مجله مهندسی مکانیک مدرس، مرداد 1394، دوره 15، شماره 5، ص‌ص 238-244

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

فرکانس تشدید محیط آکوستیکی بین دو کره ناهم‌مرکز

یاسر میرزایی[1*]، سید محمد هاشمی نژاد[2]، حسام موسوی اکبرزاده[3]

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، دماوند

2- استاد ،مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، اسلامشهر

* دماوند، صندوق پستی 194/39715، mirzaei@damavandiau.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 15 دی 1393
پذیرش: 20 بهمن 1393
ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلید واژگان:
فرکانس تشدید
آکوستیک
کره ناهم‌مرکز

چکیده

با بکارگیری تئوری الاستیسیته خطی سه بعدی، محیط آکوستیکی کروی که در آن کره دیگری بصورت ناهم‌مرکز واقع شده است مدل گردید. شرایط مرزی بر روی کره خارجی و کره ناهم‌مرکز داخلی بصورت شرط مرز نیومن در نظر گرفته شده است. توابع جمع برداری انتقالی امواج کروی همراه با روش جداسازی متغیرها بکار گرفته شد تا شرط مرزی نیومن بر روی مرز کره داخلی و مرز کره خارجی اعمال گردد. با اعمال شرایط مرزی و بدست آوردن مسأله مقدار ویژه، نهایتاً معادله فرکانسی از صفر کردن دترمینان ماتریسی با درایه‌های تابع بسل کروی حاصل می‌شود. در محیط آکوستیکی کروی با حفره هم مرکز بعلت تقارن هندسی، در برخی فرکانس‌های رزونانس، تکرار فرکانس‌های رزونانس دیده می‌شود. خارج از مرکز شدن حفره تأثیرات متفاوتی بر فرکانس‌های رزونانس دارد که بستگی به پارامترهای هندسی مسأله دارد. نتایج عددی مبسوطی برای مسائل پیشنهادی دارای نسبت شعاع داخلی به خارجی متفاوت ارائه گردید. نتایج عددی نحوه تأثیر خارج از مرکز شدن حفره بر خصوصیات فرکانسی محیط آکوستیکی کره ناهم‌مرکز فوق را بصورت کیفی و کمی مورد بررسی قرار می‌دهد. پدیده‌های خوشه فرکانسی (چندین مد آکوستیکی با فرکانس رزونانس برابر) ، چند شاخه شدن خوشه‌های فرکانسی و جابه‌جا شدن مدهای آکوستیکی ملاحظه گردید.

Resonance Frequency of Acoustic Eccentric Hollow Sphere

Yaser Mirzaei[1*], Seyyed Mohammad Hasheminejad[2], Hessam Mousavi-Akbarzadeh[3]

1-Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Damavand, Iran.
2-Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran,Iran.
3-Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Eslamshahr, Iran
* P.O.B. 194/39715 Damavand, Iran, mirzaei@damavandiau.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 05 January 2015
Accepted 09 February 2015
Available Online 04 April 2015

Keywords:
Resonance Frequency
Acoustic
Eccentric Hollow Sphere

ABSTRACT

An exact three-dimensional elastodynamic analysis for describing the acoustic resonance frequencies of an acoustic eccentric hollow sphere is derived. The Neumann boundary conditions for inner and outer sphere are considered. The translational addition theorem for spherical vector wave functions is employed to enforce Neumann boundary conditions. The frequency equations in the form of exact determinantal equations involving spherical Bessel functions and Wigner 3j symbols are obtained. Due to geometric symmetry for spherical cavity with inner concentric sphere, multiple degenerate acoustic resonance frequencies occurred. According to the geometry parameters and frequency number, introduction of eccentricity has a different effect on the acoustic resonance frequency shift. Extensive numerical results have been carried out for acoustic resonance frequency of selected inner-outer radii ratios in a wide range of cavity eccentricities. The numerical results describe the imperative influence of cavity eccentricity and radii ratio on the resonance frequency of the acoustic hollow sphere. Some phenomena such as diminishing degenerate resonance frequency, increase in the number of resonant frequencies through the splitting of degenerate modes and exchanging the mode of resonance frequencies are demonstrated and discussed.

1- مقدمه

یکی از پارامترهای تأثیر گذار در محیط‌های آکوستیکی محصور شده بوسیله مرزهای معین، فرکانس‌های رزونانس محیط آکوستیکی است که مقدار آن وابسته به شکل و ابعاد فضا است. در صورتی که فرکانس منبع صوتی برابر با فرکانس رزونانس باشد آنگاه دامنه پاسخ آکوستیکی به منبع صوتی می‌تواند بشدت افزایش یابد.

در شکل مد متناسب با هر فرکانس رزونانس، نقاط فشار ماکزیمم(آنتی‌گره[1]) و نقاط فشار صفر(گره[2]) مشاهده می‌شود. در صورتی که منبع صوتی با فرکانسی برابر با فرکانس رزونانس، در مکان آنتی گره قرار گیرد پاسخ دارای بیشترین دامنه خواهد بود و اگر در مکان گره قرار گیرد پاسخی در فضا وجود نخواهد داشت. در فضاهایی با دیوار سخت، آنتی گره روی دیوار یا گوشه ها اتفاق میافتد.

با بررسی منابع علمی در زمینه محاسبه تابع موج و فرکانس تشدید برای محیط آکوستیکی مشاهده می‌گردد که به واسطه کاربردهای آن در اتاق آکوستیک [1] ، اندازه گیری با دقت بالا برای سرعت صوت در گازها [2] و

1- antinodes

2- nodes

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
Y. Mirzaei, S.M. Hasheminejad, H. Mousavi-Akbarzadeh, Resonance Frequency of Acoustic Eccentric Hollow Sphere, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 5, pp. 238-244, 2015 (In Persian)

شناوری آکوستیکی [4،3] همواره مورد توجه محققین بوده است.

حل دقیق مسائل با استفاده از الاستیسیته سه‌بعدی، نه تنها حل قابل اعتمادی را ارائه می‌کند بلکه تشخیص خصوصیات فیزیکی مسأله را نیز بهتر می‌کند [5]. متأسفانه حل الاستیسیته سه بعدی دقیق فقط برای بعضی شکل‌های پایه و شرایط مرزی خاص انجام پذیر است. در نتیجه ، بسیاری از روش‌های تقریبی همانند روش اجزاء محدود [6] ، روش المان‌های مرزی [7] و روش ریتز [8] در طول سال‌ها بکار گرفته شده‌اند.

حل تحلیلی مسایل مقدار مرزی در زمینه‌های مختلفی همچون تئوری پتانسیل، الاستودینامیک، آکوستیک و الکترومغناطیس وابسته به شکل مرز مورد نظر است. مخصوصا هنگامی که چند مرز در محیط موج باشند. این مرزها در اثر موج‌های پراکنده شده بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند. اساس حل تحلیلی برای مسایلی که دارای دو یا چند مرز کروی هستند و مرکز این مرزهای کروی یکی نیست توسط فریدمن و راسک [9]، استین [10] و کروزان [11] ارائه شد. آن‌ها قضیه جمع انتقالی امواج کروی بین دو دستگاه محور مختصات کروی را ارائه کردند. سپس تعدادی پژوهشگر حل تحلیلی مسائل درارتباط با هندسه کروی ناهم‌مرکز را مورد مطالعه قرار دادند. در این میان گلوچان [12] با استفاده از قضیه جمع انتقالی امواج کروی ارتعاشات اجباری و متقارن محوری کره الاستیک دارای حفره کروی خارج از مرکز را تحت فشار خارجی یکنواخت بررسی کرد. کنلوپولوس و فیکیوریس [13] با استفاده از قضیه جمع انتقالی امواج کروی و معادلات انتگرالی منفرد صفحه‌ای[1] ، فرکانس‌های طبیعی محیط آکوستیکی بین دو کره ناهم‌مرکز را بدست آوردند. روملوتوس و همکارانش [14] و همچنین روملوتوس و کنلوپولوس [15] محیط آکوستیکی بین دو کره ناهم‌مرکز را در نظر گرفته و تأثیر خروج از مرکز کره کوچک را بر فرکانس آکوستیکی مورد مطالعه قرار داده و با استفاده از روش اختلال[2] ، برای آن یک رابطه تحلیلی ارائه کردند. روملوتوس و همکارنش [16] از روابط جمع انتقالی امواج کروی بین دو دستگاه محور مختصات کروی استفاده کرد و فرکانس تشدید برای محیط کروی الکترومغناطیس که یک کره هادی بصورت ناهم‌مرکز در آن قرار داده شده است را بدست آورد. روملوتوس و همکارانش [17] از روش جداسازی متغییرها همراه با قضیه برداری جمع انتقالی امواج کروی استفاده کردند تا پراکنش امواج الکترومغناطیس را از کره رسانا یا نارسانا که بصورت ناهم‌مرکز کره نارسانایی در آن وجود دارد را مورد بررسی قرار دهند. چارالامبوپولوس و همکارانش [18] جمجمه سر را با استفاده از کره الاستیکی که سطوح کروی داخلی و خارجی آن ناهم‌مرکز هستند مدل کردند. آن‌ها با استفاده از سیستم مختصات دو کروی و تئوری الاستیسیته تأثیر تغییر ضخامت را بر فرکانس‌های طبیعی کره مورد بررسی قرار دادند. حل آن‌ها فقط برای فرکانس‌های مربوط به مدهای متقارن محوری و همچنین مقدار بسیار کمی خروج از مرکز قابل استفاده می باشد. اندیو و چریسلدیس [19] حل دقیقی برای پراکنش امواج الکترومغناطیس از کره‌ی که درون آن تعدادی کره کوچکتر وجود دارد را مورد مطالعه قرار دادند.

بررسی‌های فوق به وضوح نشان می‌دهد در حالی که تأثیرات خارج از مرکز شدن تحت تأثیر خطاهای ابعادی یا حفره داخلی خارج از مرکز بر خصوصیات آکوستیکی و ارتعاشی سازه های مختلف مورد بررسی واقع شده است و در این راستا حل عددی و یا نیمه تحلیلی با بعضی فرضیات ساده شونده همانند کوچک بودن حفره داخلی ارائه گردیده است، اما به نظر می‌رسد حل دقیق تحلیلی جهت محاسبه فرکانس تشدید برای محیط آکوستیکی بین دو کره ناهم‌مرکز بدون فرضیات ساده شونده بر پایه قضیه جمع انتقالی امواج کروی و روش جداسازی متغیرها ارائه نشده است. بر این اساس ، هدف اصلی از مقاله به کار گیری تئوری الاستیسیته خطی سه بعدی، قضیه جمع انتقالی امواج کروی و روش جداسازی متغیرها جهت ارائه راه حل تحلیلی برای محاسبه فرکانس تشدید برای محیط آکوستیکی بین دو کره ناهم‌مرکز می‌باشد. راه حل‌های سه بعدی ارائه شده می‌تواند یک راهنمای ارزشمند برای مهندسین طراحی در ارزیابی اثرات تغییر خروج از مرکز حفره های داخلی در پاسخ فرکانسی اجزاء ساختاری اینچنینی در کاربردهای مختلف فیزیکی و فن آوری بحساب آید [20]. همچنین طیف فرکانس‌های تشدید نه تنها خصوصیات فیزیکی مسأله را مشخص می‌کند بلکه می‌تواند به عنوان محک برای ارزیابی راه حل‌های دیگر (به دست آمده توسط روش های جدید محاسباتی و یا روش های مجانبی) مورد استفاده قرار گیرد. همچنین از نتایج حاصله می‌توان جهت جانمایی رزوناتورهای کروی در محیط آکوستیکی کروی استفاده نمود و تأثیرات ناشی از خارج مرکز شدن رزوناتور را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.

2- معادلات و روابط پایه

انتشار امواج صوتی در سیالاتی همانند آب یا هوا می‌تواند بوسیله معادلات حرکت (قانون بقای اندازه حرکت) و معادلات پیوستگی (قانون بقای جرم) مدل شود. معادلات بقای اندازه حرکت خطی و بقای جرم برای سیال آکوستیکی بصورت رابطه (1) است [21]:

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla p = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + k\,\nabla \cdot V = 0 \qquad (1)$$

که $p(x,t)$ فشار آکوستیکی، $V(x,t)$ بردار سرعت سیال آکوستیکی، ρ_0 چگالی جرمی استاتیکی محیط و $K = \rho_0 c_p^2$ مدول بالک محیط می‌باشند.

با فرض غیر چرخشی بودن میدان سرعت در محیط آکوستیکی ($\nabla \times V = 0$)، معادله امواج آکوستیکی بصورت ترکیبی از دو معادله بقاء بصورت رابطه (2) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - c_p^2 \nabla^2 V = 0 \qquad (2)$$

معادله آکوستیکی موج بر حسب تابع پتانسیل φ با فرض $V = \nabla\varphi$ بصورت رابطه (3) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_p^2 \nabla^2 \varphi = 0 \qquad (3)$$

برای بدست آوردن فرکانس تشدید، با فرض هارمونیک بودن پاسخ $\varphi(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$، مسأله مقدار ویژه (4) بدست می‌آید:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \qquad (4)$$

که $k = c_p \omega$ است. معادله بالا به معادله هلمهولتز معروف است و در صورتی که $k = 0$ شود به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود. حل معادله فوق در سیستم مختصات کروی بصورت رابطه (5) است [21]:

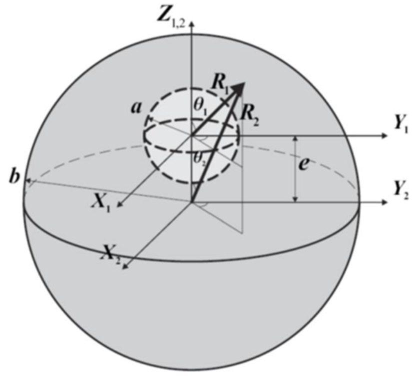
$$\varphi(r,\theta,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(a_{nm}\, j_n(kr) + b_{nm} y_n(kr)\right) p_n^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad (5)$$

که $p_n^m(\cos\theta)$ چند جمله ای لژاندر اصلاح شده، $j_n(kr)$ تابع بسل کروی مرتبه اول و $y_n(kr)$ تابع بسل کروی مرتبه دوم است.

3- بسط میدان پتانسیل و اعمال شرایط مرزی

هندسه مسأله و دو سیستم محور مختصات کروی (r_1,θ_1,β_1) و (r_2,θ_2,β_2) در شکل 1 نمایش داده شده است.

1- surface singular integral equations
2- shape perturbation method



شکل 1 هندسه مسأله

هر دو سیستم محور مختصات برای نقطه اختیاری "P" در فضای آکوستیکی مورد نظر، دارای زاویه محیطی یکسان $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ می‌باشند، همچنین فاصله دو مرکز سیستم مختصاتها برابر با e است.

حل معادله موج در کره ناهم‌مرکز را بر حسب محور مختصات (r_1, θ_1, β) می توان بصورت (6) نوشت [22].

$$\varphi(r_1,\theta_1,\beta,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(a_{nm}L_{mn}^{[1]}(r_1,\theta_1,\beta,k) + b_{nm}L_{mn}^{[2]}(r_1,\theta_1,\beta,k)] \quad (6)$$

a_{nm} الی b_{nm} ثوابت نامشخص مودال هستند و $L_{mn}^{[j]}(r_j,\theta_j,\beta,k)$ در (7) آورده شده است [22].

$$L_{mn}^{[i]}(r_i,\theta_i,\beta,k) = \begin{cases} j_n(kr_i)p_n^m(\cos\theta_i)\ e^{im\beta} & i = 1 \\ y_n(kr_i)p_n^m(\cos\theta_i)\ e^{im\beta} & i = 2 \end{cases} \quad (7)$$

فرکانس رزونانس $\omega = k/c_p$ و ثوابت نامعلوم فوریه را می‌توان با اعمال شرایط مرزی مناسب بدست آورد، بنابراین با فرض شرایط مرزی نیومن برای سطوح داخلی حفره و خارجی کره می‌توان نوشت:

$$\partial\varphi/\partial r(r_1 = a,\theta_1,\beta,k) = 0 \quad (8)$$

$$\partial\varphi/\partial r(r_2 = b,\theta_2,\beta,k) = 0 \quad (9)$$

در معادله (8) با استفاده از معادله (6) و همچنین خاصیت عمود بر هم بودن توابع هارمونی کروی و انجام عملیات ریاضی می‌توان معادله (10) را در $r_1 = a$ بدست آورد.

$$a_{nm}\ S_n(ka) + b_{nm}Q_n(ka) = 0 \quad (10)$$

از طرف دیگر ارضا دقیق شرط مرزی (9) مشکل‌تر است که در بخش بعد با توجه به روابط برداری جمع انتقالی امواج برداری کروی به آن پرداخته می‌شود، و همچنین $S_n(kr) = \frac{\partial j_n(kr)}{\partial r}$ و $Q_n(kr) = \frac{\partial y_n(kr)}{\partial r}$ است.

4- روابط برداری جمع انتقالی امواج کروی

جهت اعمال شرط مرزی در سطح خارجی کره، از روابط ریاضی برای بیان امواج آکوستیکی از دستگاه محور مختصاتی کروی به دستگاه محور مختصات کروی دیگری استفاده می‌گردد. این روابط را قضیه برداری جمع انتقالی امواج کروی می‌گویند. یکی از نکات اساسی این روابط این است که امواج آکوستیکی عمود بر هم، به روابطی عمود بر هم تبدیل می‌شود. با استفاده از فرمولبندی کروزان [11] در قضیه برداری جمع انتقالی توابع امواج کروی، می‌توان حل معادله هلمهولتز در سیستم مختصات (r_1, θ_1, β_1) (یعنی معادله (5)) را در سیستم محور مختصات (r_2, θ_2, β_2) بیان کرد.

با توجه به اینکه دو سیستم مختصات دارای محور z یکسان می‌باشند، می‌توان بعد از مقداری عملیات ریاضی فرمولبندی کروزان را برای مسأله داده شده بصورت ساده شده (11) نوشت:

$$L_{mn}^{[j]}(r_1,\theta_1,\beta,k) = \sum_{\nu=m}^{\infty} Z_{m\nu}^{mn}(e,k)L_{mn}^{[j]}(r_2,\theta_2,\beta,k) \quad (11)$$

که $r_2 > e$، $j = 1,2$ است. عبارت‌های مرتبط با $Z_{m\nu}^{mn}(e,k)$ در (12) آورده شده‌اند.

$$Z_{m\nu}^{mn}(e,k) = \sum_{\sigma=|n-\nu|}^{\nu+n,2}(-\mathrm{i})^{\sigma}(2\nu+1)\bar{a}(m,n,-m,\sigma)\,j_{\sigma}(ke) \quad (12)$$

در آن

$$\bar{a}(m,n,-\mu,\nu,\sigma) = (-1)^m\sqrt{(2\sigma+1)(2\nu+1)(2n+1)/(4\pi)} \times \begin{bmatrix} n & \nu & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n & \nu & p \\ -m & \mu & m-\mu \end{bmatrix}$$

که $\begin{bmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & q \end{bmatrix}$ نماد وینگر است.

بنابراین معادله (11) را می‌توان در معادله (6) استفاده کرد و میدان پتانسیل را در سیستم مختصات (r_2, θ_2, β_2) بدست آورد:

$$\varphi(r_2,\theta_2,\beta,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(A_{nm}(e,k)L_{mn}^{[1]}(r_2,\theta_2,\beta,k) + B_{nm}(e,k)L_{mn}^{[2]}(r_2,\theta_2,\beta,k)) \quad (13)$$

عبارت‌های مرتبط با ضرایب $A_{nm}(e,k)$ و $B_{nm}(e,k)$ برابر است با :

$$A_{nm}(e,k) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_{\nu m}Z_{mn}^{m\nu}(e,k)$$

$$B_{nm}(e,k) = \sum_{\nu=m}^{\infty} b_{\nu m}Z_{mn}^{m\nu}(e,k) \quad (14)$$

هم اکنون با اتخاذ پروسه‌ای همانند ارضا شرط مرزی در سطح حفره، می‌توان شرط مرزی در سطح خارجی کره را نیز ارضا کرد، که نتیجه آن دسته معادلات کامل کننده در $r_2 = b$ خواهد بود:

$$A_{nm}(e,k)S_n(kb) + B_{nm}(e,k)Q_n(kb) = 0 \quad (15)$$

که $n = m, m+1, m+2 \dots$ است.

با حل همزمان معادلات (10) و (15) خصوصیات آکوستیکی مساله بدست می‌آید، برای هر $m \geq 0$ چرخش ایندکس n، از m تا بینهایت خواهد بود، جهت حل مسأله مقدار ویژه، تعداد محدودی از معادلات (10) و (15) همزمان حل می‌گردد.

بدین منظور در معادله (10) و (15) به ازای هر m دلخواه، از هر یک N معادله (با چرخش n از m تا N) استخراج می‌گردد، همچنین در معادله (14) اندیس ν از m تا N در نظر گرفته شده است. بنابراین بی‌نهایت معادله و بی-نهایت مجهول مذکور بصورت معادله ماتریسی (16) بدست خواهد آمد.

$$T_m c_m = 0 \quad (16)$$

T_mماتریسی مربعی است که درآیه‌های آن پارامترهایی وابسته به فرکانس هستند و c_m بردار مودال است که بفرم زیر می‌باشد.

$$c_m = [a_{mm}, b_{mm}; a_{(m+1)m}, b_{(m+1)m}; \cdots; a_{(m+N)m}, b_{(m+N)m}]^{\mathrm{T}}$$

در نهایت معادله فرکانسی با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس، $|T_m|$ حاصل می‌گردد، فرکانس رزونانس با ریشه‌یابی معادله فرکانسی مورد نظر، بدست خواهد آمد، مقدار Nجهت محاسبه نتایج عددی 30 در نظر گرفته شده است.

5- نتایج عددی

در این قسمت طیف فرکانس‌های رزونانس کره با حفره کروی ناهم‌مرکز برای سه نسبت شعاع خارجی به داخلی 0/2 ، 0/5 و 0/9 نسبت به تغیرات خروج از مرکز نمایش داده شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

جهت صحت‌سنجی روش حل، از نرم افزار اجزاء محدود[1] استفاده گردید.

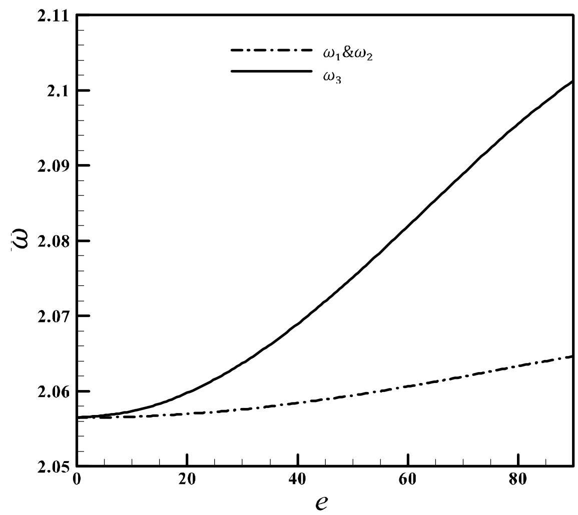
1- ABAQUS

محیط آکوستیکی بین دو کره در دو حالت هم مرکز و حالت ناهم‌مرکز با خروج از مرکز 0/2 مدل گردید. شعاع کره داخلی برابر با 0/5 و شعاع کره خارجی برابر با 1 در نظر گرفته شد، همانطورکه در جدول 1 مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین فرکانس‌های رزونانس بی‌بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ بدست آمده از نرم افزار و حل دقیق (ارائه شده در مقاله حاضر) وجود دارد.

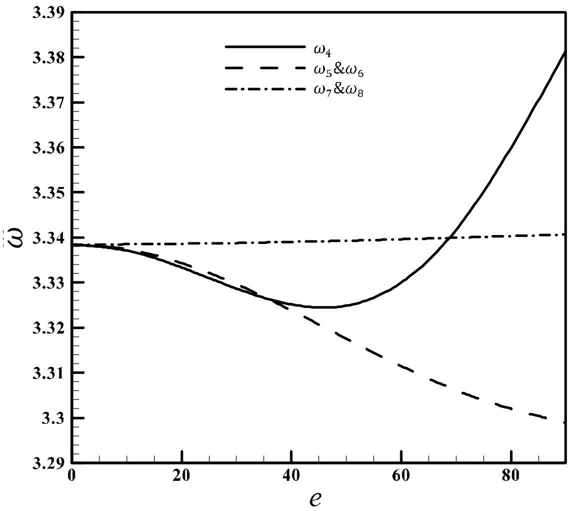
فرکانس رزنانس کره با حفره کروی هم‌مرکز داری دو عدد موج n ,m است که برای هر عدد موج n تعداد $2n + 1$ عدد موج m $(m = 0, \pm1, \dots, \pm n)$ وجود دارد و همگی دارای یک مقدار واحد فرکانس رزونانس می‌باشند و شکل مدهای آکوستیکی همه آن‌ها یکسان است که فقط نسبت به یکدیگر چرخیده اند، بعنوان نمونه برای عدد موج $n = 1$ سه عدد موج $m = 0$ و $m = -1$ و $m = 1$ وجود دارد که هر سه دارای فرکانس روزونانس واحد می‌باشند.

در شکل 2 تغیرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ اول، دوم و سوم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد $(100 \times \frac{R_o-R_i}{R_o})$ برای نسبت شعاع داخلی به خارجی $\frac{R_i}{R_o} = 0.2$ نشان داده شده است، که در آن c_p سرعت موج فشاری ، R_i , R_o بترتیب شعاع داخلی و خارجی کره می‌باشد، همانطور که مشخص است در خروج از مرکز صفر، به علت تقارن کره در 3 صفحه مختصات، سه فرکانس رزونانس اول بر روی هم قرار دارند بنابراین می‌توان گفت هر سه فرکانس داری شکل مد آکوستیکی یکسانی هستند که فقط نسبت به یکدیگر چرخیده اند، یکی از این سه فرکانس متناظر با $m = 0$ و دو فرکانس دیگر متناظر با $m = \pm1$ می‌باشند، پس از خارج از مرکز شدن کره به علت از بین رفتن تقارن در یکی از صفحات و حفظ شدن تقارن در دو صفحه دیگر، فرکانس متناظر با $m = 0$ از دو فرکانس متناظر با $m = \pm1$ جدا شده و هر چقدر میزان خروج از مرکز بیشتر می‌شود میزان جدا شدن این دو شاخه فرکانسی از یکدیگر بیشتر می‌شود.

در شکل 3 تغیرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ چهارم تا هشتم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد $(100 \times \frac{R_o-R_i}{R_o})$ برای نسبت شعاع داخلی به خارجی $\frac{R_i}{R_o} = 0/2$ نشان داده شده است، که در آن c_p سرعت موج فشاری، R_i , R_o بترتیب شعاع داخلی و خارجی کره می‌باشد، همانطور که در شکل 3 می‌بینید در حالت هم مرکز پنج فرکانس رزونانس متناظر با $n = 2$ وجود دارد که با یکدیگر برابر هستند که با خارج از مرکز



شکل 2 تغیرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده اول، دوم و سوم نسبت به میزان خروج از مرکز e به درصد برای نسبت شعاع داخلی به خارجی 0/2



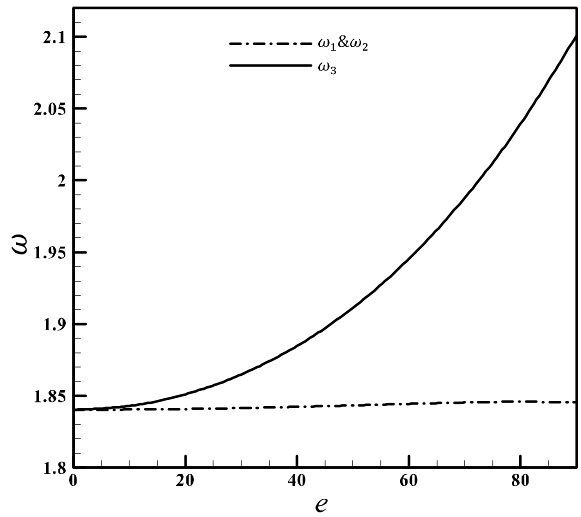
شکل 3 تغیرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده چهارم تا هشتم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد برای نسبت شعاع داخلی به خارجی 0/2

جدول 1 فرکانس رزونانس بی بعد شده برای محیط بین دو کره

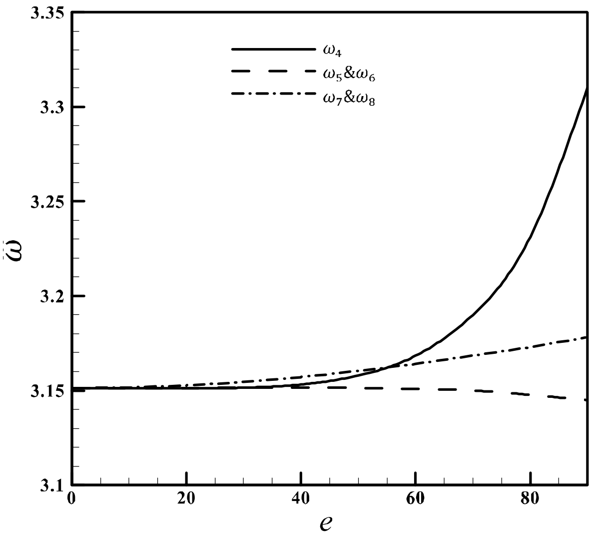
خروج از مرکز	روش حل	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم
0	اجزاء محدود	1/8402	1/8402	1/8402
	حل دقیق	1/8402	1/8402	1/8402
0/4	اجزاء محدود	1/84232	1/84232	1/88468
	حل دقیق	1/84231	1/84231	1/88468

شدن به سه شاخه تبدیل می‌شوند، تا قبل از خروج از مرکز حدود 35 درصد بترتیب مد آکوستیکی $n = 2$, $m = 0$ فرکانس چهارم، مدهای آکوستیکی $n = 2, m = \pm1$ فرکانس‌های پنجم و ششم و مدهای آکوستیکی $m = \pm2$, $n = 2$ فرکانس‌های هفتم و هشتم می‌باشد، در دو خروج از مرکز تقریبا 35 درصد و 75 درصد پدیده جابجا شدن مدها حاصل می‌گردد، این پدیده تحت تأثیر تغییر میزان سفتی سازه در مدهای مختلف نسبت به یکدیگر به علت تغییر میزان خروج از مرکز است، همانطور که می‌بینید در خروج از مرکز 35 درصد ترتیب فرکانس مد آکوستیکی $m = 0$ با مدهای آکوستیکی $m = \pm1$ جابجا می‌شود و ترتیب فرکانسها به این شکل میشود که مدهای آکوستیکی $n = 2, m = \pm1$ فرکانس چهارم و پنجم مد آکوستیکی $n = 2, m = 0$ فرکانس‌های ششم و مدهای آکوستیکی $n = 2$, $m = \pm2$ فرکانس‌های هفتم و هشتم می‌گردد، همچنین در خروج از مرکز 75 درصد ترتیب فرکانس مد آکوستیکی $m = 0$ با مد آکوستیکی $m = \pm2$ جابجا می‌شود و ترتیب فرکانس‌ها به این شکل می‌شود که مدهای آکوستیکی $n = 2, m = \pm1$ فرکانس چهارم و پنجم سپس مدهای آکوستیکی $n = 2, m = \pm2$ فرکانس‌های ششم و هفتم و سپس مد آکوستیکی $n = 2, m = 0$ فرکانس‌های هشتم می‌گردد.

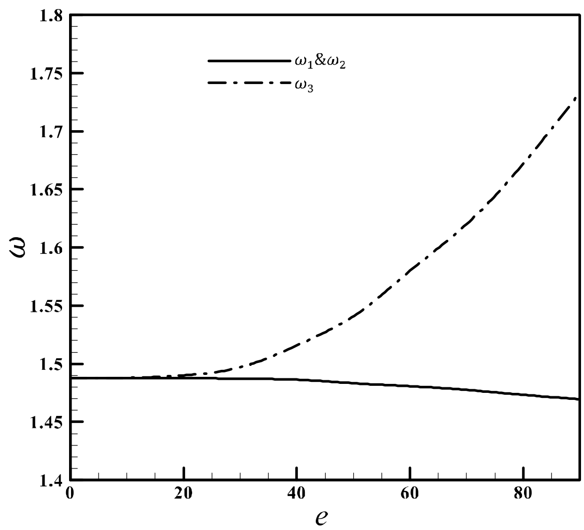
در شکل 4 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ اول تا سوم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد $(100 \times \frac{R_o-R_i}{R_o})$ برای نسبت شعاع داخلی به خارجی $\frac{R_i}{R_o} = 0/5$ نشان داده شده است، که در آن c_p سرعت موج فشاری ، R_i , R_o بترتیب شعاع داخلی و خارجی کره می‌باشد، همانطور که می‌بینید در حالت هم مرکز سه فرکانس رزونانس متناظر با $n = 1$ وجود دارد که با یکدیگر برابر هستند که با خارج از مرکز شدن به دو شاخه تبدیل می‌شوند، برای هر یک از شاخه های مقادیر عدد موج m متفاوت است و برای شاخه ω_3، $m = 0$ و برای شاخه دیگر $m = \pm1$ می‌باشد.



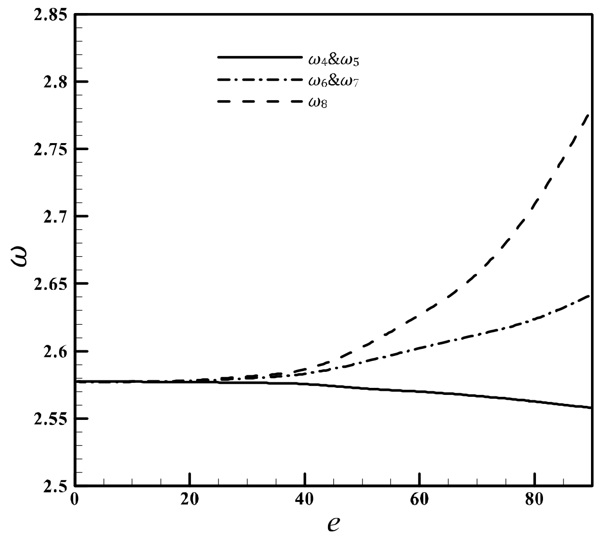
شکل 4 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده اول تا سوم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد برای نسبت شعاع داخلی به خارجی 0/5



شکل 5 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده چهارم تا هشتم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد برای نسبت شعاع داخلی به خارجی 0/5



شکل 6 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده اول تا سوم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد برای نسبت شعاع داخلی به خارجی 0/9



شکل 7 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده چهارم تا هشتم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد برای نسبت شعاع داخلی به خارجی 0/9

شاخه ω_3، متناظر با $m = 0$ تک فرکانس است و خط دیگر نشان دهنده دو فرکانس برابر برای هر موقعیت خروج از مرکز است. پدیده جابجا شدن مدها در دو شاخه ایجاد شده به نظر نمی‌رسد.

در شکل 5 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ چهارم تا هشتم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد $(\frac{R_o-R_i}{R_o} \times 100)$ برای نسبت شعاع داخلی به خارجی $\frac{R_i}{R_o} = 0/5$ نشان داده شده است، که در آن c_p سرعت موج فشاری ، R_i ، R_o بترتیب شعاع داخلی و خارجی کره می‌باشد. همانطور که می‌بینید در حالت هم مرکز پنج فرکانس رزونانس متناظر با $n = 2$ وجود دارد که با یکدیگر برابر هستند که با خارج از مرکز شدن به سه شاخه تبدیل می‌شوند. پدیده جابجا شدن مدها در سه شاخه ایجاد شده به نظر در دو خروج از مرکز حدودا 28 درصد و 57 درصد اتفاق میافتد، تا قبل از خروج از مرکز 28 درصد فرکانس مد آکوستیکی $m = 0$، فرکانس چهارم است و پس از 28 درصد تا قبل از 57 درصد فرکانس مد آکوستیکی $m = 0$، فرکانس ششم است و پس از 57 درصد فرکانس مد آکوستیکی $m = 0$، فرکانس هشتم است، غیر از خط نشان دهنده مد آکوستیکی $m = 0$ بقیه خطوط در هر مقدار از خروج از مرکز نشان دهنده دو فرکانس برابر هستند.

در شکل 6 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ اول تا سوم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد $(\frac{R_o-R_i}{R_o} \times 100)$ برای نسبت شعاع داخلی به خارجی $\frac{R_i}{R_o} = 0/9$ نشان داده شده است، همانطور که نشان داده شده است در حالت هم مرکز سه فرکانس رزونانس متناظر با $n = 1$ وجود دارد که با یکدیگر برابر هستند که با خارج از مرکز شدن به دو شاخه تبدیل می‌شوند، پدیده جابجا شدن مدها در دو شاخه ایجاد شده به نظر نمیرسد، غیر از مد آکوستیکی $m = 0$ ، ω_3 که نشان دهنده تک فرکانس است خط دیگر در هر مقدار از خروج از مرکز نشان دهنده دو فرکانس برابر است.

در شکل 7 تغییرات فرکانس‌های رزونانس بی بعد شده $(\frac{\omega R_o}{c_p})$ چهارم تا هشتم نسبت به میزان خروج از مرکز به درصد $(\frac{R_o-R_i}{R_o} \times 100)$ برای نسبت شعاع داخلی به خارجی $\frac{R_i}{R_o} = 0/9$ نشان داده شده است، همانطور که نشان داده شده است در حالت هم مرکز پنج فرکانس رزونانس متناظر با $n = 2$ وجود دارد

که با یکدیگر برابر هستند که با خارج از مرکز شدن به سه شاخه تبدیل می‌شوند، پدیده جابجا شدن مدها در سه شاخه ایجاد شده به نظر نمی‌رسد، غیر از مد آکوستیکی $m = 0$ (ω_8) که نشان دهنده تک فرکانس است خطوط دیگر در هر مقدار از خروج از مرکز نشان دهنده دو فرکانس برابر هستند.

6- نتیجه‌گیری

مدل سه بعدی برای توصیف خصوصیات فرکانسی محیط آکوستیکی کره ناهم‌مرکز استفاده شد. ابتدا حل دقیق معادلات موج برای تحلیل محیط آکوستیکی کره ناهم‌مرکز به همراه اعمال شرایط مرزی مناسب بر مبنای قضایای جمع انتقالی توابع موج کروی فرمول‌بندی شد. نتایج عددی مبسوطی برای طیف بسامدی مسائل پیشنهادی ارائه شده و در خصوص تغییرات چند خوشه اول فرکانس‌های رزونانس بر حسب پارامتر خروج از مرکز حفره بحث گردید، نتایج عددی نحوه تأثیر خارج از مرکز شدن حفره بر خصوصیات فرکانسی محیط آکوستیکی کره ناهم‌مرکز فوق را بصورت کیفی و کمی مورد بررسی قرار می‌دهد، مشاهدات مهم بصورت خلاصه در زیر آورده شده است.

در محیط آکوستیکی با حفره هم مرکز بعلت تقارن هندسی، در برخی فرکانس‌های رزونانس، تکرار فرکانس‌های رزونانس دیده می‌شود، خارج از مرکز شدن حفره تأثیرات متفاوتی بر فرکانس‌های رزونانس دارد که بستگی به پارامترهای هندسی مساله دارد، باوجود خارج از مرکز شدن حفره تقارن محوری کاملاً از بین نرفته است بنابراین تعدادی از فرکانس‌های تکراری از هم جدا شده و دارای فرکانس‌های مجزا می‌شوند و تعدادی تکراری باقی می‌مانند، علاوه بر اینکه با شروع خارج از مرکز شدن حفره جدا شدن فرکانس‌های تکراری رخ می‌دهد با زیادتر شدن خروج از مرکز ممکن است که شاخه‌های مختلف فرکانسی یکدیگر را قطع کرده و به نوعی تباهیدگی فرکانسی اتفاق افتد که با بیشتر شدن خروج از مرکز این فرکانس تکراری دوباره شروع به جدا شدن کرده و در حالت جدید ترتیب مدها نیز جابجا می‌شود، جابجا شدن ترتیب مدها با عبور از نقطه تقاطع را می‌توان اینگونه توضیح داد که با عبور از نقاط تقاطع سفتی سازه در مدهای مختلف، متفاوت تغییر کرده و ترتیب مدها جابجا می‌شود، در انتها مشاهده شد که منحنی مرتبط با مد تنفسی در همه گستره خروج از مرکز تک مقدار باقی ماند (بعبارت دیگر مد تنفسی دارای فرکانس تکراری نیست و همواره تک مقدار باقی می‌ماند).

در کره هم مرکز برای هر مقدار n و m، مدهای کاملا ناهمبسته هستند و بخاطر تقارن هندسه حول هر محوری، $n + 2m$ فرکانس کاملاً یکسان (تکراری) وجود دارد که به مقدار m بستگی ندارند، تأثیر پارامتر خروج از مرکز بر فرکانس رزونانس بستگی به مد مورد نظر و همچنین نسبت شعاع داخلی کره به شعاع خارجی آن دارد. با خارج از مرکز شدن حفره، $n + 1$ از $n + 2m$ فرکانس ابتدایی تکراری ، به فرکانس‌های مجزا تقسیم می‌شوند. با این وجود n فرکانس از $n + 1$ فرکانس مورد نظر تکراری باقی می‌مانند (n فرکانس دوبل)، به عبارت دیگر n جفت فرکانس وجود دارد که برای آنها $m \neq 0$ و یک تک فرکانس که برای آن $m = 0$ می‌باشد، توجه شود که برای مد تنفسی $n = 0$ فقط یک تک فرکانس وجود دارد که در کل گستره خروج از مرکز، تک مقدار باقی می‌ماند، بیشترین تغییر در اندازه فرکانس تحت اثر ناهم‌مرکز شدن، در بیشترین نسبت شعاعی رخ می‌دهد و اندازه فرکانس با زیاد شدن ضخامت پوسته افزایش می‌یابد، برای هر عدد مد n، مستقل از مقدار خروج از مرکز در کل $n + 2m$ مد آکوستیکی وجود دارد که به یکدیگر شبیه هستند و فقط نسبت به هم چرخیده اند، با خارج از مرکز شدن کره داخلی، $n + 1$ شکل مد کاملاً متفاوت با یکدیگر ایجاد خواهد شد که n شکل مد از آن‌ها، جفت مد (یعنی دارای فرکانس برابر هستند و از نظر شکل مد کاملاً یکسانند ولی نسبت بهم چرخیده‌اند) می‌باشند.

7- فهرست علائم

a	شعاع کره داخلی
a_{nm}	ضرایب مجهول
b	شعاع کره خارجی
c_p	سرعت انتشار موج طولی
e	مقدار خروج از مرکز
$j_n(kr)$	تابع بسل کروی مرتبه اول
K	مدول بالک محیط
k	عدد موج
m, n	شمارنده‌های شکل مد
$\begin{bmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & q \end{bmatrix}$	نماد وینگر
$p(x,t)$	فشار آکوستیکی
$p_n^m(\cos\theta)$	چند جمله ای لژاندر اصلاح شده
R_o	شعاع کره خارجی
R_i	شعاع کره داخلی
(r_1, θ_1, β_1)	سیستم محور مختصات کروی اول
(r_1, θ_1, β_1)	سیستم محور مختصات کروی دوم
$V(x,t)$	بردار سرعت سیال آکوستیکی
$y_n(kr)$	تابع بسل کروی مرتبه دوم

علایم یونانی

ρ_0	چگالی جرمی
ω	فرکانس موج
φ	تابع پتانسیل

8- تقدیر و تشکر

تحقیق فوق برگرفته از طرح پژوهشی حل دقیق فرکانس تشدید محیط آکوستیکی بین دو کره ناهم‌مرکز است که با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند اجرا شده است، بدین وسیله از آن واحد دانشگاهی تقدیر و تشکر بعمل می آید.

9- مراجع

[1] P.M . Morse and K . U. Ingard, *Theoretical Acoustics,* pp.687-780, NewYork: McGraw-Hill, 1968.

[2] M. R. Moldover, J. B. Mehl, and M.Greenspan, Gas-filled spherical resonators Theory and Experiment, *J The Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 79, pp. 253-272, 1986.

[3] M.Barmatz, Over view of containerless processing technologies, *MRS Proceedings*, Vol. 9, 1981.

[4] M. Barmatz and P. Collas, Acoustic radiation potentiaol on a sphere in plane, cylindrical, and spherical standing wave fields, *The Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 77, pp. 928-945, 1985.

[5] K.P. Soldatos, Review of three dimensional dynamic analyses of circular cylinders and cylindrical shells, *Applied Mechanics Reviews,* Vol .47 pp. 501–516, 1994.

[6] GR Buchanan, CBY Yii, Effect of symmetrical boundary conditions on the vibration of thick hollow cylinders. *Applied Acoustics,* Vol. 63 pp .547-566, 2002.

[7] Agnantiaris JP, Polyzos D, Beskos DE, Free vibration analysis of non-axisymmetric and axisymmetric structures by the dual reciprocity BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 25, pp. 713-723, 2001.

[8] D Zhou, YK Cheung, SH Lo, Three-dimensional vibration analysis of toroidal sectors with solid circular cross-sections, Journal of Applied Mechanics, *Transactions ASME,* Vol. 77, pp. 1-8, 2010.

[9] B. Friedman and J. Russek, Addition theorems for spherical waves, *Quarterly of Applied Mathematics,* Vol. 12, pp. 13–23, 1954.

[10] S. Stein, Additions theorems for spherical wavefunctions, *Quarterly of Applied Mathematics,* Vol. 19, pp. 15–24, 1961.

[11] O. R. Cruzan, Translational addition theorems for spherical vector wave functions, *Quarterly of Applied Mathematics,* Vol. 20, pp. 33–40, 1962.

[12] V. T. Golovchan, Oscillation of a spherical of variable thickness shell, *Translated from Prikladnaya Mekhanika,* Vol. 10, pp. 9-13, 1974.

[13] J. D. Kanellopoulos and J. G. Fikioris, Acoustic resonant frequencies in an eccentric spherical cavity, *The Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 64, pp. 286-297, 1978.

[14] J.A. Roumeliotis, J.D. Kanellopoulos and J.G. Fikioris, Acoustic resonance frequency shifts in a spherical cavity with an eccentric inner small sphere, *Journal of the Acoustical Society of America,* Vol. 90, pp.1144–1148, 1991.

[15] J.A. Roumeliotis and J.D. Kanellopoulos, Acoustic eigenfrequencies and modes in a soft-walled spherical cavity with an eccentric inner small sphere, *Journal of Franklin Institute,* Vol. 329, pp. 727–735, 1992.

[16] J. A. Roumeliotis, J. D. Kanellopoulos, and John G. Fikioris, Resonant frequencies in an electromagnetic spherical cavity with an eccentric inner eccentrically small sphere, *Electromagnetics,* Vol. 12, pp. 155-170, 1992.

[17] J.A. Roumeliotis, N. B. Kakogiannos, and J. D. Kanellopoulos, Scattering from a sphere of small radius embedded into a dielectric one, IEEE *Transactions on Microwave Theory and Techniques,* Vol. 43, pp. 155-168, 1995.

[18] A. Charalambopoulos, D. I. Fotiadis and C. V. Massalas, Frequency spectrum of the bispherical hollow system: the case of the nonuniform thickness human skull, *Acta Mechanica,* Vol. 130, pp. 249-278, 1998.

[19] M.P. Ioannidou and D.P. Chrissoulidis, Electromagnetic-wave scattering by a sphere with multiple spherical inclusions, *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science and Vision*, Vol. 19 pp. 505-512, 2002.

[20] Y.Z. Chen, Stress analysis of a cylindrical bar with a spherical cavity or rigid inclusion by the eigenfunction expansion variational method, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 42, pp.325-338, 2004.

[21] Douglas D. Reynolds. *Engineering Principles in Acoustics,* Boston: Allyn and Bacon Inc., 1981.

[22] N.G. Einspruch, E.J. Witterholt and R. Truell, Scattering of a plane transverse wave by a spherical obstacle in an elastic medium, *Journal of Applied Physics,* Vol. 5, pp. 806-818, 1960.