایی-گیردار، که تحت تأثیر انواع بارهای گرمای یکنواخت و نیروی شعاعی یکنواخت و ناگهانی قرار گرفته بود، پرداختند، ها [22] و همکارانش یک حل دقیق برای تیر قوسی که شکل اولیه و بار اعمالی آن با یک ترکیب خطی از تابع سینوسی معین می‌باشد، ارائه کردند، آنها با استفاده از فضای هیلبرت به حل معادله حرکت پرداخته و نقاط تعادلی را در حالت یک بعدی و دو بعدی بدست آوردند.

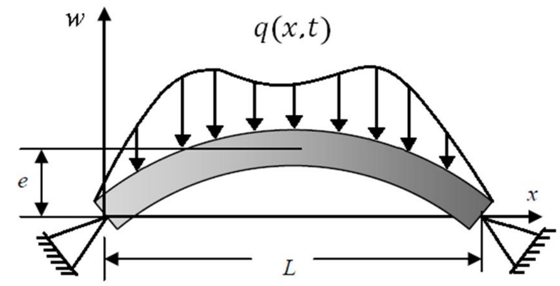
با معرفی مواد مدرج تابعی در سال‌های اخیر و ترکیب آن با بحث تیرهای قوسی، می‌توان سازه‌هایی با مشخصات پایداری مطلوب برای شرایط خاص ایجاد کرد، در این زمینه پژوهش‌هایی صورت گرفته که بیشتر به بحث پایداری استاتیکی پرداخته‌اند، راستگو [23] و همکارانش، نیروی کمانش گرمایی یک تیر خمیده از مواد مدرج تابعی با سطح مقطع متقارن دوجهته با شرایط تکیه‌گاهی لولایی که تحت بارگذاری حرارتی می‌باشد را تعیین کردند، آنها معادلات پایداری را با استفاده از اصل حساب تغییرات بدست آوردند و از روش گلرکین برای حل معادلات پایداری و تعیین نیروی کمانش گرمایی بحرانی استفاده کردند، اکسی و شیرانگ [24] فرضیاتی چون کیرشهف، افزایش طول محوری، انحنای اولیه و کوپل خمش-کشش بر روی تیر قوسی تغییر شکل یافته در نظر گرفته و به‌صورت هندسی معادلات غیرخطی حاکم بر تیرهای قوسی با مواد مدرج تابعی که تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی قرار گرفته بود استخراج کردند و نیروی کمانش بحرانی و شکل مودهای متناظر با تیر قوسی شبه دایروی و دارای تکیه‌گاه‌های گیردار را با روش عددی شوتینگ بدست آوردند، عطایی [25] و همکارانش، یک تیر قوسی کم‌عمق با مواد مدرج تابعی و شرایط تکیه‌گاهی لولایی که تحت بارگذاری یکنواخت عرضی قرار داشت، در نظر گرفتند و نیروی فروجهش را با رویکرد ترکیب روش‌های تحلیلی- عددی بدست آوردند.

بارگذاری اعمال شده ناگهانی توسط تغییرات سریع در مقدار آن مشخص می‌شود که نتایج آن در پاسخ سازه بطور چشمگیری بیشتر از بارگذاری تدریجی با مقدار مشابه است، تغییر در مقدار نیرو به اندازه کافی خواه سریع باشد یا نباشد به‌عنوان بار ناگهانی شناخته شده و بوسیله زمان خیز بار کنترل می‌شود، زمانی که خیز بار کمتر از نیمی از دوره تناوب اصلی سیستم سازه باشد [26] نیرو به‌صورت ناگهانی اعمال شده است، روش‌های انرژی می‌توانند برای تحلیل پایداری دینامیکی سازه‌هایی که تحت بارگذاری ناگهانی قرار گرفته‌اند، از قبیل حالت ضربه یا نیروی ثابت در زمان محدود که در زمان $t = 0$ به سازه بطورناگهانی اعمال شده و در زمان $t > 0$ حذف می‌شود و یا یک نیروی ثابت که در $t = 0$ بطور ناگهانی اعمال شده و اثر آن بر روی سازه باقی می‌ماند، بکار روند.

موضوع این تحقیق بررسی رفتار دینامیکی تیرهای قوسی کم‌عمق با مواد مدرج تابعی است، شکل اولیه در نظر گرفته شده برای تحلیل، فرم سینوسی است که دارای تکیه‌گاه‌های لولایی در دو انتهای تیر می‌باشد و تحت توزیع نیرویی ضربه‌ای قرار گرفته است و مدول الاسیستیه آن تنها می‌تواند در طول ضخامت تیر قوسی متغیر باشد، در ابتدا روابط غیرخطی حاکم بر تیر قوسی کم‌عمق با فرض تیر اویلر برنولی بدست آمده است، رویکرد اتخاذ شده در تحلیل ناپایداری دینامیکی و تحلیل مسأله، استفاده از انرژی کل سیستم و صفحه فازی است، به کمک دیدگاه حاصل از پژوهش‌های صورت گرفته بر روی تیرهای قوسی، مفهوم ناپایداری دینامیکی با یک تعریف واضح و بدون ابهام بیان و همین‌طور با استخراج معیارهای پایداری بسط داده خواهد شد، پایداری دینامیکی سیستم‌های پیوسته با مطالعه رفتار خطوط سیری که بطور مناسب در فضای حالت تابعی تعریف شده، بررسی می‌شود، با توجه به نوع بارگذاری در نظر گرفته شده پارامترهای مورد نیاز تیر قوسی برای پایداری دینامکی در مقابل پدیده فروجهش تعیین خواهد شد، و نشان داده خواهد شد که تغییر در مقدار انحنای اولیه تیر و همین‌طور نحوه تغییرات توزیع ناهمگنی نقش مهمی را در مرز ناحیه پایدار در مقابل فروجهش و میزان نیروهای بحرانی ایفا می‌کنند.

2- فرمول‌بندی مسأله

در شکل 3 یک تیر قوسی با تکیه‌گاه‌های لولایی، که تحت بارگذاری گسترده $q(x,t)$ قرارد دارد نشان داده شده است، مؤلفه x نشـان دهنده مختصه افقی خط مرکز تیر قوسی بوده و مؤلفه z نشان دهنده مختصه یک نقطه روی سطح مقطع تیر قوسی است که فاصله آن مختصه را نسبت به خط مرکز تیر



شکل 3 تیر قوسی کم عمق با بار گذاری غیر یکنواخت

قوسی تعیین می‌کند.

منحنی خط مرکز تیر قبل و بعد از بارگذاری به ترتیب با توابع $w_0(x)$ و $w(x)$ بیان می‌شود، فاصله بین دو تکیه‌گاه تیرقوسی با حرف L و بیشینه مقدار ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی با حرف e نشان داده شده است. برای تیرهای قوسی کم‌عمق نسبت e/L کمتر از 0/35 در نظر گرفته می‌شود [25]. سطح مقطع تیر به‌صورت مستطیلی انتخاب شده و ارتفاع مقطع تیر با حرف h و عرض سطح مقطع تیر b (برابر واحد) در نظر گرفته شده است. جنس تیر از مواد مدرج تابعی است که تنها در راستای ضخامت تیرقوسی متغیر می‌باشد و با رابطه (1) بیان می‌شود.

$$E(z) = E_m\{[-2z/h]^m\,(E_0/E_m - 1) + 1\}\,, m = 1,2,3,\ldots \quad (1)$$

که در آن E_m, E_0 به ترتیب مدول الاستیسیته در لایه های بیرونی و لایه میانی تیر قوسی شکل است، ضریب نسبت ناهمگنی که با حرف γ نشان داده می‌شود، بیانگر ارتباط بین E_m ، E_o می‌باشد و $E_o = \gamma E_m$ است. h ضخامت سازه و m توان چگالی که نشان دهنده میزان تغییر مواد در طول ضخامت لایه مواد مدرج تابعی می‌باشد، تغییر مقدار m حالت‌های بیشماری برای توزیع اجزا سازنده مواد مدرج تابعی تولید می‌کند. در تعیین معادلات حرکت از تئوری تیر اویلر برنولی استفاده شده است، با توجه به اینکه در تیرهای قوسی کم‌عمق شعاع انحنای تیر در مقایسه با عمق تیر بزرگ می‌باشد و از طرفی از آنجا که در تئوری مزبور صفحات عمود بر خط مرکزی پس از بارگذاری نیز نسبت به خط مرکز عمود باقی می‌مانند بنابراین کرنش محوری در راستای ضخامت تیر قوسی به‌صورت خطی تغییر می‌کند، معادله کرنش محوری یک نقطه مادی تیر قوسی شکل با رابطه (2) بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + z\kappa \quad (2)$$

که در آن z مختصه در راستای ضخامت، و κ, ε_0 به ترتیب کرنش محوری و تغییر در انحنای خط مرکزی تیر قوسی شکل هستند [8] که مطابق روابط (3) و (4) عبارتند از:

$$\varepsilon_0 = u' + (w'^2 - w_0'^2)/2 \quad (3)$$

$$\kappa = -(w'' - w_0'') \quad (4)$$

در معادله (3)، u جابجایی محوری خط مرکز تیر قوسی شکل است و جمله دوم سمت راست ناشی از تغییرات در راستای طول تیر قوسی به دلیل خمیدگی خط مرکزی آن می‌باشد، رابطه تنش و کرنش برابر است با $\sigma = E\varepsilon$، بنابراین نیروی محوری داخلی H مطابق رابطه (5) محاسبه می‌شود:

$$H = -\int_A \sigma\, dA = -\int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_0 + z\kappa)E(z)\, dz = -B\varepsilon_0 - C\kappa \quad (5)$$

و همین‌طور ممان خمشی داخلی M که نتیجه توزیع تنش بر روی سطح مقطع تیر قوسی است از رابطه (6) بدست می‌آید:

$$M = -\int_A z\sigma\, dA = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_0 + z\kappa)E(z)z\, dz = -C\varepsilon_0 - D\kappa \quad (6)$$

ضرایب B ، C و D به ترتیب نشان دهنده سفتی معادل محوری، سفتی کوپل محوری- خمشی و سفتی خمشی سطح مقطع مفروض در طول تیر قوسی شکل است که مقدار این ضرایب با استفاده از معادلات (5) و (6)، مطابق رابطه (7) محاسبه می‌شوند:

$$B = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\, dz\ ,\ C = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\ z dz\ ,$$

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\ z^2 dz \quad (7)$$

با استفاده از روابط (3) و (4) در جمله آخر رابطه (5)، با بازنویسی و انتگرال‌گیری از آن در طول تیر قوسی و اعمال شرایط مرزی $u(0) = u(L) = 0$ و حذف متغیر u، رابطه (8) برای نیروی محوری حاصل خواهد شد:

$$H = \frac{1}{L}\int_0^L \left[C(w'' - w_0'') - \frac{B}{2}((w'^2 - w_0'^2)\right]dx \quad (8)$$

معادله حرکت تیر قوسی شکل و شرایط مرزی آن، با استفاده از روش حساب تغییرات به شکل یک معادله دیفرانسیلی- انتگرالی غیرخطی مرتبه چهارم مطابق روابط (9) و (10) بدست می‌آیند:

$$-\left(D - \frac{C^2}{B}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}(w - w_0) - H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q(x,t) = \mu_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ , w = 0\ ,\ \ x = 0, L \quad (9)$$

$$M = \left(\frac{C}{B}\right)H + \left(D - \left(\frac{C^2}{B}\right)\right)(w'' - w_0'') = 0\ , x = 0, L \quad (10)$$

که μ_0 جرم واحد طول افقی تیر قوسی شکل است.

انرژی کلی سیستم (Π) نیز که مجموع انرژی کرنش (U)، انرژی جنبشی (T) و کارانجام شده توسط نیروی خارجی (W) می‌باشد با رابطه (11) محاسبه خواهد شد:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx + \int_V \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dV + \int_0^L q(x,t)(w - w_0)dx \quad (11)$$

3- تبدیل سری فوریه معادله حرکت

مطابق شکل 3 یک تیر قوسی کم‌عمق تحت بار گسترده در نظر گرفته می‌شود، درصورتی که ضریب C صفر باشد می‌توان یک حل فوریه سینوسی برای وضعیت اولیه و شکل نهایی تیر قوسی پس از بارگذاری به‌عنوان پاسخ سیستم در نظر گرفت. از اینرو به‌منظور دست‌یابی به یک پاسخ تحلیلی از بررسی پایداری دینامیکی تیرهای قوسی از مواد مدرج تابعی، با در نظر گرفتن مقادیر زوج برای توان $(m = 2k\ , k = 1,2,\ldots)\ m$ در تابع ناهمگنی معادله (1) ضریب C صفر خواهد شد. با این فرض توزیع ناهمگنی در طول ضخامت تیر قوسی نیز مطابق شکل 4 به‌صورت متقارن خواهد بود، در نتیجه معادله حرکت و شرایط مرزی به‌صورت رابطه (12) ساده خواهد شد:

$$-D\frac{\partial^4}{\partial x^4}(w - w_0) - H\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q(x,t) = \mu_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ ,$$

$$H = \frac{1}{L}\int_0^L \left[-\frac{B}{2}\left(w'^2 - w_0'^2\right)\right]dx \ ,$$
$$w = 0 \ , \ M = D(w'' - w_0'') = 0 \ , \ x = 0, L \qquad (12)$$

ضرایب B و D نیز از رابطه (7) مطابق روابط (13) و (14) محاسبه خواهند شد:

$$B = \frac{hE_m(\gamma + m)}{m+1} = \frac{AE_m(\gamma + m)}{m+1} \ ,$$
$$m = 2k \ , k = 1,2,3, \dots \qquad (13)$$
$$D = \frac{E_m h^3(m + 3\gamma)}{12(m+3)} = \frac{E_m I(m + 3\gamma)}{(m+3)} \ ,$$
$$m = 2k \ , k = 1,2,3, .. \qquad (14)$$

به‌منظور بی‌بعدسازی معادلات، ضرایب B و D به ترتیب به‌صورت $AE_m\bar{B}$ و $IE_m\bar{D}$ در نظر گرفته شده و روابط (15) نیز برای بی‌بعد سازی معادلات حرکت، نیرو و انرژی تعریف می‌شوند:

$$\bar{w} = \frac{w}{2}\left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad \bar{w}_0 = \frac{w_0}{2}\left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$
$$\bar{H} = \frac{HL^2}{\pi^2 E_m I} \ , \qquad \tau = \left(\frac{E_m I \pi^4}{\mu_0 L^4}\right)^{\frac{1}{2}} t \ ,$$
$$\xi = \frac{\pi x}{L} \ , \quad \bar{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{L^4}{\pi^4 E_m I} q \qquad (15)$$

در رابطه (15)، A سطح مقطع تیر قوسی و I ممان اینرسی نسبت به مرکز تیر قوسی است. معادله حرکت در حالت بی‌بعد به‌صورت رابطه (16) بازنویسی می‌شود:

$$-\bar{D}\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}(\bar{w} - \bar{w}_0) - \bar{H}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \bar{q}(\xi, \tau) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} \ ,$$
$$\bar{H} = -\frac{2\bar{B}}{\pi}\int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \xi}\right)^2\right] d\xi \qquad (16)$$

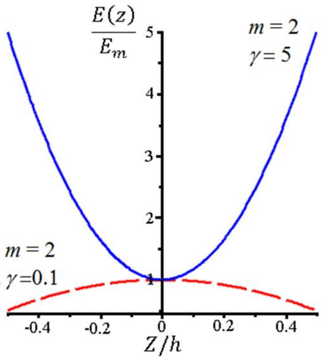
در نتیجه حل فوریه برای شکل اولیه و پاسخ نهایی و بار اعمال شده بر روی تیر قوسی به‌صورت روابط بی‌بعد (17)، (18) و (19) بیان خواهد شد:

$$\bar{w}_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\lambda_n \sin(n\xi) \qquad (17)$$

$$\bar{w}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\lambda_n + \alpha_n)\sin(n\xi) \qquad (18)$$

$$\bar{q}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\tau)\sin(n\xi) \qquad (19)$$

با بکارگیری روابط (17)، (18) و (19) در معادله حرکت (16) و استفاده از تغییر متغیر $d\alpha_n/d\tau = n^2\beta_n$ معادله حرکت به فرم رابطه (20) ساده می‌شود:



شکل 4 توزیع ناهمگنی در جهت ضخامت تیر

$$\frac{d\alpha_n}{d\tau} = n^2\beta_n \ , \quad n = 1,2, \dots$$
$$\frac{d\beta_n}{d\tau} = -\bar{D}n^2\alpha_n + \bar{B}G(\lambda_n + \alpha_n) - \bar{Q}_n(\tau) \ , n = 1,2, \dots$$
$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}{\lambda_n}^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\lambda_n + \alpha_n)^2 \qquad (20)$$

رابطه (20) مختصاتی از توابع فضای حالت را بوجود می‌آورد که جابجایی‌ها و سرعت‌های تعمیم یافته α_n و β_n ... $n = 1,2,$ در آن بکار رفته است و یک دستگاه کامل از معادله حرکت مرتبه اول برای تیر قوسی کم‌عمق فراهم می‌کند.

انرژی کل سیستم در حالت بی‌بعد نیز برحسب مؤلفه‌های α_n و β_n به شکل سری فوریه (21) بیان می‌شود:

$$\bar{\Pi} = \frac{AL^3\Pi}{\pi^4 E_m I^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n^2 + \bar{D}\alpha_n^2 + \frac{2}{n^2}\bar{Q}_n(\tau)\alpha_n\right) + \frac{\bar{B}G^2}{2} \qquad (21)$$

4- ساختار تعادلی و پایداری موضعی

4-1- ساختارهای تعادلی و انرژی آنها

تیر قوسی کم عمق به شکل یک تابع سینوسی ساده که تحت بارگذاری ضربه‌ای[1] بدون نیروی محوری اولیه قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. در این صورت در معادله (20) همه مقادیر λ_n به جز λ_1 برابر صفر خواهد بود. بار ضربه‌ای به ازای τ>0، $\bar{q}(\xi,\tau)$=0 خواهد بود و اثر آن ایجاد یک سرعت اولیه در طول تیر قوسی شکل است. برای تعیین نقـــاط تعادل (بحرانی) کافیست طرف دوم معادله حرکت رابطه (20) برابر صفر قرار داده شود که در نتیجه آن مجموعه روابط معادله (22) بدست خواهد آمد:

$$\beta_n = 0 \qquad n = 1,2, \dots$$
$$\bar{D}\alpha_1 - \bar{B}G(\lambda_1 + \alpha_1) = 0$$
$$\alpha_n(\bar{D}n^2 - \bar{B}G) = 0 \qquad n = 2,3, \dots$$
$$G = -2\alpha_1\lambda_1 - \alpha_1^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\alpha_n^2 \qquad (22)$$

در این صورت همه نقاط بحرانی در زیر فضای جابجایی قرار می‌گیرند زیرا کلیه β_n ها $n = 1,2, ..$ برابر صفر می‌باشند و نقاط بحرانی تنها به ازای مقادیر مختلف α_n ها $n = 1,2, \dots$ بیان می‌شوند، با تعیین ریشه‌های معادله (22) مقادیر نقاط بحرانی مطابق موارد زیر بدست می‌آید:

1- به ازای $0 < \lambda_1 < 2(\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}$، کلیه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$ که تنها نقطه بحرانی موجود در این بازه بوده و نشان دهنده حالت مرجع غیر فشرده یا شکل اولیه تیر قوسی است و تنها وضعیت تعادل استاتیکی می‌باشد. این نقطه بحرانی با حرف p_0 نشان داده می‌شود و به‌عنوان نقطه تعادل ذاتی سیستم شناخته می‌شود.

2- به ازای $2(\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}} \le \lambda_1 \le (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ سه نقطه بحرانی وجود دارد یکی در p_0، دو نقطه دیگر $\alpha_{1^-} = -\frac{1}{2}\left[3\lambda_1 - (\lambda_1^2 - 4\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}\right]$، $\alpha_{1^+} = -\frac{1}{2}\left[3\lambda_1 + (\lambda_1^2 - 4\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}\right]$ و سایر مقادیر $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$ می‌باشد، نقاط بحرانی جدید به ترتیب با $p_1^{(1)}$ و $p_1^{(2)}$ نشان داده می‌شود.

3- به ازای $(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} < \lambda_1 \le (64\bar{D}/7\bar{B})^{\frac{1}{2}}$ ، دو نقطه بحرانی جدید علاوه بر p_0، $p_1^{(1)}$ و $p_1^{(2)}$ بوجود خواهد آمد که در $\alpha_1 = -4\lambda_1/3$ و $\alpha_2 = \pm 4(2\lambda_1^2/9 - \bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}$ قرار دارند و سایر مقـــادیر $\alpha_3 = \alpha_4 = \dots = 0$ هستند که نقاط بحرانی جدید با $p_{1,2}^{(+)}$ و $p_{1,2}^{(-)}$ نشان داده می‌شوند.

1- Implusive Load

4- در حالت کلی به ازای مقدار λ_1 در بازه زیر *2j+1* نقطه بحرانی وجود دارد که با p_0 ، $p_1^{(1)}$ ، $p_1^{(2)}$ ، $p_{1,2}^{(+)}$ ، $p_{1,2}^{(-)}$ ، . . . ، $p_{1,j}^{(+)}$ و $p_{1,j}^{(-)}$ نشان داده می‌شود.

$$\left(\frac{\bar{D}(j^2-1)^2}{\bar{B}\ (j^2-2)}\right)^{\frac{1}{2}} < \lambda_1 \le \left(\frac{\bar{D}((j+1)^2-1)^2}{\bar{B}\ ((j+1)^2-2)}\right)^{\frac{1}{2}} ,j \neq 1 ,j = 2,3, \ldots$$

یک جفت نمونه جدید $p_{1,j}^{(+)}$ و $p_{1,j}^{(-)}$ در $\alpha_1 = -j^2\lambda_1/j^2-1$ و $\alpha_j = \pm j^2\left(\lambda_1^2(j^2-2)/(j^2-1)^2 - \bar{D}/\bar{B}\right)^{\frac{1}{2}}$ قرار دارند و سایر مقادیر $0 = , \cdots = \alpha_{j+1} = \alpha_{j-1} = \cdots = \alpha_3 = \alpha_2$ می‌باشد.

نتایج فوق را در صورتی که مقدار *m=0* ،*γ=1* در نظر گرفته شود برای تیر قوسی کم‌عمق همگن تعمیم داده خواهد شد. در این صورت مقادیر $\bar{D}, \bar{B}$ برابر واحد خواهند بود.

مقدار انرژی نقاط بحرانی نیز از رابطه (21) برابر خواهد بود با:

1- برای نقطه بحرانی P_0 کلیه α_n ها برابر صفر بوده در نتیجه انرژی کل سیستم در این حالت $\bar{\Pi}(P_0) = 0$ خواهد بود.

2- برای نقطه بحرانی $p_1^{(1)}$ که معادل α_1- می‌باشد انرژی کل سیستم برابر رابطه (23) می‌باشد:

$$\bar{\Pi}\left(p_1^{(1)}\right) = \frac{1}{16}\left(3\,\lambda_1 - \left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times\left(2\bar{D} + \bar{B}\lambda_1^2 + \bar{B}\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{23}$$

3- برای نقطه بحرانی $p_1^{(2)}$ که معادل α_1+ می‌باشد انرژی کل سیستم برابر رابطه (24) است:

$$\bar{\Pi}\left(p_1^{(2)}\right) = \frac{1}{16}\left(3\,\lambda_1 + \left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \times\left(2\bar{D} + \bar{B}\lambda_1^2 - \bar{B}\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{24}$$

4- برای نقاط بحرانی $p_{1,j}^{(\pm)}$ که معادل $\alpha_1 ,\alpha_{j^\pm}$ می‌باشد انرژی کل سیستم برابر رابطه (25) است:

$$\bar{\Pi}\left(p_{1,j}^{(\pm)}\right) = j^4\bar{D}\left(\frac{\lambda_1^2}{j^2-1} - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\right) \quad j = 2,3,\ldots \tag{25}$$

در حالت همگن نیز با توجه به واحد بودن $\bar{D}, \bar{B}$ به راحتی میزان انرژی نقاط بحرانی از معادلات فوق بدست می‌آید.

4-2- بررسی پایداری موضعی نقاط بحرانی

تعدادی از نقاط بحرانی بطور موضعی پایدار هستند و برخی دیگر بطور موضعی ناپایدارند که پایداری یا ناپایداری آنها با استفاده از تابع لیاپانوف بررسی می‌شود. در مباحث ارائه شده پایداری موضعی یا پایداری در تعریف لیاپانوف، پایداری تحت تأثیر اختلال کوچک است. انرژی کلی سیستم در ساختار تعادلی به مقدار محدودی می‌رسد، این ساختار زمانی که انرژی کلی کمینه می‌باشد پایدار است و وقتی ناپایدار است که بیشینه باشد. از اینرو انرژی کلی در هر نقطه C واقع در همسایگی کوچک یک ساختار تعادلی p ، همیشه بزرگتر از مقدار انرژی نقطه بحرانی پایدار p است، اما برای ساختار تعادلی ناپایدار چنین نیست. برای بررسی پایداری موضعی یک نقطه تعادلی، تابع لیاپانوف مطابق رابطه (26) تعریف می‌شود:

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p) \tag{26}$$

که در آن C یک نقطه در فضای حالت تابعی است و چگونگی آرایش سیستم را نشان می‌دهد. نقطه p هم یکی از نقاط تعادلی است. مختصات نقطه تعادلی p در فضای حالت به‌صورت:

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i \quad ,i = 1,2, \ldots \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0$$

تعریف می‌شود و برای نقطه C که در همسایگی نقطه بحرانی p قرار دارد مختصات آن به‌صورت:

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \xi_i \ , \ \ i = 1,2, \ldots \ \ , \ \ \beta_n \ ,n = 1,2, \ldots$$

تعریف می‌شود. با جایگذاری مختصات نقاط p و C در تابع لیاپانوف رابطه (27) بدست می‌آید:

$$V(C) = \bar{\Pi}(C) - \bar{\Pi}(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2 + J(C) + O(\xi_i^3) \tag{27}$$

که $J(C)$ مطابق رابطه (28) می‌باشد:

$$\begin{aligned} J(C) = {} & \xi_1^2\Big(\bar{D} + 2\bar{B}\lambda_1^2 + 6\bar{B}\bar{\alpha}_1\lambda_1 + 3\bar{B}\bar{\alpha}_1^2 \\ & +\bar{B}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_n^2}{n^2}\right)\Big) + \xi_1\left(4\bar{B}(\lambda_1 + \bar{\alpha}_1)\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_n\xi_n}{n^2}\right)\right) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\xi_n^2}{n^2}\right)\Big(\bar{D}n^2 + 2\bar{B}\,\lambda_1\,\bar{\alpha}_1 + \bar{B}\bar{\alpha}_1^2 + \frac{2\bar{B}\bar{\alpha}_n^2}{n^2} \\ & +\bar{B}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_j^2}{j^2}\right)\Big) + 2\bar{B}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{j=2 \\ n\neq j}}^{\infty}\left(\frac{\bar{\alpha}_j\xi_j\bar{\alpha}_n\xi_n}{n^2j^2}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

در یک همسایگی به اندازه کافی کوچک از نقطه بحرانی p ، واضح است که $V(C)$ به ازای $\beta_n \ ,n = 1,2, \ldots$ همواره مثبت معین است، بنابراین کافیست فقط مقدار تابع $J(C)$ محاسبه شود. برای اینکه یک نقطه بحرانی دارای پایداری موضعی باشد لازم است $V(C)$ مثبت معین باشد. با این فرض با جایگذاری نقاط بحرانی در رابطه (28) دسته‌بندی زیر حاصل می‌شود:

1- نقطه بحرانی مرجع p_0 همیشه پایدار است و تابع $V(C)$ به ازای کلیه مقادیر پارامترهای وابسته به تیر قوسی شکل مثبت معین می‌باشد.

2- نقطه بحرانی $p_1^{(1)}$ همواره ناپایدار است و تابع $V(C)$ به ازای کلیه مقادیر پارامترهای وابسته به تیر قوسی شکل منفی می‌باشد.

3- نقطه بحرانی $p_1^{(2)}$ همیشه پایدار است و تابع $V(C)$ به ازای کلیه مقادیر پارامترهای وابسته به تیر قوسی شکل مثبت معین می‌باشد.

4- نقطه بحرانی $p_{1,j}^{(\pm)}$ همواره ناپایدار است و تابع $V(C)$ به ازای کلیه مقادیر پارامترهای وابسته به تیر قوسی شکل منفی می‌باشد.

5- بار بحرانی ضربه‌ای برای تعیین پدیده فروجهش دینامیکی

در بحث توصیف ناپایداری فروجهش دینامکی، مفهوم فیزیکی به شرح ذیل مدنظر است: اگر سیستم معادلات حرکت دارای بیش از یک ساختار تعادلی پایدار باشد یک ساختار تعادلی بهینه در میان آنها وجود دارد که دارای کمترین میزان انرژی می‌باشد و ساختار تعادلی ذاتی[1] نامیده می‌شود که در اینجا همان نقطه p_0 است. اگر سیستم تحت تأثیر یک اختلال اولیه یا اعمال نیرویی (ضربه‌ای) قرار گیرد سیستم در نهایت به حالت تعادلی مرجع خود میل خواهد کرد و گفته می‌شود سیستم در مقابل پدیده فروجهش دینامکی پایدار است، اما اگر اختلال یا نیروی اعمال شده به اندازه کافی بزرگ باشد سیستم ممکن است در نهایت به یک ساختار تعادلی پایدار دیگری که متفاوت از این حالت مرجع است جهش کند و این جهش‌های بین ساختارهای تعادلی، ناپایداری فروجهش نامیده می‌شود. برای اینکه این نوع

1- Natural Equilibrium Configuration

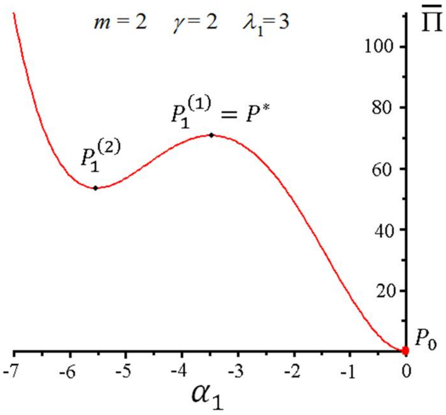
مفهوم پایداری بطور فیزیکی مشهود باشد، حالت تعادلی مرجع الزاماً باید یک حالت پایدار موضعی باشد. برای تعیین نیروی بحرانی با استفاده از تابع لیاپانوف تعریف شده در بخش 2-4 فرمول (26)، $V(C)$ به‌صورت رابطه (29) بیان می‌شود:

$$V(C) = \overline{\Pi}(C) - \overline{\Pi}(p_0) \qquad (29)$$

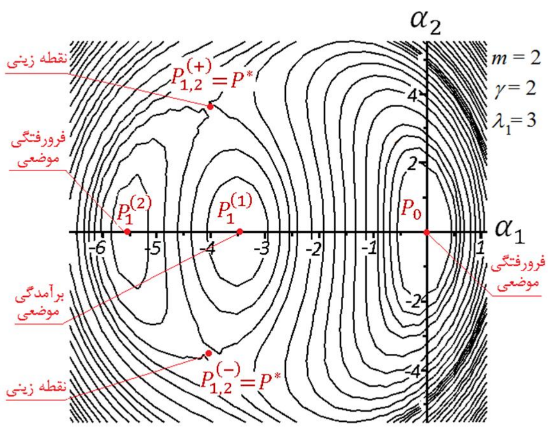
از آنجا که p_0 یک نقطه بحرانی پایدار است تابعی $V(C)$ در همسایگی p_0 الف : مثبت معین ب: از پایین کراندار ج: دارای کران بالای بی‌نهایت کوچک است. در نتیجه تعدادی سطوح تراز بسته $V(C)$ می‌تواند حول p_0 ایجاد شود، همچنین می‌توان سطح تراز را به راحتی با افزایش مقادیر V تاجایی که به نقطه بحرانی دیگری برسد، بسط داد و اولین نقطه بحرانی که از طریق بسط سطح انرژی حول p_0 به آن خواهد رسید p^* نامیده می‌شود. بدیهی است تمام نقاط C درون این سطح تراز که از p^* می‌گذرند در معادله $V(C) < \overline{\Pi}(p^*)$ صدق می‌کنند. در شکل 5 و شکل 6 این موارد برای حالت یک بعدی و دوبعدی نشان داده شده است.

ناحیه درونی سطح تراز (به جز خود سطح) که با $S(p_0)$ نشان داده می‌شود می‌تواند یک ناحیه مناسب برای پایداری در مقابل فروجهش باشد، باین معنی که اگر آرایش اولیه C_0 در زمان $t = 0^+$ درون ناحیه $S(p_0)$ قرارگیرد در نتیجه خط سیر درون $S(p_0)$ باقی خواهد ماند و فروجهش نمی‌تواند رخ دهد، بنابراین شرط پایداری در مقابل فروجهش تحت نیروی ضربه‌ای با استفاده از رابطه $V(C) < \overline{\Pi}(p^*)$ بیان می‌شود.

مطالعه توزیع نقاط تعادل در فضای حالت مرتبط با سطوح تراز $V(C)$ حول نقطه تعادلی ذاتی p_0 برای تیر قوسی کم‌عمق منجر به نتایج زیر درباره



شکل 5 نمودار تابع انرژی بر حسب α_1



شکل 6 شکل کانتورانرژی برحسب مؤلفه های α_1, α_2

نقطه بحرانی p^* خواهد شد:

1- به ازای $0 < \lambda_1 < 2(\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}$، تنها یک ساختار تعادلی موضعی P_0 وجود دارد و p^* دراین بازه وجود ندارد و بنابراین مهم نیست که نیرو چه اندازه بزرگ باشد، تیر قوسی در برابر پدیده فروجهش پایدار است و نیروی بحرانی می‌تواند هر مقداری داشته باشد.

2- به ازای $2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2} \le \lambda_1 \le (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ سه نقطه بحرانی وجود دارد p_0، $p_1^{(1)}$ و $p_1^{(2)}$، با استفاده از نمودار انرژی بر حسب α_1 شکل 5 (سایر مقادیر $\alpha_n, n = 2,3, \ldots$ صفر است) مشخص است که اولین نقطه بحرانی که بسط سطح تراز $V(C)$ حول p_0 برخورد می‌کند، نقطه بحرانی $p_1^{(1)}$ می‌باشد، پس $p_1^{(1)}$، p^* است.

3- به ازای $(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} < \lambda_1 \le (64\bar{D}/7\bar{B})^{1/2}$، بسط سطوح تراز انرژی ممکن است در ابتدا با $p_1^{(1)}$ یا $p_{1,2}^{(+)}$ [1] برخورد کند (شکل 6). یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که $\overline{\Pi}(p_{1,2}^{(+)}) \le \overline{\Pi}(p_1^{(1)})$ است بنابراین در این بازه از λ_1، $p_{1,2}^{(+)}$ همان p^* است. حقیقت امر این است که به ازای همه مقادیر $\lambda_1 > (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$، $\overline{\Pi}(p_{1,2}^{(+)}) \le \overline{\Pi}(p_1^{(1)})$. در نتیجه برای $\lambda_1 > (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$، $p_1^{(1)}$ برای p^* بودن از اعتبار ساقط می‌شود (شکل 7).

4- در حالت کلی و به ازای $\lambda_1 > (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$، می‌توان اثبات کرد که p^* همیشه نقطه بحرانی $p_{1,2}^{(+)}$ است. در واقع برای این بازه λ_1، همواره نامساوی $\overline{\Pi}(p_{1,2}^{(+)}) \le \overline{\Pi}(p_{1,j}^{(\pm)})$ برای تمامی مقادیر $j = 3,4, \ldots$ برقرار است که در شکل 7 نیز نشان داده شده است. برای اثبات این نامساوی کافیست مقادیر نقاط تعادلی $p_{1,2}^{(+)}$ و $p_{1,j}^{(\pm)}$ در رابطه (25) جایگذاری شود، در این صورت زمانی $\overline{\Pi}(p_{1,2}^{(+)})$ کمتر از $\overline{\Pi}(p_{1,j}^{(\pm)})$ خواهد بود که رابطه (30) برقرار باشد:

$$\lambda_1^2 > \frac{3\bar{D}(j^2-1)(j^2+4)}{2\bar{B}(3j^2-4)} \qquad (30)$$

از طرفی $p_{1,j}^{(\pm)}$ زمانی وجود دارد که $\lambda_1^2 > (\bar{D}(j^2-1)^2/\bar{B}\,(j^2-2))$ باشد بنابراین می‌توان رابطه (31) را نوشت:

$$\lambda_1^2 > \left(\frac{\bar{D}(j^2-1)^2}{\bar{B}\,(j^2-2)}\right) > \frac{3\bar{D}(j^2-1)(j^2+4)}{2\bar{B}(3j^2-4)}\ , \quad j = 3,4, \ldots \qquad (31)$$

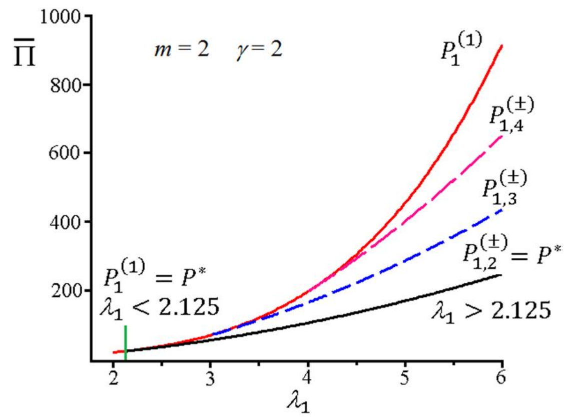
با یک عددگذاری ساده مشخص می‌شود که نامساوی (31) همواره برقرار است، بنابراین نامساوی $V(p_{1,2}^{(+)}) \le V(p_{1,j}^{(\pm)})$ نیز اثبات می‌شود.

بار گسترده $q(x,t) = Q(t)R(x)$ با در نظر گرفتن $Q(t) = F\delta(t)$ به‌عنوان نیروی ضربه‌ای بر روی تیر قوسی عمل می‌کند که F چگالی نیروی ضربه‌ای با دیمانسیون (kg/s) و $\delta(t)$ تابع دلتای دیراک است. اگر نیروی ضربه‌ای با یک توزیع یکنواخت فضایی در نظر گرفته شود در این صورت $\max|R(x)| = 1$ خواهد بود، اثر نیروی ضربه‌ای متناظر با یک اختلال است که توسط نقطه حالت غیر صفر سیستم توصیف می‌شود و مختصات آن جابجایی و سرعت است. تحت نیروی ضربه‌ای $Q(t) = F\delta(t)$ سیستم تیر خمیده سرعت اولیه‌ای بدست می‌آورد که مطابق رابطه (32) محاسبه می‌شود:

$$\int_0^{\Delta t} F\delta(t)dxdt = \mu_0 \frac{\partial w}{\partial t}dx \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{F}{\mu_0} \qquad (32)$$

انرژی جنبشی که تحت تأثیر این بارگذاری بدست می‌آید برابر با رابطه (33)است:

2- یا $p_{1,2}^{(-)}$، با بسط سطح تراز همزمان با $p_{1,2}^{(\pm)}$ مواجه می‌شود.



شکل 7 نمودار انرژی برحسب λ_1 برای نقاط بحرانی مختلف

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{F^2L}{2\mu_0} \tag{33}$$

که مقدار آن در حالت بی‌بعد مطابق رابطه (34) بیان می‌شود:

$$\bar{T} = \frac{AL^4F^2}{2\pi^4\mu_0 E_m I^2} \tag{34}$$

مقدار $\bar{T}$ از رابطه (34) برابر $V(C)$ کل انرژی دریافتی سیستم می‌باشد، از طرفی بار بحرانی ضربه‌ای در حالت بی‌بعد مطابق رابطـه (35) بیان می‌شود:

$$\bar{F} = \frac{A^{1/2}L^2F}{\pi^2(\mu_0 E_m I^2)^{1/2}} \tag{35}$$

و بر اساس شرط پایداری در برابر فروجهش دینامیکی در اثر بار ضربه‌ای که باید $V(C) < V(p^*)$ باشد با استفاده از روابط (23) و (25) با محاسبه $V(p^*)$ بیشینه بار ضربه‌ای به‌صورت روابط (36) و (37) بدست می‌آیند:

$$|\bar{F}| \le \frac{1}{4}\left(3\,\lambda_1 - \left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \times \left(4\bar{D} + 2\bar{B}\lambda_1^2 + 2\bar{B}\lambda_1\left(\lambda_1^2 - \frac{4\bar{D}}{\bar{B}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2} \le \lambda_1 \le (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} \tag{36}$$

$$|\bar{F}| \le 4\left(2\bar{D}\left(\frac{\lambda_1^2}{3} - \frac{\bar{D}}{2\bar{B}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 > (9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2} \tag{37}$$

6- تحلیل پارامترهای مؤثر بر ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی

مرز ناحیه پایدار و ناپایدار در برابر فروجهش، با $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ نشان داده می‌شود، با توجه به وابستگی $\bar{D},\bar{B}$ به γ , m، درشکل 8 نمودار λ_a نسبت به γ به ازای مقادیر مختلف mهای زوج ترسیم شده است. در هر دو نمودار (الف) و (ب) مقدار λ_a از مقادیری کمتر از حالت همگن (که برابر 2) است شروع شده و به مقادیر بیش از حالت همگن صعود می‌کنند. بزرگترین مقدار λ_a به ازای $m = 6$, $\gamma = 10$ حاصل می‌شود و کمترین مقدار نیز به ازای $\gamma = 0.1$, $m = 2$ بدست می‌آید.

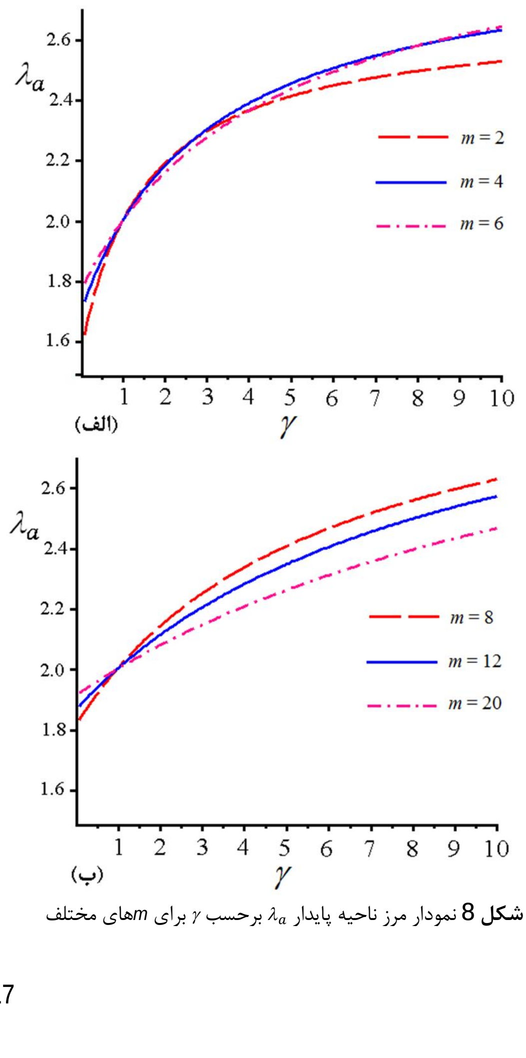
در شکل 9 توزیع ناهمگنی در راستای ضخامت تیر قوسی با استفاده از رابطه (1) به ازای مقادیر m ماکزیمم و مینیمم ترسیم شده است. بررسی نمودار λ_a بر حسب γ شکل 8 و نمودار توزیع ناهمگنی شکل 9 نشان می‌دهد که لزوماً مقدار مـاکزیمم λ_a با بیشینه مقدار توزیع سفتی ارتباط ندارد، چنانچه نسبت $(AE_m\bar{B}/IE_m\bar{D})^{1/2}$ با شعاع ژیراسیون سفتی r_a نشان داده شود در این صورت برای مواد مدرج تابعی $\lambda_a = 4\sqrt{3}r_a/h$ خواهد بود. شعاع ژیراسیون سفتی وابسته به مشخصات هندسی سطح مقطع تیرقوسی، چگونگی تغییر خصوصیات مکانیکی از لایه بیرونی تیر قوسی تا لایه میانی می‌باشد، رابطه عمق اولیه تیر قوسی برابر $e = \lambda_a h/\sqrt{3}$ می‌باشد که در این صورت برای مواد مدرج تابعی برابر $e = 4r_a$ است، در حالی که در حالت همگن به دلیل ثابت بودن مقدار λ_a که برابر 2 می‌باشد عمق اولیه تنها با ضخامت تیر قوسی شکل متناسب است.

با استفاده از مواد مدرج تابعی در تیرهای قوسی در مقادیری از γ,m مقدار λ_a بیشتر یا کمتر از حالت همگن می‌شود، $(1.62 < \lambda_a < 2.65)$ در واقع با بکارگیری ساختار مدرج تابعی می‌توان دامنه‌ای برای تعیین عمق اولیه تیـر قـوسی جهت پایداری در مقـابل فروجهش دینـامیکی متنـاسب با تغییر توزیع ناهمگنی علاوه بر تغییر در ضخامت بدست آورد و این امکان را برای طراح فراهم می‌کند که بسته به نوع کاربرد و فضـای مورد نیـاز از تیرهـای قوسی کم‌عمق‌تر تا عمق بیشتر از حالت همگن بوسیله تغییر توزیع ناهمگنی استفاده کند.

7- تحلیل پارامترهای مؤثر بر میزان بار بحرانی ضربه‌ای

7-1- بررسی بار بحرانی برای حالت همگن

رابطه بار ضربه‌ای برای حالت همگن به ازای مقادیر واحد $\bar{B}$ و $\bar{D}$ از روابط (36) و (37) بدست می‌آید که نمودار آن در شکل 10 ترسیم شده است. در این حالت تنها عامل مؤثر در میزان بار بحرانی بی‌بعد $\bar{F}$، عمق اولیه حالت بی‌بعد تیر قوسی شکل λ_1 است که مطابق نمودار نشان دهنده یک ارتباط



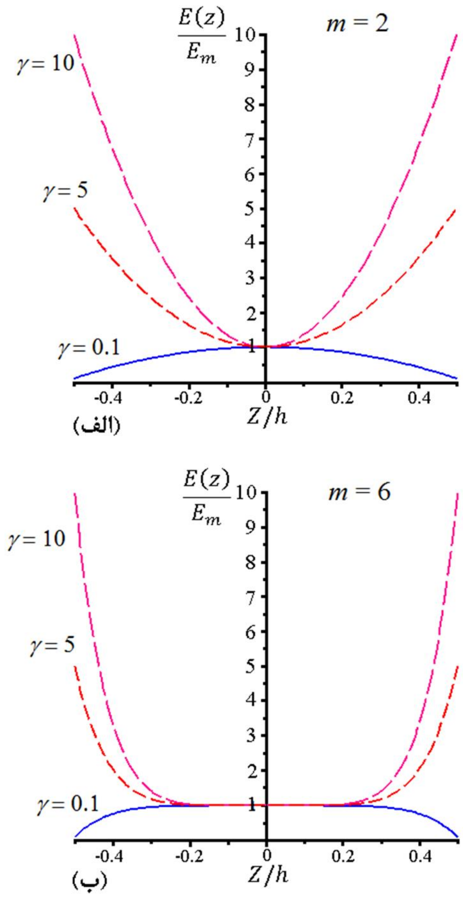
شکل 8 نمودار مرز ناحیه پایدار λ_a برحسب γ برای mهای مختلف

خطی بین بار ضربه ای بحرانی $\bar{F}$ و λ_1 است. این نتایج با نتایج حاصل از [12] منطبق می‌باشد.

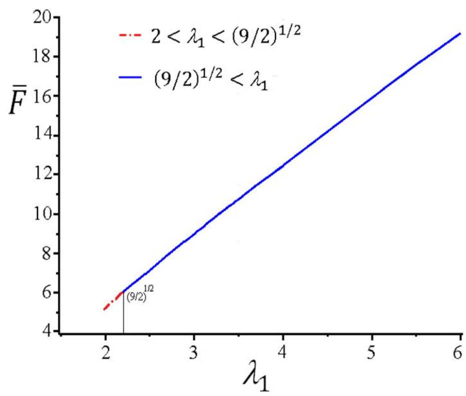
7-2- وابستگی بار بحرانی بی‌بعد $\bar{F}$ به تغییرات γ به ازای مقادیر ثابت m

در شکل 11- الف و ب نمودار $\bar{F}$ بر حسب γ طبق رابطه (37) به ازای $\lambda_1 = 1.5(9\bar{D}/2\bar{B})^{1/2}$ ترسیم شده است. بزرگترین مقدار $\bar{F}$ به ازای $m = 2$, $\gamma = 10$ و کمترین مقدار آن‌هم به ازای $m = 2$, $\gamma = 0.1$ بدست می‌آید. از روی نمودارها مشخص است که روند تغییرات $\bar{F}$ نسبت به γ به‌صورت صعودی است.

با بررسی نمودارهای بار بحرانی $\bar{F}$ بر حسب γ و مقایسه آن با نمودار توزیع ناهمگنی شکل 9 به وضوح مشخص است که حداکثر بار بحرانی در



شکل 9 نمودار توزیع ناهمگنی به ازای مقادیرمختلف m,γ از نمودار λ_a نسبت به γ



شکل 10 نمودار بار بحرانی ضربه ای بر حسب λ_1 برای حالت همگن

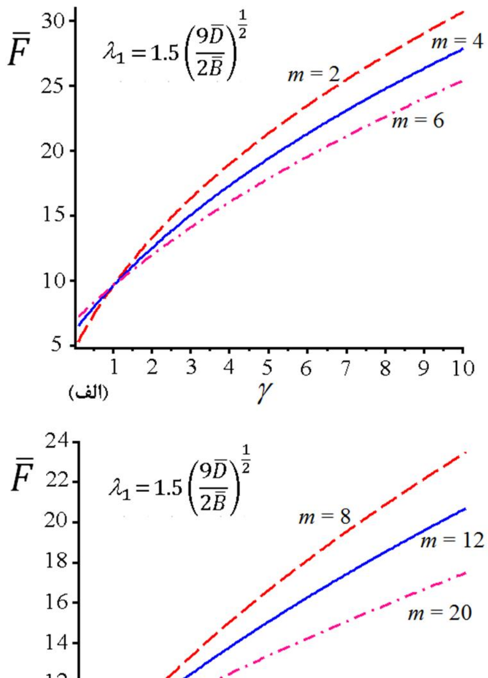
حالت بی‌بعد $\bar{F}$ به ازای بیشینه مقدار $E(z)/E_m$ بدست می‌آید و کمترین مقدار آن نیز در حالت کمینه $E(z)/E_m$ حاصل می‌شود. در واقع برخلاف حالت همگن که میزان بار بحرانی بی‌بعد ارتباطی با خواص مکانیکی آن نداشت در مواد مدرج تابعی، میزان بار بحرانی $\bar{F}$ به توزیع ناهمگنی آن وابسته است. بطوری که در این مواد می‌توان با در نظر گرفتن فرم اولیه یکسان (مقدار λ_1 برابر)، و توزیع ناهمگنی متفاوت (تغییر مقادیر m,γ) بار بحرانی متفاوتی بدست آورد. (با استفاده از شکل 8 مشاهده می‌شود که به ازای λ_1 یکسان مقادیر متفاوتی برای m,γ می‌تواند وجود داشته باشد).

همچنین با مقایسه نمودار بار بحرانی برای مواد مدرج تابعی با مواد همگن مشاهده می‌شود در موارد یکسان برای عمق اولیه تیر قوسی کم‌عمق می‌توان با تعیین مقادیر مناسب از m,γ برای توزیع تابع مدول الاستیسیته، باربحرانی بیشتری را بر تیر قوسی کم‌عمق از مواد مدرج تابعی اعمال کرد تا در برابر فروجهش دینامیکی پایدار باشد. و بالعکس اگر هدف از بکارگیری تیرهای قوسی کم‌عمق استفاده از خاصیت فروجهش آن به ساختار تعادلی دیگر باشد می‌توان با تعیین مقادیر مناسب از m,γ، ساختاری از مواد مدرج تابعی بدست آورد که نیاز به بار بحرانی کمتری از حالت همگن داشته باشد، این نیز یکی از مزایای استفاده از تیرهای قوسی کم‌عمق مدرج تابعی است که دامنه انتخاب‌های طراح را با توجه به نوع کاربرد و مقدار نیروهای وارده افزایش می‌دهد.

8- جمع‌بندی

در این تحقیق نتایج زیر در بررسی پایداری دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق مدرج تابعی با تکیه‌گاه لولایی و تحت بارگذاری ضربه‌ای بدست آمده است.

1- مرز ناحیه پایدار در مقابل فروجهش دینامیکی تیر قوسی کم‌عمق،



شکل 11 نمودار بار بحرانی ضربه‌ای برحسب γ برای mهای مختلف

برای مواد همگن برابر عدد ثابت 2 = λ_a است و مقدار عمق اولیه آن نیز از رابطه $e = 2h/\sqrt{3}$ بدست می‌آید. این مرز برای مواد مدرج تابعی برابر $\lambda_a = 2(\bar{D}/\bar{B})^{1/2}$ می‌باشد و رابطه عمق اولیه تیر قوسی نیز برابر $e = 4r_a$ خواهد بود که متناسب با شعاع ژیراسیون سفتی است و مقدار ماکزیمم یا مینیمم λ_a با بیشینه یا کمینه مقدار توزیع سفتی ارتباطی ندارد. با بکارگیری ساختار مدرج تابعی در تیرهای قوسی کم‌عمق، برخلاف حالت همگن دامنه‌ای برای λ_a وجود دارد که برای طراح این امکان را فراهم می‌کند که با در نظر گرفتن مواد مدرج تابعی یک انتخاب مناسب از ابعاد اولیه تیر قوسی کم‌عمق بسته به نوع کاربرد و فضای مورد نیاز در دست داشته باشد.

2- فقط به ازای $\lambda_1 \geq 2(\bar{D}/\bar{B})^{\frac{1}{2}}$ امکان بروز ناپایداری فروجهش دینامیکی وجود دارد و آن نیز تنها زمانی روی می‌دهد که انرژی دریافتی سیستم توسط بار ضربه‌ای $\bar{F}$ بیش از مقدار انرژی نقطه بحرانی p^* باشد. در غیر اینصورت پدیده فروجهش دینامیکی روی نخواهد داد و سیستم پایدار خواهد بود.

3- در تیرهای قوسی کم‌عمق همگن تنها عامل مؤثر در میزان بار بحرانی $\bar{F}$، پارامتر عمق اولیه تیر قوسی شکل (مقدار λ_1) است که یک ارتباط خطی بین بار ضربه ای بحرانی $\bar{F}$ و λ_1 وجود دارد. در حالیکه در تیرهای قوسی کم‌عمق با مواد مدرج تابعی، میزان بار بحرانی $\bar{F}$ به توزیع ناهمگنی آن وابسته می‌باشد. بطوری که به ازای مقدار λ_1 یکسان برای هر دو حالت همگن و ناهمگن، با انتخاب مقادیر مختلف برای m,γ می‌توان بار بحرانی $\bar{F}$ را به‌مراتب بیشتر از حالت همگن و یا کمتر از آن بدست آورد.

9- فهرست علایم

A	سطح مقطع تیر قوسی (m^2)
b	عرض سطح مقطع تیر قوسی (m)
B	ضریب سفتی معادل محوری سطح مقطع در طول تیر قوسی
C	ضریب سفتی کوپل محوری- خمشی سطح مقطع در طول تیر قوسی
D	ضریب سفتی خمشی سطح مقطع در طول تیر قوسی
e	ارتفاع اولیه مرکز تیر قوسی (m)
E	مدول الاستیسیته ($kgm^{-1}s^{-2}$)
E_o	مدول الاستیسیته لایه های بالا و پایین مقطع تیر قوسی ($kgm^{-1}s^{-2}$)
E_m	مدول الاستیسیته لایه میانی مقطع تیر قوسی ($kgm^{-1}s^{-2}$)
F	بار ضربه‌ای بحرانی (kgs^{-1})
h	ضخامت تیر قوسی در راستای قائم (m)
H	نیروی محوری تیر قوسی ($kgms^{-2}$)
I	ممان اینرسی مقطع تیر قوسی (m^4)
L	فاصله بین دو تکیه گاه تیر قوسی (m)
m	توان چگالی مواد مدرج تابعی
M	گشتاور خمشی (kgm^2s^{-2})
q	بار گسترده بر روی تیر قوسی (Kgs^{-2})
Q	مؤلفه تابع زمانی بار گسترده بر روی تیر قوسی (kgs^{-2})
R	مؤلفه تابع مکانی بار گسترده بر روی تیر قوسی (kgs^{-2})
t	زمان (s)
T	انرژی جنبشی سیستم (j) (kgm^2s^{-2})
u	جابجایی محوری خط مرکزی تیر قوسی (m)
U	انرژی کرنشی سیستم (j) (kgm^2s^{-2})
V	نیروی برشی ($kgms^{-2}$)
w	منحنی خط مرکز تیر قوسی پس از بارگذاری (m)
w_0	منحنی خط مرکز تیر قوسی قبل از بارگذاری (m)
W	کار انجام شده توسط نیروی خارجی (j) (kgm^2s^{-2})
x	مؤلفه افقی خط مرکز تیر قوسی (m)
z	مختصه یک نقطه مادی بر روی سطح مقطع تیر قوسی در جهت قائم (m)

علایم یونانی

α_n	پارامتر تعیین کننده شکل نهایی تیر قوسی بی‌بعد
β_n	پارامتر بی بعد تعیین کننده سرعت تعمیم یافته
γ	نسبت ناهمگنی مواد مدرج تابعی
ε	کرنش محوری یک نقطه مادی
ε_0	کرنش محوری
κ	تغییر انحنای خط مرکزی تیرقوسی (m^{-1})
λ_n	پارامتر تعیین کننده شکل اولیه تیر قوسی بی‌بعد
μ_0	جرم بر واحد طول افقی تیر قوسی (kgm^{-1})
ξ	مؤلفه افقی خط مرکز تیر قوسی بی‌بعد
Π	انرژی کل سیستم (j) (kgm^2s^{-2})
σ	تنش نرمال ($kgm^{-1}s^{-2}$)
τ	متغیر زمان بی‌بعد

10- مراجع

[1] L. N. Virgin, R. B. Davis, Vibration isolation using buckled struts, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 260, pp. 965–973, 2003.

[2] K. V. Avramov, Y. V. Mikhlin, Snap-through truss as a vibration absorber, *Journal of Vibration and Control*, Vol. 10 , No. 2, pp. 291–308, 2004.

[3] V. A. Budginskii, On the use of the snap-through membrane for limitation of dynamical loads, *Mechanics of Solids*, Vol. 4, pp. 44–49, 1989.

[4] Y. C. Fung, A. Kaplan, Buckling of low arches or curved beams of small curvature, *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1952.

[5] J. S. Chen, J. S. Lin, Stability of a shallow arch with one end moving at constant speed, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 5 , pp. 706 – 715, 2006.

[6] S. P. Timoshenko, Buckling of flat curved bars and slightly curved plates, *Asme Journal Applied Mechanics*, Vol. 2, pp. 17–20, 1935.

[7] M. H. Lock, The snapping of a shallow sinusoidal arch under a step pressure load, *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, pp. 1249–1256, 1966.

[8] J. Levitas, J. Singer, T. Weller, Global dynamic stability of a shallow arch by Poincare-like simple cell mapping, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, No. 2 , pp. 411–424, 1997.

[9] N. J. Mallon, R. H. B. Fey, H. Nijmeijer, G. Q. Zhang, Dynamic buckling of a shallow arch under shock loading considering the effects of the arch shape, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 9, pp. 1057 – 1067, 2006.

[10] J. S. Chen, W. C. Ro, Dynamic response of a shallow arch under end moments , *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, No. 1, pp. 321–331, 2009.

[11] Y. Chandra, I. Stanciulescu, L. N. Virgin, T. G. Eason, S. M. Spottswood, A numerical investigation of snap-through in a shallow arch-like model, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, No. 10, pp. 2532–2548, 2013.

[12] C. S. Hsu, On dynamic stability of elastic bodies with prescribed initial conditions, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–21, 1966.

[13] G. J. Simitses, Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures, *Springer-Verlag, New York*, Vol. 398, 1990.

[14] N. J. Hoff, V. G. Bruce, Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches, *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 32, pp. 276–288, 1954.

[15] C. S. Hsu, The effects of various parameters on the dynamic stability of a shallow arch, *Asme Journal of Applied Mechanics*, Vol 34, No. 2, pp. 349–358, 1967.

[16] C. S. Hsu, Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads, *Asme Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, No. 1, pp. 31–39, 1968.

[17] J. S. Chen, J. S. Lin, Dynamic snap-through of a laterally loaded arch under prescribed end motion, *International Journal of Solids and Structures* , Vol. 40, No. 18, pp. 4769–4787, 2003.
[18] J. S. Chen, J. S. Lin, Dynamic snap-through of a shallow arch under a moving point load, *Asme Journal of Vibration and Acoustics,* Vol. 126, No.4, pp. 514–519, 2004.
[19] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear in-plane elastic buckling of shallow circular arches under uniform radial and thermal loading, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 52, No. 1, pp. 75–88, 2010.
[20] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear dynamic buckling of shallow circular arches under a sudden uniform radial load, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 331, No. 18, pp. 4199–4217, 2012.
[21] Y. L. Pi, M. A. Bradford, In-plane stability of preloaded shallow arches against dynamic snap-through accounting for rotational end restraints, *Engineering Structures,* Vol. 56, pp. 1496–1510, 2013.
[22] J. Ha, S. Gutman, S. Shon, S. Lee, Stability of shallow arches under constant load, *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Vol. 58, pp. 120-127, 2014.
[23] A. Rastgo, H. Shafie, A. Allahverdizadeh, Instability of curved beams made of functionally graded material under thermal loading, *International Journal of Mechanics and Materials in Design,* Vol. 2, No.1-2, pp. 117–128, 2005.
[24] S. Xi, L. Shirong, Nonlinear stability of fixed-fixed FGM arches subjected to mechanical and thermal loads, *Advanced materials Research,* Vols.33, pp. 699-706, 2008.
[25] A. A. Atai, M. H. Naei, S. Rahrovan, Limit load analysis of shallow arches made of functionally bi-directional graded materials under mechanical loading, *Journal of mechanical science and technology,* Vol. 26, No. 6, pp. 1811-1816, 2012.
[26] Y. L. Pi, M. A. Bradford, Nonlinear dynamic buckling of pinned–fixed shallow arches under a sudden central concentrated load, *Nonlinear Dynamics,* Vol. 73, No.3, pp. 1289–1306 , 2013.