



کمی سازی عدم قطعیت مدل های آشفتگی RANS برای جریان سیال غیرنیوتنی توانی

وحید اصفهانیان^{1*}، ایمان رهبری²، محمدحسین مرتضوی²

1- استاد، مهندسی مکانیک، پژوهشکده خودرو، سوخت و محیط زیست، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، صندوق پستی 14395-1335، evahid@ut.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 دی 1393

پذیرش: 11 بهمن 1393

ارائه در سایت: 15 فروردین 1394

کلید واژگان:

مدل سازی آشفتگی

سیال غیرنیوتنی

کمی سازی عدم قطعیت

شبیه سازی عددی مستقیم

بسط کارهونن-لوه

جریان سیالات غیرنیوتنی در بعضی از کاربردهای صنعتی به جریان آشفته تبدیل می شود. روش های مختلفی جهت بررسی جریان آشفته ارائه شده اند که هر کدام ویژگی های خاص خود را دارند. مدل های آشفتگی هزینه محاسباتی کمی دارند ولی دارای منابع عدم قطعیت ساختاری در فرآیند حل هستند. همچنین، مدل های آشفتگی که برای سیالات غیرنیوتنی توانی ارائه شده اند، اغلب از اصلاح مدل های نیوتنی بدست آمده اند و مدل سازی مناسبی برای تنش ویسکوپلاستیک ارائه نشده است. از طرفی، شبیه سازی عددی مستقیم نتایج بسیار دقیقی را ارائه می کند درحالی که هزینه محاسباتی بسیاری را به همراه دارد. بدین ترتیب، استفاده از نتایج شبیه سازی عددی مستقیم برای کمی سازی عدم قطعیت موجود در مدل های آشفتگی طرح بسیار مناسبی خواهد بود. زیرا امکان تصمیم گیری بهتر بر مبنای نتایج شبیه سازی RANS را فراهم می کند. در این تحقیق ابتدا یک مدل آشفتگی برای سیال غیرنیوتنی توانی بر مبنای مدل $K-\epsilon$ ارائه و برای شبیه سازی جریان درون یک لوله استفاده شده است. سپس یک روش کارا جهت کمی سازی عدم قطعیت های موجود در آن ارائه شده است. در این روش، فرض شده است که تمامی عدم قطعیت های موجود، در محاسبه تنش رینولدز و تنش توانی رقیق شونده تجمیع شده اند. ابتدا تفاوت این دو تنش در DNS و RANS به کمک میدان تصادفی گاوسی مدل شده است. سپس با استفاده از بسط کارهونن-لوه این عدم قطعیت به داخل روند حل پخش شده و تأثیرش در سرعت جریان محاسبه شده است. نتایج نشان می دهند که روش ارائه شده دارای دقت قابل قبولی در تخمین این عدم قطعیت است.

Uncertainty Quantification of RANS Turbulence Models for Power-law Non-Newtonian Fluid Flows

Vahid Esfahanian^{1*}, Iman Rahbari², Mohammadhossein Mortazavi²

1-Department of Mechanical Engineering, Vehicle Fuel and Environment Research Institute, University of Tehran, Tehran, Iran

2-Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

* P.O.B. 14395-1335 Tehran, Iran, evahid@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 18 January 2015
Accepted 31 January 2015
Available Online 04 April 2015

Keywords:
Turbulence Modeling
Non-Newtonian Fluid
Uncertainty Quantification
Direct Numerical Simulation
Karhunen-Loeve Expansion

ABSTRACT

Non-Newtonian fluid flows experience turbulent regime in some industrial applications. Several approaches have been proposed for numerical simulation of turbulent flows, each of which has specific features. RANS turbulence models have reasonable computational costs, while include several sources of uncertainties affecting simulation results. In addition, RANS models developed for non-Newtonian fluids are modified versions of available models for Newtonian fluids, therefore they cannot provide reliable estimation for viscoplastic stress term. In contrast, DNS delivers accurate results but with high computational costs. Consequently, use of DNS data for estimation of uncertainty in RANS models can provide better decision making for engineers based on RANS results. In the present study, a turbulence model based on power-law non-Newtonian fluid is developed and employed for simulation of flow in a pipe. Then, an efficient method is proposed for quantification of available model-form uncertainty. Moreover, it is assumed that uncertainties originating from various sources are combined together in calculation of Reynolds stress as well as viscoplastic stress. Deviation of the stresses, computed using RANS turbulence model from DNS data are modeled through Gaussian Random Field. Thereafter, Karhunen-Loeve expansion is employed for uncertainty propagation in simulation process. Finally, the effects of these uncertainties on RANS results are shown in velocity field, demonstrating the fact that the presented approach is accurate enough for statistical modeling of model-form uncertainty in RANS turbulence models.

1- مقدمه

صنایع پتروشیمی و بسیاری از کاربردهای بیولوژیکی مانند جریان خون در بدن و یا در دستگاه هایی مانند قلب های مصنوعی، اگرچه جریان آشفته در این گونه از سیالات نسبت به رژیم آرام کمتر رخ می دهد، ولی در برخی از

جریان سیال غیرنیوتنی درون یک لوله، فرآیندی متداول در بسیاری از فعالیت های مهندسی است از جمله جریان سیال در لوله های انتقال در

کاربردها این نوع جریان نیز قابل مشاهده است از جمله در فرآیندهای حفاری، انتقال فاضلاب و تولید کاغذ که کاربردهای فراوانی دارد [1,2].

از نخستین پژوهش‌های آزمایشگاهی صورت گرفته درخصوص بررسی جریان آشفته سیالات غیرنیوتنی مربوط به کلاپ است [3]. در این تحقیق، جریان آشفته در لوله برای یک سیال توانی با پارامتر سازگاری 0/813-0/698 به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت یک رابطه توانی برای پروفیل سرعت لگاریتمی، بر حسب پارامتر سازگاری ارائه شده است. اخیراً نیز مجموعه‌ای از مشاهدات آزمایشگاهی شامل پروفیل سرعت و کمیت‌های آماری برای جریان آرام، در حال گذر و آشفته غیرنیوتنی توسط اسکودیر و همکاران [4,5] و پینهو و وایتلاو [6] ارائه شده است. علیرغم تحقیقات صورت گرفته در این زمینه، هنوز هم اطلاعات بنیادی کمی در حوزه جریان آشفته سیالات غیرنیوتنی وجود دارد. یکی از مهمترین مشکلات در آزمایش چنین سیالاتی استفاده از ماده‌ای است که خواص رئولوژیکی کاملاً مشخصی داشته باشد و در عین حال، خواص آن را بتوان به میزان دلخواه تغییر داد که معمولاً با دقت بالایی قابل حصول نیست.

در این شرایط، استفاده از شبیه‌سازی عددی مستقیم می‌تواند امکان بررسی دقیق‌تر تئوری‌های جریان آشفته در سیالات غیرنیوتنی را فراهم کند. در این نوع شبیه‌سازی، همه ساختارهای موجود در جریان در تمامی مقیاس‌های زمانی و مکانی حل می‌شوند و نهایتاً اطلاعات بسیار دقیقی از خواص جریان ارائه می‌دهند که دستایی به آنها از طریق آزمایش با موانع فراوانی روبروست. به عنوان مثال، شبیه‌سازی عددی مستقیم برای محلول‌های رقیق پلیمری و با خاصیت سیالات ویسکوالاستیک غالب، توسط سورش کومار و همکاران [7] و دیمیتروپولوس و همکاران [8] انجام شده است. همچنین بررسی عددی جریان آشفته سیالاتی که ویسکوزیته آنها با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابد¹ به کمک شبیه‌سازی عددی مستقیم توسط رودمن و همکاران انجام شده است [9]. اخیراً نیز موسائی پدیده کاهش درگ در اثر افزودن میکروفاایبر را به کمک شبیه‌سازی عددی مستقیم مورد بررسی قرار داده است [10,11].

رهیافت‌های متعددی جهت مدل‌سازی آشفتگی در سیالات غیرنیوتنی پیشنهاد شده‌اند که اغلب برای یک سیال خاص و معمولاً ویسکوالاستیک توسعه داده شده‌اند. به عنوان مثال، کروز و همکاران مدلی را برای بررسی آشفتگی در سیالات دارای مواد ویسکوالاستیک در جریان داخل لوله ارائه کردند [12]. رزنده و همکاران نیز مدل $k - \varepsilon$ را در جریان‌های آشفته با سیالات ویسکوالاستیک ارائه کردند [13]. از سوی دیگر، مدل‌های آشفتگی برای سیالات ویسکوپلاستیک توسعه قابل توجهی نیافته‌اند، به‌طوری‌که اغلب مدل‌های موجود، از اصلاح مدل‌های آشفتگی نیوتنی بدست آمده‌اند. به‌عنوان مثال، مالین مدل آشفتگی $k - \varepsilon$ را بدون در نظر گرفتن عبارات اضافی حاصل از اندرکنش تغییرات ویسکوزیته و نرخ تغییر شکل برای سیال توانی استفاده کرده است [14]. بهر و همکاران مدل آشفتگی ساده اسماغورینسکی را جهت مدل‌سازی جریان خون، به‌عنوان سیال غیرنیوتنی، در پمپ‌های مرکزگرا به کار برده‌اند [15]. کیونگ‌چول و هانگ‌سون مدل آشفتگی $k - \varepsilon$ را برای سیال غیرنیوتنی با مدل توانی در کاربردهای مهندسی اصلاح کردند [16]. تفاوت میان نتایج شبیه‌سازی با مدل‌های آشفتگی، شبیه‌سازی عددی مستقیم و نتایج تجربی ناشی از وجود خطاها و عدم قطعیت‌های مختلف در فرآیند شبیه‌سازی می‌باشند. اگرچه این دو مفهوم گاهی به‌جای یکدیگر مورد

استفاده قرار می‌گیرند ولی تفاوت‌های بسیاری دارند.

خطا به تبدیل روابط ریاضی به یک الگوریتم عددی و نهایتاً یک کد محاسباتی مربوط شده است. در حالیکه، عدم قطعیت به انتخاب مدل‌های فیزیکی و تعیین پارامترهای ورودی مورد نیاز جهت انجام یک تحلیل مرتبط می‌شود [17]. آنچه در این تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد کمی‌سازی عدم قطعیت‌هایی است که با مدل‌سازی آشفتگی به فرآیند شبیه‌سازی وارد می‌شوند.

کمی‌سازی عدم قطعیت فرآیندی است که تلاش می‌کند تا منابع عدم قطعیت موجود در فرآیند شبیه‌سازی را شناسایی کند، سپس تخمینی از عدم قطعیت‌ها ارائه کرده و در پایان با پخش آنها در فرآیند حل، تأثیر آنها بر کمیت مورد نیاز را اندازه‌گیری کند. عدم قطعیت‌های موجود در فرآیند شبیه‌سازی به دو دسته تصادفی² و ساختاری³ تقسیم بندی می‌شوند.

دسته اول از تفاوت شرایط مرزی، شرایط ورودی مسئله، خواص ماده مورد نظر و پارامترهای هندسی در نظر گرفته شده در حل، با مقادیر واقعی ناشی می‌شود. به‌طور مثال، در شبیه‌سازی جریان حول یک جسم درون کانال، سرعت جریان ورودی با زمان تغییر نمی‌کند، درحالی‌که در واقعیت نمی‌توان آن را ثابت نگه داشت و در حقیقت، به دلیل نوسانات طبیعی در بازه‌ای حول مقدار تنظیم شده تغییر می‌کند. همچنین، هندسه مسئله به‌صورت ثابت در نظر گرفته می‌شود در صورتی‌که تلورانس‌های ساخت در شکل جسم نهایی تأثیر خواهند داشت. همین‌طور برای سایر موارد ورودی به حل، مانند دما و شدت توربولانس، مقادیری در نظر گرفته می‌شود که با شرایط واقعی متفاوت است و باعث تغییر در جواب‌های مسئله خواهد شد. این نوع عدم قطعیت به دلیل نبود آگاهی درباره آنها بروز می‌کند و قابل رفع شدن نیست.

دسته دوم مربوط به عدم قطعیت‌های موجود در ساختار فرآیند حل است. مدل‌های ریاضی که برای بیان یک پدیده فیزیکی ارائه شده‌اند و در شکل‌دهی آنها فرضیاتی صورت پذیرفته‌است. از مهم‌ترین این مدل‌ها، مدل‌های آشفتگی، احتراق و ژئوفیزیکی می‌باشند. این نوع از عدم قطعیت‌ها، رفع شدنی هستند بدین معنی که با بالابردن اطلاعات درباره آن پدیده، به‌عنوان مثال با انجام آزمایش‌های متعدد یا استفاده از روش‌های پیچیده‌تر مثل شبیه‌سازی عددی مستقیم، می‌توان اثر آنها را کاهش داد.

همان‌طور که اشاره شد، استفاده از مدل‌های آشفتگی RANS باعث اعمال عدم قطعیت ساختاری در فرآیند حل می‌شود. منابع این عدم قطعیت، فرض‌های مختلف برای تخمین اندرکنش تغییرات ویسکوزیته و نرخ تغییر شکل، استفاده از مدل‌های آدی-ویسکوزیته⁴ مانند فرض بوزینسک⁵، فرض معادلاتی برای تخمین خواص توربولانس جریان مانند انرژی جنبشی توربولانس (K) و (ε) و به‌کاربری توابع دیواره مختلف برای استفاده از مدل‌های طراحی شده رینولدز بالا در جریان نزدیک دیواره می‌باشند [18].

از سوی دیگر، در روش شبیه‌سازی عددی مستقیم تمامی گردابه‌های موجود در میدان تا مقیاس کولموگوروف⁶ حل می‌شوند و فرض ساده‌کننده‌ای صورت نمی‌پذیرد تا باعث اعمال عدم قطعیت ساختاری در شبیه‌سازی شوند. البته شبیه‌سازی عددی مستقیم هزینه محاسباتی بسیار بالایی را به همراه خواهد داشت که مانع از کاربردی شدن آن در بسیاری از مسائل مهندسی

2- Aleatory
3- Epistemic
4- Eddy Viscosity
5- Boussinesq Hypothesis
6- Kolmogorov

1- Shear Thinning

معادلات RANS مشاهده کرد. در صورتی که برای محاسبه مقدار دقیق ویسکوزیته توربولانس در جریان دو و سه بعدی، می‌بایست یک تانسور در نظر گرفته شود و در نظر گرفتن یک کمیت بجای این تانسور باعث اشتباه مدل کردن بخش مهمی از اطلاعات مسئله خواهد شد.

در تحقیق حاضر، برای نخستین بار، عدم قطعیت‌های موجود در شبیه‌سازی RANS جریان آشفته غیرنیوتنی کمی‌سازی شده‌اند. به همین منظور ابتدا مقدار دقیق تنش رینولدز و تنش توانی رقیق شونده به‌دست آمده از DNS و RANS با یکدیگر مقایسه شدند. سپس اختلاف این مقادیر به کمک یک میدان تصادفی گاوسی مدل شده‌است. فرآیند نمونه‌گیری نیز توسط بسط کارهونن-لوه انجام شده و عدم قطعیت موجود به داخل فرآیند حل پخش شده است. نهایتاً عدم قطعیت موجود در سرعت جریان به‌دست آمده‌است. در این روش سعی شده‌است که مشکلات موجود در روش‌های پیشین رفع شده و عدم قطعیت به‌صورت مستقیم در تنش رینولدز در نظر گرفته‌شود. این فرآیند برای مسئله جریان در کانال یکنواخت و برای یک مدل ساده بر مبنای $k-\varepsilon$ انجام شده‌است.

2- مدل‌سازی ریاضی

2-1- معادلات حاکم

معادلات پیوستگی و کوشی برای جریان سیال تراکم‌ناپذیر به صورت معادله (1) و (2) می‌شود:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (2)$$

در معادله (2) عملگر $\frac{D}{Dt}$ نشان‌دهنده مشتق مادی و $\underline{\underline{\tau}}$ تانسور تنش است که از طریق معادله اساسی سیال به دست می‌آید.

2-2- مدل سیال غیرنیوتنی

برای سیال، تانسور تنش به صورت رابطه (3) تعریف می‌شود که در آن تنش با تانسور نرخ تغییر شکل $\underline{\underline{S}}$ رابطه دارد:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{S}} \quad (3)$$

تانسور نرخ تغییر شکل به صورت رابطه (4) تعریف می‌شود:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

در این تحقیق، مدل سیال غیرنیوتنی بر اساس مدل توانی در نظر گرفته شده‌است که در آن لزجت به نرخ برش $\dot{\gamma}$ وابسته است و به صورت رابطه (5) تعریف می‌شود:

$$\mu = \mu(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^{n-1} \quad (5)$$

نرخ برش به صورت رابطه (6) تعریف می‌شود:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2S:S} \quad (6)$$

در رابطه (5)، k پارامتر سازگاری است و همانطور که مشاهده می‌شود چنانچه $n=1$ شود، همان مدل نیوتنی حاصل خواهد شد.

2-3- معادلات متوسط‌گیری شده رینولدز

پس از اعمال متوسط‌گیری رینولدز از معادلات (1) و (2) به معادلات (7) و (8) خواهیم رسید:

شده‌است. به این ترتیب، با استفاده از شبیه‌سازی مستقیم می‌توان به کمی‌سازی عدم قطعیت مدل‌های آشفتگی پرداخت که باعث تصمیم‌گیری دقیق‌تر و طراحی مقاوم¹ بر اساس نتایج آنها خواهد شد.

در سال‌های اخیر تحقیقاتی در ارتباط با کمی‌سازی عدم قطعیت ساختاری مدل‌های آشفتگی نیوتنی انجام شده‌است. در یکی از نخستین تلاش‌ها، پلاتنو و همکاران [19] عدم قطعیت ساختاری موجود در مدل آشفتگی $k-\varepsilon$ را برای جریان توربولانس نیوتنی روی یک صفحه تخت مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، ابتدا برای ضرایب موجود در معادلات انتقال K و ε و همچنین تابع دیواره استاندارد یک تابع توزیع احتمال تخمین زده شد. تابع توزیع احتمال مفروض، از نتایج شبیه‌سازی مستقیم و نتایج آزمایشگاهی مختلف محاسبه شده‌اند. برخی از این ضرایب با فرضهای مختلف مانند توربولانس کاهش یابنده²، و برای جریان‌های مختلف مانند جریان داخل کانال محاسبه شده‌اند. سپس از روش هم‌مکانی احتمالی³ برای پخش عدم قطعیت‌های موجود در مسئله و محاسبه عدم قطعیت ضریب اصطکاک، به‌عنوان کمیت موردنظر، استفاده شده‌است. در نهایت مشاهده شد که نتایج آزمایشگاهی در بازه 99% قطعیت حول مقدار میانگین پیش‌بینی شده توسط روش هم‌مکانی احتمالی قرار می‌گیرد. معایب مهمی در این روش وجود دارد. اولین مورد مربوط به فرآیند تخمین تابع توزیع احتمال برای ضرایب معادلات است. این فرآیند کاملاً وابسته به نظر نویسنده است و اغلب آنها برای جریاناتی محاسبه شده‌اند که ارتباط مستقیمی با جریان روی صفحه تخت ندارد مانند جریان درون یک کانال. همچنین نویسنده رابطه بوزینسک را به‌عنوان رابطه‌ای دقیق در نظر می‌گیرد. در صورتی که این فرض در برخی مسائل دارای تانسور تنش رینولدز غیر همسان مانند نقطه سکون با مشکلات زیادی همراه است [20]. مورد سوم نیز مربوط به تعداد پارامترهای موثر در نظر گرفته شده طی فرآیند پخش عدم قطعیت است. در این تحقیق تأثیر عدم قطعیت هر ضریب به‌صورت جداگانه در محاسبه ضریب اصطکاک در نظر گرفته شده‌است که عملاً بی‌فایده است. یلدیزتوران [21] مشکل سوم را حل نمود و پنج ضریب دارای بیشترین تأثیر در روند مسئله را به‌طور هم‌زمان در فرآیند پخش عدم قطعیت توسط روش هم‌مکانی احتمالی در نظر گرفت. اما همچنان دو مشکل قبلی برقرار است.

پژوهش دیگر مربوط به داو و وانگ [22] است که در آن کمی‌سازی عدم قطعیت ساختاری مدل برای جریان داخل یک کانال صاف بررسی شده‌است. در این تحقیق، با مقایسه سرعت به‌دست آمده با حل RANS و DNS یک مسئله معکوس برای محاسبه ویسکوزیته توربولانس DNS ساخته شده و با استفاده از روش الحاقی⁴ حل شده‌است. در تحقیق دیگری از همین نویسندگان [23] همین روند برای جریان درون یک کانال با دیواره منحنی شکل دلخواه اعمال شده‌است. یکی از مشکلات این پژوهش‌ها، فرض ویسکوزیته توربولانس مثبت در همه نقاط است زیرا در صورت وجود نقاطی با ویسکوزیته توربولانس منفی، مسئله بدوضع خواهد بود و همگرا نخواهد شد. اما در صورت محاسبه دقیق این کمیت از داده‌های DNS نقاطی با ویسکوزیته توربولانس منفی نیز وجود خواهند داشت. همچنین در این مقالات فرض شده‌است که می‌توان با در نظر گرفتن یک مقدار دقیق برای این کمیت تمامی ویژگی‌های جریان موجود در حل DNS را با استفاده از

1- Robust Design
2- Decaying Turbulence
3- Probabilistic Collocation Method
4- Adjoint Method

در معادله بالا، ν_t لزجت آشفتگی است.

به دلیل اینکه این مدل ها اغلب برای جریان های با رینولدز خیلی بالا توسعه یافته اند، در نواحی نزدیک دیواره کارایی مناسبی ندارند. به منظور رفع این مشکل از توابع دیواره استفاده می شود که ساده ترین آنها، تابع دیواره استاندارد طبق رابطه (13) است.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (13)$$

که κ ثابت ون-کارمن، $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$ و $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$ سرعت و مکان

بی بعد هستند. همچنین $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ سرعت اصطکاکی است.

در حل معادلات قبل نیاز است که رابطه ای برای لزجت متوسط ν داشته باشیم. لزجت مؤثر سیال علاوه بر سرعت متوسط جریان، به سرعت نوسانی هم بستگی دارد و می توان نوشت: $\hat{\nu} = \nu + \nu'$.

نرخ لحظه ای اضمحلال انرژی جنبشی توربولانس $\hat{\varepsilon}$ که مقدار انرژی متوسط تبدیل شده به حرارت در واحد جرم سیال و در واحد زمان است، برابر است با $\hat{\nu}^2 = \hat{\nu} \hat{\nu}'$. ما فرض می کنیم که مقدار متوسط نیز از همین ساختار طبق رابطه (14) پیروی می کند:

$$\varepsilon = \nu (2S'_{ij}S'_{ij}) \quad (14)$$

هم چنین با توجه به رابطه (6) می توان رابطه (15) را نوشت:

$$\hat{\nu}^2 = 2(\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}) = 2S_{ij}S_{ij} + 2(S'_{ij}S'_{ij}) \quad (15)$$

با مقایسه رابطه (14) و (15)، رابطه جدیدی بین لزجت و نرخ برش طبق رابطه (16) به دست می آید:

$$\hat{\nu}^2 = 2S_{ij}S_{ij} + \frac{\rho\varepsilon}{\mu} \quad (16)$$

رابطه (5) و (16) دو معادله و دو مجهول از لزجت و نرخ برش است که رابطه غیرخطی دارند اما با توجه به تکرار شدن روند حل، می توان در هر مرحله از حل با داشتن مقادیر سرعت متوسط، نرخ اضمحلال و لزجت از رابطه (16)، نرخ برش را به دست آورد و سپس با توجه به رابطه (5) مقدار لزجت تصحیح شود و مجدداً معادلات حل شوند و به همین ترتیب روند حل تکرار شود. در بسیاری از شبیه سازی های صورت گرفته در رابطه با سیالات ویسکوپلاستیک، از اندرکنش تغییرات ویسکوزیته و نرخ تغییر شکل صرف نظر می شود. بدین ترتیب نیازی به در نظر گرفتن عبارات اضافی در معادلات (10) و (11) نیست. در این تحقیق نیز، جهت بررسی تأثیر این فرضیات بر جواب نهایی مسئله، ترم های موجود به دلیل اندرکنش تغییرات ویسکوزیته و نرخ تغییر لحاظ نشده اند.

3- روش بررسی کمی سازی عدم قطعیت مدل های آشفتگی

در این پژوهش، ابتدا مقادیر دقیق تنش رینولدز و تنش توانی رقیق شونده به دست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل آشفتگی با یکدیگر مقایسه شدند. سپس اختلاف این مقادیر به کمک یک میدان تصادفی گاوسی مدل شده است. فرایند نمونه گیری نیز توسط بسط کارهونن-لوه انجام شده و عدم قطعیت موجود به داخل فرایند حل پخش شده و نهایتاً عدم قطعیت موجود در سرعت جریان به دست آمده است.

3-1- حلگر جریان پایه

مسئله مورد بررسی در این تحقیق، جریان کاملاً توسعه یافته سیال

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (7)$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{\rho} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j + 2\mu' S' \right] \quad (8)$$

در معادله (8)، بالانویس ()' نشان دهنده مقادیر نوسانی است. ترم های جدیدی که در سمت راست ظاهر شده است، به ترتیب تنش های رینولدز و تنش های توانی رقیق شونده نامیده می شود. همانطور که واضح است، در معادلات (7) و (8) تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر بوده و مجموعه معادلات بسته ای را تشکیل نخواهند داد. برای حل این مشکل، از فرض ادی-ویسکوزیته به همراه برخی معادلات نیمه تجربی برای تخمین تنش های رینولدز استفاده می شود. همچنین به دلیل عملکرد نامناسب این مدل ها در نواحی نزدیک دیواره، از توابع دیواره جهت بهبود نتایج استفاده می شود. تنش های رینولدز در معادله (8) با رابطه بوزینسک طبق رابطه (9) مدل می شود:

$$-\rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (9)$$

اما این رابطه رفتار ایزوتروپیک خواهد داشت و در مواردی مانند جت های برخوردی [20] و یا جریان توسعه یافته در یک کانال منحنی شکل [24] نتایج نامناسبی به دست می دهند. برای غلبه بر این مشکل، مدل های ادی-ویسکوزیته غیرخطی به وجود آمدند که از پرکاربردترین آنها مدل های اسپیزاله [25] و کرفت [26] قابل اشاره هستند.

2-4- مدل آشفتگی

در این تحقیق، مدل آشفتگی $k-\varepsilon$ که از متداول ترین مدل های توربولانسی است و اولین بار توسط جونز و لاندلر [27] پیشنهاد شد، برای سیالات غیر نیوتنی توسعه داده شده است. در این مدل، از دو معادله انتقال برای انرژی جنبشی توربولانس طبق رابطه (10) و نرخ اضمحلال انرژی جنبشی توربولانس طبق رابطه (11) جهت پیش بینی خواص جریان استفاده می شود:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon - 2(\hat{\nu} S'_{ij}) S_{ij} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{P \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \left[u_k \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_k} (2S'_{ij}S'_{ij}) \right] \quad (11)$$

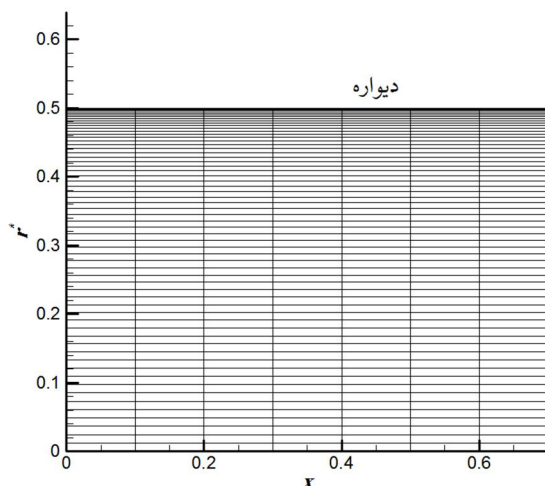
در معادلات بالا، $\hat{\nu}$ لزجت لحظه ای، $k = \frac{1}{2}(\bar{u}'_i \bar{u}'_i)$

و $\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ است. همچنین، عبارات جدید

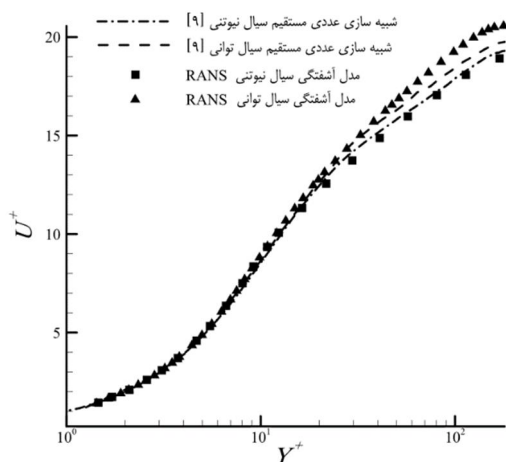
$$u_k \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x_k} (2S'_{ij}S'_{ij}) \quad \text{و} \quad 2(\hat{\nu} S'_{ij}) S_{ij}$$

در سمت راست معادلات (10) و (11) حاصل از نوسانات لزجت هستند. بعلاوه، در این مدل از رابطه (12) جهت مرتبط کردن گرادیان های سرعت و تنش رینولدز استفاده می شود:

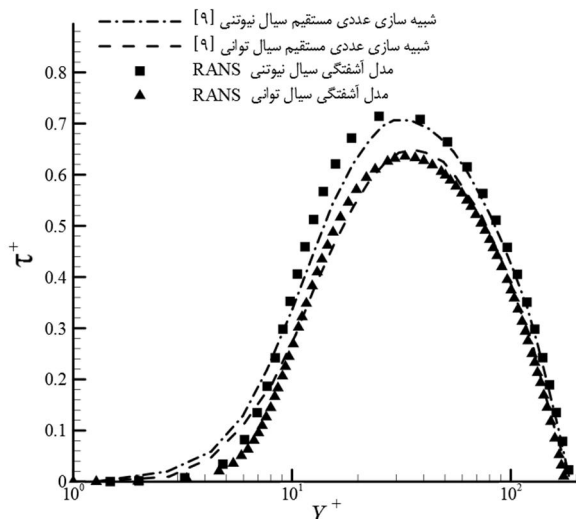
$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\rho \varepsilon} \quad (12)$$



شکل 1 شبکه تولید شده



شکل 2 مقایسه بین سرعت محاسبه شده از طریق مدل آشفتگی با شبیه سازی عددی مستقیم برای مدل نیوتنی و مدل توانی رقیق شونده



شکل 3 مقایسه بین تنش های رینولدز محاسبه شده از طریق مدل آشفتگی با شبیه سازی عددی مستقیم برای مدل نیوتنی و مدل توانی رقیق شونده

3-3- بیان آماری عدم قطعیت

اختلاف بین مقادیر محاسبه شده تنش رینولدز و تنش توانی رقیق شونده

غیر نیوتنی توانی در یک لوله است. برای این جریان $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ در نظر گرفته می شود که در این حالت با توجه به معادله پیوستگی سرعت در جهت عمود بر جریان صفر می شود و در نتیجه جریان یک بعدی و یک جهته خواهد بود بدین ترتیب طبق رابطه (17) خواهیم داشت:

$$u = u(r) \quad (17)$$

اکنون با جایگذاری رابطه (17) در معادله (8) به معادله (18) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \mu_t) r \frac{\partial u}{\partial r} + r (2\mu' S_{xr}') \right] \quad (18)$$

با بی بعدسازی معادله (18) به رابطه (19) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{1}{Re_g} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[(\mu^* + \mu_t^*) r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + r^* (2\mu'^* S_{xr}'^*) \right] \quad (19)$$

در این معادله، μ^* بالابویس μ^* () نشان دهنده ترم های بی بعد است.

پارامترهای بی بعدسازی عبارتند از:

$$Re_g = \frac{\rho U D}{\mu_{wall}}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_{wall}}, \quad p^* = \frac{p}{0.5 \rho U^2}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad r^* = \frac{r}{D}$$

که در این رابطه D قطر لوله، μ_{wall} ویسکوزیته سیال روی دیواره و U میانگین سطحی سرعت جریان است. گرادیان فشار نیز به گونه ای تنظیم

شده است تا رینولدز جریان بر مبنای سرعت برشی $Re_\tau = \frac{\rho U_\tau D}{\mu_{wall}} = 180$

باشد.

هر میدان نمونه ای از میدان تنش رینولدز تصادفی که از طریق بسط کارهونن-لوه تولید می شود، در نهایت در این معادله جایگذاری شده و از این طریق، میدان سرعت متناظر با آن نمونه محاسبه می گردد.

3-2- حلگر مدل آشفتگی

مدل آشفتگی ارائه شده در این تحقیق، در نرم افزار دینامیک سیالات محاسباتی متن-باز این فوم¹ اعمال شده است. از روش نقطه میانی جهت انتگرال گیری سطح و حجم حین فرآیند گسسته سازی معادلات حاکم استفاده شده است. همچنین، برای عباراتی که در معادلات انتقال، خاصیت جابجایی دارند، روش پادبادسو استفاده شده است. شارهای پخش نیز با استفاده از روش تفاضل مرکزی مرتبه دو محاسبه شده اند. با توجه مجزا بودن معادله پیوستگی و مومنوم، روش سیمپل² به منظور جفت سازی این دو معادله اعمال شده است.

جهت اطمینان از عدم وابستگی حل به شبکه، مطالعه شبکه برای پنج حالت از 30 تا 80 گره در راستای r^* صورت گرفت و پروفیل سرعت بدست آمده از این شبیه سازی ها با یکدیگر مقایسه گردید و نهایتاً مشخص شد که شبکه ای با 65 گره در راستای r^* مناسب خواهد بود.

شبکه مورد استفاده در این تحقیق در شکل 1 آورده شده است. در این شبکه، فاصله نقطه اول از دیواره 0/000151 است.

پروفیل سرعت و تنش برشی در راستای Y^+ با استفاده از آشفتگی به همراه نتایج شبیه سازی عددی مستقیم [9] در شکل های 2 و 3 آورده شده است.

1- OpenFOAM
2- SIMPLE

این فرآیند برای مسئله مورد نظر انجام شده است و مشاهده گردید که مجموعه $(\sigma, \lambda) = (0.0417, 1e-10)$ می تواند به عنوان مناسب ترین مجموعه برای $k-\varepsilon$ انتخاب شود.

3-5- پخش عدم قطعیت

جهت انجام فرآیند نمونه گیری از بسط کارهونن-لوه تابع کوواریانس طبق رابطه (26) استفاده شده است.

$$X(x, \omega) = \sum_{i=1}^{N_{K-L}} \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \xi_i(\omega) \quad (26)$$

که در این رابطه ω احتمال، N_{K-L} تعداد مودهای در نظر گرفته شده در بسط $K-L$ ، ξ_i کمیت تصادفی از یک تابع توزیع احتمال گاوسی با میانگین صفر و واریانس یک $N(0,1)$ و (λ_i, f_i) مجموعه بردار ویژه و تابع ویژه تابع کوواریانس هستند.

جهت انتخاب N_{K-L} مناسب، مقادیر ویژه تابع کوواریانس مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که در نظر گرفتن 40 مود اول مناسب است. در هر مرحله 1000 نمونه گیری صورت گرفته است. برخی از این نمونه ها در شکل 4 آورده شده اند.

این نمونه ها در معادله (19) قرار داده شده و سرعت جریان محاسبه شده است. برخی از میدان های تصادفی سرعت بدست آمده از روش پخش عدم قطعیت ارائه شده در شکل 5 ارائه شده اند.

برای نشان دادن محدوده عدم قطعیت از حد 95% اطمینان استفاده شده است. به این معنی که 95% داده های موجود در یک مجموعه با تابع توزیع احتمال گاوسی، در بازه $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ قرار می گیرد. که μ میانگین و σ انحراف معیار است.

محدوده عدم قطعیت محاسبه شده برای مدل آشفتگی غیرنیوتنی ارائه شده در شکل 6 نشان داده شده است. به خوبی می توان مشاهده کرد که نتایج به دست آمده از حل DNS در محدوده تعیین شده برای عدم قطعیت مدل آشفتگی قرار می گیرد. بدین ترتیب می توان نتیجه گرفت که فرض وجود تابع توزیع احتمال گاوسی چندمتغیره برای میدان اختلاف تنش های رینولدز و ویسکوالاستیک DNS و RANS، به همراه استفاده از روش بهینه سازی الگوریتم پرندگان برای بدست آوردن تابع کوواریانس بهینه، توانایی مدل سازی آماری عدم قطعیت موجود در مدل های آشفتگی RANS را در جریان غیرنیوتنی دارد. همچنین استفاده از بسط کارهونن-لوه در فرآیند پخش عدم قطعیت از دقت قابل قبولی برخوردار است.

4- جمع بندی و نتیجه گیری

در این تحقیق یک مدل آشفتگی برای بررسی جریان غیرنیوتنی بر مبنای مدل های نیوتنی موجود ارائه شده است. سپس یک روش آماری جهت کمی سازی عدم قطعیت های موجود در آن پیشنهاد شده است. در روش استفاده شده در این پژوهش، تفاوت بین مجموع تنش رینولدز و تنش توانی رقیق شونده واقعی و مدل شده با استفاده از میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر و با تابع کوواریانس نمایی مرتبه دو مدل گردیده است. از الگوریتم بهینه سازی پرندگان جهت محاسبه پارامترهای آزاد تابع کوواریانس مفروض استفاده شده است. همچنین از بسط کارهونن-لوه ماتریس کوواریانس برای فرآیند نمونه گیری استفاده شده است. در نهایت مقدار عدم قطعیت در میدان سرعت برای جریان درون یک لوله کاملاً توسعه یافته آشفتگی بیان شده است. نتایج بدست

توسط شبیه سازی عددی مستقیم و مدل های آشفتگی (X) توسط یک میدان تصادفی گاوسی مدل سازی شده است. برای این مدل سازی، از یک تابع کوواریانس توانی مرتبه دو مطابق رابطه (20) استفاده شده است.

$$\text{Cov}(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\log(x_1) - \log(x_2)}{2\lambda^2}\right) \quad (20)$$

که x_1 و x_2 دو نقطه در فضا هستند و σ و λ دو ضریب هستند که می بایست به گونه ای انتخاب شوند که داده هایی مشابه با تابع توزیع احتمال میدان تصادفی گاوسی تولید کنند. این تابع توزیع احتمال برای یک فرآیند گاوسی چندمتغیره به صورت رابطه (21) است:

$$f_X(x|\sigma, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\text{Cov}(\sigma, \lambda)|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} x^T [\text{Cov}(\sigma, \lambda)]^{-1} x\right] \quad (21)$$

در این رابطه N تعداد گره در راستای r^+ و X یک نمودی از X است. حال، یک تابع شباهت به عنوان توزیع احتمال غیرنرمال طبق رابطه (22) تعریف می شود:

$$L(\sigma, \lambda | x) = f_X(x | \sigma, \lambda) \quad (22)$$

بر مبنای این رابطه، می بایست به دنبال پارامترهای σ و λ ای بود که تابع L را بیشینه می کند و به این ترتیب نمودی را تولید کرد که بیشترین شباهت با X را داشته باشد. برای کاهش هزینه محاسباتی بهتر است به جای L تابع $-\log(L)$ ، در رابطه (23) را کمینه کرد.

$$\log(L) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left[\log(\sigma_{\text{cov}}^i) - \frac{(X^T V_{\text{cov}})^2}{\lambda_i} \right] \quad (23)$$

دو کمیت σ_{cov} و V_{cov} مقدار تکین و بردار تکین های تابع کوواریانس هستند. در این تحقیق، برای انجام فرآیند بهینه سازی از الگوریتم پرندگان استفاده شده است.

3-4- بهینه سازی به کمک الگوریتم پرندگان

در این الگوریتم که مبتنی بر رفتار دسته جمعی پرندگان است، جمعیت ثابت فرض می شود و این جمعیت به صورت تصادفی در فضای بهینه سازی پخش می شود. مکان و سرعت عضو i در تکرار شماره i به ترتیب به شکل $X_i(i)$ و $V_i(i)$ نشان داده می شوند. چنانچه مکانی از عضو i که بهترین مقدار تابع هدف در طول تمام مراحل قبل را داراست با P_i نشان دهیم و مکان بهترین مقدار تابع هدف در آن تکرار را با G نمایش دهیم، مکان و سرعت هر یک از اعضا در هر تکرار از رابطه (24) و (25) محاسبه می شود.

$$V_i(i) = \theta V_i(i-1) + c_1(r_1)[P_i - X_i(i-1)] + c_2(r_2)[G - X_i(i-1)] \quad (24)$$

$$X_i(i) = X_i(i-1) + V_i(i) \cdot \Delta t \quad (25)$$

در روابط بالا، c_1 و c_2 نشان دهنده هوش جمعی و فردی در حرکت به سمت نقطه هدف است که عموماً 2 در نظر گرفته می شود. r_1 و r_2 اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک هستند. θ پارامتر کاهش سرعت برای بهبود عملکرد الگوریتم و جستجوی دقیق تر در اواخر روند اجرا است و معمولاً مقدار آن در طول روند بهینه سازی به صورت خطی از 0/9 تا 0/4 کاهش می یابد.

برای تعیین اثر کلی عدم قطعیت‌های موجود بر کارایی مدل توربولانسی و نیز جهت تعمیم نتایج برای حالات دیگر جریان، یک کمیت بدون بعد به صورت "نسبت انحراف معیار به سرعت میانگین" معرفی شده است. برای جریان مورد بررسی در این تحقیق، این کمیت به طور میانگین 0/034551 بوده و بیشترین مقدار آن در میدان جریان 0/044858 است. این نتایج برای بررسی اثر عدم قطعیت مدل‌های توربولانسی در سایر حالات جریان کاربرد بسیار مناسبی خواهد داشت.

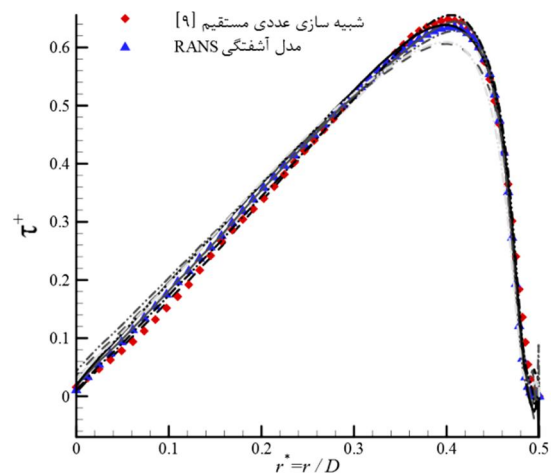
5- فهرست علائم

ρ	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
t	زمان (s)
u_i	سرعت (ms^{-1})
علائم یونانی	
ρ	چگالی (kgm^{-3})
μ	لزجت دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
ν	لزجت سینماتیکی (m^2s^{-1})
τ	تانسور تنش ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)

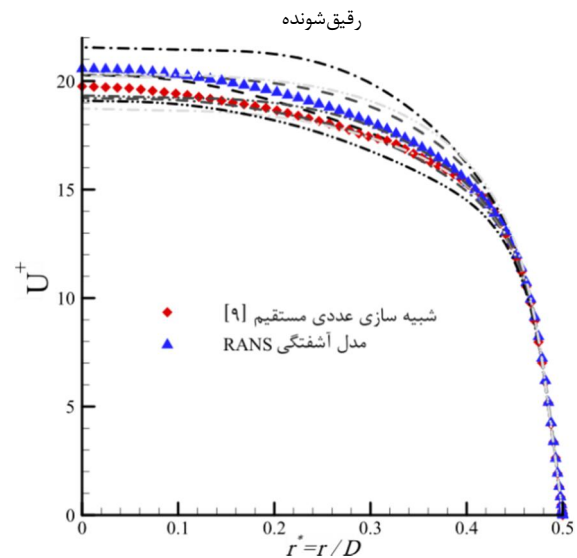
6- مراجع

- [1] C. A. Ventura, F. A. Garcia, P. J. Ferreira, M. Graça Rasteiro, Modeling the Turbulent Flow of Pulp Suspensions, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 50, No. 16, pp. 9735-9742, 2011.
- [2] M. Rudman, H. M. Blackburn, Direct numerical simulation of turbulent non-Newtonian flow using a spectral element method, *Applied mathematical modelling*, Vol. 30, No. 11, pp. 1229-1248, 2006.
- [3] R. M. Clapp, Turbulent heat transfer in pseudoplastic non-Newtonian fluids. *International Development in Heat Transfer*, ASME, Part III, Sec. A., pp. 652-661, 1961.
- [4] M. P. Escudier, F. Presti, Pipe flow of a thixotropic liquid, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 62, No. 2, pp. 291-306, 1996.
- [5] M. P. Escudier, F. Presti, S. Smith, Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 81, No. 3, pp. 197-213, 1998.
- [6] F. T. Pinho, J. H. Whitelaw, Flow of non-Newtonian fluids in a pipe, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 129-144, 1990.
- [7] R. Sureshkumar, A. N. Beris, R. A. Handler, Direct numerical simulation of the turbulent channel flow of a polymer solution, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 3, pp. 743-755, 1997.
- [8] C. D. Dimitropoulos, Y. Dubief, E. S. Shaqfeh, P. Moin, Direct numerical simulation of polymer-induced drag reduction in turbulent boundary layer flow of inhomogeneous polymer solutions, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 566, pp. 153-162, 2006.
- [9] M. Rudman, H. M. Blackburn, L. J. W. Graham, L. Pullum, Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 118, No. 1, pp. 33-48, 2004.
- [10] A. Moosaie, DNS of turbulent drag reduction in a horizontal channel by microfibers at high Reynolds numbers using an algebraic closure model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 117-127, 2013. (In Persian)
- [11] A. Moosaie, Development of stochastic field method for DNS of drag reduction by microfibers in turbulent channel flow, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 75-82, 2014. (In Persian)
- [12] D. O. A. Cruz, F. T. Pinho, P. R. Resende, Modelling the new stress for improved drag reduction predictions of viscoelastic pipe flow, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 121, No. 2, pp. 127-141, 2004.
- [13] P. R. Resende, F. T. Pinho, B. A. Younis, K. Kim, R. Sureshkumar, (2013). Development of a Low-Reynolds-number $k-\omega$ Model for FENE-P Fluids. *Flow, turbulence and combustion*, Vol. 90, No. 1, pp. 69-94, 2013.
- [14] M. R. Malin, Turbulent pipe flow of power-law fluids, *International communications in heat and mass transfer*, Vol. 24, No. 7, pp. 977-988, 1997.
- [15] M. Behr, D. Arora, S. Schulte-Eistrup, Prediction of flow features in centrifugal blood pumps, in *European Conference on Computational Mechanics*, Carcow, Poland, 2001.
- [16] K. Ro, H. Ryou, Development of the modified $k-\varepsilon$ turbulence model of power-law fluid for engineering applications, *Science China Technological Sciences*, Vol. 55, No. 1, 276-284, 2012.

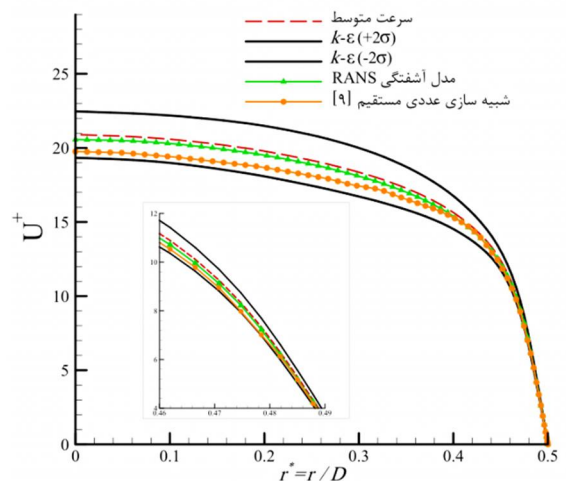
آمده نشان می‌دهد که روش مورد استفاده با دقت زیادی عدم قطعیت موجود در مدل آشفتگی RANS را پیش‌بینی می‌کند. این رهیافت برای اعمال بر روی جریان در هندسه‌های پیچیده دو و سه‌بعدی در حال توسعه است.



شکل 4 برخی از نمونه‌های تولید شده از مجموع تنش رینولدز و تنش توانی



شکل 5 برخی از میدان‌های تصادفی سرعت



شکل 6 عدم قطعیت موجود در مدل‌سازی جریان آشفته غیرنیوتنی

- Structures, *Structural Dynamics and Materials Conference*, Denver, United States, 2011.
- [23] E. Dow, Q. Wang, Uncertainty quantification of Structural Uncertainties in RANS Simulations of Complex Flows, in *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, United States, 2011.
- [24] S. C. Cheah, L. Cheng, D. Cooper, B. E. Launder, On the structure of turbulent flow in spirally fluted tubes, in *5th International Symposium on Refined Flow Modeling and Turbulence Measurements*, Paris, France, 1993.
- [25] C. G. Speziale, On nonlinear k-l and k- ϵ models of turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 178, pp. 459-469, 1987.
- [26] T. J. Craft, B. E. Launder, K. Suga, Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence, *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 108-115, 1996.
- [27] W. Jones, B. E. Launder, The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, Vol. 2, pp. 301-314, 1972.
- [17] O. P. Le Maître, O. M. Knio, *Spectral methods for uncertainty quantification: with applications to computational fluid dynamics*, New York: Springer, 2011.
- [18] S. B. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge: Cambridge university press, 2000.
- [19] P. D. A. Plattew, G. J. A. Loeven, H. Bijl, Uncertainty Quantification applied to the k- ϵ model of turbulence using the Probabilistic Collocation Method, *49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Schaumburg, Unites States, 2008.
- [20] T. J. Craft, L. J. W. Graham, B. E. Launder, Impinging jet studies for turbulence model assessment—II. An examination of the performance of four turbulence models, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, No. 10, pp. 2685-2697, 1993.
- [21] H. Yildizturan, *Uncertainty quantification and calibration of k- ϵ turbulence model*, MSc Thesis, TU Delft, Delft, 2012.
- [22] E. Dow, Q. Wang, Quantification of structural uncertainties in the k- ω turbulence Model, *52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC*