



شبیه سازی پدیده آوالیاسانی حباب با کمک روش شبکه بولتزمن

رضا صادقی¹، محمدحسن رحیمیان^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، کد پستی 1437834411، rahimyan@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 08 دی 1393

پذیرش: 21 اسفند 1393

ارائه در سایت: 23 فروردین 1394

کلید واژگان:

جریان تراکم پذیر

موج ضربه، شبکه بولتزمن

لکس وندروف اصلاح شده

رایلی - پلسه

چکیده

در مقاله حاضر به بررسی جریان تراکم پذیر ناشی از موج ضربه ای و نوسان حباب با مرز متحرک به روش شبکه بولتزمن می پردازیم. شبکه بولتزمن در پیش بینی جریان های تراکم پذیر با ماخ بالا ناموفق است، اما با تلاش هایی که در سال های اخیر صورت گرفته است، مدل های جدیدی برای پایدار کردن جواب های معادلات تراکم پذیر ایجاد شده است. روش لکس وندروف اصلاح شده که حل پایداری دارد، برای گسسته سازی معادلات بولتزمن استفاده شده است. از مدل های تراکم پذیر بر مبنای الگوی اوپلری و الگوی سرعت های چندگانه نویر استوکسی برای شبیه سازی جریان تراکم پذیر در شبکه بولتزمن در این تحقیق استفاده شده است. دینامیک حباب تراکم پذیر به کمک معادله رایلی - پلسه به دست آمده است. شبیه سازی موج ضربه در حباب به کمک سایر روش های دینامیک سیالات محاسباتی انجام شده است، اما به علت ضعف هایی که روش شبکه بولتزمن در جریان تراکم پذیر داشت، تاکنون تلاشی برای بررسی فیزیک این پدیده با این روش انجام نشده است. هدف از این شبیه سازی دستیابی به شناختی از توزیع خواص ترمودینامیکی در راستای شعاع حباب هنگام فروریزش حباب و در نهایت شکل گیری پدیده آوالیاسانی که ناشی از برخورد امواج شوک در مرکز حباب است، با روش شبکه بولتزمن می باشد.

Simulation of Bubble Sonoluminescing Phenomena with Lattice Boltzmann Method

Reza Sadeghi, Mohammad Hasan Rahimyan*

Department of Mechanical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

* P.O.B. 1437834411 Tehran, Iran, rahimyan@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 29 December 2014

Accepted 12 March 2015

Available Online 12 April 2015

Keywords:

Compressible Flow

shock wave

Lattice Boltzmann

Modified Lax-Wendroff

Rayleigh-Plesset

ABSTRACT

In the present paper, solution methods for simulating compressible flows and shock wave simulation by using Lattice Boltzmann Method (LBM) and simulation of shock wave in the bubble with a moving boundary is evaluated. The standard LBM is found to be incapable of predicting compressible flows and confronting instabilities in high Mach number flows. But due to the effort that has been made in recent years, new models for stable solutions of the compressible equations are established. Modified Lax-Wendroff finite difference scheme that has stable solutions has been used for discretizing Lattice Boltzmann equation. In this study, models based on the compressible Euler and compressible multispeed Navier-Stokes to simulate compressible lattice Boltzmann method have been used. The dynamics of compressible bubble using Rayleigh-Plesset equation have been obtained. Simulation of shock wave in the bubble with other computational fluid dynamics methods has been carried out. However, due to the weakness of the Lattice Boltzmann method for compressible flow, no attempt to study the physics of this phenomena has been made with this method. The purpose of this simulation is to achieve a distribution of thermodynamic properties through the radius while collapsing and eventually forming the Sonoluminescence phenomena that is caused by the collision of shock waves in the center of the bubble to another one, with lattice Boltzmann method.

1- مقدمه

جهت شیب به آن نیرو وارد شده و در حقیقت آن شی داخل شکم موج گرفتار می شود. یک حباب را به همین روش می توان به تله انداخت و به واسطه ویژگی های ریزساختاری و تراکم پذیری، در یک نقطه شکم، موج با فشار صوتی منقبض و منبسط می شود. در این پدیده تک حباب ساکن، تحت تأثیر امواج صوتی با دامنه های بزرگ قرار می گیرد. نوسان شدید و غیرخطی حباب در هر تناوب موج صوتی باعث فروریزش بسیار سریع دیواره حباب و تشکیل موج شوک و تمرکز آن به سوی مرکز حباب می شود [1]. اولین آنالیزها در

آوالیاسانی پدیده ای منحصر به فرد در علم مکانیک سیالات به شمار می رود. در یک حجم آب با شکل هندسی معین مثل کره می توان به گونه ای صوت را منتشر کرد که در آن امواج ایستاده صوتی تشکیل شود. در امواج ایستاده بعضی نقاط گره هستند که همیشه در تعادل می باشند و نقاط مابین آن ها شکم موج می باشند که فشار صوتی در آن ها از یک حداکثر تا یک حداقل تغییر می کند. یک شی که در میدان صوتی با دامنه بزرگ قرار می گیرد، در

همکارانش [16] اولین تابع توزیع تعادلی دوگانه³ را بر اساس مدل دوجزئی ارائه دادند و ژو و همکارانش [17] این مدل را بهبود بخشیدند. یین [18] مدلی دوبعدی با سطح انرژی دوگانه ارائه کرد که در معادلات تراکم پذیر اوایلر صدق می‌کرد. کو و همکارانش [19] روش پارامترهای غیرآزاد را پیشنهاد دادند آنها تابع توزیع تعادلی جدیدی برای مسائل یک‌بعدی و دوبعدی پیشنهاد دادند، در این روش تابع توزیع تعادلی ماکسول با تابع دایره‌ای و درونیابی چندجمله‌ای جایگزین می‌شود، اما اشکال روش آن‌ها برابر قرار دادن پراوتل و نسبت گرمای ویژه در این روش بود. واتاری و سوتاهارا [20] الگوی چند سرعتی دوبعدی تفاضل محدودی ارائه کردند. واتاری و سوتاهارا [21] بعد از ارائه این مدل الگوی حرارتی سه‌بعدی با پایداری بالا اما گرمای ویژه و عدد پراوتل ثابت ارائه کردند. واتاری [22] الگویی با نسبت گرمای ویژه قابل تنظیم ارائه نمود. چن و همکاران [23] با استفاده از روش لکس و نندروف اصلاح‌شده و الگوی سرعت‌های چندگانه 16 سرعتی موفق شدند پدیده‌هایی با ماخ 30 را نیز شبیه‌سازی کنند. کاتائوکا و سوتاهارا [24] الگوی زمان آرامش چندگانه با سرعت‌های چندگانه را پیشنهاد دادند. تعداد جهت‌های سرعتی 16 عدد بود. الگوی زمان آرامش چندگانه دارای پایداری بسیاری است همچنین این خصوصیات روش را برای شبیه‌سازی پدیده‌های توربولانس گزینه مناسبی می‌گرداند. یوان و همکارانش [25] یک الگوی زمان آرامش چندگانه گرمایی برای جریان‌های تراکم‌پذیر با ماخ بالا پیشنهاد داده‌اند. اخیراً هی یالینگ و همکارانش [26] جریان تراکم‌پذیر با امواج شوک را در حالت یک تا سه‌بعدی به کمک تابع توزیع دوگانه تحلیل کردند. در این روش از تابع توزیع تعادلی چگالی برای مدل کردن جریان میدان و از تابع توزیع انرژی کل برای شبیه‌سازی میدان دما استفاده شده است. فرم گسسته توابع توزیع چگالی و انرژی کل به کمک بسط چندجمله‌ای هرمیت به‌دست‌آمده است. همچنین فرم گسسته شده سرعت را با کمک چندجمله‌ای گاوس-هرمیت مربعی به دست آوردند. برای بهبود دقت و پایداری درگرفتن شوک از روش اختلاف محدود صریح - ضمنی که پایه این روش بر اساس کم کردن ناپایداری فلاکس محدودکننده است، استفاده شده است همچنین نجات و عبداللهی [27] با ترکیب روش‌های کاهش تنوع کلی⁴ و لکس و نندروف اصلاح‌شده و معرفی نوعی محدودکننده شار روش جدیدی ارائه دادند. به‌طورکلی استفاده از روش‌های مرسوم و با دقت بالای جداکننده شار⁵ دینامیک سیالات محاسباتی به همراه روش شبکه بولتزمن جواب‌هایی قابل‌قبول و با دقت بالا ارائه می‌دهد. روش گسسته سازی در این تحقیق همان روش لکس و نندروف اصلاح‌شده هست که با توجه به نجات [27] جواب‌های نسبتاً دقیقی دارد.

2-1- الگوی تراکم پذیر اوایلر

برای حل مسائل تراکم پذیر ابتدا از جملات دارای لزجت صرف‌نظر می‌شود. با کمک این ساده‌سازی به معادلات تراکم پذیر غیر لزج اوایلر می‌رسیم. مدل اوایلر در هر سه بعد به دست کاتائوکا و تسوها را گسسته سازی شده است. مدل اوایلر یک‌بعدی به‌صورت $D_1 Q_5$ می‌باشد که دارای پنج سرعت گسسته می‌باشد. در حالت دوبعدی به‌صورت $D_2 Q_9$ که دارای نه سرعت گسسته و در حالت سه‌بعدی $D_3 Q_{15}$ دارای پانزده سرعت گسسته می‌باشد. توزیع سرعت‌های گسسته یک‌بعدی و دوبعدی در روش اوایلر در شکل 1 نشان

مسئله کاویتاسیون و دینامیک حباب‌ها توسط رایلی [1] در سال 1917 انجام شد. رایلی مسئله ترکیدن حباب خالی و حباب پر از گاز را با فرض تراکم هم‌دمای گاز داخل حباب در یک محیط آبی بزرگ حل کرد. توجه او به این مسئله از نگرانی‌هایی که بابت کاویتاسیون و اثرات مخرب آن وجود داشت نشأت گرفته بود، سپس او رابطه‌ای برای حباب نوسان گر به دست آورد. فرنل و شولتس [2] اولین بار توانستند اثر حاصل از نوسان حباب را ثبت کنند. رابرتز و همکاران [3] با شبیه‌سازی انجام‌شده و فرضیاتی همچون نادیده گرفتن لزجت و انتقال جرم و حرارت میان حباب و سیال، وجود موج ضربه‌ای و نقش کلیدی آن در ایجاد فشار و دمای بالا را مطرح نمودند. پس‌از آن ماس و همکاران [4] و نیز کاندیچ [5] با فرض تجزیه شیمیایی و نیز پدیده یونیزاسیون درون حباب و با توجه به گرماگیر بودن این پدیده‌ها درجه حرارت‌های ماکزیمم کمتری را ثبت نمودند. ازجمله تحقیقاتی که با رویکرد مولکولی انجام‌شده است، می‌توان به شبیه‌سازی توسط راث و پاترمن [6] اشاره کرد. وگنولی و همکارانش [7] تأثیر پارامترهای مختلف بر پدیده آوالیاسانی را بررسی کردند. سینامون [8] با کمک دینامیک سیالات محاسباتی پدیده فروریزش حباب را با جواب‌های حاصل از معادله رایلی پلسه مقایسه کرد. ماراس و برنر [9،10] پدیده آوالیاسانی را به‌صورت تجربی بررسی کردند و پارامترهای تأثیرگذار را موردبررسی قرار دادند. شبیه‌سازی پدیده آوالیاسانی به کمک روش شبکه بولتزمن به علت ناکارآمدی‌هایی که در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر دارد، تاکنون انجام‌نشده است اما با پیشرفت‌های اخیر در توسعه مدل‌های جدید تراکم‌پذیر شبکه بولتزمن، شبیه‌سازی این پدیده نیز امکان‌پذیر شده است.

2- روش شبکه بولتزمن تراکم پذیر

درروش قدیمی شبکه بولتزمن که اپراتور برخورد با تقریب باتانگار-گراس-کروک¹ به دست می‌آمد، به علت فرض ماخ پایین در بسط تیلور تابع توزیع تعادلی ماکسول، روشی مناسب برای حل جریان تراکم‌پذیر نبود [11] تلاش‌هایی برای برطرف کردن این مشکل درروش شبکه بولتزمن انجام گرفت. مشکلات ریشه‌ای همچون پایداری پایین و نوسانات زیاد نسبت به روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی و عدم شبیه‌سازی جریان‌هایی با ماخ بالا سبب شد مدل‌هایی جدیدی ارائه شود، مدل‌های ارائه‌شده بر دودسته بودند. دسته‌ای از مدل‌ها بر پایه تغییر روش به دست آمدن تابع توزیع تعادلی از تابع توزیع تعادلی ماکسول بناشده بودند و تعدادی از روش‌ها نیز بر روی روش‌های گسسته سازی زمانی و مکانی پایدارتر تمرکز کرده بودند، جی و همکاران [12] مدل حجم محدودی با استفاده از حل‌کننده شار بیان کردند و نتایج را با روش مرسوم گودونف مقایسه نمودند که به علت اینکه حل در سطح تماس به‌صورت صریح به‌دست‌آمده بود نسبت به گودونف دقت و سرعت بالاتری داشت. فنگ و همکارانش [13] ترم مکانی را با روش اساساً غیر نوسانی وزن‌دار² گسسته کردند. همچنین با کمک روش لکس و نندروف و اضافه کردن ترم لزجت مصنوعی به آن توانستند پایداری روش را افزایش دهند. الکساندر و همکارانش [14] اولین مدل حرارتی با بسط تابع توزیع تعادلی تا مرتبه 3، مدلی با 13 سرعت گسسته را ارائه کردند. چن و همکارانش [15] توانستند کار الکساندر و همکارانش را توسعه داده و ترم‌های غیرخطی را در آن حذف کنند و معادله انرژی را پوشش دهند. هی و

3- Double Distribution Function
4- Total variation diminishing (TVD)
5- Flux limiting method

1- Bhatnagar-Gross-Krook
2- weighted essentially non-oscillatory (WENO)

داده‌شده است.

تابع توزیع تعادلی و ضرایب آن در حالت یک‌بعدی به‌صورت معادله (1) به دست می‌آید [13]:

$$f_i^{eq} = \rho(A_i + B_i c_{i1}) \quad i = 1, \dots, 5 \quad (1)$$

$$c_{i1} = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ v_1 \cos(\pi i) & i = 2, 3 \\ v_2 \cos(\pi i) & i = 3, 4, 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$B_i = \begin{cases} \frac{-v_2^2 + (b+2)T + u_1^2}{2v_1^2(v_1^2 - v_2^2)} & i = 2, 3 \\ \frac{-v_1^2 + (b+2)T + u_1^2}{2v_2^2(v_2^2 - v_1^2)} & i = 4, 5 \end{cases} \quad (3)$$

ضرایب A_i نیز از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$A(i=1) = \frac{b-2}{\eta_0^2} T$$

$$A(i=2,3) = \frac{1}{4(v_1^2 - v_2^2)} \times \left(-v_2^2 + \left((b-1) \frac{v_2^2}{\eta_0^2} + 1 \right) T + u_1^2 \right)$$

$$A(i=4,5) = \frac{1}{2(v_2^2 - v_1^2)} \times \left(-v_1^2 + \left((b-1) \frac{v_1^2}{\eta_0^2} + 1 \right) T + u_1^2 \right) \quad (4)$$

$$\eta_i = \begin{cases} \eta_i & i = 1 \\ 0 & i = 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (5)$$

$$b = \frac{2}{\gamma - 1} \quad (6)$$

که v_1, v_2, η_0 ثابت‌های غیر صفر می‌باشد. یک انتخاب مناسب برای این مقادیر صادق بودن این پارامترها در شرط‌های $v_2 = 2v_1$ و نیز $v_1 < \eta_0 < v_2$ می‌باشد. در اینجا مقادیر $v_1 = 2, \eta_0 = 3, v_2 = 2$ اعمال شده است. تابع توزیع تعادلی در حالت یک‌بعدی از معادله 1 و در حالت دوبعدی از معادله 7 محاسبه می‌شود. پارامتر b به‌صورت رابطه 6 تعریف می‌شود به همین علت نسبت گرمای ویژه در این مدل قابل تنظیم می‌باشد و مقدار $\gamma = 1.4$ در نظر گرفته می‌شود. در مدل اوایلر دوبعدی، سرعت‌های گسسته و تابع η_i به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود. یک انتخاب ثوابت موجود می‌تواند به‌صورت $v_1 = 10, \eta_0 = 15, v_2 = 20$ باشد [27].

$$f_i^{eq} = \rho(A_i + B_i c_{i1} + D_i u_{\alpha} c_{i\alpha} u_{\alpha} c_{i\beta}) \quad i = 1, \dots, 9 \quad (7)$$

تفاوت رابطه (1) با رابطه (7) در وجود ترم $D_i u_{\alpha} c_{i\alpha} u_{\alpha} c_{i\beta}$ می‌باشد. این ترم به علت دوبعدی بودن معادلات حاکم به مسئله اضافه‌شده است.

$$(c_{i1}, c_{i2}) = \begin{cases} (0,0) & i = 1 \\ v_1 \left(\cos \frac{\pi i}{2}, \sin \frac{\pi i}{2} \right) & i = 2, \dots, 5 \\ v_2 \left(\cos \pi \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{4} \right), \sin \pi \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) & i = 6, \dots, 9 \end{cases} \quad (8)$$

$$\eta_i = \begin{cases} \eta_i & i = 1 \\ 0 & i = 2, \dots, 9 \end{cases} \quad (9)$$

ضرایب A_i نیز از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$A(i=1) = \frac{b-2}{\eta_0^2} T$$

$$A(i=2, \dots, 5) = \frac{1}{4(v_1^2 - v_2^2)}$$

$$\times \left(-v_2^2 + \left((b-2) \frac{v_2^2}{\eta_0^2} + 1 \right) T + u_{\alpha}^2 \right)$$

$$A(i=6, \dots, 9) = \frac{1}{4(v_2^2 - v_1^2)} \times \left(-v_1^2 + \left((b-2) \frac{v_1^2}{\eta_0^2} + 1 \right) T + u_{\alpha}^2 \right) \quad (10)$$

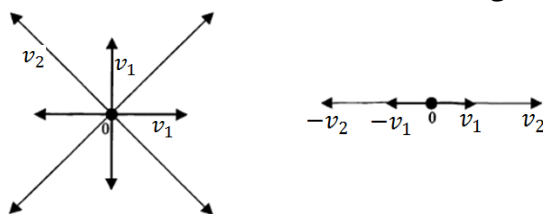
$$B_i = \begin{cases} \frac{-v_2^2 + (b+2)T + u_{\alpha}^2}{2v_2^2(v_1^2 - v_2^2)} & i = 2, \dots, 5 \\ \frac{-v_1^2 + (b+2)T + u_{\beta}^2}{2v_2^2(v_2^2 - v_1^2)} & i = 6, \dots, 9 \end{cases} \quad (11)$$

$$D_i = \begin{cases} \frac{1}{2v_1^2} & i = 2, \dots, 5 \\ \frac{1}{2v_2^2} & i = 6, \dots, 9 \end{cases} \quad (12)$$

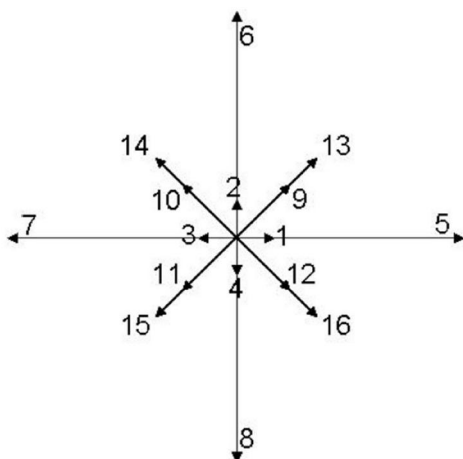
2-2- الگوی تراکم پذیر نویر استوکسی

ازجمله برتری‌های این الگو نسبت به الگوی تراکم پذیر اوایلری می‌توان به معادلات مبنایی ساده، عبارات مشتق خطی و وضوح‌بالا برای نشان دادن ناپیوستگی‌ها اشاره کرد. این الگو به فضای سرعت مولکولی نیازمند است که زمان محاسبه را افزایش می‌دهد. در الگوی نویر استوکسی کاتائوکا و سوتاهارا که در سال 2004 ارائه نمودند، نسبت گرمای ویژه بر خلاف مدل‌های پیشین منعطف بود. کاتائوکا و سوتاهارا [24] فرم ویژه‌ای از گسسته سازی سرعت و مقادیر جدیدی برای $\eta_i, c_{i\alpha}, f_i^{eq}$ را ارائه نمودند که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم. در شکل 2 توزیع سرعت‌های روش نویر استوکسی آورده شده است.

ثوابت c_{i1}, c_{i2} مقادیر بردارهای یک‌جهت‌های مختلف ارائه‌شده در شکل 2 می‌باشند.



شکل 1 توزیع سرعت‌های گسسته یک‌بعدی و دوبعدی اوایلر [13]



شکل 2 توزیع سرعت‌های گسسته دوبعدی در مدل 16 سرعت نویر استوکسی [13]

معادله اصلاح‌شده لکس وندروف به فرم معادله 16 می‌باشد که در این معادله برای بهبود دقت و پایداری در جریان‌های با عدد ماخ بالا، جمله پراکندگی (مشتق مرتبه سوم تابع توزیع) به همراه ویسکوزیته مصنوعی (مشتق مرتبه دوم تابع توزیع) به سمت راست معادله 16 افزوده شده است [23].

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_{ia} \frac{\partial f_i}{\partial x_a} = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{eq}) + \frac{c_{ia}(1 - c_{ia}^2)}{6} \Delta x_a^2 \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_a^3} + \theta_{ai} |\kappa_a| (1 - |\kappa_a|) \frac{\Delta x_a^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_a^2} \quad (16)$$

$$c_{ia} = \frac{v_{ia} \Delta t}{\Delta x_a} \quad (17)$$

$$\kappa_a = \frac{u_a \Delta t}{\Delta x_a} \quad (18)$$

$$\theta_{ai} = \lambda \left| \frac{p_{ai+1} - p_{ai} + p_{ai-1}}{p_{ai+1} + 2p_{ai} + p_{ai-1}} \right| \quad (19)$$

در معادلات (15) و (16) و (17) و (18) u_a سرعت سیال و γ پارامتر تنظیم‌کننده اندازه ویسکوزیته می‌باشد. θ_{ai} تابع سویچینگ می‌باشد که در منطقه شوک $\theta_{ai} \rightarrow 1$ و در سایر مناطق $\theta_{ai} \rightarrow 0$ می‌باشد. بدین ترتیب معادلات تغییر یافته شبکه بولتزمن به فرم زیر درمی‌آید [13]:

$$f_{i,l}^{new} = f_{i,l} - \frac{c_{ia}}{2} (f_{i,l+1} - f_{i,l-1}) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_{i,l} - f_{i,l}^{eq}) + \frac{c_{ia}(1 - c_{ia}^2)}{12} \times (f_{i,l+2} - 2f_{i,l+1} + 2f_{i,l-1} - f_{i,l-2}) + \frac{\theta_{ai}|1 - |\kappa_a||}{2} (f_{i,l+1} - 2f_{i,l} + f_{i,l-1}) \quad (20)$$

3- شبیه‌سازی پدیده‌های تراکم‌پذیر

در این قسمت مسائل مختلف یک بعدی و دو بعدی با رویکردهای اولیری و نویر استوکسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با مسئله ریمان و لوله شوک شروع می‌کنیم. هندسه مسئله ریمان بدین گونه است که لوله‌ای یک بعدی داریم که دو نوع سیال متفاوت در این لوله با دیافراگمی از یکدیگر جدا شده‌اند این دیافراگم ناگهان پاره می‌شود به علت عدم تعادل در دو طرف این دیافراگم جریانی غیر دائم ایجاد می‌شود که شامل موج شوک و یا ناپیوستگی و فن انبساطی می‌باشد. برای تست کردن کد روش مسئله ساده ساد را به صورت یک بعدی و سپس مسئله‌ای تراکم‌پذیر به صورت دو بعدی حل می‌کنیم. هدف از این قسمت بررسی صحت مدل‌های کد نویسی شده در مسائل ساده تراکم‌پذیر می‌باشد.

3-1- شبیه‌سازی یک بعدی مسئله ساد

شرایط اولیه در مسئله ساد به صورت زیر می‌باشد (که خواص به صورت بی‌بعد می‌باشند):

$$\begin{cases} (\rho, u_1, u_2, p) = (1, 0, 0, 1) & x < 0.5 \\ (\rho, u_1, u_2, p) = (1, 0, 0, 1) & x \geq 0.5 \end{cases} \quad (21)$$

پارامترهای مدل برابرند با $dx = 2 \times 10^{-3}$, $dt = 1.25 \times 10^{-4}$ و $\varepsilon = 10^{-4}$ و $v_1 = 2$, $\eta_0 = 3$, $v_2 = 2$, $k = 1$, $\lambda = 1.4$ در زمان $t = 0.15$ ثانیه نتایج حاصل از شبیه‌سازی با دو روش اولیر و نویر استوکس و مقایسه با حل دقیق در شکل‌های 3، 4، 5 و 6 آورده شده است.

$$(c_{i1}, c_{i2}) = \begin{cases} cyc : (\pm 1, 0) & i = 1, \dots, 4 \\ cyc : (\pm 6, 0) & i = 5, \dots, 8 \\ \sqrt{2}(\pm 1, \pm 1) & i = 9, \dots, 12 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1) & i = 13, \dots, 16 \end{cases} \quad (13)$$

$$\eta_i = \begin{cases} \eta_i & i = 1, \dots, 4 \\ 0 & i = 5, \dots, 16 \end{cases} \quad (14)$$

$$f_i^{eq} = \rho [a_{0i} + a_{0i}T + (a_{0i} + a_{0i}T)u_a^2 + a_{5i}u_a^2u_\beta^2 + (b_{0i} + b_{1i}T + b_{2i}u_a^2)u_\beta c_{i\beta} + (d_{0i} + d_{1i}T + d_{2i}u_a^2)u_\beta c_{i\beta}u_\chi c_{i\chi} + e_i u_a c_{ia} u_\beta c_{i\beta} u_\chi c_{i\chi}] \quad (15)$$

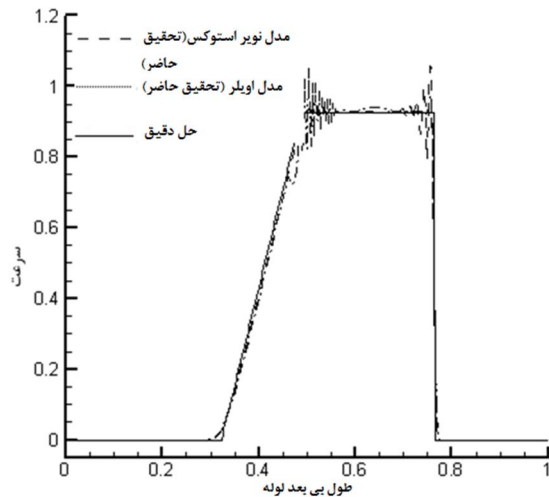
ضرایب تابع توزیع تعادلی معادله 15 در جدول 1 آورده شده است [13].

2- نحوه گسسته‌سازی معادلات تراکم‌پذیر

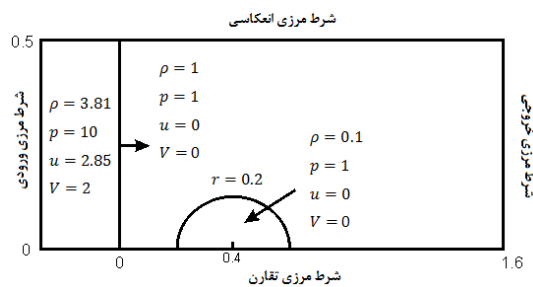
یکی از مزایای روش شبکه بولتزمن نسبت به سایر روش‌ها تولید آسان شبکه در آن می‌باشد. شبکه موجود در روش بولتزمن در اکثر مواقع به صورت سازمان‌یافته است (گرچه جدیداً کارهایی برای حل شبکه بی‌سازمان در روش بولتزمن انجام شده است). تکنیک لکس وندروف یک روش اختلاف محدود صریح است که به طور اخص با حل‌های گام‌به‌گام سازگار است. ایراد این روش وجود اثرات پخشی بسیار می‌باشد که اثراتش را در گرادیان‌ها و ناپیوستگی‌های بزرگ نشان می‌دهد. چنین ویژگی‌هایی سبب می‌شود که این روش برای شبیه‌سازی شوک مناسب نباشد. برای از بین بردن نوسانات پارازیتی معادلات لتیس بولتزمن و افزایش پایداری در اعداد ماخ بالا به معادلات حاکم بر روش لکس وندروف ترم ویسکوزیته مصنوعی اضافه می‌شود.

جدول 1 ضرایب تابع توزیع تعادلی معادله (15) [13]

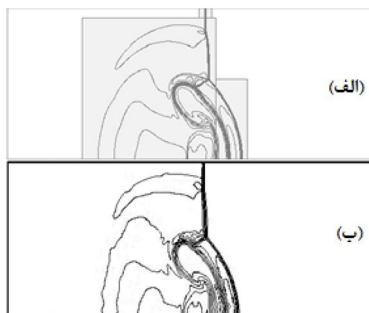
i	1-4	5-8	9-12	13-16
a_{0i}	0	$\frac{1}{96}$	$\frac{81}{160}$	$-\frac{4}{15}$
a_{1i}	$\frac{b-2}{25}$	$-\frac{121b-408}{86400}$	$-\frac{229b+8}{3200}$	$\frac{89b+222}{2700}$
a_{2i}	0	$\frac{b+2}{1728}$	$\frac{b+2}{320}$	$-\frac{b-2}{270}$
a_{3i}	$-\frac{36}{115}$	$-\frac{799}{397440}$	$-\frac{117}{640}$	$\frac{13}{135}$
a_{4i}	$\frac{b+4}{115}$	$\frac{19b+306}{397440}$	$\frac{19b+38}{640}$	$\frac{2b-9}{270}$
a_{5i}	$\frac{1}{115}$	$\frac{9}{397440}$	$\frac{9}{640}$	$-\frac{1}{135}$
b_{0i}	0	0	$\frac{9}{40}$	$-\frac{2}{45}$
b_{1i}	$\frac{2(b-2)}{25}$	$-\frac{2b+29}{32400}$	$-\frac{14b+3}{400}$	$\frac{2(7b+11)}{2025}$
b_{2i}	0	$-\frac{1}{2592}$	$\frac{1}{80}$	$-\frac{7}{810}$
d_{0i}	$\frac{72}{115}$	$-\frac{29}{298080}$	$\frac{9}{160}$	$-\frac{2}{405}$
d_{1i}	$-\frac{2(b+4)}{115}$	$\frac{b+4}{74520}$	$-\frac{b-4}{160}$	$\frac{b+4}{810}$
d_{2i}	$-\frac{2}{115}$	$\frac{1}{74520}$	$-\frac{1}{160}$	$\frac{1}{810}$
e_i	0	$\frac{1}{46656}$	$-\frac{3}{320}$	$\frac{8}{3645}$



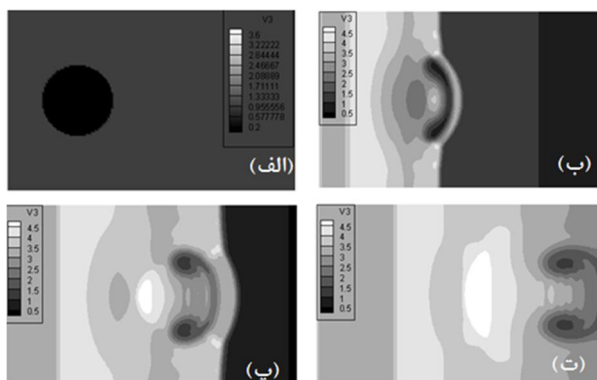
شکل 6 توزیع سرعت بی بعد در لوله موج ضربه برای مسئله ساد



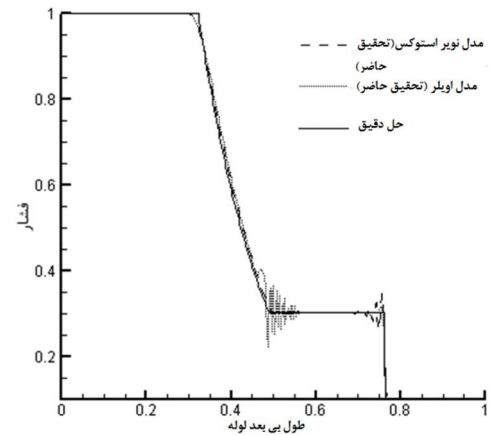
شکل 7 هندسه دو بعدی و شرایط مرزی اولیه حاکم بر مسئله موج شوک در سیلندر حاوی تک حباب [28]



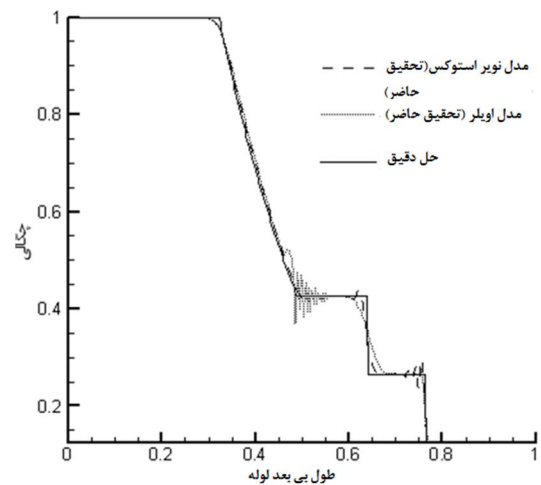
شکل 8 مقایسه خطوط کانتور چگالی به روش (الف) دینامیک سیالات محاسباتی با بهبود شبکه [28] و (ب) شبکه بولتزمن چند سرعتی در زمان 0/2 ثانیه



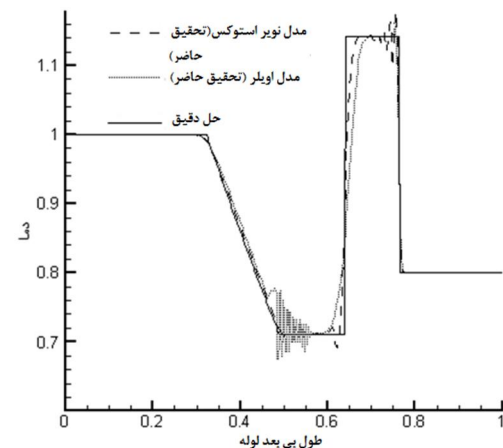
شکل 9 کانتور دویعدی چگالی (کیلوگرم بر متر مکعب) به روش شبکه بولتزمن چند سرعتی (الف زمان 0 ثانیه، ب زمان 0/1 ثانیه، ج زمان 0/3 ثانیه، د زمان 0/5 ثانیه)



شکل 3 توزیع فشار بی بعد در لوله موج ضربه برای مسئله ساد



شکل 4 توزیع چگالی بی بعد در لوله موج ضربه برای مسئله ساد



شکل 5 توزیع دما بی بعد در لوله موج ضربه برای مسئله ساد

3-1-1- شبیه‌سازی دو بعدی موج شوک در سیلندر حاوی حباب

شوکی صفحه‌ای با سیلندری حاوی حباب با چگالی کم برخورد می‌کند. شرایط اولیه در شکل 7 نشان داده شده است. خطوط کانتور چگالی با حل دینامیک سیالات محاسباتی در شکل 8 مقایسه شده‌اند. همچنین کانتورهای چگالی در شکل 9 در زمان‌های متفاوت آورده شده‌اند. شرط مرزی ورودی و خروجی در ابتدا و انتهای سیلندر اعمال شده است. در خروجی کانال از درون‌یابی استفاده می‌شود.

4- دینامیک حباب

دینامیک حباب بخشی از فیزیک است که به بررسی رفتار حباب می‌پردازد. یکی از کاربردهای دینامیک حباب، بهبود روش های عکس‌برداری از رگ‌های خونی توسط امواج مافوق صوت است که کاربرد پزشکی دارد، این مهم نیاز به شناخت کامل دینامیک حباب‌های گازی دارد. معادلات دینامیک حباب‌های گازی مستغرق در آب که همان معادلات رایلی-پلسه هستند به صورت عددی حل می‌شوند. اهمیت دیگر بررسی دینامیک حباب گازی در بررسی پدیده بسیار مهم کاویتاسیون در صنعت است که در واقع حباب‌هایی که در مناطق کم‌فشار سیال ایجاد می‌شوند با حرکت به سمت مناطق پرفشار همان رفتار دینامیکی را از خود نشان می‌دهند که معادلات رایلی-پلسه توصیف می‌کنند، در واقع این کاربرد برای ما اهمیت دارد [4].

4-1- پدیده آوالیاسانی

پدیده آوالیاسی هنگامی رخ می‌دهد که حباب به صورت آکوستیکی با فرکانس اولتراسونیک به صورت دورهای نوسان می‌کند. این پدیده همراه با فروریزش حباب، کاویتاسیون و تولید نور می‌باشد. انرژی که از فروریزش حباب تولید می‌شود به حدی زیاد است که باعث تولید نور می‌شود. بعد از کشف آوالیاسانی، محققین مطالعات بسیاری بر روی جنبه‌های مختلف تئوری و آزمایشگاهی این پدیده انجام دادند. از لحاظ آزمایشگاهی، شناخت ویژگی‌های تابش و بستگی آن به جنس مایع و گاز داخل حباب بیشتر مورد توجه قرار گرفت، اما از دیدگاه تئوریک توصیف دینامیک حرکت و توصیف مکانیزم تابش، بیشتر مورد توجه قرار داشت. تا سال 1990 تولید سونولومینسانس تنها به روش چند حباب و به صورت گذرا و غیرقابل پیش‌بینی امکان‌پذیر بود. مشکل این روش عدم کنترل بر روی زمان تولید تابش است که شناخت ویژگی‌های آزمایشگاهی و پهنای زمانی تابش سونولومینسانس را بسیار مشکل می‌کرد، با کاهش فشار شعاع حباب زیاد شده و مایع را پی می‌زند در ادامه فشار موج سینوسی افزایش پیدا می‌کند و به علت موافقت جهت فشار محیطی و فشار نوسانی با جهت نوسان شعاعی، جدار با سرعت بیشتری نسبت به حالت قبل کوچک می‌شود و حرکات نوسانی از خود بروز می‌دهد (مرحله فروریزش). همچنان که فشار افزایش می‌یابد، حرکت شعاعی حباب تدریجاً به دلیل اثرات ایرنرسی غیرخطی می‌شود. اغلب از موج سینوسی برای تولید آوالیاسانی استفاده می‌شود؛ اما این موج می‌تواند با موج مثلثی و مربعی نیز جایگزین شود [4].

4-2- معادله رایلی پلسه

فرم مرسوم معادله رایلی پلسه با فرض تراکم ناپذیری به دست آمده است، فرض حذف این خاصیت در بسیاری از کاربردهای هیدرودینامیکی قابل استفاده است، اما در مسئله آوالیاسانی به علت اینکه مقادیر بسیار بالایی از انرژی آکوستیک حباب در فرم موج شوک به سیال منتقل می‌شود (فقط مقدار اندکی به نور تبدیل می‌شود)، این فرض منطقی نیست. با فرض وجود ترم تراکم‌پذیری به سمت راست معادله (22) ترم مشتق زمانی فشار گاز اضافه می‌شود:

$$\rho \left(\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = p_{gas} - p_0 - p(t) - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2S}{R} + \frac{R}{C} \frac{d}{dt} p_{gas} \quad (22)$$

$$p(t) = -p_a \sin(\omega t) \quad (23)$$

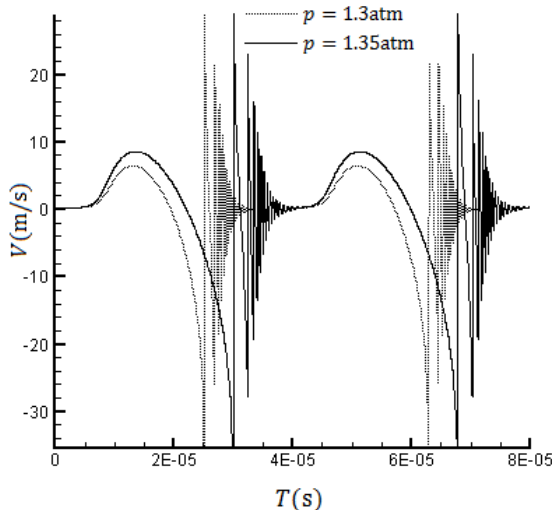
که C سرعت صوت در سیال می‌باشد. همچنین از معادله حالت واندروالسی برای توصیف فشار گاز در داخل حباب استفاده می‌شود.

$$p_{gas}(t) = \left(p_0 + \frac{2s}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - h^3}{R_0^3(t) - h^3} \right)^\gamma \quad (24)$$

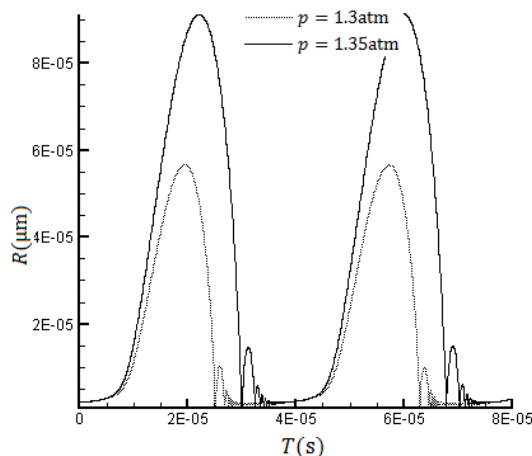
ترم مشتق زمانی فشار گاز را نیز می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{d}{dt} p_{gas} = -3\gamma p_{gas} \frac{R^2}{R^3 - h^3} \dot{R} \quad (25)$$

در معادلات بالا R_0 شعاع اولیه حباب و h ثابت معادله واندروالسی می‌باشد همانطور که در معادله بالا می‌بینیم فشار گاز بر حسب زمان در راستای شعاع تغییر می‌کند. معادله رایلی-پلسه معادله‌ای از مرتبه دو با دو شرط اولیه می‌باشد. برای حل عددی این معادله ابتدا آن را به دو معادله مرتبه یک تبدیل می‌کنیم و تشکیل یک دستگاه معادلات می‌دهیم. برای حل معادله مذکور از روش رانگ کوتا مرتبه چهار استفاده شد. در شکل های 10 و 11 تأثیر افزایش فشار نوسانی بر شعاع و سرعت جداره حباب نشان داده شده است. در این شکل‌ها شعاع اولیه حباب $R_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ متر و فرکانس فراصوت برابر 26.5 (kHz) می‌باشد [3]. سرعت مرز حباب از طریق معادله رایلی پلسه به دست می‌آید.



شکل 10 مقدار سرعت بر حسب زمان با فشار نوسانی 1/35 و 1/3 اتمسفر

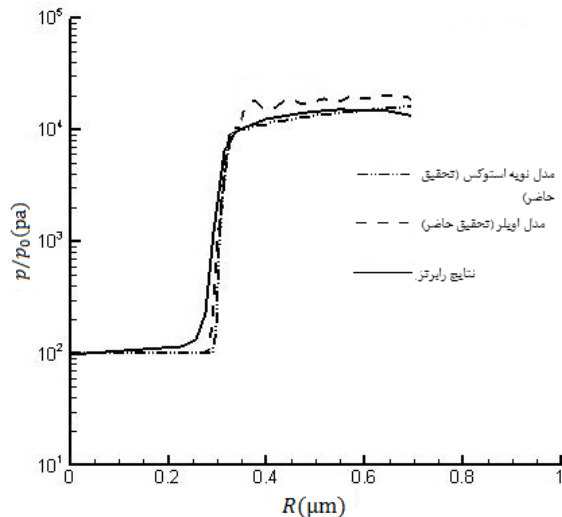


شکل 11 مقدار شعاع بر حسب زمان با فشار نوسانی 1/35 و 1/3 اتمسفر

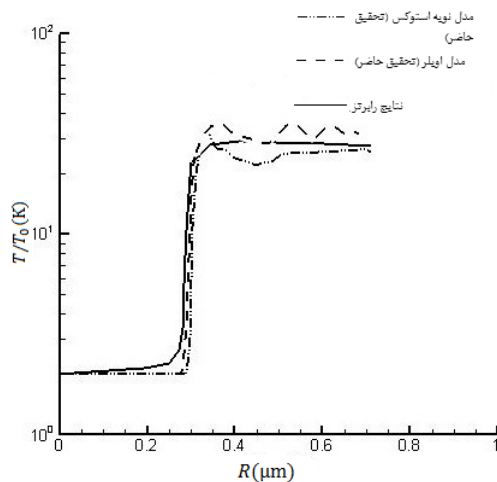
3-4- شبیه‌سازی آوالیاسانی در شبکه بولتزمن

برای شبیه‌سازی در میدان بولتزمن ابتدا بی‌بعد سازی انجام شده است. با استفاده از نتایج رابرتز [3] و مقادیر مرجع مسئله را بی‌بعد ساختیم. بی‌بعد سازی به صورت $\rho_0 = 1, T_0 = 10^5, L = 10^{-6}$ می‌باشد. سرعت بی‌بعد مرز حباب با کمک رابطه رایلی در هنگام فرو ریزش حباب به دست می‌آید در دینامیک حباب ساده‌سازی‌هایی در نظر گرفته می‌شود. شکل حباب در دینامیک حباب به صورت کروی در نظر گرفته می‌شود در صورتی که در واقع حباب کروی نیست. تغییرات خواص در زمان اولیه در دامنه‌های هر فاز ثابت در نظر گرفته شده است که البته در زمان اولیه این فرض نسبتاً درست می‌باشد ولی باز هم ایجاد خطا می‌کند همچنین در تحقیق حاضر خواص در هر یک از دو فاز در کل دامنه دارای تغییرات شعاعی در نظر گرفته شد، در صورتی که خواص حباب در واقع در جهت‌های دیگر نیز دارای تغییراتی است. شرط مرزی‌های اعمال شده در وجوه میدان محاسباتی شرط مرزی مرزهای باز می‌باشد و برای شبیه‌سازی دیواره متحرک حباب سرعت جداره را از معادله رایلی به دست می‌آوریم منتها با اضافه کردن سرعت به مرز حباب از لحاظ بقای جرمی سیستم ایزوله نیست که جهت برطرف کردن این مشکل به میزان ورودی جرم متناظر با سرعت، تعدادی از نقاط شبکه را حذف می‌کنیم تا بقای جرم تقریباً برقرار باشد. شعاع اولیه مسئله مورد بررسی رابرتز $R_0 = 4.5 \times 10^{-6}$ متر و فرکانس فراصوت برابر 26.5 (kHz) فرض شده است. خواص ترمودینامیکی در زمان‌ها t_a, t_b بررسی شدند که $t_b = t_a + 0.156$ همچنین $t_c = t_a + 0.19864$ و $t_a = 20.490474$ میکروثانیه می‌باشد. با کمک دو روش اویلری و نویر استوکسی این پدیده در داخل حباب حل شده است و نتایج در اشکال 12، 13، 14، 15، 16 و 17 آورده شده است. نتایج موجود در این اشکال با کمک دو روش شبکه بولتزمن ذکر شده ترسیم شده است، همچنین برای صحت سنجی از روش دینامیک سیالات محاسباتی برای مقایسه استفاده شده است. همچنین کانتور دما در زمان‌های متفاوت در شکل 18 آورده شده است. نوسانات موجود در شکل‌های 12 تا 17 به علت ماهیت روش‌های استفاده شده و نوع گسسته سازی معادلات حاکم بولتزمن می‌باشد. به طور کلی تمامی روش‌های عددی در ناپیوستگی‌ها دارای نوساناتی می‌باشند و هر چه اختلاف خواص در دو طرف ناپیوستگی بیشتر باشد این نوسانات بیشتر خواهد بود. مدل نویر استوکسی شبکه بولتزمن به علت استفاده از تعداد جهات سرعت بیشتر، نوسانات کمتری نسبت به مدل اویلری شبکه بولتزمن دارد. نتایج مرجع رابرتز که از حل همزمان معادله رایلی - پلسه و معادلات اویلر جریان تراکم پذیر به دست آمده نیز دارای نوساناتی می‌باشند منتها این نوسانات به وسیله رابرتز با میانگین‌گیری حذف شده است. روند تغییرات خواص در تحقیق حاضر و تحقیق رابرتز در زمان‌های مختلف همانند هم می‌باشد، موج شوک از پوسته حباب با سرعت به سمت مرکز حباب حرکت می‌کند و در مرکز امواج شوک به هم برخورد می‌کنند که باعث می‌شود نسبت خواص در شکل‌های 16 و 17 بسیار زیاد شود. پاترن [6] با انجام تحقیقی تجربی بیشینه دما در این پدیده را حدود 100000 کلوین به دست آورد که بیشینه دمای موجود در مرکز حباب در تحقیق حاضر به بیشینه دمای بدست آمده در داده‌های تجربی نسبت به داده‌های تحقیق رابرتز نزدیکی بیشتری دارد.

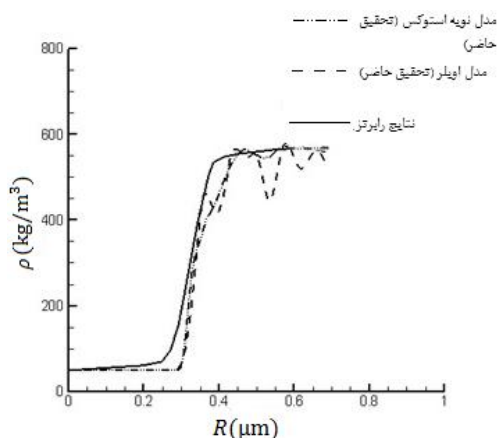
شبیه‌سازی پدیده آوالیاسانی توسط رابرتز خواص را در زمانی که موج شوک به مرکز حباب نزدیک می‌شود بیشتر از مقدار واقعیت به دست آورده است [6]، در صورتی که نتایج تحقیق حاضر تطابق بیشتری با نتایج تجربی دارد و این به علت نزدیکی ماهیت مزوسکوپی روش شبکه بولتزمن به



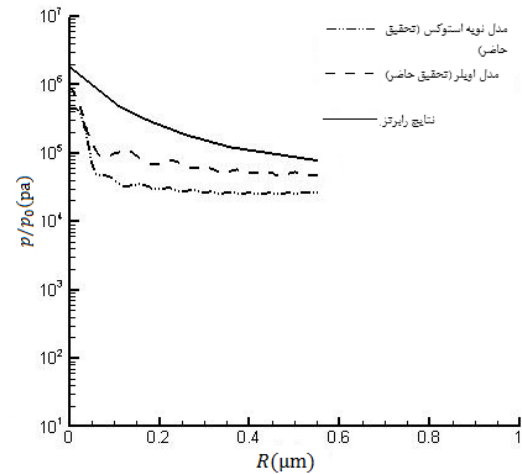
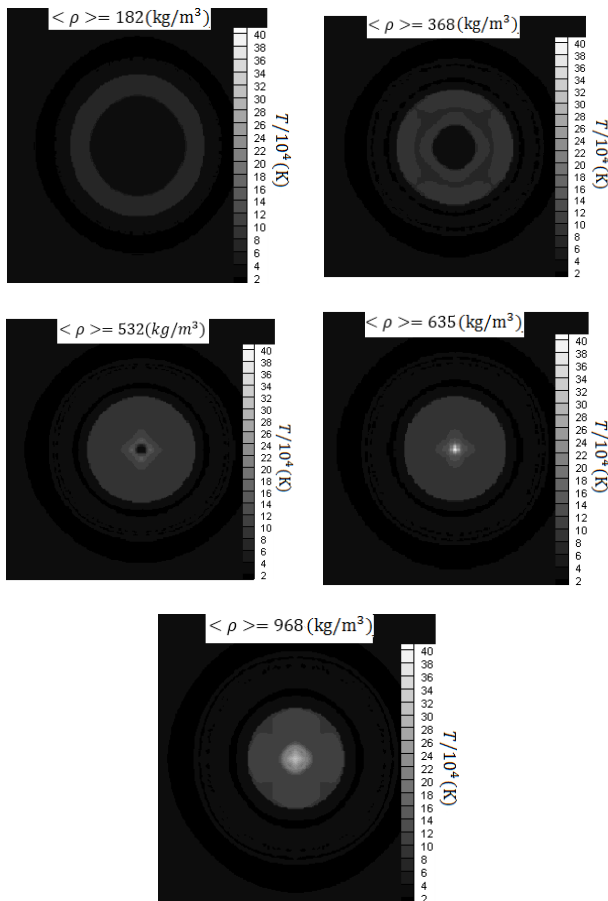
شکل 12 مقایسه توزیع فشار حباب در روش‌های دینامیکی سیالات محاسباتی و لئیس بولتزمن (زمان t_a)



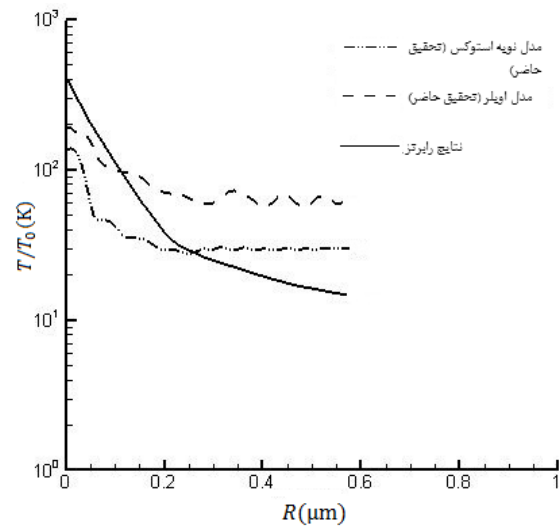
شکل 13 مقایسه توزیع دما حباب در روش‌های دینامیکی سیالات محاسباتی و لئیس بولتزمن (زمان t_a)



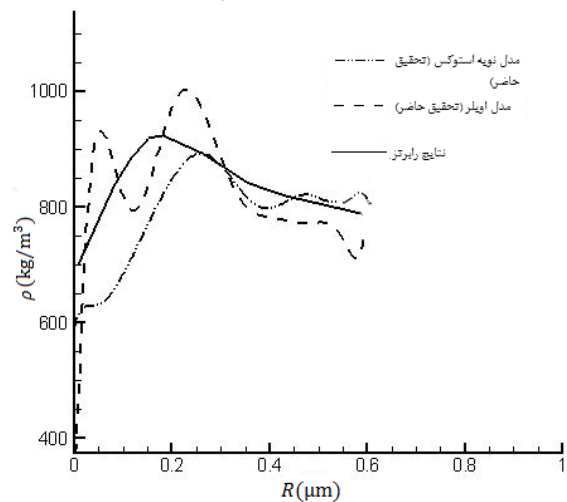
شکل 14 مقایسه توزیع چگالی حباب در روش‌های دینامیکی سیالات محاسباتی و لئیس بولتزمن (زمان t_a)



شکل 15 مقایسه توزیع فشار حباب در روش های دینامیکی سیالات محاسباتی و نتایج بولتزمن (زمان t_b)



شکل 16 مقایسه توزیع دما حباب در روش های دینامیکی سیالات محاسباتی و نتایج بولتزمن (زمان t_b)



شکل 17 مقایسه توزیع چگالی حباب در روش های دینامیکی سیالات محاسباتی و نتایج بولتزمن (زمان t_b)

شکل 18 کانتور توزیع دما و چگالی متوسط در درون حباب در زمان های به ترتیب 156 و 170 و 190 و 205 پیکو ثانیه بعد از t_a

حل های میکروسکوپی نسبت به حل ماکروسکوپی معادلات اوایلر می باشد و در نهایت شبیه سازی بهتر پدیده های طبیعی است.

5- نتایج شبیه سازی

پدیده فروریزش حباب پدیده ای است که بررسی آزمایشگاهی آن بسیار دشوار می باشد به همین علت بیشتر به صورت عددی و تحلیلی این پدیده مورد بررسی قرار می گیرد. در این تحقیق گاز داخل حباب و سیال با یکدیگر به وسیله معادله رایلی-پلسه کوپل شده اند. نمودارهای ارائه شده در قسمت 3-4 به بررسی خواص ترمودینامیکی حاکم بر حباب بر حسب فاصله از مرکز و در زمان های مختلف می پردازد. نتایج حاصل از این نمودارها توسط دو روش تراکم پذیر نویر استوکس و اوایلر در شبکه بولتزمن به دست آمده اند. نتایج حاصل از شبکه بولتزمن با نتایج رابرتز [3] که به کمک حل معادلات تراکم پذیر اوایلر به روش لکس فردریش به دست آمده بود مقایسه گردید. همانطور که در نمودارها دیده می شود، میزان خواص ترمودینامیکی (دما، چگالی، فشار) به سمت مرکز حباب افزایش می یابد و در نزدیکی مرکز حباب به مقدار بیشینه می رسد. همچنین به این نکته باید توجه داشت که هرچه شعاع محیطی حباب کوچک تر باشد بیشینه دما نیز بیشتر خواهد بود که این مسئله حساسیت رفتار داخلی حباب را به شرایط محیطی بیان می کند. جبهه موج شوک که حاصل فروریزش مافوق صوت دیواره حباب می باشد، موجب چگالش سریع انرژی می شود. دو روش شبکه بولتزمن که در این تحقیق استفاده شدند الگوهای 9 سرعت و 16 سرعت اوایلر و نویر استوکس بودند که

- [13] F. Chen, A. Xu, G. Zhang, Y. Li, "Multiple-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Model for Compressible Fluids", *Physics Letters A*, Vol. 375, pp. 1-8, 2129-2139, 2011.
- [14] F. Alexander, S. Chen, and J. Sterling, "Lattice boltzmann thermohydrodynamics", *Phys. Rev. E*, vol. 47, pp. 2249-2252, Apr 1993.
- [15] Chen, H. Ohashi, and M. Akiyama, "Thermal lattice bhatnagar-gross-krook model without nonlinear deviations in macrodynamic equations", *Phys. Rev. E*, vol. 50, pp. 2776-2783, Oct 1994.
- [16] X. He, C. S. and D. G.D. "A novel thermal model for the lattice boltzmann method in incompressible limit", *Journal of Computational Physics*, vol. 146, no. 1, pp. 282-300, 1998.
- [17] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, and T. Zhao, "Thermal lattice boltzmann equation for low mach number flows: Decoupling model", *Phys. Rev. E*, vol. 75, pp. 036704, Mar 2007.
- [18] G. Yan, Y. Chen, and S. Hu, "Simple lattice boltzmann model for simulating flows with shock wave", *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 454-459, Jan 1999.
- [19] Y. Ling, Q. Liu, Q. Li, "Three-dimensional finite-difference Lattice Boltzmann Model and its application to inviscid compressible flows with shock waves", *Phys. Rev. E*, vol. 75, pp. 334-376, Mar 2007.
- [20] M. Watari, M. Sutahara, "Two-Dimensional thermal model of the finite-difference lattice Boltzmann method with high spatial isotropy", *Phys. Rev.*, pp. 1334-1376, E 67, 2003.
- [21] M. Watari, M. Sutahara, "Supersonic flow simulations by a three-dimensional multispeed thermal model of the finite difference lattice Boltzmann method", *Physica A*, vol. 364, pp. 129-144, 2006.
- [22] M. Watari, "Finite-Difference Lattice Boltzmann Method with Arbitrary Specific Heat Ratio Applicable to Supersonic Flow Simulation", *Physica A*, 382, pp. 502-522, 2007.
- [23] F. Chen, et al, "Highly Efficient Lattice Boltzmann Model for Compressible Fluids: Two-Dimensional Case", *Communications in Theoretical Physics*, Vol. 52, pp. 2502-2522, 2009.
- [24] T. Kataoka, M. sutahara, "Lattice Boltzmann model for the compressible Navier-Stokes equations with flexible specific-heat ratio", *Phys. Rev. E* 69, 035701, 2004.
- [25] X. Yuan, X. Chen, Z. Cheng, "Lattice Boltzmann Simulation of Cavitating Bubble Growth with Large Density Ratio", *Computers and Mathematics with Applications*, Accepted for Publication, pp. 23-40, 1998.
- [26] H. Yaling, L. Qing, and L. Qing, "Three-dimensional finite-difference lattice Boltzmann model and its application to inviscid compressible flows with shock waves", *phys.lett.* pp. 1-8, 1996.
- [27] A. Nejat, V. Abdollahi, "A Critical Study of the Compressible Lattice Boltzmann Method for Riemann Problem", *Springer. J Sci Comput*, pp. 512-520, 2013.
- [28] A generic framework for blockstructured Adaptive Mesh Refinement; http://amroc.sourceforge.net/examples/euler/3d/html/box3d_c.htm, November 2014.

الگوی اوپلری به علت تعداد سرعت کمتر و عدم وجود لزجت در معادلات اصلی حاکم بر آن دارای نوساناتی به خصوص در زمانی که موج شوک به مرکز حباب می‌رسد بود. وجود تعداد جهت‌های سرعتی بیشتر علاوه بر این که زمان محاسبات را بیشتر می‌کند، جواب‌های دقیق‌تری می‌دهد همچنین الگوی نویر استوکسی به علت وجود لزجت در مرکز حباب موج ضعیف‌تری پیش‌بینی می‌کند. شبیه‌سازی به روش شبکه بولتزمن با داده‌های تجربی که پیشینه دما را حدود 100000 کلون و یا بالاتر می‌دانند [6] همخوانی قابل قبولی دارد.

6- مراجع

- [1] H. Frenzel, H. Schultes, "Lumineszenz im ultraschallbeschickten Wasser", *Z. Phys. Chem.* vol. 27, pp. 421-424, 1934.
- [2] H. Frenzel, H. Schultes, "Lumineszenz im ultraschallbeschickten Wasser", *Z. Phys. Chem.* vol. 27, pp. 421-424, 1934.
- [3] C. C. Wu, P. H. Roberts, "Shock-Wave Propagation in a Sonoluminescing Gas Bubble", *Phys. Rev. Lett.* vol. 70, pp. 3424-3427, 1993.
- [4] L. Kondic, J. I. Gersten, C. Yuan, "Theoretical Studies of Sonoluminescence Radiation: Radiative Transfer and Parametric Dependence", *Phys. Rev. E* 52, pp. 4976-4990, 1995.
- [5] L. Kondic, J. I. Gersten, C. Yuan, "Theoretical Studies of Sonoluminescence Radiation: Radiative Transfer and Parametric Dependence", *Phys. Rev. E* 52, pp. 4976-4990, 1995.
- [6] S. J. Ruuth, S. Putterman, B. Merriman, "Molecular Dynamics Simulation of the Response of a Gas to a Spherical Piston: Implications for Sonoluminescence", *Phys. Rev. E*, vol. pp. 66, 036310, 2002.
- [7] L.L.Vegnelli.Roberto. C.A, "Modelling of single bubble Soluminescence" *physics*, Vol. 88, pp. 18, jul, 2014.
- [8] C.M.Christian, "Modelling Laser Generated Cavitation", *thesis, pennstate*, pp. 43-76, August, 2012.
- [9] M. dan, "Single Bubble Soluminescence", *thesis, pennstate, thesis Concordia university*, pp. 21-64, April, 2000.
- [10] M. Bernard, S. Hilgenfeld, "single bubble Soluminescence", *Review of Modern physics*, Volume 74, pp. 2132-2145, April, 2014.
- [11] C.Z.Ji, C. Shu, and N. Zhao, A Lattice Boltzmann method-based flux solver and its application to solve shock tube problem, *Modern physics letters B*, Volume 23, number 3, pp. 313-316, 2009.
- [12] C.Z.Ji, C. Shu, and N. Zhao, A Lattice Boltzmann method-based flux solver and its application to solve shock tube problem, *Modern physics letters B*, Volume 23, number 3, pp. 313-316, 2009.