



طراحی مسیر بهینه برای یک ربات دوپا با به کار گرفتن پنجه فعال و پاشنه

مهدخت عزتی¹، مجید خدیو²، سیدعلی اکبر موسویان^{3*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک طراحی کاربردی، قطب رباتیک و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک طراحی کاربردی، قطب رباتیک و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

3- استاد، مهندسی مکانیک، قطب رباتیک و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 19395-1999، moosavian@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 23 بهمن 1393

پذیرش: 29 اسفند 1393

ارائه در سایت: 29 فروردین 1394

کلید واژگان:

ربات دوپا

طراحی مسیر بهینه

پنجه فعال

چکیده

در مقاله پیش رو، اهمیت تجهیز پای یک ربات انسان‌نما به پنجه فعال مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف از این بررسی، استفاده از مفصل پنجه فعال و پاشنه برای بهبود گام‌برداری ربات از نقطه نظر حداکثر گشتاور زانو و انرژی مصرفی کل است. بدین منظور، با در نظر گرفتن هم‌زمان پنجه و پاشنه، یک نوع الگوی حرکتی بهینه ارائه و با الگوی حرکتی بدون پنجه و پاشنه مقایسه می‌شود. سیستم مورد بررسی، یک ربات انسان‌نما با 22 درجه آزادی است که روش‌های تحلیلی کین و لاگرانژ به منظور استخراج معادلات دینامیکی آن مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس، به منظور کاهش بار محاسباتی، راه‌حلی تراجمی برای حل معادلات دینامیک معکوس، براساس روش کین ارائه می‌گردد. به منظور اطمینان از صحت نتایج به دست آمده برای گشتاورهای مورد نیاز مفاصل و نیز نیرو و گشتاورهای عکس‌العملی زمین، موقعیت نقطه گشتاور صفر (ZMP) به دو روش محاسبه و مقایسه می‌شود. در ادامه، برای هر دو الگوی حرکتی، مسیری مناسب برای حرکت میان‌تنه و کف پاها در فضای کاری طراحی می‌شود و از طریق سینماتیک معکوس، مسیر حرکت همه مفاصل به جز پنجه در فضای مفصلی به دست می‌آید. مسیر حرکت پنجه، جداگانه و براساس مسیر طراحی شده برای کف پا تعیین می‌شود. در انتها، پارامترهای مهم در طراحی مسیر برای حرکت بر روی سطح صاف، بهینه سازی و انتخاب می‌شوند که بیشینه گشتاور زانو به حداقل مقدار برسد و انرژی مصرفی کل کاهش یابد. در پایان، الگوی حرکتی مناسب برای حرکت بر روی سطح صاف با طول گام زیاد نیز پیشنهاد می‌گردد.

Optimal Gait Planning for a Biped Robot by employing Active Toe Joints and Heels

Mahdokht Ezati, Majid Khadiv, Seyed Ali Akbar Moosavian*

Department of Mechanical Engineering, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran

* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, moosavian@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 12 February 2015
Accepted 20 March 2015
Available Online 18 April 2015

Keywords:
Biped robots
Optimal gait planning
Active toe joints

ABSTRACT

In this article, the significance of utilizing active toe joints in biped robots is examined. The main goal of this research is to employ heels and active toe joints and to improve gait performance from two points of view: actuating torques of knee joints and total energy consumption. Considering the effectiveness of toes and heels in walking, a new walking pattern is fully addressed and compared with another walking pattern that does not exploit toes and heels. In order to develop a verified dynamics model for considered humanoid robot with 22 DoFs, two analytical methods i.e., Lagrange and Kane are adopted, and the obtained results are compared. To reduce calculation burden, an iterative method for dynamics model development is proposed, based on Kane approach. Furthermore, to verify the obtained ground reaction forces and moments, the position of ZMP is computed and compared using two methods. In the procedure of gait planning, first the pelvis trajectory is planned. Then, the feet trajectory planning process is done. After designing trajectory in the task space, all joint trajectories except the trajectories of toes are obtained, using closed-form inverse kinematics solution. Toe joints trajectories are planned separately, considering the feet trajectories. Furthermore, the significant parameters in gait planning are considered as design variables in optimization procedure in order to reduce the maximum torque of knees, and total consumed energy as cost functions. Finally, the walking pattern for walking with large step length on flat terrains, under joint torque and velocity limitations, is developed.

1- مقدمه

اولین پژوهشی که در آن اثر افزودن پنجه فعال به ربات 6 درجه آزادی بررسی شد توسط نیشیواکی و همکاران [1] صورت گرفت. آنها تأثیر پنجه فعال را در سه جنبه افزایش سرعت راه رفتن، افزایش ارتفاع گام و امکان حرکت کل بدن، مورد بررسی قرار دادند. با به کار بردن پنجه در این ربات، دستیابی به الگوهای راه رفتن بهتر ممکن شد و بیش‌ترین سرعت در مفاصل زانو کاهش

در دو دهه اخیر، استفاده از مفاصل پنجه در ربات‌های انسان‌نما، با هدف ایجاد حرکتی طبیعی و شبیه به حرکت انسان، توجه محققان بسیاری را به خود جلب کرده است. به همین منظور، به طور خلاصه مزایای افزودن پنجه فعال یا غیرفعال به پای ربات‌های دوپا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

Please cite this article using:

M. Ezati, M. Khadiv, S. A. A. Moosavian, Optimal Gait Planning for a Biped Robot by employing Active Toe Joints and Heels, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 69-80, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مفصل در پاشنه، میزان گشتاور مورد نیاز و انرژی مصرفی را برای حالتی که ربات به کمک مفاصل پنجه و پاشنه با زانوی کشیده گام برمی دارد، مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که با استفاده از مفصل پاشنه می توان مانع از ایجاد انفراد در زانو شد و گشتاور مورد نیاز در مفصل زانو را کاهش داد. به منظور بهبود ساختار کف پا و استفاده بهتر از اثر پنجه یک ساختار جدید برای مفصل پنجه با استفاده از یک مکانیزم 4 میلله ای موازی ارائه شد که به ربات این امکان را می دهد تا در تعدادی نقاط در تماس با زمین باشد و همچنین بخش اصلی نیروی عکس العملی به جای آن که تنها به نوک پنجه وارد شود به تعدادی از لینک ها وارد شود [16]. این مکانیزم برای پای ربات ساخته شد.

از دیگر مزایای افزونگی پنجه می توان به تأثیر آن بر روی شاخص های مهم حرکت از قبیل: مصرف انرژی، توان مطلوب و گشتاور مورد نیاز مفاصل اشاره کرد. کوچکی و همکاران [17] پژوهشی در این زمینه انجام دادند. برای این کار دو ربات با ابعاد و جرم مشابه و حرکتی مشابه که یکی دارای پنجه و دیگری بدون پنجه می باشد مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده در این تحقیق نشان می دهد که مقدار واقعی گشتاورهای اعمال شده در تعدادی از مفاصل کاهش می یابد که به علت خم شدن مفصل پنجه می باشد و بیشتر این کاهش ها در فاز دو تکیه گاهی رخ می دهد. و تقریباً در تمام مفاصل توان مصرفی در حالت خم شدن پنجه کاهش می یابد.

تأثیر افزونگی پنجه پای ربات بر پایدار ایستادن ربات نیز حائز اهمیت می باشد. از همین رو، کوچکی و همکاران [18] این موضوع را مورد بررسی قرار دادند و نتایج پژوهش آن ها حاکی از آن است که گشتاور پنجه به ربات این توانایی را می دهد که هنگام ایستادن تعادل خود را حفظ کند.

مزایایی که در اثر افزودن پنجه به ربات دوپا ایجاد می شوند، نویسندگان مقاله پیش رو را بر آن داشت تا یک مدل دینامیکی صحنه گذاری شده و قابل استفاده برای ربات های دوپای دارای پنجه فعال ارائه کنند [19]. از سوی دیگر، بر اساس مزایایی که با در نظر گرفتن همزمان پنجه و پاشنه حاصل می شوند، ارائه یک طراحی مسیر بهینه برای یک الگوی حرکتی جدید که اثر پنجه و پاشنه در آن لحاظ شده باشد، حائز اهمیت می باشد. از این رو، در مقاله پیش رو این موضوع مورد بررسی قرار می گیرد و با الگوی حرکتی بدون پنجه و پاشنه مقایسه می شود. در بخش 2، یک مدل دینامیکی که برای هر دو الگوی حرکتی صادق باشد، ارائه و صحنه گذاری می گردد. در بخش 3، مسیر حرکتی مناسب در فضای کاری برای هر دو الگوی حرکتی طراحی می شود و سپس مسیر حرکت در فضای مفصلی تعیین می گردد. در بخش 4، پارامترهای مهم در طراحی مسیر به گونه ای بهینه می شوند که گشتاور بیشینه زانو و انرژی مصرفی کل کاهش یابد. همچنین، اهمیت الگوی حرکتی ارائه شده برای حرکت با طول گام زیاد نشان داده می شود.

2- مدل سازی دینامیکی

در این بخش، ابتدا به معرفی ربات و ارائه ویژگی های آن پرداخته می شود. در نهایت، مدل سینماتیکی و دینامیکی سیستم به تفصیل مورد بررسی قرار می گیرد و یک مدل دینامیکی صحنه گذاری شده ارائه می گردد. سپس، با توجه به قیود اعمالی در هر فاز حرکتی، نحوه محاسبه گشتاورهای موتورهای موجود در مفاصل و نیروها و گشتاورهای وارد بر کف پا ارائه می شود.

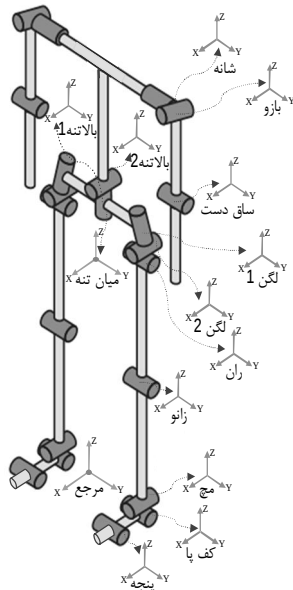
ربات مورد بررسی دارای 22 درجه آزادی فعال می باشد. تمامی درجات آزادی از نوع دورانی هستند و هر پا دارای 7 درجه آزادی، هر دست دارای 3 درجه آزادی و کمر نیز دارای 2 درجه آزادی می باشد. در هر پا، 3 درجه برای

یافت و سرعت ربات تا 80% افزایش یافت. با توسعه ربات 6 به صورت ربات جی ایس کی 7، حرکت زانو زدن بر روی زمین که به وسیله مفصل پنجه فعال، امکان پذیر است، مورد بررسی قرار گرفت [2]. در نهایت، با پیاده سازی همزمان بینایی سه بعدی، طراحی حرکت و کنترل راه رفتن، طراحی ربات یکپارچه 7 که دارای پنجه فعال می باشد صورت گرفت [3]. آن و همکاران [4]، با ارائه یک ساختار فیزیکی برای ربات دوپای دارای پنجه و بررسی عملکرد ربات، به چهار نقش مهم پنجه در ربات های انسان نما دست یافتند. اول این که، وجود پنجه باعث ایجاد حرکتی شبیه به حرکت انسان برای ربات می شود. دومین مزیت، افزایش مدت زمان فاز دو تکیه گاهی است که پایداری ربات را تضمین می کند و دو مزیت دیگر آن در کاهش سرعت های بیشینه مفصلی و افزایش طول گام است.

از سوی دیگر، نقش پنجه در افزایش سرعت راه رفتن ربات نیز مورد توجه تعدادی از محققان قرار گرفت. با هدف به کارگیری معادلات حرکتی انسان برای ربات، یک کفش مکانیکی دو درجه آزادی و دارای پنجه که به طور مستقل حرکت می کند، ارائه شد [5] و نشان داده شد که یک ربات دوپا با مکانیزم پنجه ارائه شده می تواند سریع تر از ربات های بدون پنجه گام بردارد. همچنین، سلوتی و همکاران [6] اثر پنجه در افزایش سرعت راه رفتن ربات دوپا را بررسی کردند و نشان دادند که با اضافه شدن مفصل پنجه، امکان افزایش طول گام و در نتیجه افزایش سرعت تا 1/5 برابر فراهم می شود. کاجیتا و همکاران [7] نیز، نقش پنجه غیرفعال در دویدن ربات دوپا را مورد بررسی قرار دادند. در نهایت، با هدف راه رفتن با سرعت بالا و استفاده از مزایای پنجه فعال، ربات انسان نمای لولا با 25 درجه آزادی ارائه شد [8]. از دیگر محققانی که از اثر افزونگی پنجه در دویدن ربات انسان نما استفاده کردند، می توان به تاجیما و همکاران [9] اشاره کرد. آن ها یک ربات را با سباز انسان که می تواند با سرعت 7 km/h بدود، ارائه کردند.

استفاده از پنجه در فاز تکیه گاهی تأثیر به سزایی در نحوه گام برداشتن ربات دارد. برای بررسی این موضوع، یک مدل 8 لینکی برای ربات دوپا، در نظر گرفته شد و طراحی مسیر بر اساس پاندول معکوس، انجام شد [10]. این پژوهش نشان می دهد در صورت استفاده از مفصل پنجه، تغییرات زاویه زانو و مچ کم تر و در نتیجه تغییرات سرعت زاویه ای در یک سیکل گام نرم تر می شود. همچنین، محدوده حرکت به سمت جلو در فاز دو تکیه گاهی بیشتر می شود و در نتیجه پایداری ربات بهتر می شود. از سوی دیگر، تالولینی و همکاران [11] نشان دادند که استفاده از پنجه در فاز تکیه - گاهی به هنگام دویدن ربات، گشتاور ران و زانوی پای ایستاده را به طور قابل ملاحظه ای کاهش می دهد و اگرچه گشتاور مربوط به مفاصل مچ بزرگ تر می شوند اما از گشتاور بیشینه مجاز عملگرها تجاوز نمی کند. لازم به ذکر است که این فاز حرکتی در گام برداشتن توسط ربات 4 پی 4 سی اجرا شد [12].

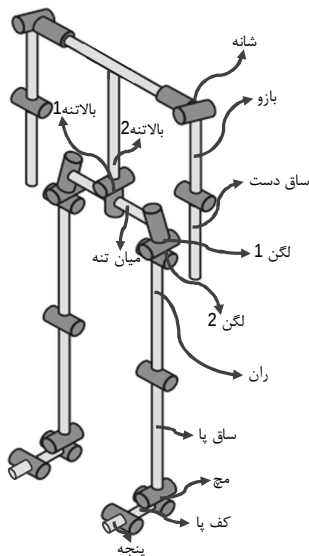
بعد از این که محققان به تعدادی از مزایای افزودن پنجه به ربات پی بردند، توجه محققان به استفاده همزمان از مزایای پنجه و پاشنه در ربات انسان نما معطوف شد. به همین منظور، کومار و همکاران [13] استفاده هم زمان از مفصل پنجه و پاشنه را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که وجود این دو مفصل در هر پا، به دلیل ایجاد درجات آزادی اضافی، حرکت طبیعی تری را فراهم می کند. در تحقیقی دیگر، برای بررسی حرکت با زانوی کشیده به گونه ای که پا پاشنه بر روی زمین باشد یا پنجه، ربات انسان نمای وابین 2- آر ارائه شد [14]. هندهارو و همکاران [15] با اضافه کردن یک



شکل 1 موقعیت و جهت گیری دستگاه های بدنی و مرجع

جدول 1 مشخصات طولی و جرمی ربات

لینک	طول (m)	جرم (kg)	لینک	طول (m)	جرم (kg)
بالا تنه 1	0/09	1/3	لگن 2	0/10	2/8
بالا تنه 2	0/35 و 0/35	9/3	ران	0/44	6/3
شانه	0/06 و 0/06	0/5	ساق پا	0/43	3/9
بازو	0/21	1/9	مچ پا	0/01	0/1
ساق دست	0/17	1/5	کف پا	0/17	1/6
میان تنه	0/25	6/9	پنجه	0/11	0/8
لگن 1	0/10 و 0/10	1/7			



شکل 2 نام گذاری لینک های ربات

مربوط به پای راست و پای چپ q_{Ar} و q_{Al} به ترتیب مختصات تعمیم یافته مربوط به دست راست و دست چپ و $q_{up-body}$ مختصات تعمیم یافته مربوط

ران، یک درجه برای زانو، 2 درجه برای مچ و 1 درجه برای پنجه در نظر گرفته می شود. همچنین، در هر دست 2 درجه برای شانه و یک درجه برای آرنج لحاظ می شود. شکل 1 ساختار شماییک ربات مذکور را نشان می دهد. همان طور که در شکل 1 مشاهده می شود، دستگاه های بدنی متصل به لینک ها، همگی به موازات دستگاه مرجع در نظر گرفته می شوند. هر دستگاه بدنی در محل اتصال لینک به مفصل محرکش نصب شده است. دستگاه مرجع بین دو مچ پا بر روی زمین قرار دارد و دستگاه مربوط به میان تنه دقیقاً در بالای دستگاه مرجع بر روی مرکز میان تنه نصب شده است. جدول 1 مشخصات طولی و جرمی ربات را نشان می دهد که لینک های نام گذاری شده در این جدول، در شکل 2 نمایش داده شده اند. لازم به ذکر است که مشخصات ساختاری ربات شبیه به ربات لولا در نظر گرفته شده است تا نتایج و تحلیل های آتی نزدیک به واقعیت باشد.

2-1-2- صحنه گذاری سینماتیکی

با فرض این که ربات به صورت یک جسم آزاد در فضا و بدون هیچ تماسی با محیط اطراف می باشد، سینماتیک مستقیم تعیین می شود. به علت درجات آزادی غیرفعال سیستم به عنوان یک جسم صلب در فضا، بین میان تنه و دستگاه مرجع شش مفصل فرضی در نظر گرفته می شود (سه مفصل دورانی برای آزادی چرخش در سه راستا و سه مفصل کشویی برای آزادی جابجایی در سه راستا).

به منظور تعیین سینماتیک سیستم کلیه دستگاه ها (شش دستگاه مربوط به شش درجه آزادی غیرفعال میان تنه و دستگاه های مربوط به درجات آزادی فعال) به صورت موازی با یکدیگر در نظر گرفته شده اند. بنابراین برای بیان حرکت دو دستگاه متوالی نسبت به یکدیگر، تنها کافی است یک دوران یا یک انتقال ساده (با توجه به این که مفصل دورانی یا کشویی است) لحاظ شود. لازم به ذکر است که در تحلیل سینماتیکی، ربات به صورت 4 بازو در نظر گرفته شده است که هر بازو از دستگاه مرجع تا مجری نهایی¹ به ترتیب دارای شش درجه آزادی غیرفعال و درجات فعال موجود در آن بازو می باشد. بنابراین سینماتیک هر بازو مستقل از فاز تک تکیه گاهی و دوتکیه گاهی به طور جداگانه قابل بررسی می باشد.

با در نظر گرفتن موقعیت و جهت گیری میان تنه نسبت به دستگاه مرجع به صورت مختصات تعمیم یافته نشان داده شده در رابطه (1):

$$q_{p6 \times 1} = [z_p, y_p, x_p, \beta_p, \alpha_p, \gamma_p] \quad (1)$$

می توان ماتریس تبدیل میان تنه نسبت به زمین را طبق رابطه (2) محاسبه کرد:

$${}^G T_p = {}^G T_{z_p} \times {}^{z_p} T_{y_p} \times {}^{y_p} T_{x_p} \times {}^{x_p} T_{\beta_p} \times {}^{\beta_p} T_{\alpha_p} \times {}^{\alpha_p} T_{\gamma_p} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن زوایای نسبی پاهای راست و چپ، زوایای نسبی دست های راست و چپ و زوایای نسبی مربوط به مفاصل موجود در میان تنه به صورت رابطه (3)، کلیه ماتریس های تبدیل T_i^{i-1} قابل محاسبه خواهد بود.

$$\begin{aligned} q_{Lr7 \times 1} &= [\theta_{hr1}, \theta_{hr2}, \theta_{hr3}, \theta_{kr}, \theta_{ar1}, \theta_{ar2}, \theta_{tr}] \\ q_{Ll7 \times 1} &= [\theta_{hl1}, \theta_{hl2}, \theta_{hl3}, \theta_{kl}, \theta_{al1}, \theta_{al2}, \theta_{tl}] \\ q_{Ar3 \times 1} &= [\theta_{shr}, \theta_{ur}, \theta_{tr}], q_{Al3 \times 1} = [\theta_{shl}, \theta_{ul}, \theta_{tl}] \\ q_{up-body 2 \times 1} &= [\theta_{p1}, \theta_{p2}] \end{aligned} \quad (3)$$

در روابط بیان شده در رابطه (3)، q_{Ll} و q_{Lr} به ترتیب مختصات تعمیم یافته

مقایسه خواهند شد. فرم ساده و کلی معادلات دینامیکی به صورت رابطه (4) بیان می‌شود:

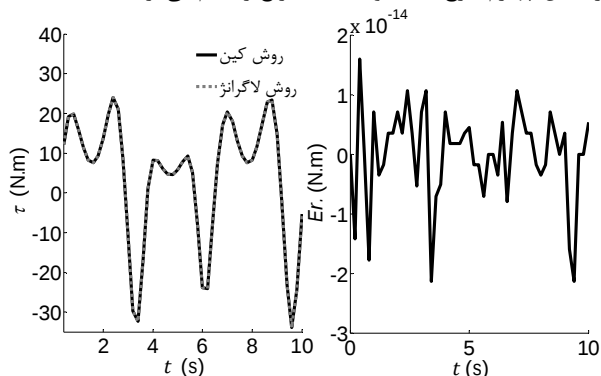
$$M_{n \times n} \ddot{q}_{n \times 1} + C_{n \times 1}(q, \dot{q}) + G_{n \times 1}(q) = Q_{n \times 1} \quad (4)$$

که در آن ترم اول سمت چپ رابطه بالا نشان دهنده اثرات اینرسی، ترم دوم نشان دهنده اثرات گریز از مرکز و کریولیس و ترم سوم نشان دهنده اثر گرانث است. سمت راست نیز آرایه نیروها و گشتاورهای وارد بر ربات می باشد. همچنین، n تعداد مختصات تعمیم یافته می باشد که برای ربات موردنظر، طبق روابط (1) و (3)، برابر با 28 است.

در این جا برای مقایسه معادلات بدست آمده از دو روش، به هر دو مدل یک مسیر سینوسی یکسان در فضای مفاصل داده می شود و مقدار طرف چپ معادلات باهم مقایسه می شود. علت انتخاب مسیر سینوسی این است که این مسیر طیف پیوسته ای از مقادیر مثبت و منفی را دربردارد و می تواند به خوبی میزان انطباق دو روش با هم را نشان دهد. از طرفی، ذکر این نکته حائز اهمیت است که مسیر سینوسی یک مسیر پایدار برای حرکت نیست و تنها برای نشان دادن این موضوع که مدل دینامیکی بدست آمده برای طیف وسیعی از پارامترهای فضای مفصلی معتبر است، انتخاب شده است. اما نباید این گونه به موضوع نگاه کرد که این مدل دینامیکی کاملاً بر نمونه واقعی منطبق است. در این جا به عنوان نمونه، تنها نتیجه مربوط به مفصل دوم لگن پای راست ارائه می شود. شکل 4 گشتاور مربوط به آن و خطای بین دو روش لاگرانژ و کین برای محاسبه این گشتاور را نشان می دهد. با توجه به نمودار خطا، مقادیری که برای خطا به دست آمده اند از مرتبه ای بسیار پایین تر از مقادیر گشتاور هستند و در واقع گشتاورهای به دست آمده از دو روش کاملاً بر هم منطبق هستند.

2-2-2- حل عددی (تراجعی) روش کین

نتایج به دست آمده از حل تحلیلی لاگرانژ و کین نشان می دهد که بار محاسباتی مربوط به کین بسیار کمتر از روش لاگرانژ می باشد. برای نمونه حجم محاسبات مربوط به گشتاور مچ در روش لاگرانژ برابر با 42/8 مگابایت و در روش کین برابر با 2/7 مگابایت است⁴. به همین منظور، در ادامه در هر جا که نیاز به مدل دینامیکی باشد، از روابط مربوط به کین استفاده خواهد شد. در این بخش تصمیم بر آن است که به جای حل تحلیلی، راه حلی تراجعی برای کین ارائه گردد تا بار محاسباتی به حداقل مقدار و سرعت اجرای برنامه به حداکثر مقدار برسد. با این کار، عملیات بهینه سازی در طراحی مسیر که در بخش چهارم شرح داده خواهد شد، سریع تر انجام می گردد.



شکل 4 گشتاور بر حسب زمان برای مفصل دوم لگن پای راست با استفاده از دو روش لاگرانژ و کین و خطای بین این دو روش

به بالاتنه را نشان می دهند. زوایای دارای اندیس a, k, h و t به ترتیب مربوط به زوایای لگن، زانو، مچ و پنجه هستند و زوایای دارای اندیس l و u, sh به ترتیب مربوط به زوایای شانه، بازوی دست و ساق دست هستند، به علاوه، اندیس p نیز مربوط به دو مفصل موجود در بالاتنه می باشد. اندیس های r و l نیز همان طور که واضح است نشان دهنده این است که زاویه موردنظر در لینک راست یا چپ قرار دارد.

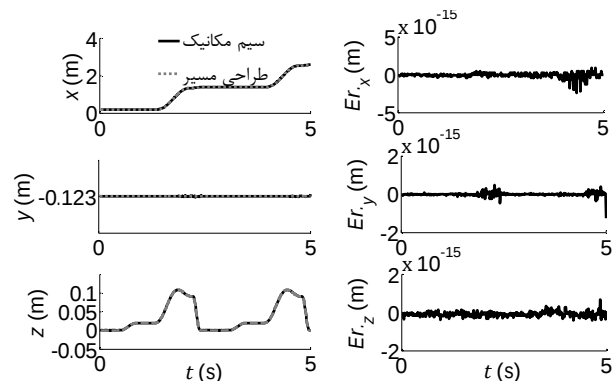
برای اطمینان از صحت سینماتیک سیستم، ربات موردنظر در محیط سیم مکانیک¹ در نرم افزار متلب² شبیه سازی شده است. به این صورت که ابتدا مسیر طراحی شده برای میان تنه و مسیرهای بدست آمده از سینماتیک معکوس برای زوایای پاها [20]، از طریق عملگر به مفاصل اعمال می شود، سپس موقعیت و جهت گیری کف پاها در هر سه راستا به کمک حسگر اندازه گیری می شود و با مسیر طراحی شده برای کف پاها مقایسه می گردد. به عنوان نمونه در شکل 3 مسیر حرکت کف پای راست در سه راستای x, y و z که از طراحی مسیر و خروجی حسگر متصل به کف پا بدست آمده است و خطای بین این دو روش نشان داده شده است. از آنجایی که خطای بین خروجی حسگر و مسیر طراحی شده برای کف پا از مرتبه 10^{-15} می باشد، صحت سینماتیک سیستم تأیید می گردد.

2-2-2- صحنه گذاری دینامیکی

با توجه به این که تفاوت فازهای حرکتی در ربات دوپا به نحوه قرارگیری پاها و تماس آن ها با زمین بستگی دارد، برای این که بتوان معادلات حرکت را به صورت عمومی در تمامی فازهای حرکت استخراج کرد، در ابتدا ربات به صورت یک جسم آزاد در فضا، بدون هیچ تماسی با محیط اطراف در نظر گرفته می شود. سپس، معادلات برای این حالت استخراج می شود و با اعمال قیود مربوط به فازهای حرکتی مختلف، معادلات برای هر حالت استخراج می شود [22,21]. لازم به ذکر است که در بخش 2-2-1، معادلات دینامیک برای کل ربات توسعه داده می شود و صحنه گذاری انجام می گردد. اما، با توجه به این که در راه رفتن تنها مفاصل پایین تنه مورد توجه هستند، در ادامه این تحقیق (از بخش 2-2 تا انتها) تمرکز بر روی حرکت مفاصل پاها است، به گونه ای که مفاصل بالاتنه قفل شده در نظر گرفته می شوند.

2-2-1- نتایج مربوط به صحنه گذاری به دو روش لاگرانژ و کین

به منظور تعیین دینامیک سیستم و اطمینان از صحت آن، معادلات دینامیکی به دو روش لاگرانژ و کین [23] محاسبه می شوند و نتایج با هم



شکل 3 موقعیت کف پای راست و خطای مربوط به آن از دو روش

3- Iterative

4- محاسبات بر روی laptop با پردازنده Core i5 و 4G RAM انجام شده است.

1- Simmechanics

2- MATLAB

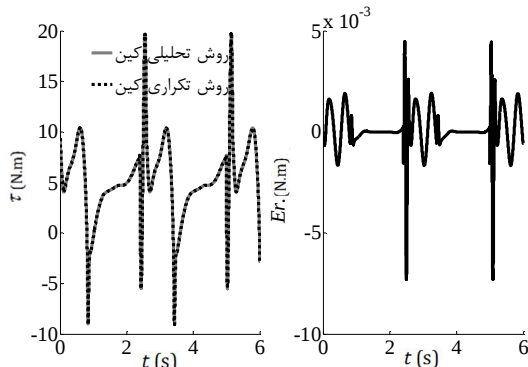
که در آن $\bar{U}_{r1}$ و P_{G1}^{r1} به ترتیب مختصات مرکز جرم لینک i ام نسبت به دستگاه r_1 و جهت دوران لینک r_1 ام بیان شده در دستگاه اینرسی را نشان می‌دهند. مقادیر $J_{A,r1}^{(i)}$ و $J_{L,r1}^{(i)}$ ژاکوبین موضعی هستند که اثر مختصه تعمیم یافته لگن پای راست را به ترتیب بر روی سرعت خطی مرکز جرم و دورانی لینک i ام نشان می‌دهد.

طرف چپ معادلات دینامیک برای کلیه مفاصل به این روش محاسبه می‌شود و با روش تحلیلی کین مقایسه می‌گردد. برای نمونه نتایج مربوط به یک مفصل نشان داده می‌شود. شکل 5 گشتاور مفصل زانوی پای چپ و خطای بین دو روش تحلیلی و عددی را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهایی که برای خطا بین دو روش عددی و تحلیلی رسم شده‌اند، مقادیری که برای خطا به دست آمده‌اند از مرتبه پایین‌تر از گشتاور هستند. بنابراین در ادامه از مدل دینامیکی به دست آمده از حل عددی استفاده خواهد شد.

3-2-2- تعیین سمت راست معادلات دینامیکی (نیرو و گشتاورهای اعمالی به کف پا و گشتاورهای موردنیاز مفاصل)

برای کسب اطمینان از صحت کامل مدل دینامیکی و انطباق آن بر نمونه واقعی می‌بایست با اعمال قیود مربوط به فازهای حرکتی مختلف، نیرو و گشتاور اعمالی به کف پا و گشتاورهای موتورهای مفاصل مطابق مقالات [22,21] محاسبه شود. سپس ZMP یک بار به کمک نیرو و گشتاورهای عکس‌العملی زمین و بار دیگر به کمک روش ارائه شده در مقاله [24] محاسبه شود. انطباق نتایج حاصل از این دو روش صحت کامل مدل دینامیکی را تأیید می‌کند. به همین منظور، در این قسمت با در نظر گرفتن دو نوع الگوی حرکتی، یکی بدون پنجه و پاشنه و دیگری با پنجه و پاشنه، نیرو و گشتاورهای عکس‌العملی زمین و گشتاورهای موتورهای محاسبه می‌شوند.

شماتیک نحوه گام برداشتن در الگوهای حرکتی مورد بررسی، در جدول 2 نشان داده شده است. هر چرخه کامل گام برداشتن شامل دو گام می‌باشد که دارای دو فاز تک‌تکیه‌گامی (SSP)¹ و دو فاز دو تکیه‌گامی (DSP)² است. با فرض این که گام برداشتن با فاز تک تکیه‌گامی شروع گردد و در فاز تک-تکیه‌گامی اول پای راست بر روی زمین باشد و پای چپ از عقب به جلو حرکت کند، الگوهای حرکتی در جدول 2 نشان داده شده‌اند. به دلیل تقارن حرکت بین پای راست و چپ، کافی است در هر الگوی حرکتی تنها یک فاز تک-تکیه‌گامی و یک فاز دو تکیه‌گامی مورد بررسی قرار گیرد که اکنون به شرح آن‌ها پرداخته می‌شود و قید اعمالی در هر حالت ذکر خواهد شد.



شکل 5 گشتاور برحسب زمان برای مفصل زانوی پای چپ با استفاده از دو روش تحلیلی و تراجعی کین و خطای بین این دو روش

برای توضیح حل عددی روش کین، در ابتدا لازم است که پارامترهای استفاده شده در معادله کین [23] معرفی گردند. معادله کین براساس مختصات تعمیم یافته به صورت رابطه (5) بیان می‌شود:

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i a_{G_i} \cdot \frac{\partial v_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{H}_{G_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{i=1}^N \left(F_i \cdot \frac{\partial v_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} + M_{G_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (5)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

که در آن N برابر با تعداد لینک‌ها و n برابر با تعداد مختصات تعمیم یافته می‌باشد. m_i و ω_i به ترتیب جرم و سرعت دورانی لینک i ام هستند. a_{G_i} و v_{G_i} به ترتیب شتاب خطی و سرعت خطی مرکز جرم لینک i ام هستند. $\dot{H}_{G_i}$ نرخ تغییر مومنوم دورانی مرکز جرم لینک i ام است. $\dot{q}$ نیز مشتق اول مختصه تعمیم یافته را نشان می‌دهد. همچنین، F_i و M_{G_i} به ترتیب نیرو و گشتاور وارد بر لینک i ام می‌باشند.

لازم به ذکر است که به منظور مقایسه دینامیک سیستم از دو روش کین و لاگرانژ، لازم است طرف چپ معادلات مشابه باشند. بنابراین برای این که طرف چپ معادلات کین و لاگرانژ قابل مقایسه باشند، می‌بایست در معادله کین، اثر گرانش را از سمت راست به سمت چپ منتقل کرد و سمت چپ معادله کین را به صورت رابطه (6) در نظر گرفت:

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i a_{G_i} \cdot \frac{\partial v_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} + \dot{H}_{G_i} \cdot \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}_k} - (-m_i g) \cdot \frac{\partial v_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (6)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

منظور از حل تراجعی روش کین، ارائه یک راه حل عددی برای محاسبه سرعت و شتاب لینک‌ها از طریق مشتق گیری عددی موقعیت لینک‌ها می‌باشد و همچنین کلیه مشتقات جزئی سرعت‌های خطی و دورانی نسبت به مختصات تعمیم یافته، براساس ژاکوبین محاسبه می‌شود. بنابراین دیگر نیاز به پارامتری در نظر گرفتن مختصات تعمیم یافته در برنامه نویسی نیست و بار محاسباتی کاهش می‌یابد.

برای محاسبه هر ترم در این روش، برای نمونه مفصل اول لگن پای راست را در نظر گرفته و رابطه (6) بسط داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left(m_p a_p \frac{\partial v_p}{\partial \dot{q}_{r1}} + \dot{H}_p \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{q}_{r1}} + m_p g \frac{\partial v_p}{\partial \dot{q}_{r1}} \right) + \\ & \left(m_{r1} a_{r1} \frac{\partial v_{r1}}{\partial \dot{q}_{r1}} + \dot{H}_{r1} \frac{\partial \omega_{r1}}{\partial \dot{q}_{r1}} + m_{r1} g \frac{\partial v_{r1}}{\partial \dot{q}_{r1}} \right) + \dots \\ & \left(m_{r7} a_{r7} \frac{\partial v_{r7}}{\partial \dot{q}_{r1}} + \dot{H}_{r7} \frac{\partial \omega_{r7}}{\partial \dot{q}_{r1}} + m_{r7} g \frac{\partial v_{r7}}{\partial \dot{q}_{r1}} \right) + \\ & \left(m_{l1} a_{l1} \frac{\partial v_{l1}}{\partial \dot{q}_{r1}} + \dot{H}_{l1} \frac{\partial \omega_{l1}}{\partial \dot{q}_{r1}} + m_{l1} g \frac{\partial v_{l1}}{\partial \dot{q}_{r1}} \right) + \dots \\ & \left(m_{l7} a_{l7} \frac{\partial v_{l7}}{\partial \dot{q}_{r1}} + \dot{H}_{l7} \frac{\partial \omega_{l7}}{\partial \dot{q}_{r1}} + m_{l7} g \frac{\partial v_{l7}}{\partial \dot{q}_{r1}} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن پارامترهایی که دارای اندیس $p, r1, r7, l1$ و $l7$ هستند به ترتیب مربوط به میان تنه، لینک اول (لگن) و آخر (پنجه) پای راست و لینک اول و آخر پای چپ می‌باشند و "..." به روابط بسط داده شده برای لینک‌های بین این دو لینک اشاره دارد.

همان‌طور که رابطه (7) نشان می‌دهد، می‌بایست مشتق جزئی سرعت خطی و دورانی هر لینک را نسبت به مختصه تعمیم یافته مربوط به مفصل اول لگن پای راست محاسبه کرد. با توجه به این که این مختصه مربوط به یک مفصل دورانی است، مشتقات جزئی از طریق روابط (8) محاسبه می‌شوند

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{G_i}}{\partial \dot{q}_{r1}} &= J_{L,r1}^{(i)} = (\bar{U}_{r1})^T \cdot P_{G_i}^{r1} \\ P_{G_i}^{r1} &= {}^0 T_i \times P_{G_i}^i - {}^0 T_{r1} [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \\ \frac{\partial \omega_{G_i}}{\partial \dot{q}_{r1}} &= J_{A,r1}^{(i)} = \bar{U}_{r1} \end{aligned} \quad (8)$$

1- Single Support Phase
2- Double Support Phase

جهت گیری آن در راستای y قیدی لحاظ کرد.

در این حالت می توان از اثر پنجه هر دو پا صرف نظر کرد. بنابراین وضعیت ربات با 18 مختصه تعمیم یافته قابل بیان است و می توان معادلات دینامیک را به دست آورد.

در نیمه دوم فاز، پای راست عقب و روی پنجه قرار دارد و کف پای چپ جلو و صاف روی زمین قرار گرفته است. قیود هولونومیک مشابه فاز دوتکیه-گاهی در الگوی حرکتی اول است با این تفاوت که نقطه تماس برای پای راست باید در زیر لینک پنجه در نظر گرفته شود. در این حالت وضعیت ربات با 19 مختصات تعمیم یافته (بدون در نظر گرفتن پنجه پای چپ) قابل بیان است و می توان معادلات دینامیکی مقید سیستم را تعیین کرد.

2-2-4- محاسبه ZMP به دو روش

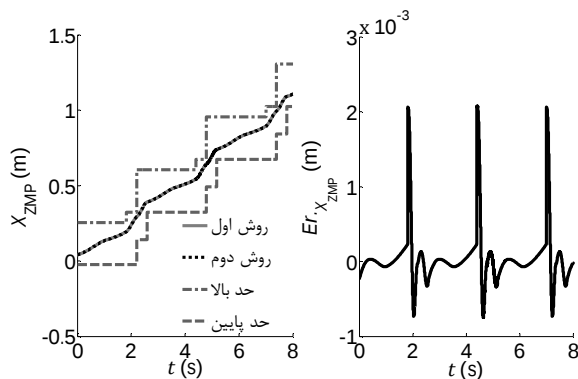
با محاسبه ZMP به دو روش و انطباق نتایج حاصل از آن دو، صحت کامل مدل دینامیکی تأیید می شود. در روش اول ZMP طبق مقاله [24] محاسبه می گردد که در آن می توان با استفاده از اثرات وزن و اینرسی تک تک لینک ها و مستقل از نیروهای تکیه گاهی، این نقطه را محاسبه نمود. در واقع در این روش با گشتاورگیری حول نقطه ZMP، نیروهای تکیه گاهی از معادلات حذف می شوند و نیازی به محاسبه گشتاورهای مفاصل و نیروهای تکیه گاهی نیست. اما در روش دوم پس از استخراج نیروها و گشتاورهای تکیه گاهی از مدل دینامیکی، می توان با استفاده از تعریف ZMP [25] موقعیت این نقطه را محاسبه نمود [26].

با به کار بردن مسیر حرکت مفاصل در معادلات مربوط به ZMP که از دو روش محاسبه شدند، تاریخچه زمانی موقعیت ZMP حاصل می شود. به عنوان نمونه، نتایج مربوط به گام برداشتن طبق الگوی حرکتی دوم ارائه می گردد. شکل 6، ZMP در راستای x و خطای محاسبه آن از دو روش را نشان می دهد. همچنین، شکل 7، ZMP در راستای y و خطای محاسبه آن از دو روش را نمایش می دهد.

از آنجایی که در هر دو روش از محاسبات عددی استفاده شده است وجود خطایی با مرتبه 10^{-3} و 10^{-4} توجه پذیر است. بنابراین، مدل دینامیکی به طور کامل و دقیق صحت گذاری شده است.

2-3- نتایج مربوط به گشتاور مورد نیاز مفاصل و نیرو و گشتاورهای عکس العملی زمین

اکنون می توان با اطمینان کامل، از مدل دینامیکی صحت گذاری شده استفاده کرد و گشتاور مفاصل و نیرو و گشتاورهای عکس العملی زمین را محاسبه کرد. در این بخش به عنوان نمونه نتایج مربوط به گام برداشتن طبق الگوی



شکل 6 موقعیت ZMP در راستای x و خطای محاسبه آن به دو روش

با در نظر گرفتن ربات به صورت یک جسم آزاد و بدون هیچ تماسی با محیط، مختصات تعمیم یافته طبق روابط (1) و (3) به صورت بردار رابطه (9) تعریف می شود:

$$q_{20 \times 1} = [q_{p_{6 \times 1}}, q_{r_{7 \times 1}}, q_{l_{7 \times 1}}]^T \quad (9)$$

فاز تک تکیه گاهی اول در الگوی حرکتی اول و دوم: در این فاز، کف پای راست صاف بر روی زمین قرار دارد و پای چپ از عقب به سمت جلو حرکت می کند. فرض ثابت بودن پا بر روی زمین با قیود هولونومیک، به صورت رابطه (10) بیان می شود:

$$\begin{bmatrix} X_c - C \\ \theta_c \end{bmatrix}_{6 \times 1} = 0 \quad (10)$$

که در آن C ثابت و c نقطه تماس کف پای راست با زمین می باشد، X و θ موقعیت و جهت گیری کف پای راست را نشان می دهد. این قیود با نیروها و گشتاورهای مجهول در فضای کاری جایگزین می شوند و سپس از طریق ترانزاده ژاکوبین به فضای مفصلی نگاشت داده می شوند.

باید توجه داشت در حالتی که کف پا صاف بر روی زمین قرار دارد، نیاز نیست اثر پنجه آن پا لحاظ شود. بنابراین تنها کافی است معادلات را برای 19 مختصات تعمیم یافته (بدون پنجه پای راست) در نظر گرفت و وضعیت ربات با همان 19 مختصات تعمیم یافته قابل بیان است. بنابراین می توان معادلات دینامیکی مقید سیستم را استخراج کرد.

فاز دوتکیه گاهی اول در الگوی حرکتی اول: در این فاز، کف هر دو پا صاف بر روی زمین قرار دارند. فرض ثابت بودن هر دو پا بر روی زمین با قیود هولونومیک، به صورت رابطه (11) بیان می شود:

$$\begin{bmatrix} X_{c_r} - C_r \\ \theta_{c_r} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = 0, \begin{bmatrix} X_{c_l} - C_l \\ \theta_{c_l} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = 0 \quad (11)$$

که در آن c_r و c_l به ترتیب نقاط تماس کف پای راست و کف پای چپ با زمین می باشند.

لازم به ذکر است در این حالت که کف هر دو پا صاف بر روی زمین قرار گرفته است، نیاز نیست اثر پنجه پاها لحاظ شود. بنابراین وضعیت ربات با 18 مختصات تعمیم یافته قابل بیان است و می توان معادلات دینامیکی مقید سیستم را استخراج کرد.

فاز دوتکیه گاهی اول در الگوی حرکتی دوم: در نیمه اول فاز، کف پای راست صاف و در عقب قرار دارد و پای چپ در جلو و بر روی پاشنه قرار گرفته است. قیود هولونومیک در این حالت به فرم رابطه (12) بیان می شود.

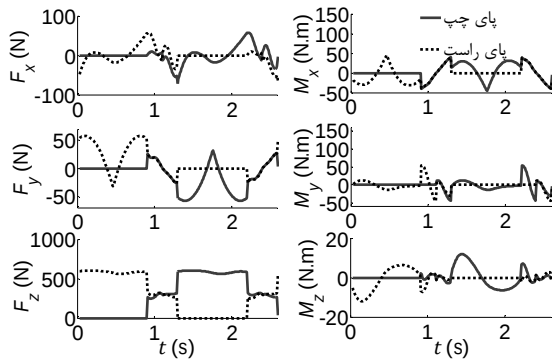
$$\begin{bmatrix} X_{c_r} - C_r \\ \theta_{c_r} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = 0, \begin{bmatrix} X_{c_l} - C_l \\ \theta_{c_l} \end{bmatrix}_{5 \times 1} = 0 \quad (12)$$

که در آن c_r نقطه تماس کف پای راست با زمین و c_l نقطه تماس پاشنه پای چپ با زمین می باشد. همان طور که در رابطه (10) مشاهده می شود، به دلیل این که پای چپ فقط در ناحیه پاشنه با زمین تماس دارد، موقعیت آن در سه راستا و جهت گیری آن فقط در دو راستای x و z مقید می شود و نباید بر روی

جدول 2 شماتیک نحوه گام برداشتن در دو الگوی حرکتی متفاوت (پای راست با

رنگ خاکستری تیره و پای چپ با رنگ خاکستری روشن مشخص شده است)

الگو حرکتی	DSP2	SSP2	DSP1	SSP1
بدون پنجه و پاشنه				
دارای پنجه و پاشنه				



شکل 10 نیروها و گشتاورهای عکس‌العملی زمین وارد بر کف پا در یک سیکل کامل

معکوس، مسیر حرکت در فضای مفصلی (کلیه مفاصل پاها به جز پنجه‌ها) به دست می‌آید و برای مفاصل پنجه جداگانه طراحی مسیر می‌شود.

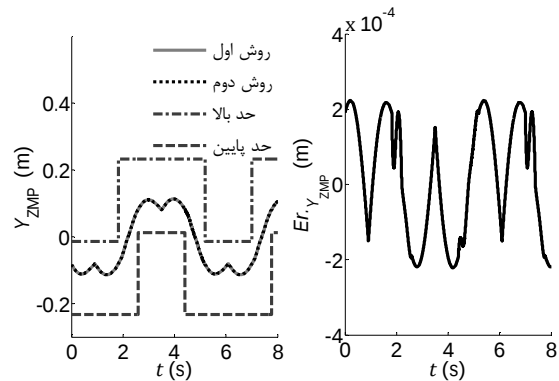
3-1- طراحی مسیر برای میان‌تنه

طراحی مسیر براساس مدل دقیق دینامیکی به کمک مقاله [27] انجام می‌گیرد که در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد. ارتفاع مرکز جرم ثابت فرض می‌شود و صرفاً برای حرکت در راستای x و y مسیری مناسب طراحی می‌شود. از آنجایی که حرکت میان‌تنه در فازهای تک‌تکیه‌گاهی و دو‌تکیه‌گاهی اول عیناً برای دو فاز دوم تکرار می‌شود، تنها به بررسی دو فاز اول چرخه پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است فرض شده است که حرکت با فاز تک‌تکیه‌گاهی که در آن پای راست روی زمین ایستاده است شروع می‌شود در نتیجه شرایط مرزی و مسیر حرکت براساس این فرض تعیین می‌شوند. با در نظر گرفتن پیوستگی موقعیت، سرعت و شتاب بین دو فاز تک-تکیه‌گاهی و دو‌تکیه‌گاهی مسیری مناسب در راستای x طراحی می‌شود که شرایط مرزی آن به صورت رابطه (13) تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} x_s(0) = 0 \\ x_s(t_s) = x_{bs} + x_{es} \\ \dot{x}_s(0) = \dot{x}_d(t_s + t_d) \\ \dot{x}_s(t_s) = \dot{x}_d(t_s + t_d) \\ \ddot{x}_s(0) = \ddot{x}_d(t_s + t_d) \\ \ddot{x}_s(t_s) = \ddot{x}_d(t_s) \\ \ddot{x}_s(t_s) = \ddot{x}_d(t_s) \\ x_d(t_s) = x_{bs} + x_{es} \\ x_d(t_s + t_d) = c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_s(t) = \sum_{i=0}^3 a_i t^i \\ x_d(t) = \sum_{i=0}^3 b_i t^i \end{cases} \quad (13)$$

که در آن t_s و t_d به ترتیب مدت زمان فاز تک‌تکیه‌گاهی و دو‌تکیه‌گاهی هستند. x_s و x_d به ترتیب تاریخچه زمانی موقعیت x در فاز تک‌تکیه‌گاهی و دو‌تکیه‌گاهی هستند که با در اختیار داشتن 8 شرط مرزی، به صورت دو چندجمله‌ای مرتبه سه تعیین می‌شوند. همچنین c طول گام است و اگر فرض شود که دستگاه مرجع روی زمین و دقیقاً زیر مرکز جرم واقع شده باشد، x_{bs} و x_{es} به ترتیب موقعیت مرکز میان‌تنه در ابتدا و انتهای فاز تک‌تکیه‌گاهی هستند.

مسیر y باید به گونه ای طراحی شود که مقدار آن در وسط فاز تک‌تکیه‌گاهی به بیشترین مقدار برسد؛ یعنی به منظور حفظ پایداری در این فاز باید تا حد امکان مرکز میان‌تنه به پای ایستاده نزدیک گردد. برای اعمال این شرط لازم است به جای در نظر گرفتن فازهای تک‌تکیه‌گاهی و دو‌تکیه‌گاهی به صورت جداگانه، y_1 را به عنوان مسیر حرکت از نیمه فاز تک‌تکیه‌گاهی اول تا نیمه فاز دو‌تکیه‌گاهی اول و y_2 را به عنوان مسیر حرکت از نیمه فاز دو‌تکیه‌گاهی اول تا نیمه فاز تک‌تکیه‌گاهی دوم در نظر گرفت. در این حالت شرایط مرزی به صورت رابطه (14) بیان می‌گردد.

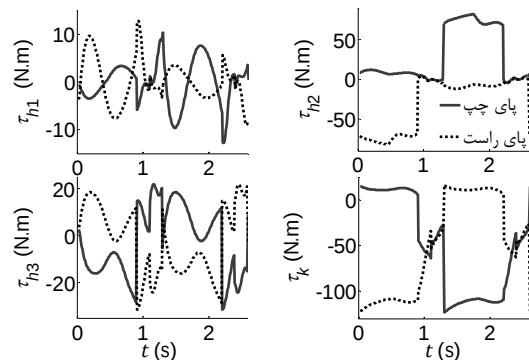


شکل 7 موقعیت ZMP در راستای y و خطای محاسبه آن به دو روش

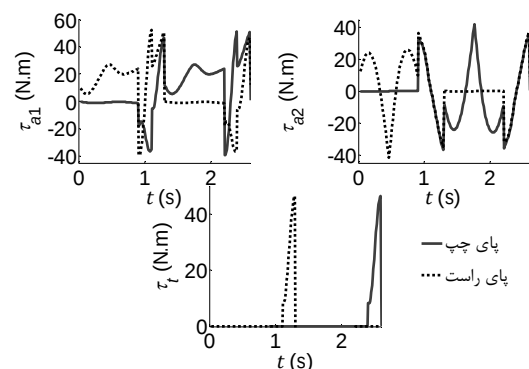
حرکتی دوم ارائه می‌گردد. شکل 8 گشتاورهای موردنیاز مفاصل لگن و زانو و شکل 9 گشتاورهای موردنیاز مفاصل مچ و پنجه را نشان می‌دهد. همچنین شکل 10 نیروها و گشتاورهای عکس‌العملی زمین وارد بر کف پا را نشان می‌دهند.

3- طراحی مسیر

در این بخش، ابتدا برای میان‌تنه طراحی مسیر انجام می‌شود. به این صورت که ابتدا مسیری مناسب برای میان‌تنه طراحی می‌شود و سپس پایداری حرکت با استفاده از موقعیت ZMP چک می‌شود. در واقع، در این روش با استفاده از بهینه‌سازی، مسیری برای میان‌تنه استخراج می‌شود که علاوه بر ارضاء پایداری، یک تابع هزینه را بهینه کند. در ادامه، طراحی مسیر برای کف پا مورد بررسی قرار می‌گیرد که با در نظر گرفتن دو الگوی حرکتی ارائه شده، مسیری مناسب در فضای کاری به دست آورده می‌شود. سپس با در اختیار داشتن مسیر حرکت میان‌تنه و کف پاها در فضای کاری، از طریق سینماتیک



شکل 8 گشتاورهای موردنیاز مفاصل لگن و زانو در یک سیکل کامل گام



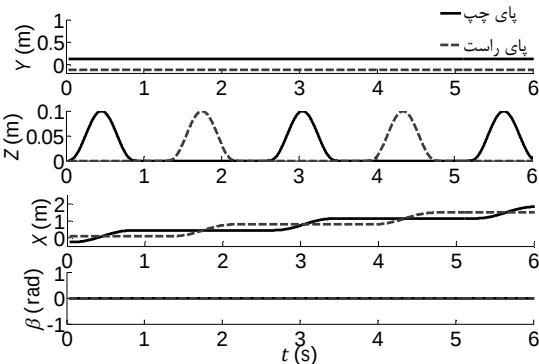
شکل 9 گشتاورهای موردنیاز مفاصل مچ و پنجه در یک سیکل کامل گام

2-3- طراحی مسیر برای کف پا

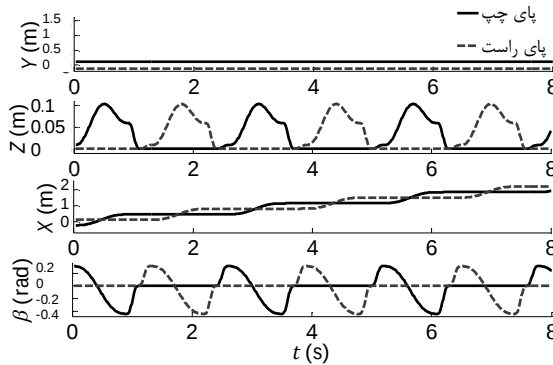
وضعیت کف پا به عنوان یک جسم صلب با سه مختصه موقعیت (x, y, z) و سه مختصه جهت گیری (α, β, γ) قابل بیان می باشد. در این بخش برای موقعیت آن (x, y, z) و جهت گیری در راستای y (β) مسیری مناسب طراحی می گردد. مسیر حرکت برای کف پاها طبق روش ارائه شده در مقاله [28] تعیین می شود. نتایج مربوط به مسیر حرکت کف پا برای هر دو الگوی حرکتی در شکل 13 و شکل 14 نشان داده شده است [26].

3-3- تعیین زوایای مفصل

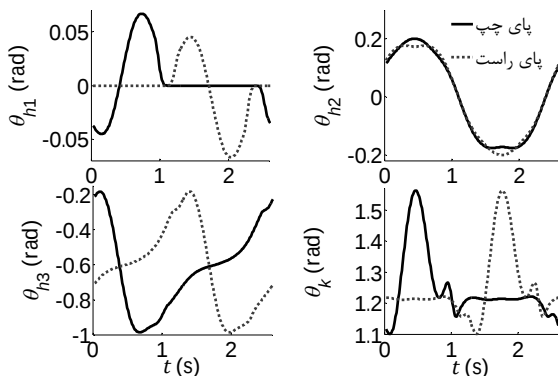
سینماتیک معکوس ربات طبق روش ارائه شده در مقاله [29] به صورت تحلیلی¹ تعیین می شود. مسیر حرکت پنجه جداگانه و براساس مسیر طراحی شده برای کف پا تعیین می شود. به عنوان نمونه نتایج مربوط به الگوی حرکتی دوم ارائه می شود. زوایای لگن و زانو در شکل 15 و زوایای مچ و پنجه در شکل 16 نشان داده شده است.



شکل 13 مسیر حرکت کف پا در الگوی حرکتی اول



شکل 14 مسیر حرکت کف پا در الگوی حرکتی دوم

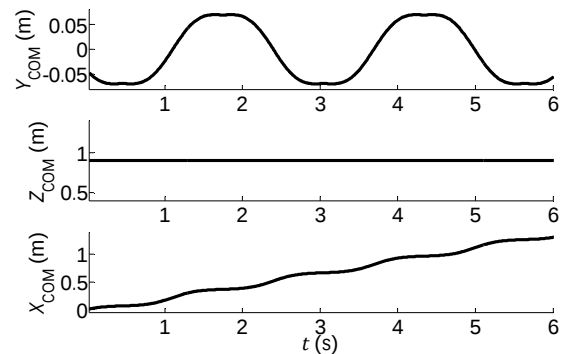


شکل 15 زوایای مفصل لگن و زانو در یک سیکل کامل گام

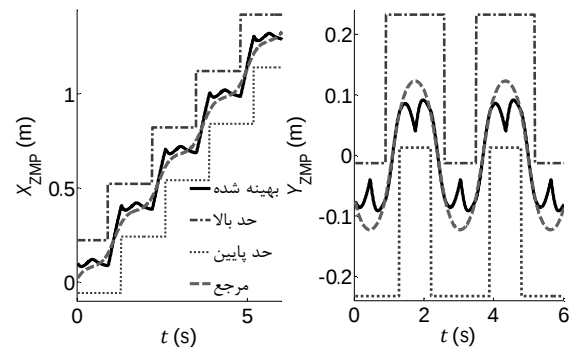
در رابطه (14) y_{bs} و y_{ms} به ترتیب موقعیت مرکز میان تنه را در ابتدا و وسط فاز تک تکیه گاهی نشان می دهند. همان طور که در رابطه (14) نشان داده شده است، با در اختیار داشتن 10 شرط مرزی می توان y_1 و y_2 را به صورت دو چندجمله ای مرتبه 4 تعیین کرد.

$$\begin{cases} y_1\left(\frac{t_s}{2}\right) = -y_{ms}, \dot{y}_1\left(\frac{t_s}{2}\right) = 0 \\ y_1(t_s) = -y_{bs}, y_1\left(t_s + \frac{t_d}{2}\right) = 0 \\ \dot{y}_1\left(t_s + \frac{t_d}{2}\right) = \dot{y}_2\left(t_s + \frac{t_d}{2}\right) \\ y_2\left(t_s + \frac{t_d}{2}\right) = y_2\left(t_s + \frac{t_d}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \sum_{i=0}^4 a_i t^i \\ y_2(t) = \sum_{i=0}^4 b_i t^i \end{cases} \\ y_2\left(t_s + \frac{t_d}{2}\right) = 0, y_2(t_s + t_d) = y_{bs} \\ y_2\left(\frac{3t_s}{2} + t_d\right) = y_{ms}, \dot{y}_2\left(\frac{3t_s}{2} + t_d\right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

4 متغیر y_{bs} ، y_{ms} ، x_{es} ، x_{bs} به عنوان پارامترهای مسیر میان تنه، تاثیر مستقیم بر روی ZMP دارند و به گونه ای تعیین می شوند که ZMP به دست آمده از مرکز ناحیه چندضلعی تکیه گاهی حداقل فاصله را داشته باشد. انتخاب این پارامترها با سعی و خطا انجام می شود اما در بخش 4، از این پارامترها برای بهینه سازی استفاده خواهد شد و این سعی و خطا در قالب یک مسئله بهینه سازی بیان می شود. شکل 11 یک نمونه مسیر برای مرکز جرم را نشان می دهد که از آنجایی که ZMP بدست آمده داخل چندضلعی تکیه گاهی قرار می گیرد، حرکتی پایدار دارد (شکل 12). لازم به ذکر است که در شکل 12 منظور از ZMP مرجع، حالتی است که ربات دارای بیشترین حاشیه پایداری است. یعنی ZMP در طول حرکت در دورترین فاصله از مرز پایداری است.



شکل 11 مسیر بهینه برای مرکز جرم



شکل 12 ZMP بهینه شده و مرجع در راستای X و Y

1- Closed-Form

θ_{heel} (زوایای پنجه و پاشنه) به عنوان دیگر پارامترهای بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند.

1-4- بهینه‌سازی براساس گشتاور بیشینه زانو

در این قسمت، برای بهینه کردن مسیر حرکت ربات، تابع هزینه گشتاور بیشینه زانو در نظر گرفته می‌شود که با یافتن مقادیری بهینه برای پارامترهای بهینه‌سازی، به حداقل مقدار ممکن می‌رسد. علت این که مفصل زانو برای کمینه کردن گشتاور انتخاب شده است این است که در طول حرکت این مفصل در معرض بیشترین گشتاور قرار دارد. بهینه‌سازی به کمک جعبه‌ابزار ژنتیک الگوریتم در متلب انجام می‌شود. در این بهینه‌سازی پارامترها به گونه‌ای بهینه می‌شوند که قیود مطرح شده در رابطه (15) ارضا شوند.

$$(x_{ZMP}, y_{ZMP}) \in \text{چندضلعی تکیه‌گاهی} \quad | \theta_k | \geq 5^\circ \quad (15)$$

این قیود بیان می‌کنند که حین بهینه‌سازی، ZMP همواره باید درون چندضلعی تکیه‌گاهی واقع شود (یعنی پایداری حرکت ربات تضمین گردد) و مفصل زانو از نقاط انفراد به دور باشد.

مسیر حرکت در هر الگوی حرکتی برای پنج طول گام $c = [0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7]$ (مقادیر برحسب متر هستند) به گونه‌ای بهینه می‌شود که گشتاور بیشینه زانو کم‌ترین مقدار را داشته باشد. جدول 4 و شکل 18 نتایج مربوط به بهینه‌سازی را بیان می‌کنند.

همان‌طور که اطلاعات جدول 4 نشان می‌دهد در طول گام کم، استفاده از پنجه و پاشنه گشتاور بیشینه زانو را تا 24% کاهش می‌دهد و برای طول گام‌های بلند در حدود 14% کاهش می‌دهد. در واقع می‌توان این‌گونه توجیه کرد که در صورت نبودن پنجه، در طول گام‌های بلند، برای دوری از حالت انفراد می‌بایست ارتفاع میان‌تنه کم شود و در نتیجه زاویه زانو بیشتر شود و این امر باعث افزایش گشتاور زانو می‌گردد. اما وجود پنجه باعث می‌شود ارتفاع میان‌تنه هر اندازه که لازم است افزایش یابد و در نتیجه باعث کاهش زاویه و گشتاور موردنیاز زانو می‌شود. در این حالت حرکت پای ربات شبیه حرکت پای انسان می‌شود.

2-4- بهینه‌سازی براساس انرژی مصرفی کل

در این قسمت، برای بهینه کردن مسیر حرکت ربات، تابع هزینه انرژی مصرفی کل در نظر گرفته می‌شود (رابطه 16). با یافتن مقادیری بهینه برای پارامترهای بهینه‌سازی، تابع هزینه به حداقل مقدار ممکن می‌رسد.

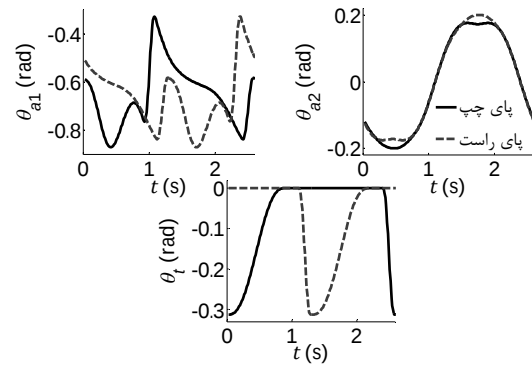
$$E_{tot.} = \sum_{i=0}^{14} |\tau_i \dot{q}_i| \quad (16)$$

جدول 3 پارامترهای بهینه‌سازی در هر نوع الگوی گام برداشتن

الگوی حرکتی	پارامترهای بهینه‌سازی
1 بدون پنجه و پاشنه	$x_{bs}, x_{es}, y_{bs}, y_{ms}, h_p$
2 دارای پنجه و پاشنه	$x_{bs}, x_{es}, y_{bs}, y_{ms}, h_p, \theta_{toe}, \theta_{heel}$

جدول 4 گشتاور بیشینه زانو به ازای طول گام‌های مختلف (N.m)

الگوی حرکتی	طول گام (c) متر				
	0/7	0/6	0/5	0/4	0/3
1 بدون پنجه و پاشنه	171/5	145/1	114/5	94/62	66/66
2 دارای پنجه و پاشنه	162/2	124/2	100/8	70/04	50/78



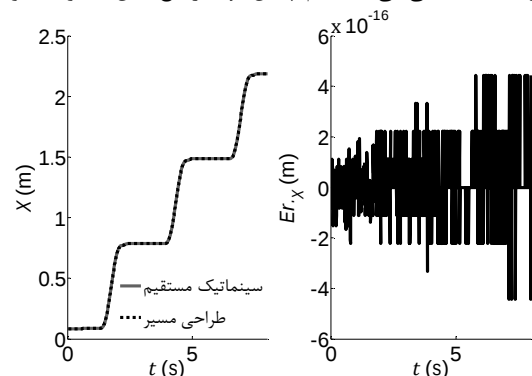
شکل 16 زوایای مفاصل میچ و پنجه در یک سیکل کامل گام

1-3-3- صحنه‌گذاری سینماتیک معکوس

برای اطمینان از صحت راه حل ارائه شده برای سینماتیک معکوس، می‌بایست زوایای به دست آمده از سینماتیک معکوس را در سینماتیک مستقیم قرار داد و موقعیت کف پا را در سه راستا نسبت به دستگاه مرجع تعیین کرد؛ اگر این موقعیت منطبق بر مسیر طراحی شده برای کف پا باشد، در این صورت می‌توان ادعا کرد که روابط سینماتیک معکوس صحیح می‌باشد. به عنوان نمونه شکل 17 موقعیت کف پای راست در راستای x و خطای بین نتایج سینماتیک مستقیم و مسیر طراحی شده برای کف پای راست را طبق الگوی حرکتی دوم نشان می‌دهد. همان‌طور که نمودار خطا نشان می‌دهد، مرتبه خطا 10^{-16} است. بنابراین سینماتیک معکوس به درستی محاسبه شده است.

4- بهینه‌سازی

هدف از بهینه‌سازی ایجاد حرکاتی با کمترین انرژی مصرفی و کمترین گشتاور در فضای مفاصل می‌باشد¹. همچنین بررسی خواهد شد برای راه رفتن بر روی سطح صاف، کدام یک از الگوهای گام برداشتن برای ربات از نقطه نظر سرعت بالا و طول گام بلند مناسب است. لازم به ذکر است که در کلیه بهینه‌سازی‌ها فرض بر این است که ضریب اصطکاک سطح به اندازه کافی باشد. جدول 3 پارامترهای بهینه‌سازی برای هر نوع الگوی گام برداشتن را نشان می‌دهد. پارامترهای بهینه‌سازی بیان شده در جدول 3 همان پارامترهای مورد استفاده در طراحی مسیر هستند. به این صورت که (x_{bs}, y_{bs}) موقعیت میان‌تنه در ابتدای فاز تک تکیه‌گاهی و x_{es} موقعیت میان‌تنه در راستای x در انتهای فاز تک تکیه‌گاهی و y_{ms} موقعیت میان‌تنه در وسط فاز تک تکیه‌گاهی می‌باشد. هم چنین، h_p (ارتفاع میان‌تنه) و θ_{toe} و



شکل 17 صحنه‌گذاری سینماتیک معکوس در راستای x

1- محاسبات بر روی کامپیوتر با پردازنده core i7 و 6G RAM انجام شده است.

جدول 6 بیشترین سرعت امکان پذیر در هر الگوی حرکتی		
الگوی حرکتی	طول گام (m)	سرعت گام (km/h)
1 بدون پنجه و پاشنه	0/59	3/27
2 دارای پنجه و پاشنه	0/66	3/65

بهینه سازی که در جدول 3 برای هر الگوی حرکتی بیان شد، طول گام نیز به عنوان یک پارامتر بهینه سازی دیگر می بایست لحاظ شود. قیود لازم برای بهینه سازی این قسمت، به صورت رابطه (17) در نظر گرفته می شوند.

$$\begin{aligned} & \text{چندضلعی تکیه گاهی} \in ZMP(x, y) \\ & |\theta_k| \geq 5^\circ \\ & \max(\dot{q}_i) \leq 80 \text{ (rpm)} \\ & \max(\tau_i) \leq 150 \text{ (N.m)} \end{aligned} \quad (17)$$

این قیود بیان می کنند که حین بهینه سازی، ZMP همواره باید درون چندضلعی تکیه گاهی واقع شود و مفصل زانو از نقاط انفراد به دور باشد. دو قید آخر نیز برای اعمال محدودیت های موتور در نظر گرفته شده اند به این صورت که سرعت زاویه ای بیشینه و گشتاور مفاصل نباید به ترتیب از 80 و 150 N.m بیشتر شوند [30]. جدول 6 بیشترین سرعت و طول گامی که ربات در هر الگوی حرکتی می تواند داشته باشد را نشان می دهد.

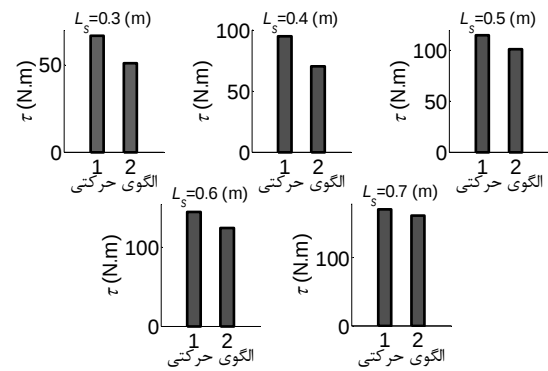
بر اساس نتایج بدست آمده، با در نظر گرفتن پنجه و پاشنه، بیشترین طول گام و سرعت قابل قبول برای ربات حدود 12% نسبت به حالت بدون پنجه و پاشنه افزایش می یابد. در واقع می توان این گونه توجیه کرد که وجود پنجه برای راه رفتن ربات الزامی نیست. اما زمانی که طول گام زیاد می شود، در صورتی که از پنجه استفاده نشود، زانو کشیده می شود (به حالت انفراد نزدیک می گردد) و برای دوری از انفراد باید ارتفاع میان تنه را تا حد امکان پایین آورد. این امر باعث افزایش سرعت مفصل زانو و گشتاور وارده بر این مفصل می شود. در نتیجه، با توجه به قیود سرعت و گشتاور برای این مفصل، طول گام و متعاقباً سرعت حرکت نسبت به حالت با پنجه و پاشنه کمتر است.

5- نتیجه گیری و پیشنهادها

در این اثر، اهمیت تجهیز پای یک ربات انسان نما با پنجه فعال مورد بررسی قرار گرفت و با در نظر گرفتن هم زمان پنجه و پاشنه، یک نوع الگوی حرکتی جدید ارائه شد و با الگوی حرکتی بدون پنجه و پاشنه مقایسه شد. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که استفاده هم زمان از پنجه فعال و پاشنه، گشتاور بیشینه زانو و انرژی مصرفی کل را نسبت به حالت بدون پنجه و پاشنه کاهش می دهد و این امکان را به ربات می دهد که بتواند با طول گام بلندتر و سرعت بیشتری نسبت به حالت بدون پنجه و پاشنه گام بردارد. پیشنهادهایی که برای ادامه این پژوهش می توان بیان کرد، بررسی و استفاده از مزایای پنجه فعال در فاز تک تکیه گاهی و همچنین طراحی مسیر بهینه برای حرکت بر روی پله با در نظر گرفتن پنجه فعال برای ربات می باشد.

6- فهرست علائم

a	شتاب خطی (m.s^{-2})
c	طول گام (m)
C	بردار ثابت
$C(q, \dot{q})$	بردار اثرات گریز از مرکز و کریولیس
E	انرژی مصرفی (J)
F	نیروی وارد بر ربات (N)



شکل 18 گشتاور بیشینه زانو به ازای طول گام های مختلف (N.m)

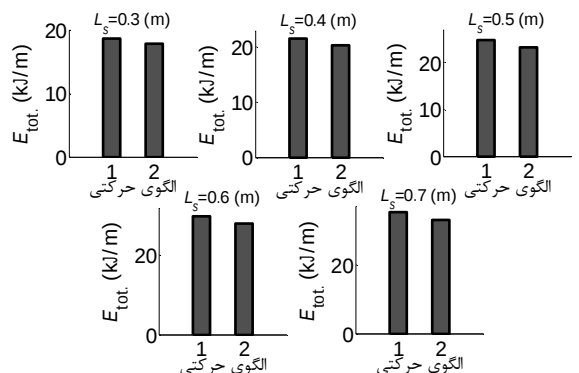
که در آن τ_i گشتاور مفصل i ام و $\dot{q}_i$ سرعت زاویه ای مفصل i ام است. پارامترهای بهینه سازی برای هر نوع الگوی حرکتی، مشابه حالت قبل در نظر گرفته می شود. جدول 5 و شکل 19 انرژی مصرفی کل را برای هر دو الگوی حرکتی به ازای 5 طول گام مختلف نشان می دهند.

طبق نتایج ارائه شده در جدول 5 می توان این گونه توجیه کرد که وجود پنجه و پاشنه، انرژی مصرفی کل را در طول گام های کوتاه تا 4% و در طول گام های بلند تا 7% کاهش می دهد. از آنجایی که وجود پنجه باعث می شود میان تنه در ارتفاع بیشتری نسبت به حالت بدون پنجه قرار بگیرد در نتیجه باعث خمیدگی کمتر زانو و همچنین سایر مفاصل می شود. تغییرات کم زوایای مفاصل، تغییرات سرعت زاویه ای مفاصل را در گام برداشتن نرم تر می کند و همچنین گشتاور مورد نیاز مفاصل را کاهش می دهد. بنابراین انرژی مفاصل متعادل می گردد و انرژی مصرفی کل کاهش می یابد.

3-4- بهینه سازی بر اساس بیشترین سرعت (یا بلندترین طول گام)

در این قسمت، برای انجام عملیات بهینه سازی، تابع هزینه سرعت گام برداشتن ربات در نظر گرفته می شود که با یافتن مقادیری بهینه برای پارامترهای بهینه سازی، به حداکثر مقدار ممکن می رسد. علاوه بر پارامترهای

جدول 5 انرژی مصرفی کل به ازای طول گام های مختلف (kJ/m)					
طول گام (c) متر					الگوی حرکتی
0/7	0/6	0/5	0/4	0/3	
35/22	29/90	24/74	21/50	18/62	1 بدون پنجه و پاشنه
33/00	28/05	23/17	20/30	17/87	2 دارای پنجه و پاشنه



شکل 19 انرژی مصرفی کل به ازای طول گام های مختلف (kJ/m)

ul, ur به ترتیب بازوی دست راست و بازوی دست چپ

بالانویس

G زمین (دستگاه مرجع)

7- مراجع

- [1] K. Nishiwaki, S. Kagami, Y. Kuniyoshi, M. Inaba, H. Inoue, Toe joints that enhance bipedal and fullbody motion of humanoid robots, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, pp. 3105-3110, 2002.
- [2] K. Nishiwaki, Humanoid'jsk-h7': Research platform for autonomous behavior and whole body motion, in *Proceeding of the Third IARP International Workshop on Humanoid and Human Friendly Robotics*, 2002.
- [3] S. Kagami, K. Nishiwaki, J. J. Kuffner Jr, Y. Kuniyoshi, M. Inaba, H. Inoue, Online 3D vision, motion planning and bipedal locomotion control coupling system of humanoid robot: H7, in *Proceeding of International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, pp. 2557-2562, 2002.
- [4] C. K. Ahn, M. C. Lee, S. J. Go, Development of a biped robot with toes to improve gait pattern, in *Proceeding of International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, IEEE, pp. 729-734, 2003.
- [5] S. Takao, H. Ohta, Y. Yokokohji, T. Yoshikawa, Function analysis of human-like mechanical foot, using mechanically constrained shoes, in *Proceeding of International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, pp. 3847-3852, 2004.
- [6] R. Sellaouti, O. Stasse, S. Kajita, K. Yokoi, A. Kheddar, Faster and smoother walking of humanoid HRP-2 with passive toe joints, in *Proceeding of International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, pp. 4909-4914, 2006.
- [7] S. Kajita, K. Kaneko, M. Morisawa, S. Nakaoka, H. Hirukawa, ZMP-based biped running enhanced by toe springs, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, pp. 3963-3969, 2007.
- [8] S. Lohmeier, T. Buschmann, H. Ulbrich, Humanoid robot LOLA, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, pp. 775-780, 2009.
- [9] R. Tajima, D. Honda, K. Suga, Fast running experiments involving a humanoid robot, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, pp. 1571-1576, 2009.
- [10] L. Wang, Z. Yu, Q. Meng, Z. Zhang, Influence analysis of toe-joint on biped gaits, in *Proceeding of International Conference on Mechatronics and Automation*, IEEE, pp. 1631-1635, 2006.
- [11] D. Taloloni, C. Chevallereau, Y. Aoustin, Human-like walking: Optimal motion of a bipedal robot with toe-rotation motion, *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, Vol. 16, No. 2, pp. 310-320, 2011.
- [12] K. Miura, M. Morisawa, F. Kanehiro, S. Kajita, K. Kaneko, K. Yokoi, Human-like walking with toe supporting for humanoids, in *Proceeding of International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, pp. 4428-4435, 2011.
- [13] P. Kumar, J. Yoon, G.-s. Kim, Hybrid toe and heel joints for biped/humanoid robots for natural gait, in *Proceeding of International Conference on Control Automation and Systems*, 2687-2692, 2007.
- [14] Y. Ogura, K. Shimomura, H. Kondo, A. Morishima, T. Okubo, S. Momoki, H.-o. Lim, A. Tananishi, Human-like walking with knee stretched, heel-contact and toe-off motion by a humanoid robot, in *Proceeding of International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, pp. 3976-3981, 2006.
- [15] N. Handharu, J. Yoon, G. Kim, Gait pattern generation with knee stretch motion for biped robot using toe and heel joints, in *Proceeding of International Conference on Humanoid Robots*, IEEE, pp. 265-270, 2008.
- [16] K. Yamamoto, T. Sugihara, Y. Nakamura, Toe joint mechanism using parallel four-bar linkage enabling humanlike multiple support at toe pad and toe tip, in *Proceeding of International Conference on Humanoid Robots*, IEEE, pp. 410-415, 2007.
- [17] E. Kouchaki, M. J. Sadigh, Effect of toe-joint Bending on biped gait performance, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Biomimetics*, IEEE, pp. 697-702, 2010.
- [18] E. Kouchaki, C. Q. Wu, M. J. Sadigh, Effects of constraints on standing balance control of a biped with toe-joints, *International Journal of Humanoid Robotics*, Vol. 9, No. 03, 2012.
- [19] M. Ezati, M. Khadiv, S. A. A. Moosavian, Dynamics modeling of a biped robot with active toe joints, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Mechatronics*, IEEE, pp. 107-112, 2014.
- [20] S. Bertrand, O. Bruneau, F. Ouezdou, S. Alfayad, Closed-form solutions of inverse kinematic models for the control of a biped robot with 8 active degrees of freedom per leg, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 49, pp. 117-140, 2012.
- [21] M. Khadiv, S. A. A. Moosavian, M. Sadedel, Dynamics modeling of fully-actuated humanoids with general robot-environment interaction, in *Proceeding of International Conference on Robotics and Mechatronics*, IEEE, pp. 233-238, 2014.

g شتاب گرانش زمین ($m.s^{-2}$)

G بردار اثرات گرانش

h ارتفاع (m)

$\dot{H}$ بردار نرخ تغییر مومنوم دورانی

J ماتریس ژاکوبین

m جرم (kg)

M گشتاور وارد بر ربات (N.m)

$M_{n \times n}$ ماتریس اینرسی

P بردار موقعیت

q مختصات تعمیم یافته (m) یا (rad)

Q نیرو و گشتاورهای وارد بر ربات (N) یا (N.m)

T ماتریس تبدیل

U بردار یک نشان دهنده جهت دوران

v سرعت خطی ($m.s^{-1}$)

x موقعیت در راستای حرکت ربات (m)

X بردار موقعیت یک نقطه

y موقعیت در راستای عرضی ربات (m)

z موقعیت در راستای ارتفاع ربات (m)

علائم یونانی

A دوران حول محور x (rad)

B دوران حول محور y (rad)

Γ دوران حول محور z (rad)

θ زاویه نسبی بین دو لینک یا یک لینک با زمین

(rad)

T گشتاور مورد نیاز مفصل (N.m)

Ω سرعت زاویه ای ($rad.s^{-1}$)

زیر نویس ها

al, ar به ترتیب مچ راست و مچ چپ

Al, Ar به ترتیب دست راست و دست چپ

bs ابتدای فاز تک تکیه گاهی

c نقطه تماس کف پا با زمین

d ناحیه دو تکیه گاهی

es انتهای فاز تک تکیه گاهی

G_i مرکز جرم لینک i ام

hl, hr به ترتیب لگن راست و لگن چپ

kl, kr به ترتیب زانوی راست و زانوی چپ

ll, lr به ترتیب ساق دست راست و ساق دست چپ

l_1 لینک اول پای چپ (لگن)

l_7 لینک آخر پای چپ (پنجه)

Ll, Lr به ترتیب پای راست و پای چپ

ms وسط فاز تک تکیه گاهی

p میان تنه

r_1 لینک اول پای راست (لگن)

r_7 لینک آخر پای راست (پنجه)

s ناحیه تک تکیه گاهی

shl, shr به ترتیب شانه راست و شانه چپ

tl, tr به ترتیب پنجه راست و پنجه چپ

- [27] Q. Huang, K. Yokoi, S. Kajita, K. Kaneko, H. Arai, N. Koyachi, K. Tanie, Planning walking patterns for a biped robot, *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, Vol. 17, No. 3, pp. 280-289, 2001.
- [28] T. Sato, S. Sakaino, K. Ohnishi, Real-time walking trajectory generation method with three-mass models at constant body height for three-dimensional biped robots, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Vol. 58, No. 2, pp. 376-383, 2011.
- [29] H. A. Park, M. A. Ali, C. G. Lee, Closed-form inverse kinematic position solution for humanoid robots, *International Journal of Humanoid Robotics*, Vol. 9, No. 03, 2012.
- [30] S. Lohmeier, *Design and realization of a humanoid robot for fast and autonomous bipedal locomotion*, Thesis, München, Techn. Univ., Diss., 2010.
- [22] M. Khadiv, S. A. Moosavian, A Low Friction Demanding Approach in Gait Planning for Humanoid Robots During 3D Manoeuvres, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, No. 1, pp. 47-60, 2014.
- [23] H. Baruh, *Analytical dynamics*: WCB/McGraw-Hill Boston, 1999.
- [24] M. B. Popovic, A. Goswami, H. Herr, Ground reference points in legged locomotion: Definitions, biological trajectories and control implications, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 24, No. 12, pp. 1013-1032, 2005.
- [25] M. Vukobratović, B. Borovac, Zero-moment point—thirty five years of its life, *International Journal of Humanoid Robotics*, Vol. 1, No. 01, pp. 157-173, 2004.
- [26] M. Ezati, *Optimal Gait Planning on Stairs & Flat Terrain Using Redundant Active Toe Joints in Biped Robot*, Master of Science Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, 2015. (In Persian)