



# بررسی ارتعاشات آزاد نانوتیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک کسری

محمد فرجی اسکویی<sup>1</sup>، رضا انصاری خلخال<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\* رشت، صندوق پستی 3756، r\_ansari@guilan.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 09 آذر 1393

پذیرش: 02 اسفند 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلید واژگان:

ویسکوالاستیسیت

ریاضیات کسری

تئوری غیرموضعی

نانوتیر اویلر-برنولی

## چکیده

ریاضیات با مرتبه کسری شاخه‌ای از ریاضیات است که در دهه‌های اخیر مورد توجه فراوان دانشمندان علوم مختلف از جمله مهندسی قرار گرفته است. از کاربردهای این شاخه در مهندسی می‌توان به مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک توسط مشتقات با مرتبه کسری اشاره کرد. در این مقاله سعی شده است با وارد کردن ریاضیات کسری تحت عنوان معادله سازگاری مواد ویسکوالاستیک، در تئوری غیرموضعی، یک نانوتیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مختلف در دو انتها مدل شود. برای حل معادلات استخراج شده، مشخصات مواد مربوط به یک نانولوله کربنی در نظر گرفته شده است. با دو روش کاملاً عددی و عددی-تحلیلی، پاسخ‌های زمانی مربوط به سیستم بدست آمده است. روش اصلی به کارگرفته شده یک روش کاملاً عددی می‌باشد و در آن از ماتریس‌های اپراتور مشتق‌گیر، برای گسسته‌سازی معادلات در حوزه مکان و زمان استفاده شده است. روش دوم برای اعتبارسنجی نتایج بدست‌آمده از روش قبل ارائه شده است. در این روش با استفاده از رهیافت گلرکین معادله مربوط به سیستم به یک معادله دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان تبدیل شده است. سپس معادله حاصل با یک روش عددی انتگرال‌گیری مستقیم حل شده است. در انتها در یک بررسی موردی، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله مرتبه کسری لحاظ شده، ضریب ویسکوالاستیسیت و ضریب تئوری غیرموضعی بر پاسخ‌های زمانی تیر اویلر-برنولی تحت شرایط مرزی مختلف مطالعه شده است.

## Free vibration analysis of fractional viscoelastic Euler-Bernoulli nano-beam

Mohammad Faraji Oskouie, Reza Ansari Khalkhali\*

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran.

\* P.O.B. 3756 Rasht, Iran, r\_ansari@guilan.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 30 November 2014  
Accepted 11 March 2015  
Available Online 04 April 2015

### Keywords:

Viscoelasticity  
Fractional Calculus  
Nonlocal Theory  
Euler-Bernoulli Nanobeam

## ABSTRACT

Fractional calculus is a branch of mathematics which in recent decades has been of great interest to scientists in various disciplines, including engineering. One of the applications of this branch in engineering is in modeling the viscoelastic materials using fractional differentiation. In this article, by inserting fractional calculus as viscoelastic material compatibility equations in nonlocal beam theory, a viscoelastic Euler-Bernoulli nano-beam with different boundary conditions at two ends has been modeled. Material properties of a carbon nanotube are considered and two methods, pure numerical and numerical-analytical have been used for solving obtained equations in time domain. The main method is completely numerical and operator matrices used it to discrete equations in time and spatial domain. The second method is introduced for validation of the previous method's answers. In this method, equation of system is reduced to an ordinary differential equation using Galerkin and the obtained equation is solved using a numerical direct integrator method. Finally, in a case study, the effects of fractional order, viscoelasticity coefficient and nonlocal theory coefficient on the time response of the viscoelastic Euler-Bernoulli nano-beam with different boundary conditions have been studied.

## 1- مقدمه

در مواد ویسکوالاستیک کرنش در یک زمان خاص تنها به تنش در آن زمان وابسته نیست بلکه به تاریخچه زمانی تنش‌ها وابسته است. همین‌طور تنش در یک زمان به تاریخچه زمانی کرنش در آن بستگی دارد؛ به این ویژگی مواد ویسکوالاستیک اثر حافظه<sup>1</sup> گفته می‌شود [3]. در دهه‌های اخیر شاخه‌ای از ریاضیات به نام ریاضیات کسری<sup>2</sup> ابزاری قدرتمند برای گسترش تئوری ویسکوالاستیسیت تشخیص داده شده است بطوری که به جای استفاده از مشتق اول نسبت به زمان از مشتقات کسری با

قطعات و وسایل مختلفی مانند لوله‌ها، تیرها و بازوها در صنایع مختلف وجود دارند که برای تحلیل‌های ارتعاشی، کمانشی و غیره بصورت تیر مدل می‌شوند. مطالعات زیادی در زمینه بررسی ارتعاشات خطی و غیرخطی تیرهای مختلف مانند اویلر برنولی [1] و تیموشنکو [2] انجام شده است.

در برخی موارد، خواص مکانیکی مواد نرم مانند کامپوزیت‌های پلیمری را نمی‌توان با تئوری‌های مربوط به الاستیسیت یا ویسکوزیته توصیف کرد و ماده مورد نظر رفتاری میان این دو را دارد. برای مدل‌سازی مکانیکی این نوع مواد به تئوری‌های کلی‌تری مانند ویسکوالاستیسیت نیاز است.

1- Memory effect  
2- Fractional calculus

شرایط مرزی ساده روی دامنه گسسته شده سپس معادله حاصل که در حوزه زمان می باشد به وسیله یک روش انتگرال گیری مستقیم، شبیه به رانگ-کوتا، در نرم افزار سیمولینک حل شده است. روش دوم کاملاً عددی است در این روش معادلات حاکم، در حوزه مکان، به وسیله روش تربیع دیفرانسیل تعمیم یافته<sup>5</sup> و در حوزه زمان، به وسیله روش تفاضل محدود<sup>6</sup> گسسته شده و پاسخ های زمانی سیستم برای شرایط مرزی مختلف بدست آمده است.

## 2- معادلات حاکم بر رفتار سیستم

طبق مدل تیر اویلر-برنولی، میدان جابجایی در هر نقطه از نانوتیر را می توان به صورت رابطه (1) نوشت:

$$u_x(x, z, t) = U(x, t) - z \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \quad (1-الف)$$

$$u_z(x, z, t) = W(x, t) \quad (1-ب)$$

که در آن  $U(x, t)$  و  $W(x, t)$  به ترتیب جابجایی طولی و عرضی صفحه میانی تیر در زمان  $t$  می باشند؛ همچنین روابط کرنش - جابجایی به صورت رابطه (2) مطرح می شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (2)$$

با استفاده از روابط تنش - کرنش کلین - ویت مربوط به مواد ویسکوالاستیک کسری رابطه تنش - جابجایی به صورت زیر قابل نوشتن می باشد

$$\sigma = E \left( 1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), 0 < \alpha < 1 \quad (3)$$

که  $E$  مدول الاستیسیته و  $\bar{g}$  ضریب ویسکوالاستیسیته می باشند و مشتق کسری به صورت رابطه (4) تعریف می شود [14]:

$$D_t^\alpha(w) = I^{1-\alpha}(\dot{w}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{w'(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau + \frac{w(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, 0 < \alpha < 1 \quad (4)$$

در رابطه (4) منظور از  $D_t^\alpha$  مشتق مرتبه  $\alpha$  نسبت به  $t$  و  $I^{1-\alpha}$  انتگرال با مرتبه  $1-\alpha$  است. قسمت دوم سمت راست رابطه هم مربوط به شرط اولیه است که برای انتگرال گیری با مرتبه کسری به این صورت اعمال می شود.

حال با استفاده از روش همیلتون معادلات حرکت نانوتیر به شکل رابطه (5) استخراج می شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}^{nl}}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5-الف)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^{nl}}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (5-ب)$$

که  $N_{xx}^{nl}$  و  $M_{xx}^{nl}$  نیروی افقی و گشتاور خمشی غیرموضعی حاصل از آن می - باشند و از رابطه های (6) محاسبه می شوند:

$$N_{xx}^{nl} = A_1 \left( 1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6-الف)$$

$$M_{xx}^{nl} = (e_0 a)^2 I_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - EI \left( 1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (6-ب)$$

که  $e_0 a$  پارامتر غیرموضعی است و پارامترهای دیگر به صورت رابطه (7) تعریف شده اند:

$$A_1 = EA, I_1 = \rho A \quad (7)$$

که  $A$  سطح مقطع تیر و  $\rho$  چگالی آن است.

به دلیل اینکه مقدار اینرسی طولی سیستم در مقایسه با اینرسی عرضی آن ناچیز می باشد و همانگونه که در مراجع [15,16] بدان اشاره شده، تأثیر قابل ملاحظه ای در پاسخها ندارد، می توان از اثرات آن صرف نظر کرد. در نتیجه از معادله (5-الف)، رابطه (8) بدست می آید:

$$N_{xx}^{nl} = N_0 = \text{ثابت} \quad (8)$$

مرتبه بین صفر و یک استفاده می شود که به مدل کلین-ویت [4] مشهور است و این مسأله باعث بازتر شدن دست طراحان در طراحی قطعات شده است. از این شاخه ریاضیات در مدل سازی خواص مکانیکی موادی مانند صخره ها، خاک ها و ترکیب های آسفالتی استفاده می شود [5]. دیگر کاربرد گسترده روابط ساختاری مربوط به ویسکوالاستیک کسری در مدل سازی مواد پلیمری است. نتایج آزمایشگاهی نشان داده است که مدل کردن این مواد با مشتقات کسری دقت بیشتری نسبت به مدل سازی با مشتق اول یا تئوری مواد الاستیک دارد [6,7].

یکی از مطالعاتی که در زمینه ارتعاشات سیستم های مکانیکی با مرتبه کسری انجام شده مربوط به لی-کیون چن [8] است که آنها ریسمان<sup>1</sup> متحرک ویسکوالاستیک کسری را مدل کرده و با استفاده از روش گلرکین ارتعاشات آزاد آن را در حوزه زمان بررسی کرده اند.

در ادامه مبحث مربوط به اجزا متحرک، در تحقیقی ارتعاشات تیر اویلر ویسکوالاستیک کسری [9] در حوزه زمان تحلیل شده است که در آن تنها شرط مرزی ساده برای تیر در نظر گرفته شده و همانند مرجع [8] از روش نیمه تحلیلی گلرکین برای گسسته سازی در حوزه مکان استفاده شده است.

در مطالعات دیگر ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکوی الاستیک روی بستر ویسکوالاستیک که با مشتقات کسری مدل شده [10] بررسی شده است و درباره تأثیرات توان کسری مشتق و ضریب مدول برشی بحث شده است.

در ادامه پژوهش ها در این زمینه می توان به مدل سازی و تحلیل رفتار دینامیکی بازوهای رباتیکی ویسکوالاستیک با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو [11] اشاره کرد. پژوهش گران در این مقاله با استفاده از فرمولاسیون گیبس - ایل و روش های مودهای فرضی مدل دینامیکی سیستم را استخراج کرده اند. آنها همچنین دو مکانیزم میرایی، یعنی میرایی کلین-ویت به عنوان میرایی داخلی و اثر ویسکوز هوا به عنوان عامل مستهلک کننده خارجی را در معادلات لحاظ کرده اند و برای بررسی درستی مدل خود، نتایج بدست آمده را با نتایج بدست آمده از آزمایش های عملی مقایسه کرده اند.

در ادامه محققان بسیاری با تلفیق تئوری ویسکوالاستیسیته با تئوری های مربوط به اندازه نانو و میکرو، ارتعاشات مربوط به نانوتیرهای ویسکوالاستیک را هم بررسی کردند. در مرجع [12] ارتعاشات و پایداری نانولوله های کربنی که در آنها سیال جریان دارد، بررسی شده است و سرعت های بحرانی در شرایط مختلف به دست آمده است. در مقاله ای دیگر [13] نانوتیر تیموشنکو ویسکوالاستیک با تئوری غیرموضعی<sup>2</sup> مدل شده و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله ضریب ویسکوالاستیسیته روی فرکانس های اول تا چهارم سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

همان طور که ملاحظه می شود در این پژوهش ها، ارتعاشات نانوتیرهای ویسکوالاستیک کسری تحت شرایط مرزی مختلف بررسی نشده است و لزوم انجام پژوهش های در زمینه تیرهای ویسکوالاستیک کسری تحت شرایط مرزی گوناگون و با استفاده از روش های عددی قوی مخصوصاً در اندازه نانو مشهود است. به این منظور در پژوهش حاضر معادلات ارتعاشات آزاد مربوط به تیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک با استفاده از معادلات سازگاری با مرتبه کسری کلین-ویت و به کارگیری اصل همیلتون<sup>3</sup> استخراج شده، سپس با دو روش متفاوت حل شده که مقایسه پاسخ های بدست آمده از دو روش نشان دهنده درستی آنها خواهد بود. در روش اول بوسیله گلرکین<sup>4</sup>، معادلات حاکم بر تیر با

1- String  
2- Nonlocal  
3- Hamilton's principle  
4- Galerkin

5- Generalized Differential Quadrature (GDO)  
6- Finite Difference

مختلف را در سیستم اعمال کرد؛ همچنین محدودیتی که روش گلرکین در انتخاب تعداد توابع مودال دارد در این روش مشاهده نمی‌شود.

در این روش از ماتریس‌های اپراتور برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر سیستم استفاده می‌شود؛ به‌طوری که از روش تربیع دیفرانسیل تعمیم‌یافته برای ساخت ماتریس‌های اپراتور مشتق‌گیر در حوزه مکان و از روش تفاضل محدود برای ساخت ماتریس‌های اپراتور مشتق‌گیر در حوزه زمان استفاده شده است.

### 3-2-1- روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته

بر اساس روش تربیع دیفرانسیل تعمیم‌یافته [19]، مشتق  $r$  تابعی مانند  $f(x)$  را می‌توان برحسب مقادیر تابع در نقاط دامنه آن با رابطه (17) محاسبه کرد:

$$\left. \frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij}^r f(x_j) \quad (17)$$

که در آن  $n$  تعداد کل نقاط استفاده شده در طول دامنه است. رابطه (17) را می‌توان به شکل برداری (18) نیز بیان کرد:

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} F = D^{(r)} F \quad (18)$$

در سمت راست این رابطه  $F$  برداری شامل مقادیر تابع در نقاط مختلف دامنه بوده و  $D^{(r)}$  ماتریس اپراتور مشتق‌گیر مرتبه  $r$  است و به ترتیب طبق روابط (19) و (20) تعریف می‌شوند:

$$F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n]^T = [F(x_1) \ F(x_2) \ \dots \ F(x_n)]^T \quad (19)$$

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j \quad (20\text{-الف})$$

$$D_{ij}^{(r)} = r \left( D_{ii}^{(r-1)} D_{ij}^{(1)} - \frac{D_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, r = 2, 3, \dots, n-1; \quad (20\text{-ب})$$

### 3-2-2- روش تفاضل محدود

این روش نیز مانند روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته مشتقات توابع را برحسب مقادیر تابع در نقاط مختلف دامنه تقریب می‌زند با این تفاوت که منطق آن بر پایه بسط تیلور توابع استوار بوده و نقاط روی دامنه با نظم متفاوتی پراکنده شده‌اند. مشتقات با مرتبه کسری یک تابع در یک نقطه خاص را هم می‌توان به‌صورت رابطه (21) برحسب مقادیر تابع در نقاط قبل از آن تقریب زد [20,21]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{k+1}} \frac{w'(t_{k+1}-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau \\ &= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k b_j^\alpha [w(t_{k+1-j}) - w(t_{k-j})], \quad b_j^\alpha \\ &= (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

### 3-2-3- گسسته‌سازی دامنه مکان و زمان

برای گسسته‌سازی دامنه روی مکان، نقاط بر اساس رابطه چبیشف-گوس-لباتو<sup>1</sup> (22) و همچنین نقاط روی دامنه زمانی، با فاصله یکسان به‌صورت رابطه (23) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{n-1} \pi \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (22)$$

$$\tau_i = j \frac{T}{m+1}, \quad j = 0, 2, 3, \dots, m \quad (23)$$

بنابراین با معرفی ماتریس  $w$  مطابق رابطه (24) و بکارگیری روش‌های تربیع دیفرانسیلی و تفاضل محدود معادلات مربوط به سیستم و معادلات مربوط به

برای نانوتیرهای غیرمتحرک در دوسر ( $U=0$  و  $W$ ، در  $x=0$ ) و با توجه به معادله (8) و انتگرال‌گیری از معادله (6-الف) نسبت به  $x$  رابطه (9) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^L N_{xx}^{nl} dx &= \int_0^L A_1 \left( 1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= A_1 \left( 1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) (U(L) - U(0)) = 0 = N_0 \end{aligned} \quad (9)$$

که  $L$  طول تیر است در آخر با جاگذاری معادلات (8) و (5-ب) در (4-ب) معادله غیرموضعی حاکم بر تیر اویلر-برنولی ویسکوالاستیک کسری به‌صورت رابطه (10) بدست می‌آید:

$$-EI \left( 1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = I_1 \left( 1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (10)$$

و شرایط مرزی به‌صورت رابطه (11) تعریف می‌شوند:

- برای تکیه‌گاه گیردار:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

- برای تکیه‌گاه ساده:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

با معرفی پارامترهای بی‌بعد به‌صورت رابطه (13):

$$w = \frac{W}{L}, \quad \zeta = \frac{x}{L}, \quad O = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad \mu = \frac{(e_0 a)}{L}, \quad \{\tau, g\} = \{t, \bar{g}\} / O \quad (13)$$

معادله (10) به‌شکل بی‌بعد (14) در می‌آید:

$$-\left( 1 + g \frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} = (1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \quad (14)$$

شرایط مرزی هم به همین صورت بی‌بعد می‌شوند.

## 3- روند حل

برای حل معادلات حاکم بر سیستم از دو روش استفاده خواهد شد.

### 3-1- روش اول

در این روش معادله تیر با تکیه‌گاه ساده در دو طرف با روش گلرکین گسسته می‌شود (رابطه 15):

$$w(\zeta, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) \sin(n\pi\zeta) \quad (15)$$

که  $\varphi_n(\tau)$  ضرایب وابسته به زمان مجهول و  $\sin(n\pi\zeta)$  تابع مود مربوط به ارتعاشات تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو طرف می‌باشد.

تابع مجهول  $\varphi_n(\tau)$  با برابر صفر قرار دادن ضرب تابع وزنی و باقی‌مانده معادله و انتگرال‌گیری روی دامنه بدست می‌آید، در روش گلرکین توابع وزنی همان توابع مود می‌باشند. با توجه به اینکه معادله مربوط به سیستم خطی است، انتخاب یک تابع مود برای روش گلرکین کافی می‌باشد و استفاده از توابع بیشتر تأثیر آنچنانی در پاسخ ندارد، در نتیجه با انتخاب تابع مودال اول ( $n=1$ ) و وارد کردن رابطه (15) در معادلات سیستم و انتگرال‌گیری از صفر تا یک رابطه (16) بدست می‌آید:

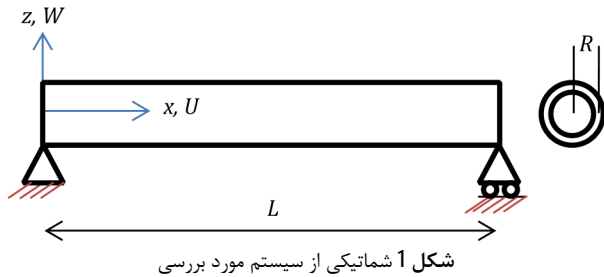
$$-(\varphi + g\varphi^{(\alpha)}) = (1 + \pi^2 \mu^2) \ddot{\varphi} \quad (16)$$

حال معادله کلی سیستم بصورت تابعی از زمان در آمده و می‌توان با دو شرط مکان اولیه و سرعت اولیه آن را حل کرد. به این منظور این معادله را در جعبه ابزار سیمولینک نرم‌افزار متلب وارد کرده و با روش تخمین یک تابع تبدیل با چند صفر و قطب برای انتگرال‌گیری با مرتبه کسری [17,18] حل می‌شود. لازم به ذکر است در طول این پژوهش سرعت اولیه، صفر و مکان اولیه، تغییر شکل استاتیکی تیر در نظر گرفته شده است.

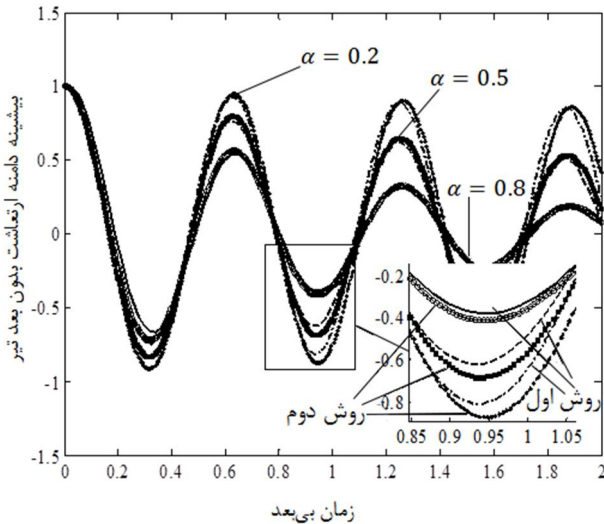
### 3-2- روش دوم

این روش کاملاً عددی است و با استفاده از آن به‌راحتی می‌توان شرایط مرزی

1- Chebyshev-Gauss-Lobatto



شکل 1 شماتیکی از سیستم مورد بررسی



شکل 2 مقایسه پاسخهای روش اول و دوم، تکیه‌گاه ساده در دو طرف

با توجه به اینکه فرکانس سیستم و سرعت کاهش دامنه آن با شرایط مرزی گیردار-گیردار بیشتر از گیردار-ساده و همچنین گیردار-ساده-ساده می‌باشد، این خاصیت در نتایج بدست‌آمده در این پژوهش نیز به‌وضوح مشاهده می‌شود. برای مقایسه بهتر نتایج بدست‌آمده تحت شرایط مرزی مختلف، دامنه ارتعاشات نانوتیر مورد نظر تا زمان بی‌بعد 2 رسم شده‌اند. همان‌طور که در شکل 3 مشاهده می‌شود دامنه ارتعاشات نانوتیر با شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-ساده و ساده-ساده طی این مدت به 0/2، 0/4 و 0/6 دامنه اولیه رسیده است.

پارامتر دیگری که مطمئناً در طراحی این نوع سیستم‌ها تأثیر چشمگیری دارد و نقش بسزایی بازی می‌کند، ضریب ویسکوالاستیسیته است؛ به‌طوری‌که با صفر قرار دادن آن مدل ارائه شده به مدل یک نانوتیر الاستیک تبدیل می‌شود و همان‌طور که در شکل 4 مشاهده می‌شود هیچ میرایی در سیستم به‌وجود نمی‌آید و تیر با یک دامنه ثابت ارتعاش می‌کند. با افزایش ضریب ویسکوالاستیسیته، در عین حال که تیر میرایی پیدا می‌کند، دوره ارتعاشات آن نیز کاهش می‌یابد و در واقع فرکانس سیستم افزایش می‌یابد. برای نتایج این شکل، پارامتر غیرموضعی 0/05 و توان کسری 0/5 در نظر گرفته شده است.

در پایان تأثیرات توان کسری مربوط به تئوری ویسکوالاستیسیته کسری مطالعه خواهد شد. در شکل 5 مشاهده می‌شود که با افزایش توان کسری از صفر تا یک میراثون‌گذاری سیستم نیز افزایش می‌یابد و در هر دوره زمانی مقدار بیشتری از دامنه سیستم کاهش می‌یابد و این باعث می‌شود طراحان انتخاب‌های بیشتری در طراحی سیستم موردنظرشان داشته باشند. از شکل 5 این را هم می‌توان دریافت که توان کسری تأثیر چندانی بر فرکانس سیستم نمی‌گذارد. نتایج مربوط به این شکل هم با در نظر گرفتن پارامتر غیرموضعی 0/1 و ضریب ویسکوالاستیسیته 0/02 به‌دست آمده‌اند.

شرایط مرزی به‌صورت روابط (24-26) درمی‌آیند:

$$W = \begin{bmatrix} w_{10} & w_{12} & \cdots & w_{1m} \\ w_{20} & \ddots & \ddots & w_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_{n0} & w_{n2} & \cdots & w_{nm} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$- \left( (D_{\zeta}^{(4)} W I_{\tau}) + g(D_{\zeta}^{(4)} W D_{\tau}^{(\alpha)}) \right) - g \left( \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tau^{\alpha} \right) \otimes (D_{\zeta}^{(4)} W_0)^T = (I_{\zeta} - \mu^2 D_{\zeta}^{(2)}) W D_{\tau}^{(2)} \quad (25)$$

قسمت دوم سمت چپ رابطه (25) مربوط به اعمال شرط اولیه است که در رابطه (4) درباره آن صحبت شد و  $W_0$  شرط اولیه اعمال شده به سیستم می‌باشد. ضرب تانسوری  $\otimes$  در پیوست تعریف شده است.

$$I_{\zeta} W I_{\tau} = 0, D_{\zeta}^{(1)} W I_{\tau} = 0, \text{ برای تکیه‌گاه گیردار} \quad (26)$$

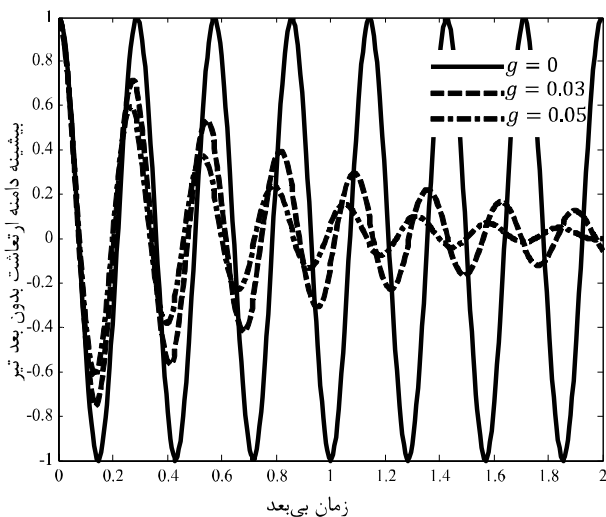
برای تکیه‌گاه ساده  $I_{\zeta} W I_{\tau} = 0, D_{\zeta}^{(2)} W I_{\tau} = 0$   
با اعمال معادلات (26) مربوط به شرایط مرزی ( $\zeta = 0, 1$ ) در معادله (25) یک مجموعه معادلات خطی جبری با  $n \times (m+1)$  معادله و  $n \times (m+1)$  مجهول بدست می‌آیند که به راحتی قابل حل هستند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش دوم انواع شرایط مرزی را در بر می‌گیرد در نتیجه جامع‌تر از روش اول است. همچنین همانند روش اول حرکت تیر را محدود به یک یا چند شکل مود اول نمی‌کند، در نتیجه روش اصلی که در این پژوهش از آن برای بدست آوردن نتایج استفاده خواهد شد، روش دوم است و روش اول صرفاً برای اعتبارسنجی و اطمینان از نتایج بدست آمده از روش دوم می‌باشد.

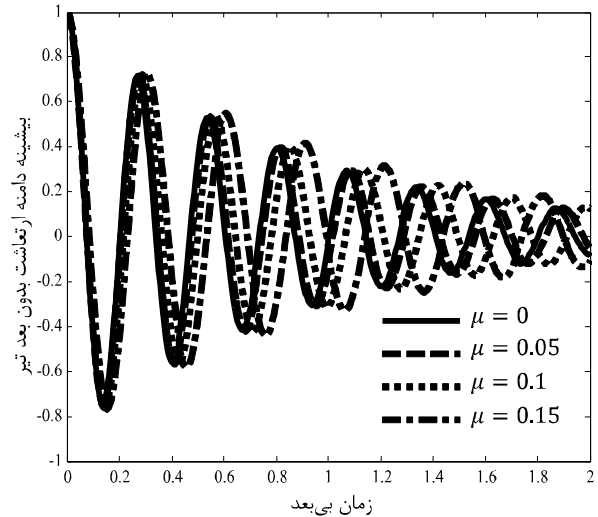
#### 4- نتایج و تفسیر آنها

به‌منظور بررسی عددی مدل معرفی شده و تأثیر پارامترهای مختلف در ارتعاشات تیرهای اویلر-برنولی ویسکوالاستیک کسری، نانولوله کربنی با مدول یانگ یک تراپاسکال، چگالی 2/24 گرم بر سانتی‌متر مکعب، قطر 1/1 نانومتر و ضخامت مؤثر 0/342 نانومتر در نظر گرفته شده است [13]. شکل 1 شمایی از سیستم مورد بررسی و بررسی پارامترهای موجود در مقاله را نشان می‌دهد. در شکل 2 پاسخهای بدست‌آمده از روش اول و دوم برای تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو طرف و برای توان‌های کسری متفاوت با هم مقایسه می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پاسخها مخصوصاً پس از طی یک بازه زمانی، مطابقت قابل قبولی با یکدیگر دارند و این می‌تواند نشان‌دهنده دقت پاسخهای بدست‌آمده باشد. در این شکل پارامتر غیرموضعی 0/05 و ضریب ویسکوالاستیسیته 0/03 در نظر گرفته شده‌اند. تأثیر توان کسری نیز روی دامنه ارتعاشی تیر کاملاً مشهود است و مشاهده می‌شود که با افزایش این پارامتر بیشینه دامنه سیستم به‌طرز قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

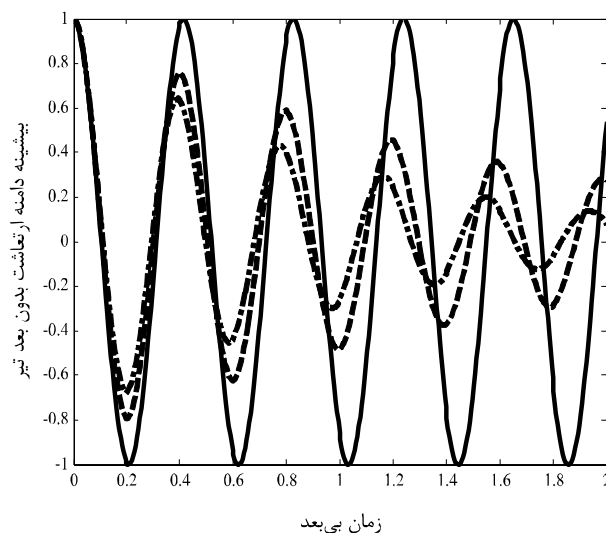
در شکل 3 تأثیر پارامتر غیرموضعی بر رفتار سیستم تحت شرایط مرزی مختلف مطالعه شده است. در این شکل با ثابت در نظر گرفتن ضریب ویسکوالاستیک 0/03 و توان کسری 0/5 مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر غیرموضعی سیستم با سرعت کمتری میرا می‌شود و در واقع فرکانس سیستم کاهش می‌یابد ولی این پارامتر تأثیر قابل ملاحظه‌ای در مقدار کاهش دامنه در هر دوره زمانی ندارد. در واقع پارامتر موضعی را باید با انطباق داده‌های مدل محیط پیوسته و نتایج تجربی یا شبیه‌سازی دینامیک مولکولی بدست آورد و در اینجا منظور بررسی مقداری اثر پارامتر موضعی بر روی رفتار نانوتیر می‌باشد. با مشاهده نتایج بدست‌آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی [22] نتیجه می‌شود که حضور پارامتر غیرموضعی و افزایش آن باعث افزایش نرمی سیستم و کاهش فرکانس سیستم می‌شود. توجه به معادلات (14) و (16) هم این نتیجه را می‌دهد که پارامتر غیرموضعی باعث کاهش سختی یا افزایش اینرسی سیستم می‌شود.



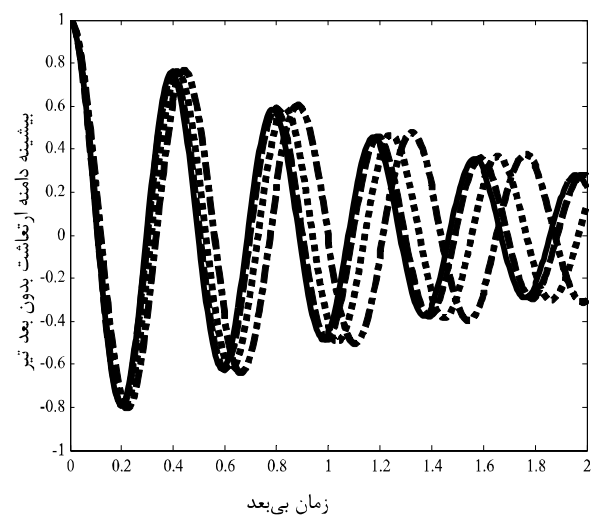
شکل 4- الف پاسخ زمانی سیستم برای ضرایب ویسکوالاستیک مختلف، گیردار - گیردار



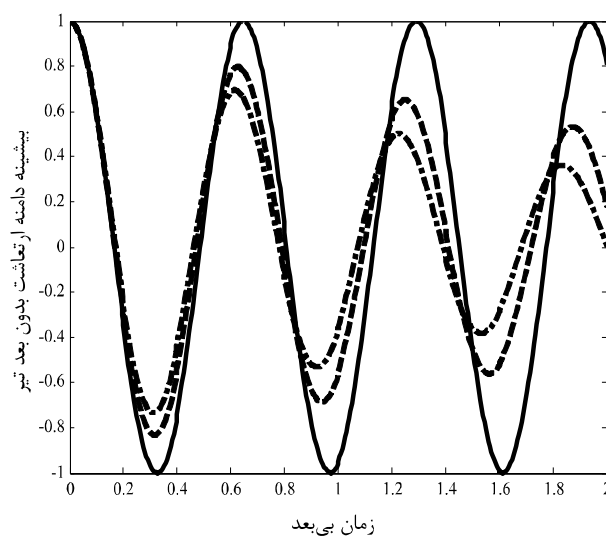
شکل 3- الف پاسخ زمانی سیستم برای پارامترهای غیرموضعی مختلف، گیردار - گیردار



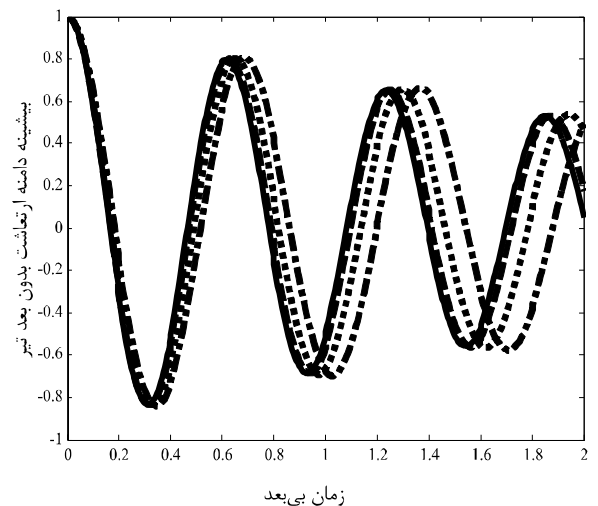
شکل 4- ب پاسخ زمانی سیستم برای ضرایب ویسکوالاستیک مختلف، گیردار - ساده



شکل 3- ب پاسخ زمانی سیستم برای پارامترهای غیرموضعی مختلف، گیردار - ساده



شکل 4- پ پاسخ زمانی سیستم برای ضرایب ویسکوالاستیک مختلف، ساده - ساده



شکل 3- پ پاسخ زمانی سیستم برای پارامترهای غیرموضعی مختلف، ساده - ساده

### 5- نتیجه گیری و جمع بندی

در یکی از روش‌ها از گلرکین برای گسسته‌سازی معادلات در حوزه مکان استفاده شده است و معادله حاصل با استفاده از یک روش عددی انتگرال‌گیری مستقیم در نرم‌افزار متلب مدل شده است.

در این پژوهش با ترکیب تئوری‌های غیرموضعی و ویسکوالاستیسیت کسری، و به‌کارگیری اصل همپلتون، معادله مربوط به ارتعاشات نانوتیر اویلر-برنولی استخراج شده است. این معادله با استفاده از دو روش، در حوزه زمان حل شده‌اند.

بدست آمده است.

در ادامه تأثیر پارامترهای مختلف مانند ضریب ویسکوالاستیک و توان کسری در پاسخ‌های بدست‌آمده بررسی شده است. با مقایسه پاسخ‌ها مشاهده شد که با افزایش پارامتر غیرموضعی سیستم با سرعت کمتری میرا می‌شود و در واقع فرکانس سیستم کاهش می‌یابد، ولی این پارامتر تأثیر قابل ملاحظه‌ای در مقدار کاهش دامنه در هر دوره زمانی ندارد. همچنین با افزایش ضریب ویسکوالاستیسیته، در عین حال که تیر میرایی پیدا می‌کند، دوره ارتعاشات آن نیز کاهش می‌یابد و در واقع فرکانس سیستم افزایش می‌یابد. در انتها مشاهده شد که با افزایش توان کسری از صفر تا یک میراثوندگی سیستم نیز افزایش می‌یابد و در هر دوره زمانی مقدار بیشتری از دامنه سیستم کاهش می‌یابد.

## 6- فهرست علائم

$A$	سطح مقطع تیر
$e0a$	پارامتر غیرموضعی
$L$	طول تیر
$\rho$	چگالی تیر

## 7- پیوست

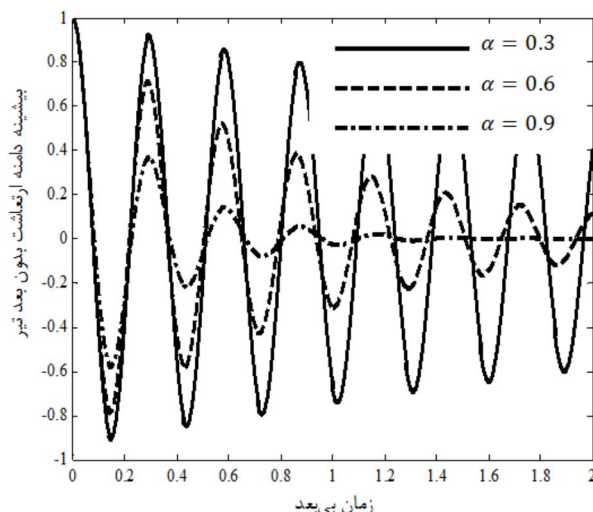
اگر  $A$  یک بردار  $n \times 1$  و  $B$  یک بردار  $m \times 1$  باشد ضرب برداری بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ a_3 B \\ \vdots \\ a_n B \end{bmatrix}$$

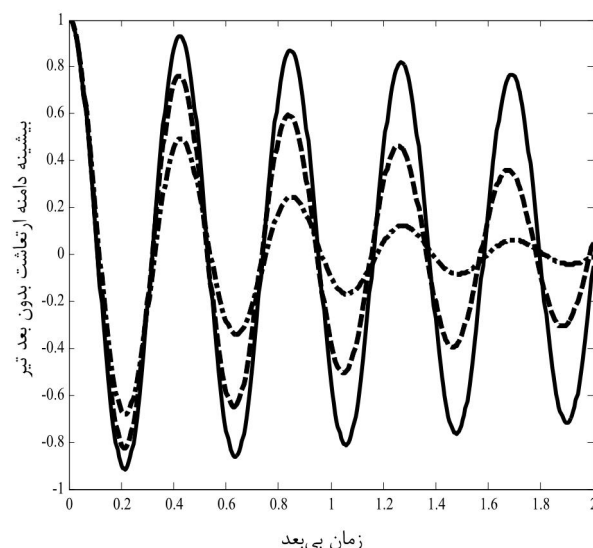
که یک ماتریس  $n \times m$  را نتیجه می‌دهد.

## 8- مراجع

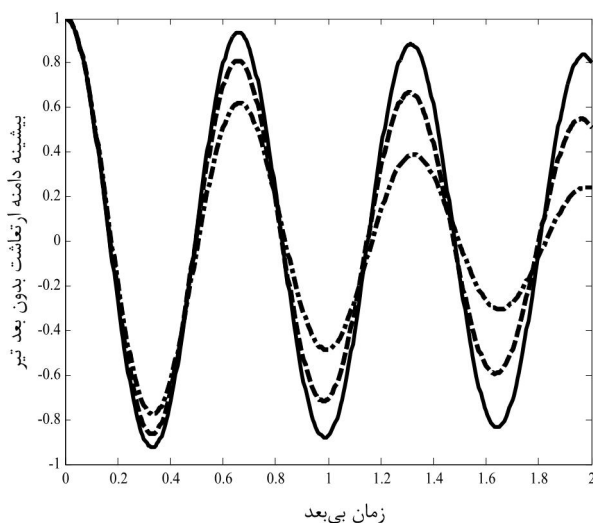
- [1] S. Naguleswaran, Transvers vibrations of an Euler-Bernoulli uniform beam carrying several particles, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 44, No. 12, pp. 2463-2478, 2002.
- [2] S. Xu, X. Wang, Free vibration analysis of Timoshenko beams with free edges by using the discrete singular convolution, *Advances in Engineering Software*, Vol. 42, Issue. 10, pp. 797-806, 2011.
- [3] RM. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, New York: Academic Press, 1982.
- [4] L. B. Eldred, W. P. Baker, and A. N. Palazotto, Kelvin-Voigt vs fractional derivative model as constitutive relations for viscoelastic materials, *AIAA Journal*, Vol. 33(3), pp. 547-550, 1995.
- [5] I. Podlubny, *Fractional differential equations, Mathematics in science and engineering*, Vol. 198, San Diego: Academic Press, 1999.
- [6] T. Usuki, T. Suzuki, Dispersion curves for a viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivatives, *Journal of Sound and Vibration* 331, pp. 605-621, 2012.
- [7] S. Sorrentino, A. Fasana, Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models, *Journal of Sound and Vibration* 229, pp. 839-853.
- [8] L. Q. Chen, W. J. Zhao, J. W. Zu, Transient responses of an axially accelerating viscoelastic string constituted by a fractional differentiation law, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 278, pp. 861-871, 2004.
- [9] F. Zhao, M. Wang, Vibration analysis of an axially moving viscoelastic beam, *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 268-270, pp. 1177-1181, 2013.
- [10] Q. Yan, Z. Su, Free vibration of elastic Timoshenko beam on fractional derivative Winkler viscoelastic foundation, *Advanced Materials Research*, Vols. 368-373, pp. 1034-1037, 2012.
- [11] M. Habibnejad Korayem, A. M. Shafei, M. Doosthoseini, B. Kaddhodaie, Dynamic modeling of visco-elastic robotic manipulators using Timoshenko beam theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 131-139, 2013. (In Persian)
- [12] E. Ghanavloo, S. Ahmad Fazelzadeh, Flow-thermoelastic vibration and instability analysis of viscoelastic carbon nanotubes embedded in viscous fluid, *Physica E*, Vol. 44, pp. 17-24, 2011.



شکل 5- الف پاسخ زمانی سیستم برای توان‌های کسری مختلف، گیردار- گیردار



شکل 5- ب پاسخ زمانی سیستم برای توان‌های کسری مختلف، گیردار- ساده



شکل 5- پ پاسخ زمانی سیستم برای توان‌های کسری مختلف، ساده- ساده

در روش دیگر معادله حاکم بر سیستم با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل تعمیم‌یافته در حوزه مکان و روش تفاضلات محدود در حوزه زمان گسسته شده است و پاسخ زمانی تیر ویسکوالاستیک کسری تحت شرایط مرزی مختلف

- [19] R. Bellman, Differential quadrature: A technique for rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.
- [20] L. Fawang, M. M. Meerschaert, R. J. McGough, ZH. Pinghu, L. Qingxia, Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation, *Journal of Fractional Calculus and Applied analysis*. Vol. 16, No 1, pp. 9-25, 2013.
- [21] Zh. Pinghui and L. Fawang, Finite difference approximation for two-dimensional time fractional diffusion equation. *Journal of Algorithms & Computational Technology* 1(1), pp. 1-15, 2007.
- [22] R. Ansari, A. Arjangpay, Nanoscale vibration and buckling of single-walled carbon nanotubes using the meshless local Petrov-Galerkin method, *Physica E* 14, pp. 229-269, 2014.
- [13] Y. Lei, S. Adhikari, M.I. Friswell, Vibration of nanlocal Kelvin-Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams, *International Journal of Engineering Science* 66-67, pp. 1-13, 2013.
- [14] W.Grzesikiewicz, A. Wakulicz, A. Zbiciak, Non-linear problems of fractional calculus in modelling of mechanical systems, *International Journal of Mechanical Science* 70, pp. 90-98, 2013.
- [15] A. Nayfeh, *Nonlinear oscillations*, New York: John Wiley, 1979.
- [16] [16] M.H. Kahrobaiyan, M. Asghari, M. Rahaeifard, M.T. Ahmadian, A nonlinear strain gradient beam formulation, *International Journal of Engineering Science* 49, pp. 1256-1267, 2011.
- [17] TT. Hartley, CF. Lorenzo, HK. Gammer, Chaos in fractional order chua's system, *IEEE Trans CAS-I*, pp. 85-90, 1995.
- [18] A. Charef, H. H. Sun, Y. Y. Tsao, B. Onaral, Fractional system as represented by singularity function, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 9, pp. 1465-1470, 1992.