مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1394، دوره 15، شماره 5، ص‌ص 89-100

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توسعه روش شبکه بولتزمن-رویکرد حجم محدود بر مبنای ایده تابع دایروی در شبیه‌سازی جریان تراکم پذیر غیر لزج در دستگاه منحنی الخط

حامد جلالی[1]، مسعود میرزایی[2*]، صابر خویی[3]

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
2- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
3- کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران
* تهران، صندوق پستی1969764499، mirzaei@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 02 آذر 1393
پذیرش: 11 بهمن 1393
ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلید واژگان:
روش شبکه بولتزمن-حجم محدود
جریان تراکم‌پذیر
روش MUSCL
شبکه D1Q7L2
شبکه منحنی الخط

چکیده

در این مقاله روش شبکه بولتزمن-حجم محدود (FVLBM) برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر غیرلزج یک و دو بعدی در شبکه منحنی‌الخط باسازمان ارائه و توسعه داده شده است. برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر در روش شبکه بولتزمن، از روش جدید تابع دایروی به جای بسط یا تصحیح تابع ماکسول به منظور محاسبه توابع توزیع تعادلی استفاده و روش حجم محدود به همراه روش MUSCL مرتبه-3 در گسسته‌سازی عبارت جابجایی برای بهتر شکار کردن ناپیوستگی‌های جریان بکار گرفته شده است. همچنین با توجه به اینکه گام زمانی در روش شبکه بولتزمن به شدت توسط زمان آرامش (عدد نادسن) محدود می‌شود، در این تحقیق با ارتقای عملکرد روش شبکه بولتزمن توسط یک روش ضمنی-صریح (IMEX) رانگ-کوتای مرتبه-3 برای گسسته‌سازی عبارت زمانی معادله بولتزمن-BGK، دسترسی به گام زمانی بزرگتر میسر و هزینه محاسباتی کاهش یافته است. از طرفی با ارائه یک مدل شبکه جدید D1Q7L2 و صحت‌سنجی آن، دقت شبیه‌سازی افزایش یافته است. بنابراین از روش ارائه شده در این پژوهش، می‌توان در شبیه‌سازی بسیاری از مسائل واقعی مهندسی در حوزه آیرودینامیک به خوبی بهره برد. برای بررسی عملکرد روش ارائه شده چندین مسأله محک گاز دینامیک به همراه چند مسأله کاربردی مهندسی در دستگاه منحنی‌الخط شبیه‌سازی شده است. نتایج عددی با داده‌های تجربی تست تونل باد و حل عددی حجم محدود معادلات اویلر مقایسه و دقت مناسب حاصل گردیده است.

Development of finite volume-lattice Boltzmann method based on circular function idea in simulation of inviscid compressible flow in curvilinear grid system

Hamed Jalali, Masoud Mirzaei*, Saber Khoei

Aerospace Engineering Faculty, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.
* P.O.B. 1969764499 Tehran, Iran, mirzaei@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 November 2014
Accepted 31 January 2015
Available Online 04 April 2015

Keywords:
Finite Volume-Lattice Bloltzmann Method
Inviscid Compressible Flow
MUSCL Scheme
D1Q7L2 Lattice
Curvilinear Grid System

ABSTRACT

In this research, a finite volume-lattice Boltzmann method (FVLBM) for simulation of inviscid compressible flows in 1-D and 2-D structured curvilinear coordinate system is presented. In this simulation, LBM, with new method of circular function instead of expansion or correction of Maxwellian function was implemented for evaluation of equilibrium distribution functions. Moreover, in order to capture discontinuities in the flow field, 3rd order MUSCL scheme was implemented for approximation of convective term. Since in lattice Boltzmann method time step is extremely limited by relaxation time (Knudsen number), performance of FVLBM was improved by employing a third-order IMEX Rung-Kutta scheme for temporal discretization of BGK-model for achieving greater time step and lower CPU time. On the other hand, new D1Q7L2 lattice model is developed and validated and the simulation accuracy is increased. Consequently, the present work can be widely used for simulation of actual engineering problems in aerodynamics. Various gas dynamics benchmark problems and applied engineering unsteady problems in curvilinear coordinate grid are solved for validation. The numerical results of the presented method are compared with experimental dates of wind tunnel tests and the results of FVM Euler solutions; there is good agreement between the results of the present method and those of the references.

1- مقدمه

در یک دهه اخیر روش شبکه بولتزمن به عنوان یک روش جدید در دینامیک سیالات محاسباتی[1] (CFD) برای شبیه‌سازی جریان سیال مورد توجه ویژه قرار گرفته است[1، 2].

در روش شبکه بولتزمن با گسسته‌سازی معادله حاکم جریان سیال در مقیاس مزوسکوپیک[2]-که همان معادله بولتزمن است- دینامیک جریان سیال

1- Computational Fluid Dynamics

2- Mesoscopic Scale

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
H. Jalali, M. Mirzaei, S. Khoei, Development of finite volume-lattice Boltzmann method based on circular function idea in simulation of inviscid compressible flow in curvilinear grid system, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 5, pp. 89-100, 2015 (In Persian)

شبیه‌سازی می‌شود. هنگام حل عددی معادله بولتزمن، می‌توان درست مانند حل عددی معادلات حاکم در مقیاس ماکروسکوپیک[1] یعنی معادلات اویلر یا نویر-استوکس رفتار کرد. اما به علت ویژگی‌های خاص روش شبکه بولتزمن در مقایسه با روش‌های متداول CFD از قبیل قابلیت موازی‌سازی ذاتی، معادله حاکم ساده، دسترسی به حل آسان میدان فشار، مواجه بودن با عبارت خطی جابجایی به جای عبارت غیرخطی متناظر در معادلات اویلر/نویر-استوکس[2]، اعتبار در گستره وسیعی از عدد نادسن، همه و همه باعث روی آوری محققان به این روش شده است. بر همین اساس استفاده از روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر و آشکارسازی پدیده‌های فیزیکی مانند امواج ضربه‌ای و امواج تماسی جذاب خواهد بود. معادله بولتزمن با روش‌های مختلف عددی از قبیل حجم محدود، تفاضل محدود و المان محدود قابل حل است. در سال‌های اخیر تلاش‌های فراوانی برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر به روش شبکه بولتزمن صورت گرفته است. کاربرد روش شبکه بولتزمن استاندارد محدود به تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر می‌باشد، چرا که مدل‌های شبکه بولتزمن بر مبنای عبارت تابع ماکسول در اعداد ماخ کوچک پایه‌ریزی شده است. بنابراین در میان پژوهش‌های جدید در حوزه دینامیک سیالات عددی، تحقیقات فراوانی برای پوشش رژیم‌های جریان گذرصوتی و مافوق صوتی مشاهده می‌شود و تاکنون چندین مدل شبکه بولتزمن برای پوشش جریان‌های تراکم‌پذیر ارائه گردیده است [3-13]. اولین قواعد برخورد ذرات در روش شبکه بولتزمن توسط فریش و همکارانش ارائه شد[3]. الکساندر و همکارانش در سال 1991 روش شبکه بولتزمن را برای جریان تراکم‌پذیر بکار بردند و معادله برگرز[3] را شبیه‌سازی کردند[4]. کونکسو از طریق وارد نمودن یک جمله غیر تعادلی در توابع توزیع ذرات، مدل ساده شده بهاتناگر-گروس-کروک[4] (BGK) را برای جریان لزج تعمیم داد. وی عنوان نمود که نتیجه این کار تقریب دقیق‌تر معادلات ناویر-استوکس می‌باشد و همچنین بیان کرد که این مدل برای حل جریان لایه مرزی و البته برای مدل‌کردن موج ضربه‌ای، مناسب است[5].

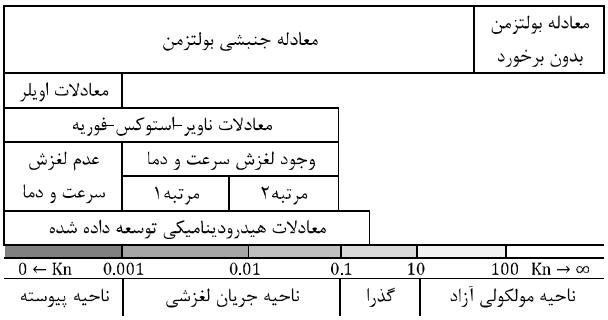
کینگ لی با ارائه روش تابع توزیع دوگانه مدلی برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر ارائه کرد[6]. چنگهای‌سان با افزودن سرعت سیال به سرعت حرکت ذرات روش را به گونه‌ای اصلاح نمود که می‌تواند جریان سیال تراکم‌پذیر را در دامنه وسیعی از اعداد ماخ شبیه‌سازی کند. سان با این روش مسائلی مانند مسأله پخش موج ضربه‌ای و انعکاس آن در اعداد ماخ بزرگ را شبیه‌سازی نمود[7]. چنگهای‌سان و هسو در سال 2003 روش سان را برای جریان‌های سه بعدی توسعه دادند و جریان روی سیلندر داخل یک کانال و جریان گذرصوتی روی NACA0012 را با آن تحلیل کردند[8]. یالینگ هیو و همکاران، در سال 2013 توانستند یک مدل سه بعدی مبتنی بر روش اختلاف محدود روش شبکه بولتزمن در جریان تراکم‌پذیر با رویکرد تابع توزیع دوگانه، را تحلیل کنند[9]. یان‌چن و هیو، یک مدل دو بعدی 9-مؤلفه‌ای همراه با سه سطح انرژی، ارائه دادند. از روی این مدل می‌توان معادلات اویلر را بازیابی کرد. در این روش، مدل شبکه D2Q9 است، اما به علت تعریف دو سطح انرژی مدل به صورت D2Q9L2 معرفی می‌شود[10].

شی و همکارانش نیز یک مدل دو بعدی 9-مؤلفه‌ای که از روی آن معادلات اویلر بازیابی می‌شود، ارائه دادند. در این روش نیز شبکه و تابع توزیع همانند مدل D2Q9 است. ایشان مدل خود را با سه سطح انرژی معرفی کردند و به خوبی توانستند مدل-BGK را با روش تفاضل محدود همراه با روش کاهش مجموع تغییرات[5] (TVD) تحلیل و امواج ضربه‌ای را آشکار سازند[11]. کیو و همکاران روشی جدید و آسان، برای محاسبه توابع توزیع احتمالی f_i^{eq} بدون محدودیت عدد ماخ ارائه کردند[12]. ایشان از یک تابع موسوم به تابع دایروی[6] (CF) در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر استفاده نمودند. آن‌ها به جای اصلاح و توسعه تابع ماکسول که از نقطه نظر عملیات ریاضی یک تابع پیچیده است، استفاده از یک تابع دایروی با فرم بسیار ساده را پیشنهاد دادند. این روش یک روش بسیار مؤثر برای ارائه مدل‌های جدید شبکه می‌باشد.

در این مقاله از روش تابع دایروی برای محاسبه توابع توزیع احتمالی استفاده شده است تا محدودیت روش استاندارد شبکه بولتزمن برطرف شود و بتوان به وسیله آن جریان تراکم‌پذیر غیرلزج را به خوبی شبیه‌سازی نمود. از طرفی چنانچه، روش حجم محدود[7] (FVM) روشی بر مبنای حفظ قوانین بقای فیزیکی است. به علت همین ویژگی در نظر اول این روش، برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر که معمولاً همراه با ناپیوستگی‌هایی چون موج ضربه‌ای و ناپیوستگی تماسی هستند، مطلوب می‌باشد. در این مقاله، با استفاده از روش حجم محدود در تحلیل عددی معادله بولتزمن، عدم انعطاف‌پذیری روش شبکه استاندارد بولتزمن نسبت به شبکه‌های پیچیده و منحنی‌الخط برطرف شده است. همچنین تاکنون روش‌های مختلفی برای گسسته‌سازی عبارت جابجایی در معادلات اویلر/نویر-استوکس از قبیل روش یکنواخت به سمت باد-مرکزی برای قوانین بقا[8] (MUSCL)، روش الزاما بدون نوسان[9] (ENO)، روش TVD و غیره ارائه شده است و به صورت گسترده برای آشکارسازی امواج ضربه‌ای بدون نوسان در حل عددی معادلات اویلر از آن‌ها استفاده می‌شود. در نتیجه، با استفاده از روش MUSCL مرتبه-3، عبارت جابجایی خطی معادله بولتزمن-BGK گسسته‌سازی می‌شود. به علاوه، با بکارگیری یک روش ضمنی-صریح رانگ-کوتا[10] مرتبه-3 برای گسسته‌سازی ترم زمانی، روش شبکه بولتزمن توسعه داده شده و ازین رو دستیابی به گام زمانی بزرگتر میسر شده است. در ادامه یک مدل شبکه یک بعدی جدید ارائه و با مدل قبلی مقایسه و دقت بهتر بدست آمده است. از کار حاضر، به خوبی می‌توان در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر، در زمینه‌های مختلف آیرودینامیک بهره برد. به علت قابلیت روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان در دامنه وسیعی از عدد نادسن[11] بر خلاف معادلات ناویر-استوکس یا اویلر که در ناحیه اعداد نادسن بزرگ معتبر نیست (شکل 1)، تحقیق حاضر در دو زمینه صنعتی کاربرد عملی دارد؛ ابتدا در شبیه‌سازی جریان‌های اصطلاحاً کم-چگالی به عنوان مثال شبیه‌سازی جریان پیرامون اجسام بازگشت به جو در ارتفاعات بالا که در اعداد نادسن بزرگ (1~10) حرکت می‌کنند، و همان‌طور که واضح است، ضرایب آیرودینامیکی برای کنترل این نوع اجسام در جو رقیق بسیار حیاتی و مهم است. دوم؛ در شبیه‌سازی جریان در مقیاس میکرو، مانند میکرو کانال‌ها، میکرو کمپرسورها، میکرو-نازل‌ها، میکرو-پرنده‌ها و غیره چرا که در این موارد نیز به علت کوچک بودن بعد مشخصه (و نه بخاطر بزرگی طول پویش آزاد مولکولی[12]) عدد نادسن به سمت جریان مولکولی آزاد (ناپیوسته) میل می‌کند و بنابراین به عنوان مثال در یک میکرو کمپرسور عملاً نیاز به تحلیل جریان تراکم‌پذیر غیرلزج (که موضوع اصلی این مقاله است) وجود دارد.

1- Macroscopic scale
2- Euler/Navier-Stoks Equations
3- Bergures Equation
4- Bhatnagar-Gross-Krook (Bgk)

5- Total Variation Diminishing (Tvd)
6- Circular Function (Cf)
7- Finite Volume Method (Fvm)
8- Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws (Muscl)
9- Essentially Non-Oscillatory Scheme (Eno)
10- Implicit-Explicit Runge-Kutta Scheme(Imex Rk)
11- Knudsen Number
12- Mean Free Path



شکل 1 محدوده اعتبار معادلات حاکم بر جریان بر حسب توزیع عدد نادسن[13]

2- مدل عددی

معادله استاندارد شبکه بولتزمن تنها برای جریان‌های کم سرعت (تراکم‌ناپذیر) معتبر می‌باشد [8]. بنابراین به ناچار این روش برای پوشش جریان‌های تراکم‌پذیر نیاز به تصحیح دارد. در ابتدا به محاسبه توابع توزیع تعادلی و سپس به بیان نحوه گسسته‌سازی معادله بولتزمن پرداخته خواهد شد.

2-1- تابع دایروی

توابع توزیع تعادلی در روش استاندارد، توسط معادله ماکسول بدست می‌آیند:

$$g(\xi) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{\frac{K+D}{2}}} \exp\left[\frac{(\xi-u)^2 + \sum_{i=1}^{K}\xi_i^2}{2RT}\right] \quad (1)$$

ایده تابع دایروی بجای بسط و توسعه تابع ماکسول ارائه شد تا از پیچیدگی اصلاح این تابع برای اعداد ماخ بزرگ جلوگیری شود. باید توجه داشت که عملاً تابع ماکسول نمی‌تواند در شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر مورد استفاده قرار گیرد، به علت اینکه این تابع برای مولکول‌های دو-اتمی یا چند-اتمی، درجه آزادی چرخشی[1] را در نظر نگرفته است. بنابراین استفاده از یک تابع ساده پیشنهاد می‌شود که در بردارنده همه درجات آزادی مولکول باشد. این تابع برای مسائل دوبعدی، به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود[14]:

$$g_c = \begin{cases} \frac{\rho}{2\pi c} & \text{اگر } \|\xi-u\| = c \equiv \sqrt{D(\gamma-1)e} \\ & \text{و } \lambda = e_p = \left[1-\frac{D}{2}(\gamma-1)\right]e \\ 0 & \text{سایر} \end{cases} \quad (2)$$

که در آن ξ سرعت ذره، λ انرژی داخلی یا پتانسیل ذره و c سرعت ویژه ذره سیال است. همچنین، u سرعت متوسط جریان، e انرژی داخلی متوسط جریان، γ نسبت حرارتی ویژه گاز و D بعد فضا می‌باشد. به عنوان مثال اگر $D = 1$ باشد، بیانگر مسأله یک بعدی است و در آن عبارت $\rho/2\pi c$ با $\rho/2$ جایگذاری می‌شود. انرژی داخلی جریان برابر است با $e = p/(\gamma-1)\rho$. تعبیر فیزیکی تابع دایروی به این صورت است که جرم، مومنتم و انرژی ویژه در تمام ذرات، بر یک دایره مطابق شکل 2، متمرکز می‌شوند. با وجود اینکه این تابع بسیار ساده به نظر می‌رسد، اما قادر است تمام قیود بقا را ارضا نماید. چگالی متمرکز برای هر سرعت گسسته می‌تواند توسط رابطه (3) و با استفاده از یک تابع وزن بدست آید:

$$\bar{\rho}_\alpha = \frac{\rho}{2\pi c}\oint \varphi_\alpha(\xi,\lambda)ds \quad (3)$$

می‌توان تضمین کرد که تابع وزن $\varphi_\alpha(\xi,\lambda)$، تمام قیود بقا را برآورده می‌کند [14]. در نتیجه، $\bar{\rho}_\alpha$ می‌تواند به جای توابع توزیع تعادلی استفاده شود. حال می‌توان تمام توابع توزیع تعادلی را توسط یک مجموعه چند جمله‌ایی میانیاب لاگرانژی[2] بدست آورد، چرا که این چندجمله‌ای تمام مقیود تابع وزن را ارضا می‌کند. برای سادگی می‌توان با جداسازی دو سطح انرژی به صورت λ_0 و λ_1، تابع وزن را فقط تابع سرعت ذرات در نظر گرفت، یعنی $\varphi_\alpha(\xi)$ و در ادامه با در نظر گرفتن یک چندجمله‌ای لاگرانژی مرتبه-3 با 13 جمله، یک شبکه دو بعدی مانند D2Q13L2 ارائه داد و به طریق مشابه یک شبکه یک بعدی با 5 سرعت گسسته مانند D1Q5L2 پیشنهاد کرد [14] (شکل (3)). پس از جداسازی سطوح انرژی تابع وزن برای هر کدام از سطوح انرژی به صورت رابطه (4) مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha1}(\xi,\lambda) = (1-\lambda)\varphi_\alpha(\xi) & \text{برای } \lambda_1 = 0 \\ \varphi_{\alpha2}(\xi,\lambda) = \lambda\varphi_\alpha(\xi) & \text{برای } \lambda_2 > e_p \end{cases} \quad (4)$$

با توجه به تابع $\varphi_{\alpha v}(\xi,\lambda)$ توابع توزیع تعادلی $f_{\alpha v}^{eq}$، به صورت معادله (5) محاسبه می‌شوند:

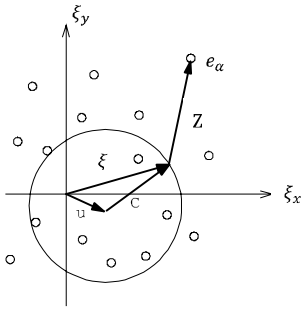
$$f_{\alpha v}^{eq} = \frac{\rho}{2\pi c}\oint \varphi_{\alpha v}(\xi,\lambda)ds \quad (5)$$

که در آن $v = 1,2$ است. به علت ساده بودن تابع دایروی، معادله (5) به صورت تحلیلی انتگرال‌گیری می‌شود. روند فرمولاسیونی که در بالا ارائه شد به راحتی قابل دستیابی است. توابع توزیع تعادلی بدست آمده توسط این روش دیگر هیچ‌گونه محدودیت عدد ماخ را ندارند و به راحتی می‌توان از آن‌ها برای شبیه‌سازی جریان‌های غیرلزج زیرصوت، گذرصوتی، مافوق صوت و حتی ماورای صوت استفاده نمود [14].

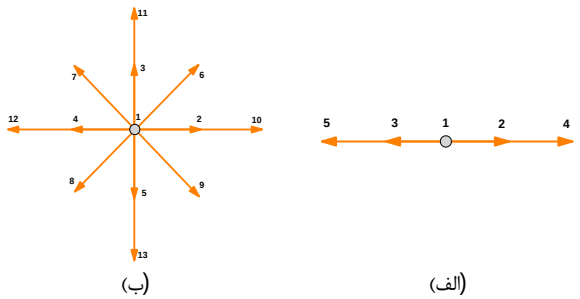
2-2- ارائه مدل شبکه جدید

استفاده از یک تابع وزن در نسبت دادن یک متغیر به چندین نقطه به طور گسترده در روش‌های ذرات، مانند روش ذره در سلول[3]، روش گردابه[4]، و روش گردابه در سلول[5] مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر یک چند جمله‌ای میانیابی لاگرانژی یک-بعدی با 7 عبارت مانند رابطه (6) در نظر گرفته شود:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \quad (6)$$



شکل 2 شماتیک تابع دایروی [14]

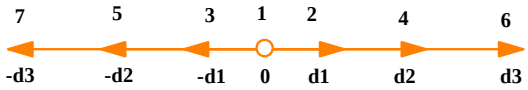


(ب) (الف)

شکل 3 شبکه‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی مرجع [14]، (الف) D1Q5L2، (ب) D2Q13L2.

1-Rotational Degrees of Freedom
2- Lagrangian Interpolation Polynomial

3- Particle in Cell Method
4- Vortex Method
5- Vortex in Cell Method



شکل 4 شبکه جدید D1Q7L2

جدول 1 مختصات شبکه D1Q7L2

شمارنده ذره	مختصات
1	0
2	0/66
3	-0/66
4	1/33
5	-1/33
6	2/0
7	-2/0

این چند جمله‌ای 7-نقطه‌ای می‌تواند برحسب تابع وزن به فرم معادله (6) و به صورت معادله (7) نوشته شود:

$$\varphi_i(x) = [a_i][t] \tag{7}$$

که در رابطه (7)، دو ماتریس سمت راست به صورت روابط (8) بیان می‌شود:

$$[a_i] = [a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,7}],\quad [t] = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

حال اگر بردار ضرایب a_i مشخص شود توابع میانیابی یا همان توابع وزن مشخص خواهند شد. از طرفی $\varphi_i(x)$ یک چند جمله‌ای میانیاب لاگرانژی است که دارای خاصیت δ است که به صورت رابطه (9) بیان می‌شود:

$$\varphi_i(x) = \delta_{i,j}, i, j = 1,2, \dots, 7 \tag{9}$$

دستگاه معادلات موجود در رابطه (7) می‌تواند در فرم ماتریس-برداری به صورت معادله (10) نوشته شود:

$$[A][T] = [I] \tag{10}$$

فرم عمومی ماتریس ضرایب و ماتریس مجهولات در رابطه (11) آمده‌است:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,7} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,7} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{7,1} & a_{7,2} & \dots & a_{7,7} \end{bmatrix},\quad [T] = [t(x_1), t(x_2), \dots, t(x_7)] \tag{11}$$

$[I]$، بردار همانی و (x_i) مختصات هر سرعت گسسته شبکه است. در این تحقیق با در نظر گرفتن 7-سرعت گسسته یک شبکه متقارن یک-بعدی مانند شکل 4 با مختصات سرعت ارائه شده در جدول 1 ارائه خواهد شد. با حل دستگاه (6) (همان‌طور که مشاهده می‌شود ماتریس $[A]$ معکوس ماتریس $[T]$ است) بردار ضرایب بدست خواهد آمد و بواسطه آن توابع وزن از رابطه (7) محاسبه خواهد شد. سپس با استفاده از رابطه (4) و (5) و با یک انتگرال‌گیری تحلیلی توابع توزیع تعادلی به راحتی محاسبه می‌شود.

این توابع توزیع دیگر هیچ‌گونه محدودیت برای عدد ماخ ندارند و برای شبیه‌سازی جریان تراکم‌پذیر غیرلزج مورد استفاده قرار خواهند گرفت. به عنوان مثال تابع وزن برای مؤلفه 1 و توابع توزیع تعادلی بدست آمده برای مؤلفه‌های 1 و 5 به ترتیب به صورت روابط (12) تا (14) خواهد بود:

$$\varphi_1 = 1 - \frac{(d_1^2d_2^2 + d_1^2d_3^2 + d_2^2d_3^2)x^2}{d_1^2d_2^2d_3^2} + \frac{(d_1^2 + d_1^2 + d_3^2)x^4}{d_1^2d_2^2d_3^2} - \frac{x^6}{d_1^2d_2^2d_3^2} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_1^{\mathrm{eq}} = -\frac{1}{d_1^2d_2^2d_3^2}((&c^6 + 15c^4u^2 - c^4d_1^2 - c^4d_2^2 - c^4d_3^2 \\ &+ 15c^2u^4 - 6c^2u^2d_1^2 - 6c^2u^2d_2^2 \\ &- 6c^2u^2d_3^2 + c^2d_1^2d_2^2 + c^2d_1^2d_3^2 + c^2d_2^2d_3^2 \\ &+ u^6 - u^4d_1^2 - u^4d_2^2 - u^4d_3^2 + u^2d_1^2d_2^2 \\ &+ u^2d_1^2d_3^2 + u^2d_2^2d_3^2 - d_1^2d_2^2d_3^2)\rho) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_5^{\mathrm{eq}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{d_2^2(d_1^2d_2^2 - d_1^2d_3^2 - d_2^4 + d_2^2d_3^2)}((&c^6 + 15c^4u^2 \\ &- 5c^4ud_2 - c^4d_1^2 - c^4d_3^2 + 15c^2u^4 \\ &- 10c^2u^3d_2 - 6c^2u^2d_1^2 - 6c^2u^2d_3^2 \\ &+ 3c^2u\,d_1^2d_2 + 3c^2ud_1^2d_2 + c^2d_1^2d_3^2 + u^6 \\ &- u^5d_2 - u^4d_1^2 - u^4d_3^2 + u^3d_1^2d_2 \\ &+ u^3d_2d_3^2 + u^2d_1^2d_3^2 - ud_1^2d_2d_3^2)\rho) \end{aligned} \tag{14}$$

به علت طولانی بودن روابط از آوردن همه روابط در این مقاله خودداری می‌شود، چرا که روند محاسباتی توابع با یک متن کوتاه در نرم افزار میپل یا متمتیکا به راحتی قابل حصول است. این شبکه نسبت به شبکه D1Q5L2 که توسط کیو وهمکارانش ارائه شد [14] دارای دو سرعت گسسته بیشتر است و انتظار می‌رود که دقت بیشتر در تحلیل ارائه دهد.

3- روش شبکه بولتزمن-حجم محدود

به منظور استفاده از روش حجم محدود، معادله بولتزمن-BGK بی‌بعد در فرم بقایی و در فضای دو بعدی به شکل معادله (15) می‌باشد:

$$\frac{\partial \check{f}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \check{F}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \check{G}_\alpha}{\partial y} = \check{\Omega}_\alpha,\ \check{\Omega}_\alpha = -\frac{\check{f}_\alpha - \check{f}_\alpha^{\mathrm{eq}}}{\check{\tau}} \tag{15}$$

که در آن α نمایشگر سرعت‌های گسسته شبکه مورد نظر، $\check{f}$ تابع توزیع چگالی، $\check{\Omega}$ تابع برخورد، $\check{f}_\alpha^{\mathrm{eq}}$ تابع توزیع تعادلی، $\check{\tau}$ زمان آرامش یا همان عدد نادسن، $\check{F}$ و $\check{G}$ به ترتیب نشانگر عبارت شار جابجایی در دو راستای دستگاه مختصات می‌باشند. فرم گسسته حجم محدود معادله (15) به شکل معادله (16) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \check{f}_{\alpha,i,j}^{n+1} = \check{f}_{\alpha,i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\forall_{i,j}}\Big\{&\Big(\check{F}^n_{\alpha,i+\frac{1}{2}j}\Delta s_{i+\frac{1}{2}j} + \check{F}^n_{\alpha,i-\frac{1}{2}j}\Delta s_{i-\frac{1}{2}j}\Big) \\ &+ \Big(\check{G}^n_{\alpha,i,j+\frac{1}{2}}\Delta s_{i,j+\frac{1}{2}} + \check{G}^n_{\alpha,i,j-\frac{1}{2}}\Delta s_{i,j-\frac{1}{2}}\Big)\Big\} + \Delta t\check{\Omega}_{\alpha,i,j} \end{aligned} \tag{16}$$

که در این رابطه i,j بیانگر مراکز سلول، $\forall_{i,j}$ نمایانگر حجم سلول (برای فضای دو بعدی، سطح) و $\check{G}_{\alpha,i,j\pm1/2}$ و $\check{F}_{\alpha,i\pm1/2,j}$ شارهای عددی عبوری از سطوح سلول و Δs بیانگر مساحت سطوح سلول می‌باشد. رابطه (16) برای هر سلول عمومیِ شبکه باسازمان مانند شکل 5 معتبر است. برای یک شبکه مستطیلی خالص رابطه گسسته شده به صورت معادله (17) ساده خواهد شد:

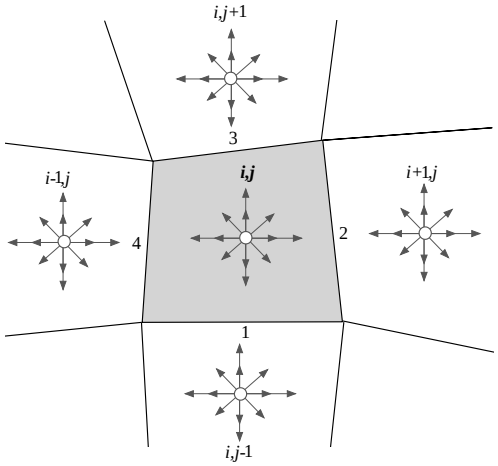
$$\begin{aligned} \check{f}_{\alpha,i,j}^{n+1} = \check{f}_{\alpha,i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[\check{F}^n_{\alpha,i+\frac{1}{2}j} - \check{F}^n_{\alpha,i-\frac{1}{2}j}\Big] \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y}\Big[\check{G}^n_{\alpha,i,j+\frac{1}{2}} - \check{G}^n_{\alpha,i,j-\frac{1}{2}}\Big] + \Delta t\check{\Omega}_{\alpha,i,j} \end{aligned} \tag{17}$$

شارهای عددی می‌توانند توسط حلگر ریمان و با روش‌های متداول میانیابی محاسبه شوند. نکته بسیار مهم اینکه در شبیه‌سازی عددی جریان تراکم‌پذیر، پخش عددی[1] یا پخش عددی مورد نیاز برای آشکارسازی امواج ضربه‌ای از دو راه به حل عددی اعمال می‌شود، اول از طریق مدل (معادلات) بکاربرده شده جهت حل جریان، که دقیقاً همان معادلات حاکم است. در این تحقیق مدل بکاربرده شده، معادله بولتزمن-BGK است که از تراز[2] $O(\varepsilon)$ می‌باشد. دوم از طریق روش عددی که اختیار می‌شود. لزجت مدل استفاده شده به ε باز می‌گردد (که ε همان عدد نادسن است)، و از آنجا که مدل غیرلزج است، ε در آن خیلی کوچک می‌باشد. بنابراین اتلاف مدل به اندازه‌ای نیست که با آن بتوان ناپیوستگی‌های جریان را آشارسازی کرد.

3-1- گسسته‌سازی عبارت مکانی

برای تخمین مقادیر شار عبوری از سطوح سلول، از مقادیر مرکز سلول استفاده و میانیابی صورت می‌گیرد. روش‌های زیادی از قبیل TVD، MUSCL، ENO و غیره برای میانیابی وجود دارد.

1- Numerical Dissipation
2- Order



شکل 5 حجم محدود دو-بعدی و عمومی باسازمان

در این تحقیق این مقادیر را توسط روش MUSCL مرتبه-3 همراه با هموار کننده حدی[1] به منظور میانیابی مقدار $\check{f}$ بر روی دو طرف سطح تماس سلول به شکل معادله (18) بدست می‌آید

$$\check{F}^{n}_{\alpha,i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} (\check{f}_L)_{\alpha,i+\frac{1}{2},j}\left(e_\alpha \cdot N_{i+\frac{1}{2},j}\right) & \text{اگر } \left(e_\alpha \cdot N_{i+\frac{1}{2},j}\right) \geq 0 \\ (\check{f}_R)_{\alpha,i+\frac{1}{2},j}\left(e_\alpha \cdot N_{i+\frac{1}{2},j}\right) & \text{اگر } \left(e_\alpha \cdot N_{i+\frac{1}{2},j}\right) \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

که در آن $N_{i+\frac{1}{2},j}$ بردار عمود بر سطح $i+1/2,j$ است و ضرب داخلی آن با سرعت‌های فازی مد نظر است، همچنین $\check{f}_L$ و $\check{f}_R$ به ترتیب توابع توزیع سمت چپ و راست این سطح می‌باشند. این توابع به صورت معادله (19) قابل محاسبه‌اند:

$$(\check{f}_L)_{\alpha,i+\frac{1}{2},j} = \check{f}_{\alpha,i,j} + \left\{\frac{S}{4}[(1-ks)\Delta_- + (1+ks)\Delta_+]_i\right\},$$
$$(\check{f}_R)_{\alpha,i+\frac{1}{2},j} = \check{f}_{\alpha,i+1,j} - \left\{\frac{S}{4}[(1-ks)\Delta_+ + (1+ks)\Delta_-]_{i+1}\right\} \quad (19)$$

پارامتر k می‌تواند مقادیر متفاوتی با توجه به دقت میانیابی مورد نیاز داشته باشد. به عنوان مثال اگر $k = 1/3$ باشد یک میانیابی سه نقطه‌ای با مرتبه-3 می‌باشد. حال اگر مقدار آن برابر 0 یا 1− قرار داده شود، یک روش بسمت باد[2] مرتبه-2 می‌شود و اگر به آن مقدار 1 داده شود، روش به یک روش مرکزی ساده تبدیل خواهد شد. در عمل مقادیر $k = 1/3$ و $k = 0$ متداول‌ترند. پارامتر s تابع حدی ون البادا[3] نام دارد[15].

$$s = \frac{2\Delta_+\Delta_+ + \epsilon^2}{\Delta_+^2 + \Delta_-^2 + \epsilon} \quad (20)$$

ϵ در معادله (20)، یک عدد کوچک (در حدود 10^{-6}) است که از تقسیم بر صفر شدن در ناحیه بدون گرادیان جلوگیری می‌کند، و همچنین تفاضلات متناهی به صورت رابطه (21) محاسبه می‌شود

$$(\Delta_+)_i = \check{f}_{\alpha,i+1,j} - \check{f}_{\alpha,i,j},$$
$$(\Delta_-)_i = \check{f}_{\alpha,i,j} - \check{f}_{\alpha,i-1,j} \quad (21)$$

بنابراین شار عددی تمام سطوح سلول به صورت مشابه محاسبه خواهد شد.

3-2- گسسته‌سازی عبارت زمانی

در روش شبکه بولتزمن به علت وجود پارامتر زمان آرامش در عبارت برخورد، گام زمانی در حل صریح معادله به شدت محدود می‌شود. کیو با استفاده از روش اویلر پیشرو عبارت زمانی را گسسته‌سازی کرد [14] که زمان اجرای پردازنده کامپیوتر برای این روش زیاد می‌باشد و در واقع برای یک مسأله عملی با تعداد شبکه زیاد پر بازده نخواهد بود. در روش صریح معمولی، گام زمانی بدون بعد، برابر $\Delta\check{t} = 1/4\check{\tau}$ در نظر گرفته شده است تا عدد کرانت-فردریچس-لی[4] (CFL) کمتر از 1 باشد و حل پایدار باقی بماند. در پژوهش حاضر، برای ارتقای عملکرد روش شبکه بولتزمن-حجم محدود از روش ضمنی-صریح رانگ-کوتای مرتبه-3 استفاده می‌شود. با استفاده از این روش می‌توان گام زمانی را افزایش و هزینه محاسباتی را کاهش داد. بنابراین روش ضمنی بر عبارت زمان آرامش و روش صریح بر دیگر عبارت‌های معادله بولتزمن، اعمال خواهد شد. در این صورت مرحله صریح مطابق معادله (22) می‌شود:

$$\check{f}_\alpha^{(j)} = \frac{1}{1+\frac{\Delta t}{\check{\tau}^{(j)}}[a]_{jj}}\left\{\check{f}_{\alpha,i,j} - \Delta t\sum_{k=1}^{j-1}[\bar{a}]_{jk}\left(e_\alpha \cdot \nabla\check{f}_\alpha^{(k)}\right) - \Delta t\sum_{k=1}^{j-1}[a]_{jk}\check{\Omega}_\alpha^{(k)} + \frac{\Delta t}{\check{\tau}^{(j)}}[a]_{jj}\check{f}_\alpha^{\mathrm{eq}(j)}\right\} \quad (22)$$

همچنین در مرحله ضمنی از معادله (23) استفاده می‌شود:

$$\check{f}_\alpha^{n+1} = \check{f}_\alpha^{n} - \Delta t\sum_{j=1}^{r}[\bar{b}]_j\left(e_\alpha \cdot \nabla\check{f}_\alpha^{(j)}\right) - \Delta t\sum_{j=1}^{r}[b]_j\check{\Omega}_\alpha^{(j)} \quad (23)$$

که در رابطه (22) و (23)، $f_\alpha^{\mathrm{eq}()}$، $f_\alpha^{()}$، $\tau^{()}$ و r به ترتیب تابع توزیع در هر مرحله، تابع توزیع تعادلی در هر مرحله، زمان آرامش و نهایتاً عدد مرحله می‌باشند. $[a]$ و $[\bar{a}]$ ماتریس‌های با ابعاد $r \times r$ هستند و همچنین $[b]$ و $[\bar{b}]$ بردارهای $1 \times r$ می‌باشند که ضرایب آن‌ها توسط یک جدول دوگانه بچر[5] (Batcher) مطابق رابطه (24) و (25) مشخص می‌شوند[16]. برای حصول روش مرتبه-3، $r = 4$ خواهد بود یعنی به یک روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای نیاز است.

$$\begin{array}{c|cccc} [\bar{a}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \equiv & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\bar{b}] & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ & 0 & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array} \quad (24)$$

$$\begin{array}{c|cccc} [a] & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \equiv & -a_{11} & a_{11} & 0 & 0 \\ [\bar{b}] & 0 & 1-a_{11} & a_{11} & 0 \\ \hline & a_{41} & a_{42} & 1/2-a_{11}-2a_{41}a_{11} & a_{11} \\ & 0 & 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{array} \quad (25)$$

که در رابطه (25) ضرایب به صورت $a_{11} = 0.24169426078821$، $a_{41} = 0.06042356519705$ و $a_{42} = 0.12915286960590$ است.

3-3- بی‌بعدسازی و محاسبه خواص ماکروسکوپیک

همچنان که شبکه بولتزمن در مراکز سلول ثابت است، مسأله‌ای که شبیه‌سازی می‌شود، باید در مقیاس شبکه بیان شود. بنابراین، از روابط بدون بعد باید استفاده می‌شود. در اینجا سه متغیر مستقل مرجع به صورت: چگالی مرجع ρ_{ref}، طول مرجع L_{ref} و انرژی استاتیکی داخلی مرجع e_{ref} وجود خواهد داشت. مابقی متغیرهای بدون بعد و مراجع به صورت رابطه (26) تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} u_{\mathrm{ref}} = \sqrt{e_{\mathrm{ref}}}, & t_{ref} = \frac{L_{\mathrm{ref}}}{u_{\mathrm{ref}}}, & \check{t} = \frac{t}{t_{\mathrm{ref}}} \\ \check{x} = \frac{x}{L_{\mathrm{ref}}}, & \check{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{ref}}}, & \check{e} = \frac{e}{e_{\mathrm{ref}}} \\ \check{\tau} = \frac{\tau}{t_{\mathrm{ref}}}, & \check{\lambda}_2 = \frac{\lambda}{e_{\mathrm{ref}}}, & \check{u} = \frac{u}{u_{\mathrm{ref}}}, \end{cases} \quad (26)$$

که در روابط (26)، $\check{\tau}$ عدد نادسن می‌باشد و برای جریان‌های غیر لزج خیلی کوچک است (در حدود 10^{-3}~10^{-4}). لازم به ذکر است که تمام متغیرهایی

1- Smooth Limiter
2- Upwind
3- Van Albada Limiter Function

4- Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) Number
5- Double Butcher's Tableau

که در این مقاله با نماد (ˇ) مشخص شده‌اند، بدون بعد می‌باشند. مقدار e_{ref} اهمیت ویژه‌ای دارد، چرا که این پارامتر، مقدار u_{ref} را معین می‌کند و همچنین بی‌بعد کردن انرژی استاتیکی با استفاده از e_{ref} صورت می‌گیرد. برای اطمینان، e_{ref} می‌تواند کمی بزرگتر از بیشینه انرژی سکون داخلی، یعنی، $e_{\mathrm{ref}} > max(e_0)$ موجود در کل میدان جریان لحاظ شود. انرژی سکون داخلی از طریق رابطه $e_0 = e_\infty(1 + (\gamma-1)/2\, M_\infty^2)$ محاسبه می‌شود. بنابراین، λ_2 نیز باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. برای سادگی می‌توان $\lambda_2 = e_p$ باشد. در نتیجه، $\check{\lambda}_2 = 1$ و در پی آن خواص ماکروسکوپیک در فضای دو بعدی از روابط (27) بدست می‌آیند:

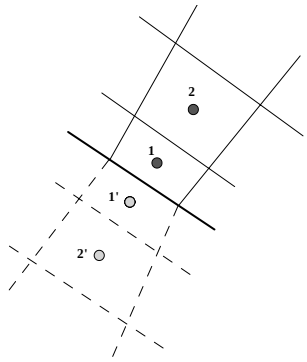
$$\begin{cases} \check{\rho} = \sum_{\alpha=1}^{13}\sum_{v=1}^{2} \check{f}_{\alpha v} \\ \check{u} = \frac{1}{\check{\rho}}\sum_{\alpha=1}^{13}\sum_{v=1}^{2} \check{f}_{\alpha v}\, e_{\alpha x} \\ \check{v} = \frac{1}{\check{\rho}}\sum_{\alpha=1}^{13}\sum_{v=1}^{2} \check{f}_{\alpha v}\, e_{\alpha y} \\ \check{E} = \frac{1}{\check{\rho}}\sum_{\alpha=1}^{13}\left[\sum_{v=1}^{2}\frac{\check{f}_{\alpha v} e_\alpha^2}{2} + \check{f}_{\alpha 2}\right] \end{cases}, \begin{cases} \check{p} = \check{E} - \frac{\|\check{U}\|^2}{2} \\ \check{p} = (\gamma-1)\check{\rho}\check{e} \end{cases} \qquad (27)$$

4- شرایط مرزی

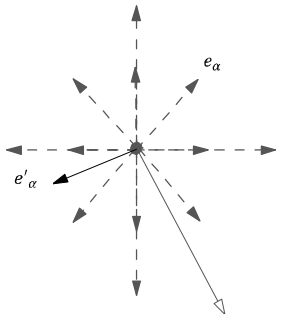
برای همه شرایط مرزی روش به این طریق است که ابتدا نیاز به محاسبه متغیرهای جریان ($\check{\rho}$، $\check{u}$، $\check{v}$ و $\check{e}$) توسط روابط متداول CFD است. سپس مقادیر تابع تعادلی $\check{f}_{\alpha,v}^{\mathrm{eq}}$ روی مرز با استفاده از $\check{\rho}$، $\check{u}$، $\check{v}$ و $\check{e}$ بدست خواهد آمد. از آنجا که جریان غیرلزج تحلیل می‌شود، اثرات لزجت (مانند تنش لزج، انتقال حرارت هدایتی و کار لزج) قابل صرفه نظر می‌باشد. بنابراین این ضمانت وجود دارد که استفاده از مقادیر $\check{f}_{\alpha,v}^{\mathrm{eq}}$ روی مرز بجای مقادیر $\check{f}_{\alpha,v}$ دقیق است. بنابراین به عنوان مثال برای جریان زیرصوت ابتدا با اعمال روش ریمان بر اساس مشخصه‌ها، متغیرهای جریان روی مرز بدست می‌آید و سپس با استفاده از آن‌ها مقادیر تابع توزیع تعادلی بدست می‌آید و در نهایت معادل مقادیر تابع توزیع در مرز قرار داده می‌شود. در این حالت مقادیر در سلول‌های مجازی معادل مقادیر مرز در نظر گرفته می‌شود.

4-1- شرط دیواره غیرلزج

با فرض غیرلزج بودن جریان، در اینجا شرط مرزی لغزش، با روشی موسوم به انعکاس-تصویر[1] اعمال می‌شود. کاربرد شرط لغزش-دیواره روی شبکه مستطیلی شکل برای روش شبکه بولتزمن، آسان است، چرا که تابع توزیع چگالی مربوط به هر سرعت گسسته واقع در سلول‌های مجازی، برابر با قرینه خود می‌شود به عبارت دیگر دیوار جامد درست شبیه یک آینه عمل می‌کند. به عنوان مثال $\check{f}_{6v}(1')$ برابر $\check{f}_{7v}(1)$ می‌باشد (نگاه شود به شکل 3- ب و شکل (6)). این سهولت کار در مورد شبکه فیزیکی در دستگاه منحنی الخط[2] صادق نیست. برای پوشش این قبیل شبکه‌ها باید یک سری عملیات جانبی انجام داد. برای این حالت، چون شبکه D2Q13L2 ثابت است و هیچ دورانی ندارد اما دیواره می‌تواند هر شکل خاصی داشته باشد و المان‌های گسسته سطح دیوار نسبت به افق دوران می‌کنند، به عنوان مثال برای تعیین دقیق تابع توزیع در سلول مجازی- '1، ابتدا هر سرعت e_α در سلول-1، به قرینه سرعت آن، e'_α بر می‌گردد. همان‌طور که در شکل 7 مشاهده می‌شود، معمولاً در حالت کلی سرعت بازتابی e'_α، بر هیچ یک از گره‌های شبکه D2Q13L2 منطبق نیست.



شکل 6 کاربرد شرط لغزش دیوار در جریان غیرلزج. خطوط خط چین معرف سلول‌های مجازی و خطوط توپر معرف سلول‌های داخل میدان است [12]



بردار مماس بر دیوار

شکل 7 روش انعکاس-تصویر برای شرایط مرزی دیوار غیرلزج [12]

در نتیجه باید بتوان تابع توزیع $\check{f}_{\alpha,v}$ را بر روی تمام گره‌های شبکه D2Q13L2 تصویر نمود. به عنوان مثال مقدار متمرکز آن روی سرعت e_j، یعنی $\check{f}_{jv}(1)$ از رابطه (28) محاسبه می‌شود:

$$\check{f}_{jv}(1') = \sum_{\alpha=1}^{13} \check{f}_{\alpha v}(1)\, \varphi_j(e'_{\alpha x}, e'_{\alpha y}) \qquad (28)$$

که در آن سرعت‌های بازتابی e'_α با ضرب ماتریس انعکاس[3] دو بعدی در ماتریس سرعت‌های گسسته به صورت رابطه (29) محاسبه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} e'_{\alpha x} \\ e'_{\alpha y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta_s) & \sin(2\theta_s) \\ \sin(2\theta_s) & -\cos(2\theta_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha x} \\ e_{\alpha y} \end{pmatrix} \qquad (29)$$

در رابطه (29) θ_s معرف زاویه هر پنل گسسته سطح با راستای مثبت محور x است. این تصویرسازی، می‌تواند بقای جرم، مومنتم و انرژی را برای ذرات بازتابی مجازی حفظ کند. بنابراین، توابع توزیع تصویر شده مفهوم فیزیکی مشابهی با توابع توزیع بازتابی دارند. مطابق روندی مشابه، می‌توان تابع توزیع $\check{f}_{jv}(2')$ را در سلول مجازی- '2، محاسبه نمود.

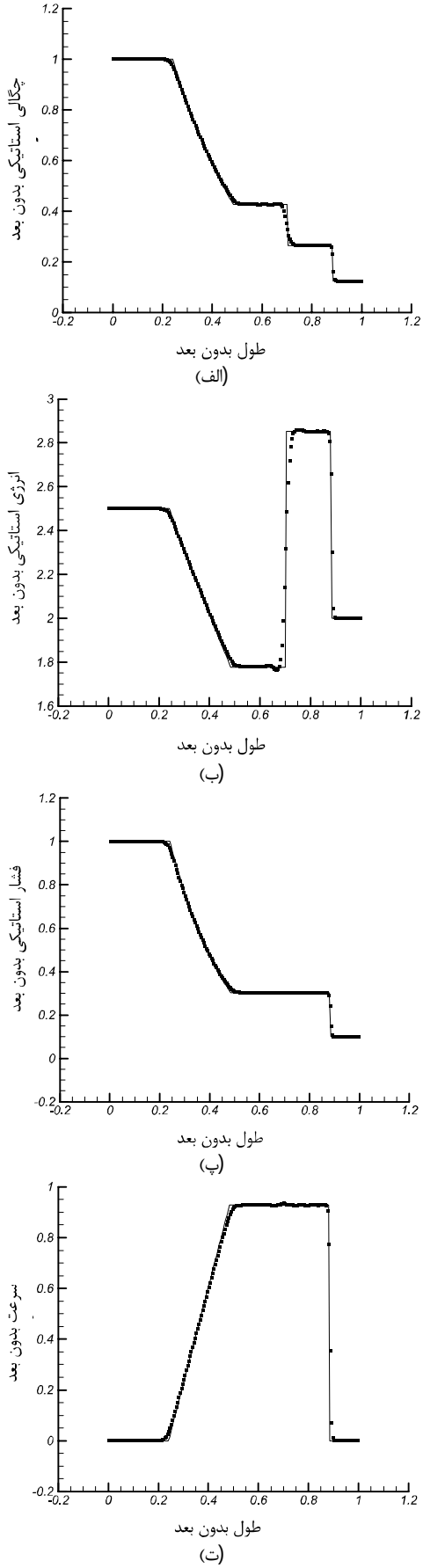
5- نتایج عددی

در این بخش به ارائه شبیه‌سازی عددی چند مسأله محک در دستگاه مختصات یکنواخت و همچنین چند مسأله کاربردی در دستگاه شبکه منحنی‌الخط پرداخته خواهد شد.

5-1- مسأله لوله ضربه ساد

یکی از معروف‌ترین مسائل یک بعدی مسأله ریمان، مسأله لوله ضربه[4] است. این مسأله عموماً در دو حالت ساد (Sod) و لکس (Lax) بیان می‌شود. در این بخش به شبیه‌سازی مسأله ساد پرداخته می‌شود. شرایط اولیه این مسأله در رابطه (30) آمده‌است:

1- Reflection-Projection Method
2- Curvilinear Grid System
3- Reflection Matrix
4- Shock Tube



شکل 8 مقایسه نتایج عددی مسأله لوله ضربه ساد به استفاده از روش ضمنی-صریح در گسسته‌سازی زمانی. (الف) چگالی، (ب) انرژی، (پ) فشار و (ت) سرعت

جدول 2 مقایسه بهبود زمان اجرا

روش گسسته‌سازی زمانی	$\Delta x = 1/100$	$\Delta x = 1/200$	$\Delta x = 1/300$
روش ضمنی-صریح رانگ-کوتا مرتبه-3 (کار حاضر)	0/156	0/328	0/516
اویلر پیشرو (مرجع [12])	0/328	0/625	0/906
درصد کاهش زمان اجرا	52/4	47/5	43

جدول 3 مقایسه زمان اجرای مدل جدید شبکه

مدل شبکه	$\Delta x = 1/100$	$\Delta x = 1/200$	$\Delta x = 1/300$
شبکه D1Q7L2 (کار حاضر)	0/546	0/890	1/094
شبکه D1Q5L2 (مرجع [12])	0/328	0/625	0/906
درصد افزایش زمان اجرا	66/5	42/4	20/7

$$\begin{matrix}(\rho_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{L}}, e_{\mathrm{L}}) = (1{,}0{,}2.5)\ 0 < x/\mathrm{L}_{\mathrm{ref}} < 0.5 \\ (\rho_{\mathrm{R}}, u_{\mathrm{R}}, e_{\mathrm{R}}) = (0.125{,}0{,}2)\ 0.5 < x/\mathrm{L}_{\mathrm{ref}} < 1\end{matrix} \quad (30)$$

در این شبیه‌سازی مقادیر مرجع به صورت $L_{\mathrm{ref}} = 1.0$، $\rho_{\mathrm{ref}} = 1.0$ و $e_{\mathrm{ref}} = 3.0$ و همچنین $\check{t} = 10^{-3}$ و $\Delta x = 1/200$ و شبکه D1Q5L2 در نظر گرفته شده است. با استفاده از روش ضمنی-صریح می‌توان گام زمانی را تا 10 برابر گام زمانی استفاده شده در پژوهش مرجع [12] افزایش داد، یعنی $\Delta\check{t} = 2.5\check{t}$. در شکل 8 نتایج عددی در زمان $t = 0.22$ با نقاط توپر در مقایسه با نتایج حل دقیق که با خطوط ممتد مشخص شده، نمایش داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود امواج ضربه‌ای و امواج تماسی با دقت بسیار عالی در مکان واقعی خود در مقایسه با حل دقیق تسخیر شده است. در جدول 2 زمان اجرا برای دو روش گسسته‌سازی زمانی اویلر پیشرو و ضمنی-صریح برای سه تعداد مش متفاوت آورده شده است که نشان می‌دهد کاهش نسبی زمان اجرا به حدود 43 درصد میل می‌کند و این یک نتیجه بسیار مطلوب است. تمام شبیه‌سازی‌های مقاله حاضر بر روی یک سیستم کامپیوتر با مشخصات Intel® Core™ i7 و پردازشگر CPU Q 720 1.60 گیگاهرتز همراه با 4 گیگابایت حافظه داخلی (RAM) انجام شده است.

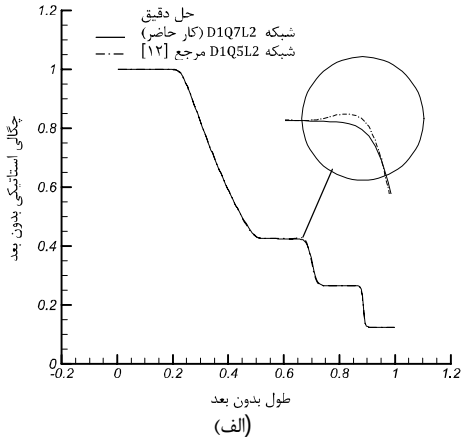
5-2- اعتبارسنجی مدل شبکه D1Q7L2

برای اعتبارسنجی مدل شبکه جدید D1Q7L2 و ارزیابی دقت و زمان اجرای این مدل نسبت به شبکه D1Q5L2 که توسط کیو و همکارانش [12] ارائه شد، همان مسأله لوله ضربه ساد در بخش قبلی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شکل 9 نمودار تحلیل عددی با استفاده از دو مدل شبکه مذکور را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که مدل جدید معتبر و چنانچه پیش‌بینی می‌شد در نواحی گرادیان شدید دقت بیشتری نسبت به نتایج مرجع [12] ارائه داده‌است. در جدول 3 زمان اجرای دو شبکه برای سه حالت مقایسه شده است. برای ارزیابی بهتر نتایج، حل شبکه جدید و نتایج مرجع [12] هر دو با استفاده از روش اویلر پیشرو تحلیل شده‌اند. افزایش زمان حل شبکه D1Q7L2 نسبت شبکه D1Q5L2 به حدود 20 درصد میل می‌کند که مقدار قابل توجهی نیست. بنابراین با توجه به دقت بالاتر این روش نسبت به شبکه D1Q7L2، این شبکه برای شبیه‌سازی عملی مسائل یک-بعدی مانند جریان شبه یک-بعدی نازل‌ها و مسائل چند-بعدی با استفاده از تکنیک تجزیه بردار شار[1] (استفاده از مدل شبکه یک-بعدی در شبیه‌سازی جریان‌های دو و سه-بعدی) می‌تواند به خوبی مورد استفاده قرار گیرد.

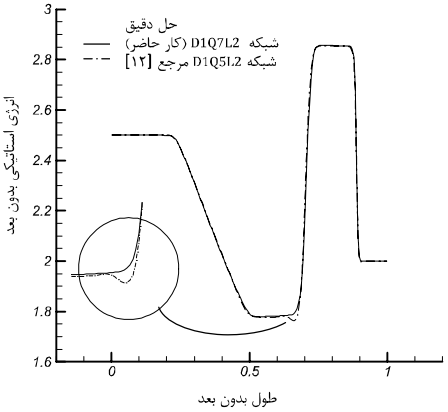
5-3- مسأله انعکاس دوگانه موج ضربه‌ای

یکی از مسائل استاندارد و شناخته شده دو-بعدی جریان تراکم‌پذیر، مسأله انعکاس دوگانه موج ضربه‌ای[2] است.

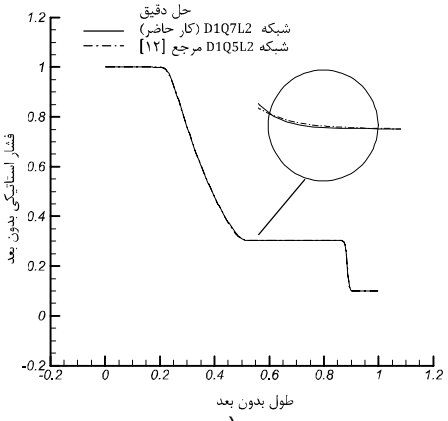
1- Flux Vector Splitting (FVS)
2- Double Mach Reflection



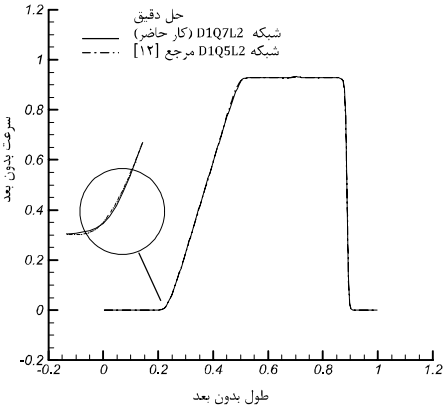
(الف)



(ب)



(پ)

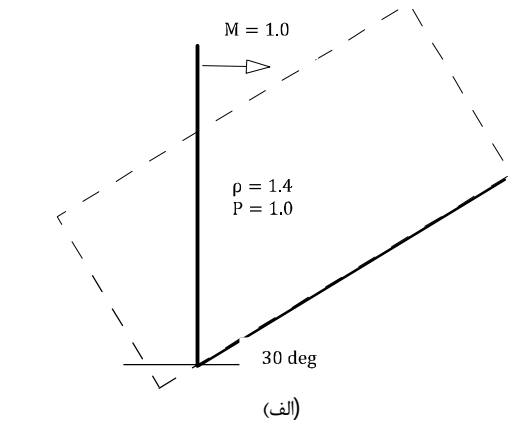


(ت)

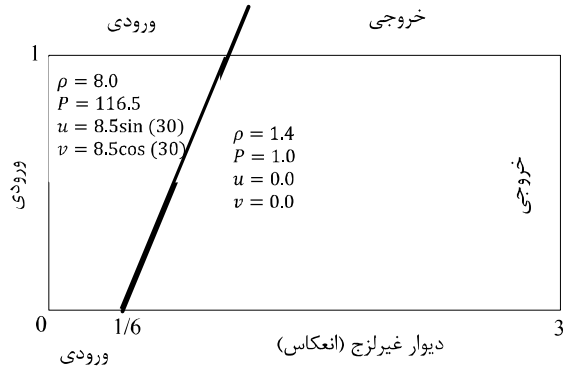
شکل 9 مقایسه نتایج عددی لوله ضربه ساد برای دو شبکه D1Q5L2 و D1Q7L2. (الف) چگالی، (ب) انرژی، (پ) فشار و (ت) سرعت

در این مسأله مطابق شکل 10- الف یک موج قطری با ماخ 10 به سمت یک گوه 30 درجه حرکت و پس از طی مسیر کوتاهی به آن برخورد می‌کند. موج ضربه‌ای به علت برخورد با گوه به صورت یک موج کمانی و یک موج بازتابی ظاهر می‌شود. این مسأله بواسطه پیچیدگی‌های فیزیکی، مانند موج کمانی و نقطه سه گانه (محل طلاقی موج کمانی با موج انعکاسی) و موج بازتابی معمولاً در روش‌های عددی بسیار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بعلاوه نسبت فشار قبل و بعد از موج بسیار بزرگ (116/5) است که در صورت موفقیت شبیه‌سازی، توانایی مدل عددی در شبیه‌سازی جریان‌های پر سرعت را نمایش خواهد داد. به منظور شبیه‌سازی آسانتر این مسأله با در نظر گرفتن میدان حل به صورت مماس بر گوه و دوران آن مانند شکل 10- ب یک میدان مستطیلی شکل وجود دارد که با شبکه یکنواخت کارتزین قابل حل است و دیگر نیاز به شبکه منحنی‌الخط برای تحلیل آن نخواهد بود.

برای شبیه‌سازی مقادیر مرجع به صورت $L_{\mathrm{ref}} = 1.0$، $\rho_{\mathrm{ref}} = 1.0$، $e_{\mathrm{ref}} = 75.0$ و همچنین $\check{\tau} = 10^{-3}$ و شبکه یکنواخت 100×300 و شبکه D2Q13L2 در نظر گرفته شده است. شکل 9 به ترتیب کانتورهای چگالی، فشار و انرژی حاصل از حل شبکه بولتزمن-حجم محدود[1] (FVLBM) و کانتور چگالی حاصل از حل معادلات اویلر مرجع[17] در لحظه $t = 0.2$ را نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل 11 مشاهده می‌شود، ویژگی‌های پیچیده جریان مانند موج کمانی، نقطه سه گانه و موج بازتابی به خوبی آشکار و الگوی جریان به درستی حاصل شده است. بنابراین شبیه‌سازی توانست جریان با سرعت بالا را با دقت خوبی به لحاظ کیفی تحلیل نماید. این تحلیل به خوبی استفاده از روش تابع دایروی را در شبیه‌سازی جریان‌های با اعداد ماخ بالا تأیید می‌کند.



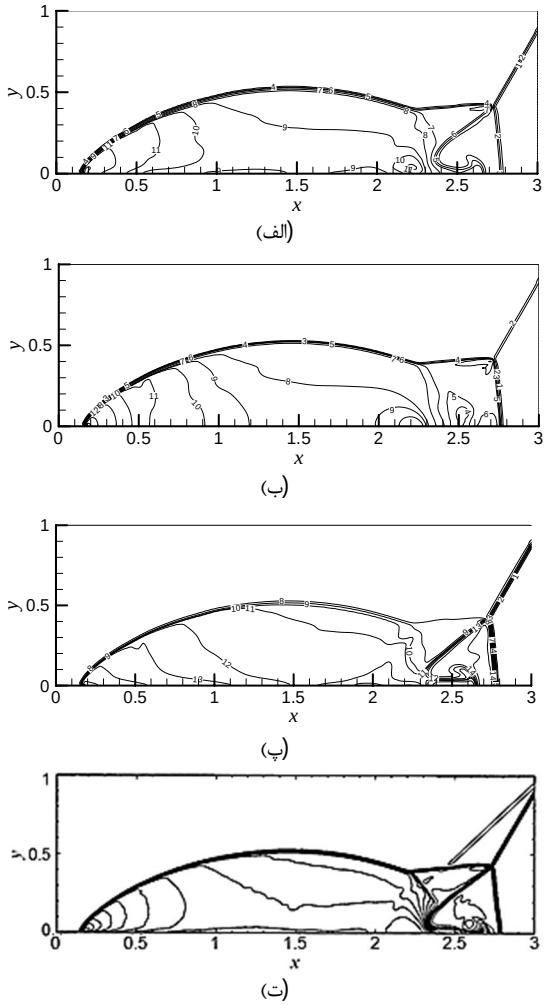
(الف)



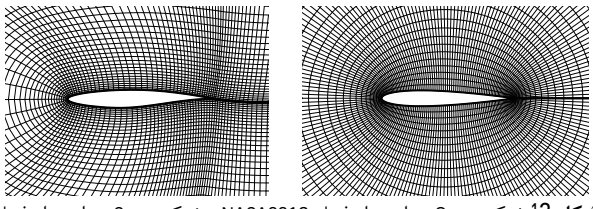
(ب)

شکل 10 شماتیک و شرایط اولیه مسأله انعکاس دوگانه موج ضربه‌ای

1- Finite Volume-Lattice Boltzmann Method (FVLBM)



شکل 11 مقایسه کانتور مسأله انعکاس دوگانه موج ضربه‌ای. کانتورهای بدون بعد حل FVLBM (الف) چگالی، (ب) فشار، (پ) انرژی و (ت) چگالی حل اویلر مرجع [17].



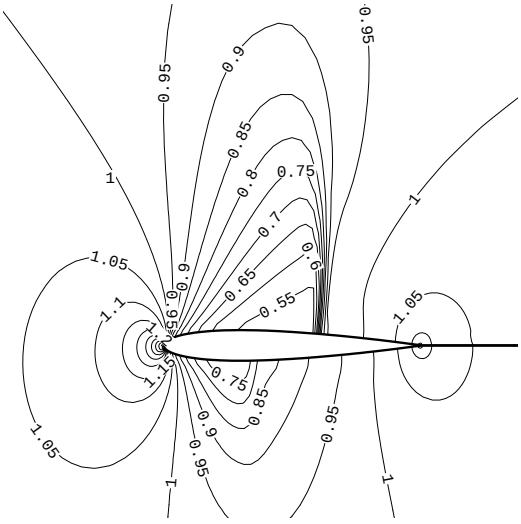
شکل 12 شبکه نوع-O پیرامون ایرفویل NACA0012 و شبکه نوع-C پیرامون ایرفویل RAE2822

5-4- جریان گذرصوتی پیرامون ایرفویل NACA0012

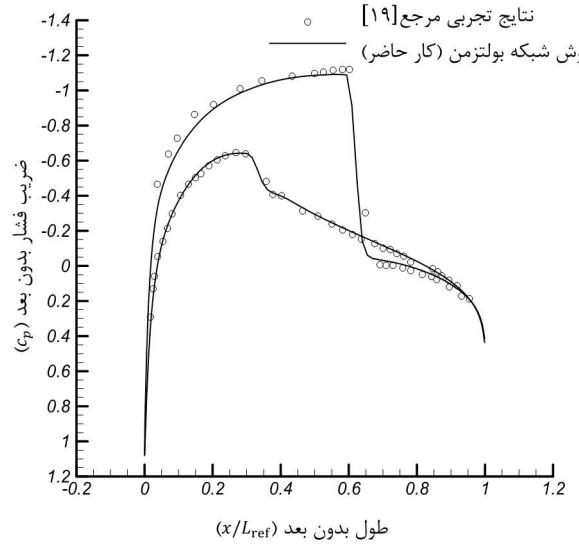
مسائل شبیه‌سازی شده در مثال‌های 5-1 تا 5-3 از مسائل محک دینامیک گاز بودند که در شبکه یکنواخت تحلیل شده‌اند. برای شبیه‌سازی مسائل عملی و ارزیابی توانمندی روش شبکه بولتزمن در دستگاه منحنی‌الخط، مطابق شکل 12 جریان پیرامون ایرفویل NACA0012 و RAE2822، به ترتیب در یک دستگاه شبکه منحنی‌الخط با ابعاد 60×200 و 65×225 شبیه‌سازی می‌شود. دستگاه شبکه منحنی الخط نوع-O با استفاده از روش حل معادلات بیضوی ایجاد شده است و کاملاً متعامد است و در مورد شبکه نوع-C از شبکه موجود برای صحت سنجی مدل‌های عددی که در سطح جهان توسط محققان استفاده می‌شود، استفاده شده است[18]. ایرفویل NACA0012 را در جریان گذرصوتی و در $\alpha = 1.25^{\circ}$ در نظر بگیرید. برای تحلیل، شرایط جریان آزاد به صورت $M_\infty = 0.8$، $p_\infty = 1.0$ و $\rho_\infty = \gamma$ فرض شود. در این صورت سرعت صوت برابر 1 و در نتیجه $u_\infty = M_\infty$ خواهد شد (فشار، چگالی و انرژی جریان آزاد به صورت بی‌بعد است). بنابراین انرژی بدون بعد از رابطه (31) بدست می‌آید:

$$e_\infty = \frac{p_\infty}{(\gamma-1)\rho_\infty} = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \quad (31)$$

مقادیر مرجع $L_{ref} = 1.0$، $e_{\mathrm{ref}} = 2.5 > \max(e_0 = 2.3)$، $\rho_{\mathrm{ref}} = 1.0$ و همچنین $\tilde{\tau} = 10^{-3}$ فرض می‌شود. کانتور فشار و توزیع فشار حاصل از حل عددی روش شبکه بولتزمن، به ترتیب در شکل‌های 13 و 14 ارائه شده است. در این شبیه‌سازی توزیع فشار حل عددی که با خط توپر مشخص شده است با نتایج تجربی مرجع[19] که با نقاط دایره‌ای شکل توخالی نمایان شده، مقایسه شده است. همچنین مقادیر ضریب پسا و برای محاسبه شده توسط مطالعه حاضر در مقایسه با مرجع [20] در جدول 4 آمده است که دقت مناسب کار حاضر را در تخمین ضرایب آیرودینامیکی نمایش می‌دهد. خطای نسبی حل حاضر نسبت به حل نظیر معادلات اویلر برای این آزمایش در حدود 7 الی 8 درصد است که قابل قبول می‌باشد و البته باید توجه داشت که جریان تست تونل باد، برای این حالت، یک جریان لزج آشفته است، با این وجود نتایج کار حاضر که جریان غیرلزج و آرام را شبیه‌سازی می‌کند، توزیع فشار و ضرایب آیرودینامیکی را به خوبی ارائه می‌دهد.



شکل 13 کانتور فشار پیرامون ایرفویل NACA0012 در شرایط $M_\infty = 0.8$ و $\alpha = 1.25^{\circ}$



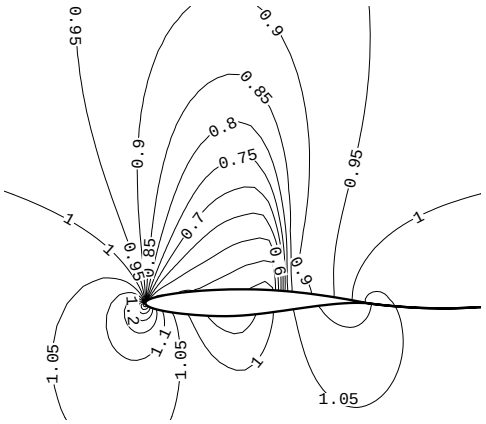
شکل 14 مقایسه توزیع فشار ایرفویل NACA0012 در شرایط $M_\infty = 0.8$ و $\alpha = 1.25^{\circ}$

جدول 4 مقایسه ضرایب آیرودینامیکی ایرفویل NACA0012

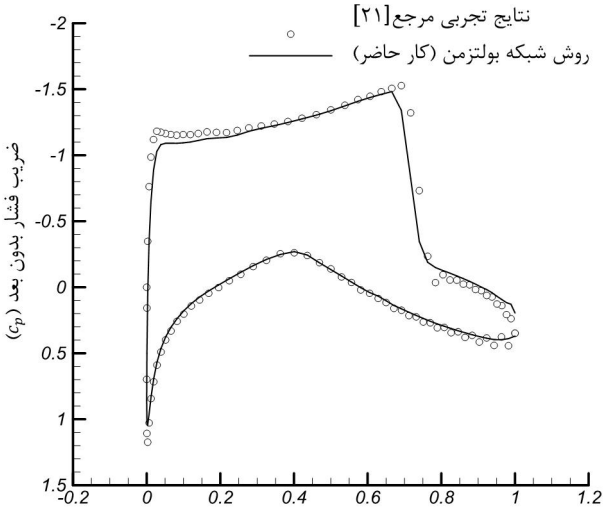
روش عددی	ضریب برآ (C_l)	ضریب پسا (C_d)
روش شبکه بولتزمن (کار حاضر)	0/3039	0/02601
روش حجم محدود اویلر (مرجع[20])	0/3321	0/0243
درصد خطای نسبی	8/4	7/0

5-5- جریان گذرصوتی پیرامون ایرفویل RAE2822

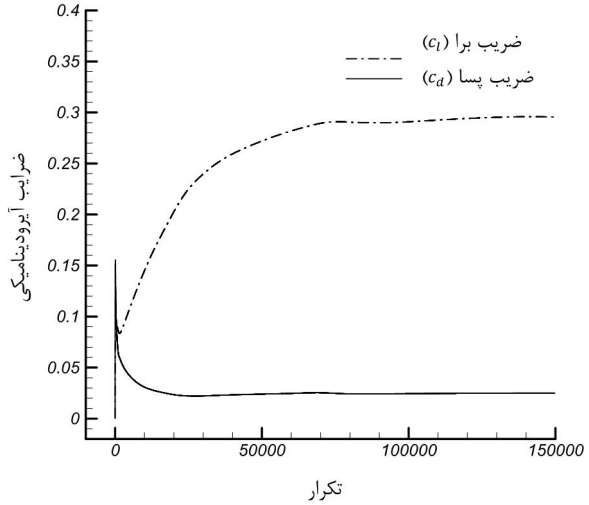
در این بخش به ارائه نتایج عددی جریان گذرصوتی پیرامون یک ایرفویل گذرصوتی معروف و نامتقارن پرداخته می‌شود. فشار، چگالی و انرژی جریان آزاد درست شبیه مسأله قبل می‌باشد، در صورتی که $M_\infty = 0.75$ و $\alpha = 3.0^\circ$ است. شکل‌های 15 و 16 به ترتیب کانتور فشار و توزیع فشار در مقایسه با نتایج تجربی از مرجع[21] را نمایش می‌دهد. موج ضربه‌ای در سطح بالا و انتهای ایرفویل به وضوح مشاهده می‌شود و همچنین قدرت تحلیل روش شبکه بولتزمن در شبکه‌های منحنی‌الخط نیز تأیید می‌شود. ضرایب آیرودینامیکی برای این آزمایش در جدول 5 بیان شده است. نتایج حاکی از آن است که ضرایب با دقت بسیار خوبی نسبت به نتایج عددی حل معادلات اویلر از مرجع [22] و [23] تطبیق می‌کند. چنانچه ملاحظه می‌شود، خطای نسبی حل کار حاضر نسبت به حل معادلات اویلر برای این آزمایش در حدود 2 الی 4 درصد می‌باشد که بسیار تخمین مناسبی است و دقت مناسب شبیه‌سازی جریان گذرصوتی را نمایش می‌دهد.



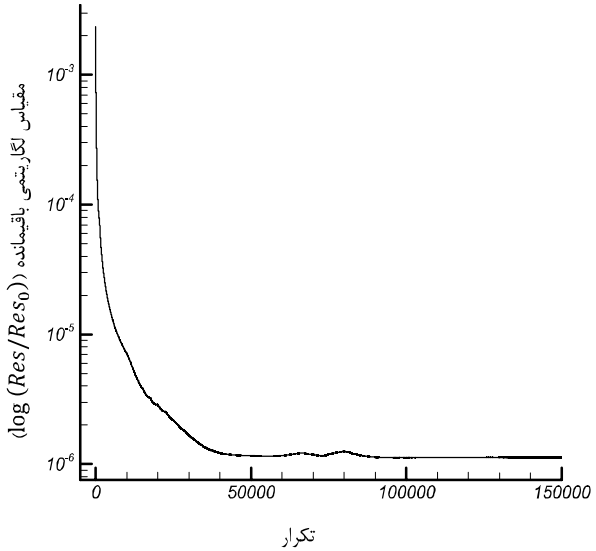
شکل 15 کانتور فشار پیرامون ایرفویل RAE2822 در شرایط $M_\infty = 0.75$ و $\alpha = 3.0^\circ$



شکل 16 مقایسه توزیع فشار ایرفویل RAE2822 در شرایط $M_\infty = 0.75$ و $\alpha = 3.0^\circ$



شکل 17 روند همگرایی ضرایب آیرودینامیکی مسأله 5-4



شکل 18 نرخ همگرایی باقی‌مانده تا رسیدن به حالت پایا برای مسأله 5-4

جدول 5 مقایسه ضرایب آیرودینامیکی ایرفویل RAE2822

روش عددی	ضریب برآ (C_l)	ضریب پسا (C_d)
روش شبکه بولتزمن (کار حاضر)	1/0007	0/0460
روش حجم محدود اویلر (مرجع[22، 23])	1/0395	0/0470
درصد خطای نسبی	3/73	2/12

6- روند همگرایی

نمودار تاریخچه همگرایی ضرایب آیرودینامیکی و همچنین باقی‌مانده مسأله 5-4، در شکل‌های 17 و 18 آورده شده است. پارامتر باقی‌مانده برای مسائل ناپایا معمولاً توسط رابطه (32) محاسبه می‌گردد:

$$Res = \frac{\sqrt{\sum (P^{n+1} - P^n)^2}}{\mathrm{N}} \qquad (32)$$

که در آن P فشار استاتیکی و N تعداد کل سلول شبکه و n و $n+1$ به ترتیب معرف یک گام زمانی گذشته و زمان حال می‌باشد. این مقدار معمولاً با تقسیم نمودن بر مقدار باقی‌مانده در لحظه اول، Res_0 بی‌بعد می‌شود و بیانگر روند رسیدن به همگرایی (رسیدن به حالت پایا) را نمایش می‌دهد.

7- بحث و نتیجه‌گیری

در کار حاضر، به منظور بدست آوردن توابع توزیع تعادلی از یک روش جدید

موسوم به روش تابع دایروی به جای بسط و استفاده از تابع ماکسول استفاده شد و از این طریق محدودیت عدد ماخ برطرف گردید. همچنین یک مدل شبکه جدید D1Q7L2 بر اساس چند جمله‌ای میانیاب لاگرانژی توسعه داده شده است. برای اعتبارسنجی، چندین مسأله استاندارد یک و دو بعدی با استفاده از شبکه D1Q5L2، شبکه جدید D1Q7L2 و شبکه D2Q13L2 شبیه‌سازی و نتایج عددی بدست آمده صحت‌سنجی شد. مدل شبکه D1Q7L2 دارای دقت بیشتری در نواحی گرادیان شدید نسبت به شبکه D1Q5L2 به ازای افزایش حدود 20 درصد زمان اجرا می‌باشد. از شبکه جدید ارائه شده نه تنها در شبیه‌سازی مسائل یک-بعدی بلکه حتی می‌توان در شبیه‌سازی مسائل دو یا سه بعدی با استفاده از روش تجزیه بردار شار (FVS) یا روش تفاضل شار[1] (FDS) بهره گرفت. البته با استفاده از روش ارائه شده می‌توان مدل‌های شبکه جدید دیگری نیز ارائه کرد که تحقیقات بیشتر در این زمینه پیشنهاد می‌شود. از طرفی به علت وجود عبارت زمان آرامش در معادله بولتزمن، روش‌های شبکه بولتزمن همواره با زمان‌های زیاد اجرا همراه است و هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش‌های متداول CFD دارند مگر اینکه در مقابل، از قدرت موازی‌سازی ذاتی شبکه بولتزمن استفاده شود. بنابراین در این مقاله، با استفاده از روش ضمنی-صریح مرتبه-3، گام زمانی تا 10 برابر افزایش یافت که در نتیجه زمان اجرا حدود 43 درصد کاهش یافته است.

8- فهرست علایم

c	بردار سرعت ویژه ذرات (در تابع دایروی) (ms^{-1})
c_l	ضریب برا
c_d	ضریب پسا
c_p	ضریب فشار
D	بعد فضای شبیه‌سازی (m)
e_α	بردار سرعت‌های فازی شبکه (ms^{-1})
e	انرژی استاتیکی (kJ/kg)
e_0, E	انرژی سکون (kJ/kg)
f_α	توابع توزیع چگالی (kgm^{-3})
f_α^{eq}	توابع توزیع تعادلی (kgm^{-3})
F	شارتوابع توزیع در راستای x
G	شار توابع توزیع در راستای y
k	پارامتر تابع حدی ون البادا
Kn	عدد نادسن
L	طول (m)
M	عدد ماخ
N	بردار عمود بر سطح سلول
N	تعداد کل سلول شبکه
Res	باقی‌مانده
P	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)
u	بردار سرعت متوسط سیال (ms^{-1})
R	ثابت جهانی گاز ($kJ/kg\text{-}K$)
s	تابع حدی ون البادا
t	زمان (sec)
x, y	راستای محور کارتزین بدون بعد
z	بردار از هر نقطه تابع دایروی به سرعت‌های فازی شبکه

علایم یونانی

α	شمارنده سرعت‌های فازی شبکه
γ	نسبت حرارتی ویژه گاز
Δ	تفاضل متناهی
Δs	طول وجه سلول (m)
Δt	گام زمانی (sec)
ε	عدد نادسن
θ_s	زاویه المان سطح دیواره (rad)
λ	انرژی پتانسیل ذرات (kJ/kg)
ξ	بردار سرعت ذرات (ms^{-1})
ξ_x	بردار سرعت ذرات در راستای محور x
ξ_y	بردار سرعت ذرات در راستای محور y
ρ	چگالی (kgm^{-3})
τ	زمان آرامش (عدد نادسن)
φ	تابع وزن (تابع مشخصه)
Ω	عبارت برخورد
$\in$	پارامتر تابع حدی
$\forall$	مساحت سلول (m^2)

بالانویس‌ها

eq	تعادلی
n	مرحله زمانی
$(\breve{})$	پارامتر بدون بعد

زیرنویس‌ها

ref	پارامتر مرجع
L	سمت چپ
R	سمت راست
i, j	شمارنده سلول
ν	شمارنده سطوح انرژی شبکه
∞	جریان آزاد

9- مراجع

[1] L. P.Kadanoff, G. R. McNamara, and G. Zanetti, From automata to fluid flow: Comparisons of simulation and theory, *Physical Review A,* Vol. 40, No. 8, pp. 4527, 1989.

[2] J. Hardy, Y. Pomeau, and O. D. Pazzis, Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 14, No. 12, pp. 1746-1759, 1973.

[3] F. Uriel, D. d'Humieres, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and J. P. Rivet, Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions, *Complex systems,* Vol. 1, No. 4, pp. 649-707, 1987.

[4] F. J. Alexander, H. Chen, Sh. Chen, and G. D. Doolen, Lattice Boltzmann model for compressible fluids, *Physical Review A,* Vol. 46, No. 4, pp. 1967, 1992.

[5] X. Kun, A gas-kinetic BGK scheme for the Navier–Stokes equations and its connection with artificial dissipation and Godunov method, *Journal of Computational Physics,* Vol. 171, No. 1, pp. 289-335, 2001.

[6] L. Qing, Y. L. He, Y. Wang, and W. Q. Tao, Coupled double-distribution-function lattice Boltzmann method for the compressible Navier-Stokes equations, *Physical Review E,* Vol. 76, No. 5, pp. 056705, 2007.

[7] S. Chenghai, Lattice-Boltzmann models for high speed flows, *Physical review E,* Vol. 58, No. 6, pp. 7283, 1998.

[8] S. Chenghai, and A. T. Hsu, Three-dimensional lattice Boltzmann model for compressible flows, *Physical review E,* Vol. 68, No. 1, pp. 016303, 2003.

1- Flux Differencing Scheme (FDS)

[9] H. Ya-Ling, Q. Liu, and Q. Li, Three-dimensional finite-difference lattice Boltzmann model and its application to inviscid compressible flows with shock waves, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* Vol. 392, No. 20, pp. 4884-4896, 2013.

[10] G. Yan, Ch. Yaosong, and H. Shouxin. Simple lattice Boltzmann model for simulating flows with shock wave. *Physical review E,* Vol. 59, No. 1, pp. 454, 1999.

[11] Sh. Weiping, W. Shyy, and R. Mei, Finite-difference-based lattice Boltzmann method for inviscid compressible flows, *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals,* Vol. 40, No. 1, pp. 1-21, 2001.

[12] Q, Kun, Ch. Shu, and Y. T. Chew. Lattice Boltzmann and finite volume simulation of inviscid compressible flows with curved boundary. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 2, No. 05, pp. 573-586, 2010.

[13] http://www.sfu.ca/~ptaherib/research.html, 01.03.2015.

[14] Q. Kun, C. Shu, and Y. T. Chew, Alternative method to construct equilibrium distribution functions in lattice-Boltzmann method simulation of inviscid compressible flows at high Mach number, *Physical Review E,* Vol. 75, No. 3, pp. 036706, 2007.

[15] J. Blazek, Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Principles and Applications, Elsevier, pp. 94, 2001.

[16] W. Yong, Y. L. He, T. S. Zhao, G. H. Tang, and W. Q. Tao, Implicit-explicit finite-difference lattice Boltzmann method for compressible flows, *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 18, No. 12, pp. 1961-1983, 2007.

[17] GS. Jiang, CW. Shu, Efficient implementation of weighted ENO schemes, No. ICASE-95-73. *Institute for Computer Aplications in Science and Engineering Hampton* Va, NASA Contract No. NAS1-19480, 1995.

[18] http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/archive.html, 01.03.2015.

[19] http://Xoptimum.Narod.Ru/Results/Compressible/NACA0012, 25.11.2014.

[20] A. Oscar, O. Falcinelli, N. F. Jr, and S. Elaskar, Finite Volume Simulation of A Flow Over A NACA 0012 Using Jameson, MacCormack, SHU And TVD Esquemes, *Mecánica Computacional,* Vol. 26, pp. 3097-3116, 2007.

[21] C. David A., and A. Jameson, Fast preconditioned multigrid solution of the Euler and Navier–Stokes equations for steady, compressible flows, *International journal for numerical methods in fluids,* Vol. 43, No. 5, pp. 537-553, 2003.

[22] Z. M. Kashif, and Z. Gao, Variable fidelity surrogate assisted optimization using a suite of low fidelity solvers, *Open Journal of Optimization,* Vol. 1, No. 01, pp. 8, 2012.

[23] http://www.ian.math.unimagdeburg.de/anume/testcase/euler/euler1_e.html, 25.11.2014.