مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1394، دوره 15، شماره 6، ص‌ص 115-122

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

شبیه‌سازی تقطیر بخار بر روی صفحه تخت با استفاده از روش لتیس بولتزمن

مجتبی عباسی حطانی[1]، محمد حسن رحیمیان[2]*

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، کدپستی 1437834411، rahimyan@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 بهمن 1393

پذیرش: 29 اسفند 1393

ارائه در سایت: 01 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:

تقطیر

روش بولتزمن شبکه ای

مدل لی

چکیده

در این مقاله، تقطیر بخار و رشد کردن قطره روی دیواره سرد افقی و همچنین افتادن قطره از روی صفحه عمودی شبیه‌سازی شده است. روش بکار رفته روش بولتزمن شبکه‌ای و مدل مورد استفاده مدل لی است که در نسبت‌های چگالی و ویسکوزیته زیاد پایدار است. این روش همراه با حل معادله دما و اضافه کردن یک عبارت چشمه تغییر فاز به معادله اصلی لی، مورد استفاده قرار گرفته است. مدل لی بر فرضیات کان-هیلیارد و فرض تراکم ناپذیری جریان استوار است. در تحقیق حاضر به علت وجود تغییر فاز شرط دیورژانس آزاد میدان سرعت برقرار نخواهد بود. حل میدان دما که با استفاده از روش اسکالر منفعل صورت گرفته از حل میدان جریان جداست و فرض بوزینسک باعث تأثیرپذیری میدان جریان از میدان دما می‌شود. شبیه‌سازی به صورت دو بعدی می‌باشد و از مدل D2Q9 استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شبکه‌بندی‌های مختلف مقایسه شده است. در این مقاله اثر جاذبه، زاویه تماس تعادلی قطره و دیواره و دمای سرد دیواره بر افزایش ضخامت قطره و همچنین قانون بقای جرم بررسی شده است. در انتها میدان جریان برای تکرار های مختلف تحلیل و خطوط جریان رسم شده است. مزیت این شبیه‌سازی، تقطیر به روش لی در نسبت چگالی بالا است که در این مقاله نسبت چگالی 25 دارای جواب قابل قبولی است.

Simulation of steam condensation on the plate by LBM method

Mojtaba Abbasi Hatani, Mohammad Hasan Rahimian*

University of Tehran, Tehran, Iran Department of Mechanical Engineering,
* P.O.B.1437834411 Tehran, Iran, rahimyan@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 February 2015
Accepted 20 March 2015
Available Online 21 April 2015

Keywords:
Condensation
lattice Boltzmann Method
Lee's Model

ABSTRACT

In this paper, based on lattice-Boltzmann method (LBM), the steam condensation and growth of a droplet on the horizontal cold wall, falling down on vertical wall has been simulated. The Lee's LBM model which is stable in the high density and viscosity ratios is used. This method is accompanied by solving the temperature equation and adding a phase change source term. The Lee model is based on Cahn-Hilliard theory which is assumed to be incompressible flow and therefore the velocities of the flow are divergence-free. When phase change occurs this condition will not be satisfied. A phase change source term is added on the interface of gas and liquid phase. Solution of temperature field in a passive scalar method of solving the flow field is separated and Boussinesq assumption would be influence the flow field of the temperature field. Density ratio of 25, which is the density ratio of steam and water is considered in this paper. The model is extended to two dimensions (D2Q9) to simulate droplet condensation. The simulation results are compared in various grids. The effects of gravitational acceleration, equilibrium contact angle, the cold wall and also the mass conservation, have been investigated separately. Finally the stream field for the different time step has been analyzed.

1- مقدمه

یکی از حالت‌های مهم انتقال حرارت تقطیر است. تقطیر فیلمی یا قطره‌ای دارای مکانیزم پیچیده‌ای است. پیچیدگی آن به این علت است که این فرایند شامل تغییر فاز، تشکیل قطره اولیه، رشد و ریزش آن می‌باشد. در قرن اخیر تحقیقات تجربی و تحلیلی گسترده‌ای در این زمینه انجام شده است.

از اولین محققانی که در باره شبیه‌سازی تقطیر فعالیت کرده‌اند ناسلت بود. در سال 1916 تقطیر لایه‌ای نازک بر روی یک صفحه تخت عمودی و یک سیلندر را که داخل بخار اشباع قرار داشت ناسلت به صورت تحلیلی پیش‌بینی کرد [1]. از آنجا که نظریه ناسلت در فرض اساسی‌اش دارای محدودیت بود، محققان سعی کردند مدل بهتری ارائه بدهند. شکریلیدز و گوملاری [2] تقطیر جریان بخار با در نظر گرفتن برش لایه‌ای را بررسی کردند و متوجه شدند که تغییر فاز تحت تأثیر لایه برشی است. فوجی و همکارن [3،4] روش تقریبی برای حل معادلات لایه مرزی دو فاز برای تقطیر لایه‌ای آرام جریان بخار بر روی صفحه عمودی [3] و سیلندر افقی پیشنهاد دادند [4]، که نتایج آنها تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی داشت. گدیس [5] معادلات مرزی دوفاز مایع و بخار را برای جریان عمودی بر روی یک لوله برای تقطیر فیلمی آرام با استفاده از بسط سری‌ها حل کرد. رز [6] همچنین تأثیر گرادیان فشار را در تقطیر لایه‌ای بر روی یک لوله بررسی کرد. در این مدل لایه برشی با مدل بهبود یافته شکریلیدز و گوملاری [3] تقریب زده شده بود، همچنین از مدل جریان پتانسیل نیز استفاده کردند. پس از آن به

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. A. Hatani, M. H. Rahimian, Simulation of steam condensation on the plate by LBM method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 6, pp. 115-122, 2015 (In Persian)

منظور طراحی سیستم‌های مهندسی مثل نیروگاه‌ها، مبدل‌های حرارتی، تهویه و مسائل هوا فضا اثرات بیشتری از تقطیر لایه‌ای بررسی شد. از جمله موضوع تغییرات دمای سطح [7-9]، اضافه شدن جریان آشفته [10،11]، در نظر گرفتن مکش دیواره [12-14] و غیره بررسی شد.

در گذشته بیشتر محققان تمرکز زیادی بر روی بخار اشباع داشتند و تحقیق کمتری درباره بخار مافوق گرم شده بود. مینکویز و اسپرو [15،16]

شانگ و وانگ [17] تقطیر لایه آرام بخار مافوق گرم بر روی صفحه عمودی هم‌دما را بررسی کردند و یک رابطه ساده برای پیش‌بینی گرادیان دما بی بعد را پیشنهاد دادند. یانگ [18] و هسو [19] مدل لایه مرزی تک فاز را بدون در نظر گرفتن نیروی شناوری، بخصوص تقطیر فیلمی در انتقال حرارت آزاد را توسعه دادند.

در سال‌های اخیر، نشان داده شده است که روش بولتزمن شبکه‌ای می‌تواند سیستم‌های سیالاتی پیچیده را مدل‌سازی کند. اخیراً لی [20] طرح چند فازی بولتزمن شبکه‌ای بر مبنای تئوری فصل مشترک پخش شونده کان-هیلیارد را مطرح کرده است که بر بیشتر محدودیت‌های مدل‌های لتیس بولتزمن چند فازی قبلی، فائق آمده است. در نتیجه استفاده از شکل پتانسیلی نیروی بین مولکولی برای سیال غیر ایده‌آل و جداسازی ایزوتروپیک فشرده‌ای عبارت نیرو، جریان جعلی (غیر واقعی) تا حد خطای گرد کردن کاهش پیدا کرد و حل‌های پایدار برای نسبت چگالی‌های تا 1000 : 1 برای اعداد ماخ کوچک بدست آمد.

صفری و همکاران [21] روش دو سیالی لی را برای شبیه‌سازی پدیده تغییر فاز حرارتی توسعه دادند. بدین صورت که هر دو فاز مایع-گاز تراکم پذیر فرض و فرایند تغییر فاز با یک عبارت چشمه مناسب در فصل مشترک مدل شد. ابتدا بسط معادله کلاسیک همرفت کان هیلیارد در حضور تغییر فاز تشریح و سپس این معادله تکمیلی بهبود یافته در چارچوب لتیس بولتزمن چند فازی لی به کار گرفته شد. آنها مدل توسعه یافته را برای مسأله استفان یک بعدی با نسبت چگالی‌های مختلف تا 1000 : 1 به کار گرفتند که با موفقیت مورد تأیید قرار گرفت. همچنین تبخیر قطره دو بعدی را نیز به خوبی شبیه‌سازی نمودند.

در این تحقیق برای بررسی تقطیر از روش صفری و همکاران استفاده شده است. ولی با توجه به اینکه صفری و همکاران فقط تبخیر یک قطره دو بعدی را مدل نمودند، در این مقاله به تقطیر بخار فوق اشباع بر روی یک صفحه سرد پرداخته شده است.

2- معادلات حاکم

2-1- تعمیم معادله کان - هیلیارد

اگر یک سیستم دو سیالی تراکم ناپذیر و مخلوط نشدنی با چگالی مختلف (ρ_l چگالی فاز مایع و ρ_g چگالی فاز گاز) در نظر گرفته شود، معادله پیوستگی برای جزء i ام را می‌توان به صورت معادله (1) نوشت:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial t} + \nabla \cdot n_i = \pm \dot{m}''' \quad , \quad (i = l, g) \tag{1}$$

که $\tilde{\rho}_i$ چگالی موضعی، n_i دبی جرمی (بر واحد حجم) جزء i ام و $\dot{m}'''$ نشان دهنده چشمه یا چاه حجمی به دلیل تغییر فاز است. در ناحیه بالک[1] جریان جرم تنها به صورت توده‌ای[2] بوده بنابراین $n_i = \tilde{\rho}_i u$ که u سرعت متوسط توده سیال است. در ناحیه فصل مشترک[3]، یک جریان پخشی به دلیل تغییر ترکیب بین فازهای مختلف به وجود می‌آید. این جریان جرمی پخشی به صورت $-\rho_i j_i$ نشان داده می‌شود که j_i نرخ شار حجمی پخشی است. بنابراین دبی جرمی کل جزء i ام برابر خواهد بود با:

$$n_\mathrm{i} = \tilde{\rho}_i u - \rho_i j_i \tag{2}$$

با جایگذاری معادله (1) در معادله (2) و با تعریف نسبت ترکیب C ($C = \tilde{\rho}_l/\rho_l$) معادله (1) به معادلات (3) تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (uC) - \nabla j_l = -\frac{\dot{m}'''}{\rho_l} \quad \text{برای فاز مایع ،}$$
$$\frac{\partial (1-C)}{\partial t} + \nabla \cdot (u(1-C)) - \nabla \cdot j_g = -\frac{\dot{m}'''}{\rho_g} \quad \text{برای فاز گاز ،} \tag{3}$$

اگر نرخ شار پخشی فقط به نسبت ترکیب مرتبط باشد: $j_l = -j_g = j$، بنابراین دیورژانس میدان سرعت از معادلات (1) و (2) به صورت معادله (4) بدست می‌آید [21]:

$$\nabla \cdot u = \dot{m}'''\left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l}\right) \tag{4}$$

توجه شود که در غیاب هر گونه تغییر فاز، چشمه حجمی نداشته و شرط دیورژانس آزاد[4] میدان سرعت ارضا می‌شود. در معادله جابه جایی کان-هیلیارد، نرخ نفوذ سیال متناسب با گرادیان پتانسیل شیمیایی در نظر گرفته می‌شود [22]:

$$j = -M\nabla\mu \tag{5}$$

در رابطه فوق $M > 0$ ضریب تحرک[5] نام دارد. در تحقیق حاضر یک M ثابت در نظر گرفته شده و انرژی از طریق نفوذ توده، مینیمم می‌شود. از طرفی کان هیلیارد مقدار انرژی سیستم دو سیالی را به صورت معادله (6) پیشنهاد کرده‌اند:

$$E_\mathrm{mix}(C, \nabla C) = E_0\ (C) + \frac{k}{2}|\nabla C|^2 \tag{6}$$

که در رابطه فوق k پارامتر گرادیان[6] و $E_0(\mathrm{C})$ انرژی توده سیال است که به صورت معادله (7) محاسبه می‌شود.

$$E_0(\mathrm{C}) \approx \beta C^2 (C-1)^2 \tag{7}$$

که β مقدار ثابتی است ($\beta = 3\sigma$) و M=.02/ β [21]. با مشتق‌گیری از عبارت $E_0(C)$ متغیری تحت عنوان پتانسیل شیمیایی بدست می‌آید:

$$\mu_0 = \frac{\partial E_0}{\partial C} \tag{8}$$

منحنی تعادل با به حداقل رسیدن انرژی تعیین می‌شود و در یک بعد $j = M\nabla\mu$ می‌شود. $\mu = \mu_0 - k\nabla^2 C = const$ طبق فرضیات کان-هیلیارد [22] و روابط مربوط به انرژی اختلاط، انرژی بالک و پتانسیل شیمیایی که اشاره شد، معادله انتقال نسبت ترکیب (C) حاکم بر سیستم دو سیالی به شکل معادله (9) در می‌آید:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (uC) = \nabla \cdot (M\nabla\mu) - \frac{\dot{m}'''}{\rho_l} \tag{9}$$

با توجه به اینکه $\dot{m}'''$ ناشی از میزان انتقال حرارت است لذا محاسبه آن در قسمت چشمه حجمی توضیح داده خواهد شد.

2-2- معادلات لتیس بولتزمن برای میدان جریان

فرم گسسته معادله بولتزمن برای پوشش معادلات انتقال جرم و مومنتم در سیستمی شامل دو سیال غیر قابل تراکم به صورت رابطه (10) نوشته می‌شود [22]:

1- Bulk Region
2- Advection
3- Interfacial Region
4- Divergence-Free Condition
5- Mobility
6- Gradient

$$\frac{Df_\alpha}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + e_\alpha \cdot \nabla\right) f_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\left(f_\alpha - f_\alpha^{eq}\right) + \frac{1}{c_s^2}(e_\alpha - u)\cdot F\Gamma_\alpha \qquad (10)$$

در رابطه فوق f_α تابع توزیع، e_α سرعت میکروسکوپی ذره در جهت α، u سرعت ماکروسکوپیک جریان، c_s سرعت صوت، λ زمان رها سازی، f_α^{eq} تابع توزیع تعادلی و $\Gamma_\alpha(u) = f_\alpha^{eq}/\rho$ می‌باشد. f_α^{eq} نیز طبق رابطه (11) محاسبه می‌شود.

$$f_\alpha^{eq} = w_\alpha \rho\left[1 + \frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_\alpha\cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{(u\cdot u)}{2c_s^2}\right] \qquad (11)$$

که w_a ضرایب وزنی است. مقدار F که نشان دهنده نیرو است با در نظر گرفتن تأثیرات گاز ایده‌آل و به فرم فشاری در معادله (10) آمده است [23]:

$$F = \nabla(\rho c_s^2) - \nabla p_0 + \rho k \nabla\nabla^2\rho \qquad (12)$$

ترم ρc_s^2 مقدار فشار گاز ایده‌آل، p_0 فشار ترمودینامیکی و ترم سوم اثرات کشش سطحی است. با استفاده از این روابط جریان‌های پارازیتی در سطح فصل مشترک ایجاد می‌شود که آنها ناشی از عدم تعادل بین گرادیان فشار ترمودینامیکی (∇p_0) و ترم کشش سطحی ($\rho k\nabla\nabla^2\rho$) به علت خطای برشی است. لی و همکاران نشان دادند که خطای برشی و در نتیجه جریان‌های پارازیتی را با تغییر معادله (12) به فرم پتانسیلی با استفاده از ماهیت ترمودینامیکی یعنی $\nabla p_0 = \rho\nabla\mu_0(\rho)$ می‌توان حذف کرد [23] که μ_0 پتانسیل شیمیایی است. برای سیالات دو فازی با جایگزینی پارامترهایی از چگالی به فاز و یا نسبت ترکیب (C) و در نظر گرفتن انرژی آزاد یک سیستم بدست می‌آید. همچنین برای اعمال تراکم ناپذیری فشار هیدرودینامیکی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین معادله نیرو به صورت معادله (13) می‌باشد:

$$F = \nabla(\rho c_s^2) - \nabla p_h - C\nabla(\mu_0(C) - k\nabla^2 C) = \nabla(\rho c_s^2) - \nabla p_h - C\nabla\mu(C) \qquad (13)$$

که p_h فشار هیدرودینامیکی و p_0 فشار ترمودینامیکی است. فشار در معادله مومنتم از مجموع فشار ترمودینامیکی (p_0)، فشار هیدرودینامیکی (p_1) و فشار به علت انحنا در فصل مشترک ($-kC\nabla^2C + \frac{k}{2}|\nabla C|^2$) بدست می‌آید، پس فشار P به صورت $P = p_0 + p_h - kC\nabla^2C + \frac{k}{2}|\nabla C|^2$ می‌باشد.

رابطه (10) معادله بولتزمن شبکه‌ای گسسته برای انتقال جرم و مومنتم است که باید به معادله انتقال مومنتم و فشار تبدیل شود. هی و همکاران [24] برای اولین بار از متغیری برای محاسبه فشار استفاده نمودند. در عین حال آن‌ها تمایزی میان فشار هیدرودینامیکی و ترمودینامیکی قائل نشدند. لی و همکاران با تعریف متغییر دیگری به شکل زیر مدل خود را ارائه نمودند.

$$g_\alpha = f_\alpha c_s^2 + (p_h - \rho c_s^2)\Gamma_\alpha(0) \qquad (14)$$

معادله گسسته بولتزمن برای تابع توزیع g_α با گرفتن مشتق کلی از معادله (14) به صورت معادله (15) به دست می‌آید:

$$\frac{Dg_\alpha}{Dt} = c_s^2\frac{Df_\alpha}{Dt} + \left(\frac{Dp_h}{Dt} - c_s^2\frac{D\rho}{Dt}\right)\Gamma_0(0) \qquad (15)$$

لی [22] با فرض شرط دیورژانس آزاد برای میدان سرعت و با استفاده از معادله پیوستگی (یعنی $\partial_t(\rho) + \nabla.(\rho u) = 0$)، مشتقات کلی معادله (15) را بدین صورت نوشت:

$$\frac{D\rho}{Dt} = (e_\alpha - u)\cdot\nabla\rho \qquad (16)$$

$$\frac{Dp_h}{Dt} = (e_\alpha - u)\cdot\nabla p_h \qquad (17)$$

اگر تغییر فاز وجود داشته باشد، دیگر شرط دیورژانس آزاد برای میدان سرعت برقرار نخواهد بود و معادلات (16) و (17) باید تغییر کنند. از آنجا که میزان تقطیر بسیار کم است برای آسانی فرض می‌شود که تغییر فاز بر روی تراکم ناپذیری دو فاز و فشار هیدرودینامیک تأثیری ندارد [21] و با ترکیب معادله پیوستگی و معادله (4)، مشتق کلی چگالی به صورت معادله (18) محاسبه می‌شود:

$$\frac{D\rho}{Dt} = (e_\alpha - u)\cdot\nabla\rho - \rho\nabla\cdot u = (e_\alpha-u)\cdot\nabla\rho - \dot{m}'''\rho\left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l}\right) \qquad (18)$$

در نهایت فرم گسسته معادله بولتزمن برای انتقال مومنتم و فشار به صورت معادله (19) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + e_\alpha\cdot\nabla g_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\left(g_\alpha - g_\alpha^{eq}\right) + (e_\alpha - u)\cdot\left[\nabla(\rho c_s^2)\left(\Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha(0)\right) - C\nabla(\mu)\Gamma_\alpha\right] + \rho c_s^2 \dot{m}'''\rho\left(\frac{1}{\rho_g}-\frac{1}{\rho_l}\right)\Gamma_\alpha(0) \qquad (19)$$

تابع توزیع تعادلی g_α^{eq} نیز به صورت معادله (20) تعریف می‌شود.

$$g_\alpha^{eq} = f_\alpha^{eq}c_s^2 + (p_h - \rho c_s^2)\Gamma_\alpha(0) = w_a\left[p_h + \rho c_s^2\left(\frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_\alpha\cdot u)^2}{2c_s^4} - \frac{(u\cdot u)}{2c_s^2}\right)\right] \qquad (20)$$

در بدست آوردن معادله (19)، از گرادیان فشار هیدرودینامیک صرف نظر شده است. به این دلیل که در جریان‌های با عدد ماخ کوچک فشار هیدرودینامیک به صورت $p_h = O(Ma^2)$ فرض می‌شود بنابراین از جمله $(e_\alpha - u)\cdot\nabla p_h\left(\Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha(0)\right) \approx O(Ma^3)$ می‌توان صرف نظر کرد. با انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای معادله (19) در امتداد مشخصه‌ها (سرعت‌های جهتی e_α) با گام زمانی δt، برای محاسبه معادله بولتزمن شبکه‌ای، می‌توان رابطه (21) را نوشت:

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha(x + e_\alpha\delta t, t+\delta t) - \bar{g}_\alpha(x,t) ={}& -\tfrac{1}{\tau+0.5}\left(\bar{g}_\alpha - \bar{g}_\alpha^{eq}\right)|_{(x,t)} + \delta t(e_\alpha - u)\\ &\cdot\left[\nabla(\rho c_s^2)\left(\Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha(0)\right) - C\nabla\mu\Gamma_\alpha\right]|_{(x,t)}\\ &+ \frac{\delta t}{2}\rho c_s^2\dot{m}'''\rho\left(\frac{1}{\rho_g}-\frac{1}{\rho_l}\right)\Gamma_\alpha(0)|_{(x,t)}\\ &+ \frac{\delta t}{2}\rho c_s^2\dot{m}'''\rho\left(\frac{1}{\rho_g}-\frac{1}{\rho_l}\right)\Gamma_\alpha(0)|_{(x+e_\alpha\delta e, t+\delta t)}\end{aligned} \qquad (21)$$

در رابطه (21)، می‌توان روابط (23،22) را نوشت:

$$\bar{g}_\alpha = g_\alpha + \frac{1}{2\tau}\left(g_\alpha - g_\alpha^{eq}\right) - \frac{\delta t}{2}(e_\alpha - u)\cdot\left[\nabla(\rho c_s^2)\left(\Gamma_\alpha - \Gamma_\alpha(0)\right) - C\nabla(\mu)\Gamma_\alpha\right] \qquad (22)$$

$$\bar{g}_\alpha^{eq} = g_\alpha^{eq} - \frac{\delta t}{2}(e_\alpha-u)\cdot\left[\nabla(\rho c_s^2)\left(\Gamma_\alpha(u) - \Gamma_\alpha(0)\right) - C\nabla(\mu)\Gamma_\alpha(u)\right] \qquad (23)$$

که τ زمان رها سازی بی بعد بوده و به صورت $\upsilon = \tau c_s^2\delta t$ به ویسکوزیته سینماتیکی مرتبط می‌شود. در تابع توزیع جدید، برای حل معادله کان-هیلیارد تعمیم یافته، نیاز است که ساده‌ترین انتخاب برای تابع توزیع ذره و تابع توزیع تعادلی به صورت $h_\alpha = (C/\rho)f_\alpha$ و $h_\alpha^{eq} = (C/\rho)f_\alpha^{eq}$ باشد. معادله گسسته بولتزمن برای انتقال نسبت ترکیب (C) با گرفتن مشتق کلی از h_α به دست می‌آید. از معادلات (22) و (23) مشتق کلی نسبت ترکیب به صورت معادله (24) نوشته می‌شود:

$$\frac{DC}{Dt} = (e_\alpha-u)\cdot\nabla C - C\nabla\cdot u + \nabla\cdot(M\nabla\mu) - \frac{\dot{m}'''}{\rho_l} \qquad (24)$$

معادله گسسته بولتزمن برای h_α برابر خواهد شد با:

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial t} + e_\alpha\cdot\nabla h_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\left(h_\alpha - h_\alpha^{eq}\right)$$

$$+(e_\alpha-u)\cdot\left[\nabla C-\frac{C}{\rho c_s^2}(\nabla p_h+C\nabla\mu)\right]\Gamma_\alpha + \left(M\nabla^2\mu-\frac{\dot{m}'''}{\rho_l}\right)\Gamma_\alpha \qquad (25)$$

با انتگرال گیری ذوزنقه ای در امتداد مشخصه ها(سرعت های جهتی e_α) از معادله (25) با گام زمانی δt، معادله بولتزمن شبکه‌ای به صورت معادله (26) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\bar{h}_\alpha(x+e_\alpha\delta t,t+\delta t)-\bar{h}_\alpha(x,t) &= \\ -\tfrac{1}{\tau+0.5}\left(\bar{h}_\alpha-\bar{h}_\alpha^{\mathrm{eq}}\right)|_{(x,t)}\,\delta &+ t(e_\alpha-u) \\ \cdot\left[\nabla(\rho c_s^2)\left(\Gamma_\alpha-\Gamma_\alpha(0)\right)-C\nabla(\mu)\Gamma_\alpha\right]|_{(x,t)} \\ +\frac{\delta t}{2}\left(M\nabla^2\mu-\frac{\dot{m}'''}{\rho_l}\right)\Gamma_\alpha|_{(x,t)} \\ +\frac{\delta t}{2}\left(M\nabla^2\mu-\frac{\dot{m}'''}{\rho_l}\right)\Gamma_\alpha|_{(x+e_\alpha\delta t,t)}\end{aligned} \qquad (26)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\bar{h}_\alpha &= h_\alpha+\frac{1}{2\tau}\left(h_\alpha-h_\alpha^{\mathrm{eq}}\right)-\frac{\delta t}{2}(e_\alpha-u) \\ &\cdot\left[\nabla C-\frac{C}{\rho c_s^2}(\nabla p_h+C\nabla\mu)\right]\Gamma_\alpha|_{(x,t)}\end{aligned} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}\bar{h}_\alpha^{\mathrm{eq}} &= h_\alpha^{\mathrm{eq}}-\frac{\delta t}{2}(e_\alpha-u) \\ &\cdot\left[\nabla C-\frac{C}{\rho c_s^2}(\nabla p_h+C\nabla\mu)\right]\Gamma_\alpha|_{(x,t)}\end{aligned} \qquad (28)$$

عبارات گرادیان و لاپلاسین در معادلات حاکم مطابق با پیشنهادات لی در مدل D2Q9 به شکل (29) و (30) گسسته شده‌اند:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\sum_{\alpha\neq 0}\frac{w_\alpha e_\alpha\cdot\,\hat{\imath}[\varphi(x+e_\alpha\delta t)-\varphi(x-e_\alpha\delta t)]}{2c_s^2\delta t} \qquad (29)$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_i\partial x_i}=\sum_{\alpha\neq 0}\frac{w_\alpha[\varphi(x+e_\alpha\delta t)-2\varphi(x)+\varphi(x-e_\alpha\delta t)]}{c_s^2\delta t^2} \qquad (30)$$

که $\hat{\imath}$ بردار یکه در جهت محور i است.

در نهایت مقادیر کمیت‌های ماکروسکوپیک به صورت روابط (33-31) قابل محاسبه خواهد بود [20]:

$$C=\sum_\alpha \bar{h}_\alpha \qquad (31)$$

$$p_h=\sum_\alpha \bar{g}_\alpha+\frac{\delta t}{2}u\cdot\nabla(\rho c_s^2) \qquad (32)$$

$$\rho u=\frac{1}{c_s^2}\sum_\alpha e_\alpha\bar{g}_\alpha-\frac{\delta t}{2}C\nabla\mu \qquad (33)$$

2-3- معادلات لتیس بولتزمن برای میدان دما (اسکالر منفعل)

در صورتی که از تأثیرات کار و اتلاف حرارتی لزجت صرف‌نظر شود، معادله حاکم بر میدان دما به صورت معادله (34)خواهد بود:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u.\nabla T=\nabla.(\alpha\nabla T)+\psi \qquad (34)$$

که در آن u سرعت ماکروسکوپیک، α ضریب نفوذ حرارتی و ψ ترم مربوط به چشمه حرارتی است، که در این شبیه‌سازی چشمه حرارتی وجود ندارد. معادله (34) با استفاده از یک تابع توزیع قابل حل است:

$$\begin{aligned}S_\alpha(x+e_\alpha\delta t,t+\delta t)-S_\alpha(x,t) &= \\ \frac{1}{\tau_\alpha}\left(S_\alpha-S_\alpha^{\mathrm{eq}}\right)|_{(x,t)}\end{aligned} \qquad (35)$$

که تابع توزیع تعادلی به شکل معادله (36) است:

$$S_\alpha^{\mathrm{eq}}=Tw_\alpha[1+\frac{e_\alpha\cdot u}{c_s^2}+\frac{(e_\alpha\cdot u)^2}{2c_s^4}+2\frac{u\cdot u}{c_s^2}] \qquad (36)$$

دما با در نظر گرفتن ممان مرتبه صفر تابع توزیع بالا (یعنی $T=\sum S_\alpha$) بدست می آید و همچنین ضریب نفوذ حرارتی α به صورت زیر با τ_T مرتبط می‌شود:

$$\alpha=c_s^2(\,\tau_T-0.5)\delta t \qquad (37)$$

توجه به این نکته لازم است که حل میدان دما در روش اسکالر منفعل از حل میدان جریان مستقل است. تنها عاملی که منجر به تأثیر پذیری میدان جریان از میدان دما می‌شود، فرض بوزینسک[1]است.

2-4- محاسبه چشمه حجمی به دلیل تغییر فاز

تقطیر را می‌توان انتقال مداوم بخاز از فاز میانی[2] به فاز مایع تفسیر کرد. با توجه به این مفهوم نرخ تقطیر به دما و چگالی گونه‌های مختلف بستگی دارد از این رو برای بررسی تقطیر بخار معمولا بخار در دمای اشباع فرض می‌شود. بنابراین گرمایی که فاز گازی به لایه مایع می‌دهد باعث تقطیر در فاز میانی می‌شود. در این تحقیق دمای فاز بخار برابر دمای اشباع و عامل تقطیر مقدار گرمای داده شده به فصل مشترک در نظرگرفته شده است. با اعمال تعادل انرژی برای فصل مشترک دبی جرمی تقطیر محلی بر واحد سطح $\dot{m}''$ به صورت رابطه (38) نوشته می‌شود:

$$\dot{m}''=\frac{K\nabla T}{h_{fg}}\cdot\hat{n} \qquad (38)$$

که h_{fg} گرمای نهان تقطیر، K رسانندگی و $\hat{n}$ بردار یکه عمود بر فصل مشترک است. معادله (38) نرخ تقطیر بر واحد سطح را محاسبه کرده و برای اعمال در معادله همرفت کان-هیلیارد باید آن را به شکل حجمی تبدیل کرد. مساحت هر سلول یا گره محاسباتی در سطح مشترک برای محاسبه چشمه یا چاه حجمی مورد نیاز می‌باشد. چون میدان فازی چارچوب LB مورد نظر از لحاظ فیزیکی یک مدل فصل مشترک پخشی[3] است، به جای یک فصل مشترک دقیق که تقطیر در آن صورت می‌گیرد، یک ناحیه تقطیر در نظر گرفته می‌شود که فاز بخار به طور پیوسته تقطیر می‌شود. با توجه به مفهوم بر گرفته از هاردت و وندرا[4] [25] یک خاصیت مهم گرادیان میدان کسر محلی این است که انتگرال آن روی ناحیه‌ای که شامل قسمتی از فاز مشترک می-باشد، مقدار مساحت محلی فصل مشترک را نشان می‌دهد. این مفهوم برای گرادیان میدان نسبت ترکیب نیز صادق است (یعنی $\iiint|\nabla C|dV=\iint dS$). با ضریب $\dot{m}''$ در محتوای محلی فصل مشترک (یعنی $|\nabla C|$) و یادآوری اینکه $\hat{n}=\nabla C/|\nabla C|$، چشمه جرم حجمی تقطیر به صورت معادله (39) بدست می‌آید:

$$\dot{m}'''=\frac{K\nabla T}{h_{fg}}\cdot\nabla C \qquad (39)$$

2-5- زاویه تماس

برای حل معادله (3) به همراه معادله (5) نیاز به دو شرط مرزی است. شرط عدم عبور جرم از دیواره به واسطه عدم تغییر پتانسیل شیمیایی در آن شرط معادله (40) را ایجاد می‌کند:

$$n\cdot\nabla\mu|_s=0 \qquad (40)$$

1- Boussinesq
2- Phase Interface
3- Diffude-Interface Modeling Approach
4- Hardt and Wondra

از آنجا که این شرط بر روی مرز پایین (دیوار) اعمال می‌شود، در هر گام زمانی به شکل زیر اعمال می‌شود. در رابطه (40) n بردار یکه عمود بر سطح جامد است که در مرز پایین در جهت محور y می‌باشد.

$$\mu(i,1) = \mu(i,2) \tag{41}$$

i شمارنده لتیس در جهت x است. شرط مرزی دیگر با مینیمم کردن انرژی کل سیستم بدست می‌آید که رابطه (42) توسط لی و همکارانش [22] برای شرط مرزی پارامتر نسبت ترکیب (C) پیشنهاد شده است:

$$n \cdot \nabla C|_s = \frac{\varphi_c}{k}(C_s - C_s^2) \tag{42}$$

همان‌طور که در نحوه اعمال شرط مرزی اول گفته شد، برای این شرط مرزی که همچنین روی مرز پایین اعمال می‌شود به شکل رابطه (43) عمل می‌شود:

$$c(i,1) = -[\frac{\varphi_c}{k}\left(c(i,1) - \left(c(i,1)\right)^2\right) - 4c(i,2) + c(i,3)]/3 \tag{43}$$

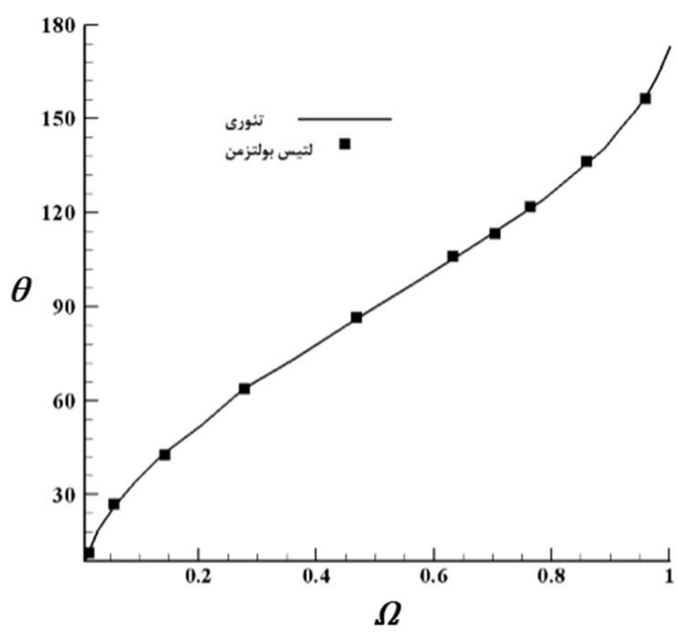
با تعریف جدید پارامتر بی بعد جدیدی تحت عنوان پتانسیل خیس شوندگی[1] به صورت $\Omega_c = \phi_c/\sqrt{2k\beta}$، طبق قانون یانگ زاویه تماس به فرم معادله (44) بدست می‌آید:

$$\cos\theta^{\mathrm{eq}} = \frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL}}{\sigma_{GL}} \tag{44}$$

که σ_{SG} و σ_{SL} به ترتیب کشش سطحی بین گاز با سطح جامد و کشش سطحی بین مایع با سطح جامد و σ_{GL} کشش سطحی گاز با مایع است.
بر طبق تحقیقات انجام شده توسط برایانت[2] [26] زاویه تماس برای حباب برطبق معادله (45) بدست می‌آید.

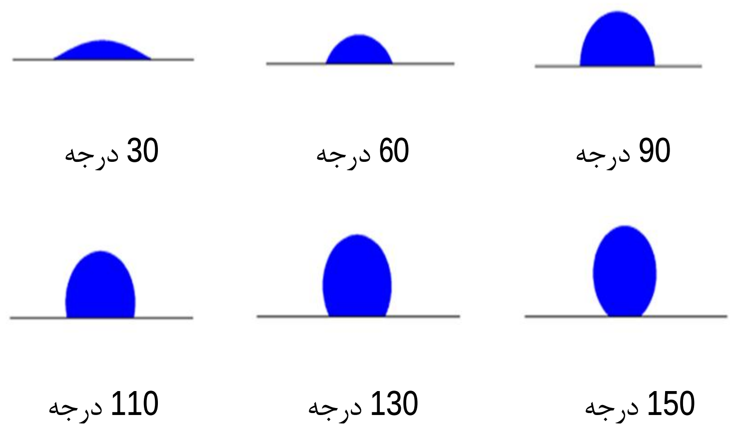
$$\cos\theta^{\mathrm{eq}} = \frac{(1+\Omega_c)^{\frac{3}{2}} - (1-\Omega_c)^{\frac{3}{2}}}{2} \tag{45}$$

در شکل 1، زاویه تماس تعادلی (برحسب درجه) بدست آمده بر حسب مقادیر مختلف پتانسیل خیس شوندگی، برای قطره رسم شده است که تطابق خوبی با معادله (44) دارد. قرار گیری قطره روی سطح جامد در شکل2، قابل مشاهده می‌باشد.



شکل 1 زاویه تماس تعادلی به ازای مقادیر مختلف پتانسیل خیس شوندگی

1- Wetting Potential
2- Briant

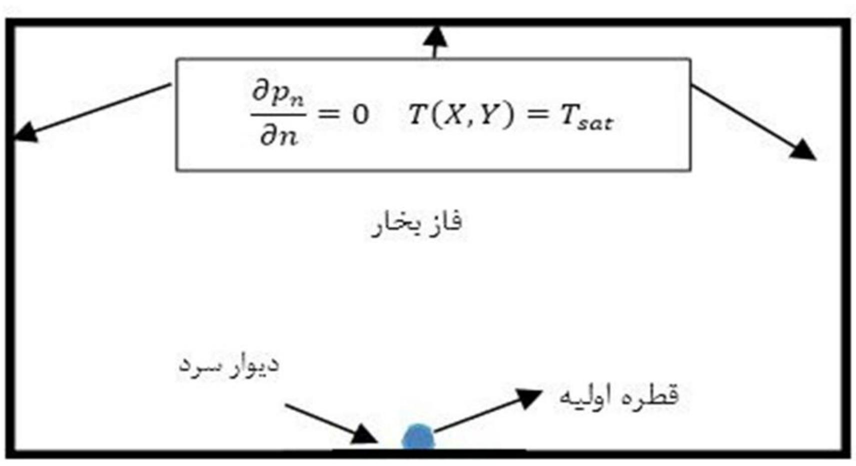


شکل 2 قرارگیری قطره روی سطح جامد

برای اندازه‌گیری زاویه تماس تعادلی بین قطره و دیوار جامد، قطره‌ای با قطر 25 واحد لتیس در میدان محاسباتی به ابعاد 80×140، به صورت مماس بر دیوار پایینی قرار داده شد. با در نظر گرفتن مقدار معینی پتانسیل خیس شوندگی و بعد از 20000 تکرار که میدان به حالت پایا در آمد، زاویه تعادلی محاسبه می‌شود [27].

3- نتایج و بحث‌ها

در این مقاله تقطیر بخار ساکن با استفاده از ساختار لتیس D2Q9 در دو بعد شبیه‌سازی شده است. عامل اصلی در ایجاد تقطیر گرادیان دما است. این گرادیان دما بخاطر قرار گرفتن بخار اشباع در بالای صفحه سرد به وجود می‌آید که صفحه یا دیواره دارای یک دمای ثابت می‌باشند. همان‌طور که در شکل 3، شماتیک مسأله نشان داده شده است، شرایط مرزی اطراف دامنه محاسباتی به دو نوع تقسیم می‌شود. مرز بالا و مرز های دو طرف به صورت ورودی در نظر گرفته شده‌اند و مرز پایین که همان صفحه تخت سرد ما را شامل می‌شود به صورت دیواره یا همان برگشت به عقب در نظر گرفته شده است. مرز ورودی با اعمال $\partial_{ph}/\partial_n = 0$ که n جهت عمود بر مرز است، اعمال شده است. نحوه اعمال شرط مرزی ورودی در پیوست آورده شده است. مقدار اولیه برای شروع حل مسئله به این ترتیب است که در لحظه اول بخار اشباع یکنواخت در دمای T_{sat} می‌باشد و صفحه تخت در دمایی کمتر از دمای بخار اشباع قرار دارد. در اینجا از یک لتیس 41×81 استفاده شده است. در ابتدا برای شروع تقطیر یک قطره به شعاع 3 واحد لتیس در وسط صفحه تخت قرار داده شده است. چگالی مایع $\rho_l = 1$ و چگالی بخار $\rho_g = 0.04$ در نظر گرفته شده است. اختلاف دما $\Delta T = T_{sat} - T_{wall}$ و گرمای نهان تقطیر h_{fg} با توجه به عدد بی بعد استفان در نظر گرفته شده‌اند. که در اینجا عدد بی بعد استفان st=0.055 می‌باشد.



شکل 3 شماتیک مسأله

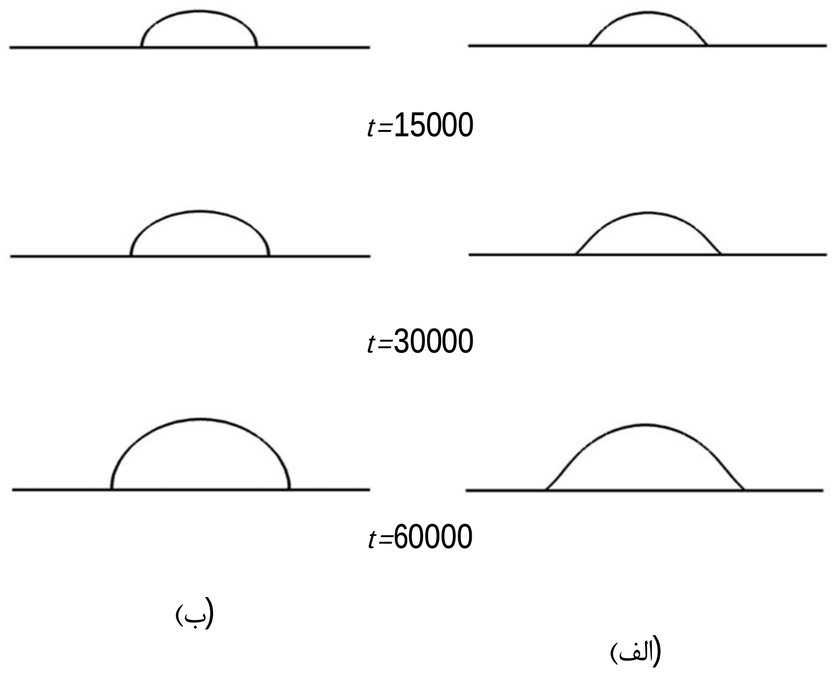
در تمام محاسبات نسبت چگالی 25 و کشش سطحی σ=0.001 در نظر گرفته شده است، مگر اینکه صراحتاً گفته شود. در شکل 4، نحوه رشد کردن قطره را در دو زاویه 60 و90 مشاهده می‌شود. اعداد بی بعد مهم در تغییر فاز و بخصوص در تقطیر عدد استفان و ارشمیدس هستند که به شکل روابط (46) تعریف می‌شوند:

$$\text{Ar} = \frac{\rho_l\sqrt{gL^3}}{\mu_l} \quad , \quad \text{st} = \frac{C_{pl}(T_{st} - T_{wall})}{h_{fg}} \tag{46}$$

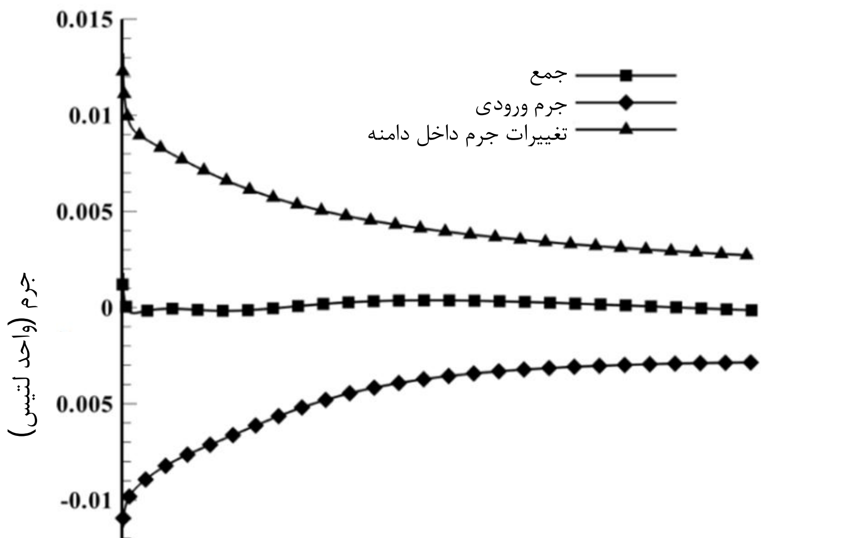
$\boldsymbol{C_{pl}}$ و $\boldsymbol{\rho_l}$ به ترتیب ظرفیت حرارتی و لزجت دینامیکی مایع هستند.

3-1- پایستگی جرم

یکی دیگر از آزمایش‌هایی که برای صحت کد نوشته شده انجام شده است پایستگی جرم می‌باشد. پایستگی جرم یکی از اساسی‌ترین معادلاتی است که در مکانیک سیالات محاسباتی باید برقرار باشد. در این جا به دامنه محاسباتی از طریق ورودی انتقال جرم صورت می‌گیرد. نرخ جریان ورودی ($\dot{m}$) از طریق ورودی باید با نرخ تغییر مقدار جرم در دامنه محاسباتی از لحاظ اندازه یکسان باشد، یعنی مجموع این دو باید صفر باشد تا پایستگی جرم برقرار شود، همان‌طور که در شکل 5، دیده می‌شود پایستگی جرم در شبیه‌سازی ما به خوبی ارضا شده است.



شکل 4 رشد قطره به ازای دو زاویه مختلف الف) $\theta=60$ و ب) $\theta=90$ درجه



شکل 5 پایستگی جرم در st=0.085 و $\theta=60$

3-2- تأثیر عدد استفان

برای بررسی اثر نهفته حرارت و اختلاف دما ($\Delta T = T_{\text{sat}} - T_{\text{wall}}$) بر روی تقطیر، مقدار رشد قطره نسبت به گام زمانی برای عدد استفان مختلف در شکل 6، رسم شده است. همان‌طور که از شکل دیده می شود، برای اعداد استفان بزرگتر رشد قطره بیشتر است، که قابل پیش بینی بود. همچنین با افزایش ضخامت قطره میزان تقطیر کاهش می‌یابد. این موضوع به علت مقاومت حرارتی که بین صفحه سرد و بخار اشباع ایجاد می‌شود، است. با افزایش این مقاومت حرارتی میزان تقطیر کاهش می‌یابد که از شیب نمودار شکل 6، مشخص است. برای افزایش عدد استفان دیگر اعداد بی بعد ثابت در نظر گرفته می‌شود و با افزایش اختلاف دما عدد استفان افزایش می‌یابد.

3-3- استقلال از شبکه

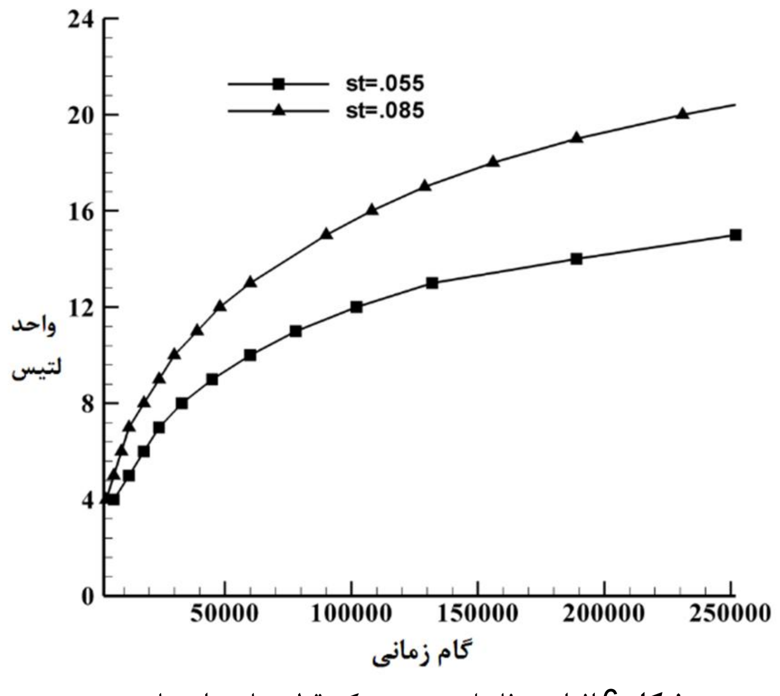
شبیه‌سازی در دو دامنه محاسباتی 41×81 و 81×161 انجام شده، و همان‌طور که از شکل 7، مشاهده می‌شود در محاسبات هیچ تفاوتی رخ نداد است. از آنجا که نتایج برای دو دامنه یکسان می‌باشد برای مقایسه، شکل ها به صورت جداگانه نمایش داده شده‌اند. در نتیجه این محاسبات مستقل از شبکه مورد استفاده می‌باشد. بنابراین برای صرفه‌جویی در زمان و حجم محاسبات از شبکه 41×81 استفاده شده است.

3-4- تأثیر عدد ارشمیدس

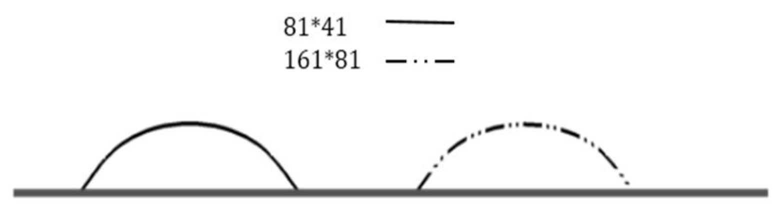
عدد ارشمیدس نسبت نیروی وزن به نیروی ویسکوزیته تعریف می‌شود. برای اعمال نیروی گرانش یا همان نیروی خارجی معادله (47) را به معادله (12) اضافه می‌شود:

$$F_g = \begin{cases} g(\rho_l - \rho_g) & , \quad \rho_l \neq 0 \\ 0 & , \quad \rho_l = 0 \end{cases} \tag{47}$$

که در آن g، ρ_l و ρ_g به ترتیب شتاب گرانش، چگالی مایع و چگالی بخار می‌باشد. برای دیدن اثر آن تمام اعداد بی بعد را ثابت در نظر گرفته و با افزایش



شکل 6 افزایش فاصله عمدی نوک قطره تا دیواره پایین

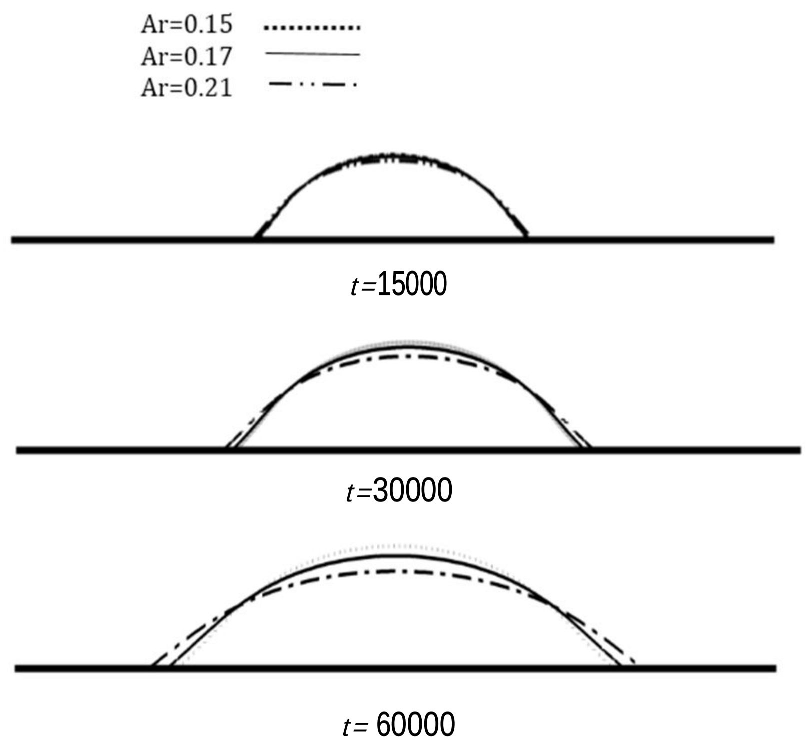


شکل7 استقلال از شبکه

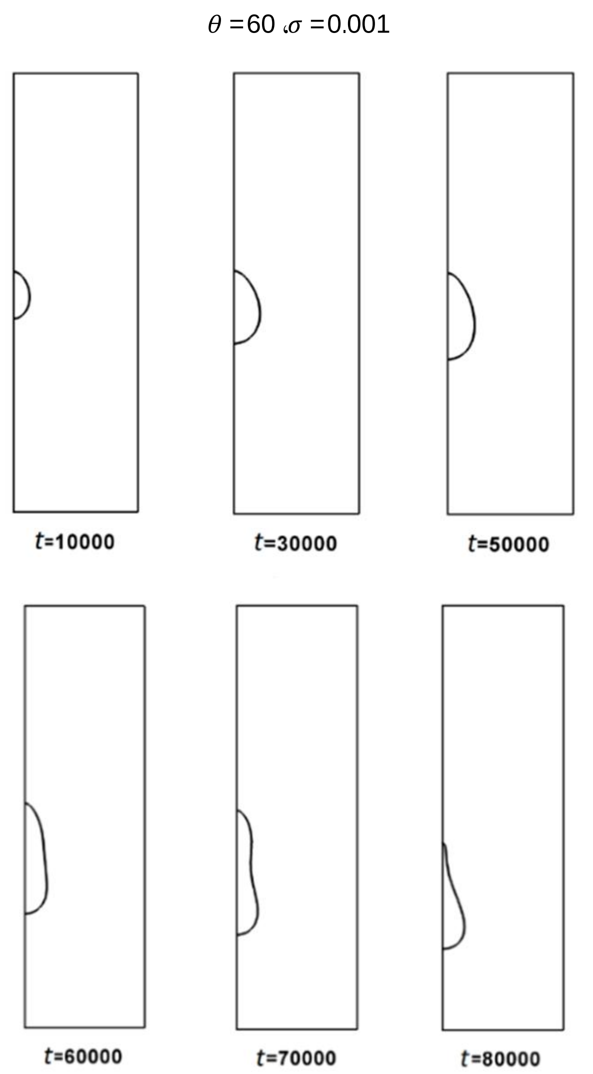
شتاب گرانش عدد ارشمیدس افزایش می‌یابد. همان‌طور که درشکل 8، دیده می‌شود با افزایش عدد ارشمیدس نیروی وزن افزایش یافته و بر نیروی ویسکوز غلبه می کند و باعث کشیده شدن قطره در طول دیواره می‌شود.

3-5- تقطیر روی صفحه عمودی

در این تقطیر روی صفحه تخت عمودی شبیه‌سازی شده است. همان‌طور که در شکل 9، مشاهده می‌شود، ابتدا قطره در حالت سکون تا t=30000 رشد می‌کند و بعد از اینکه حجم آن زیاد شد و بر اثر نیروی گرانش شروع به افتادن می‌کند. در اینجا از یک لتیس 141× 41 استفاده شده است.



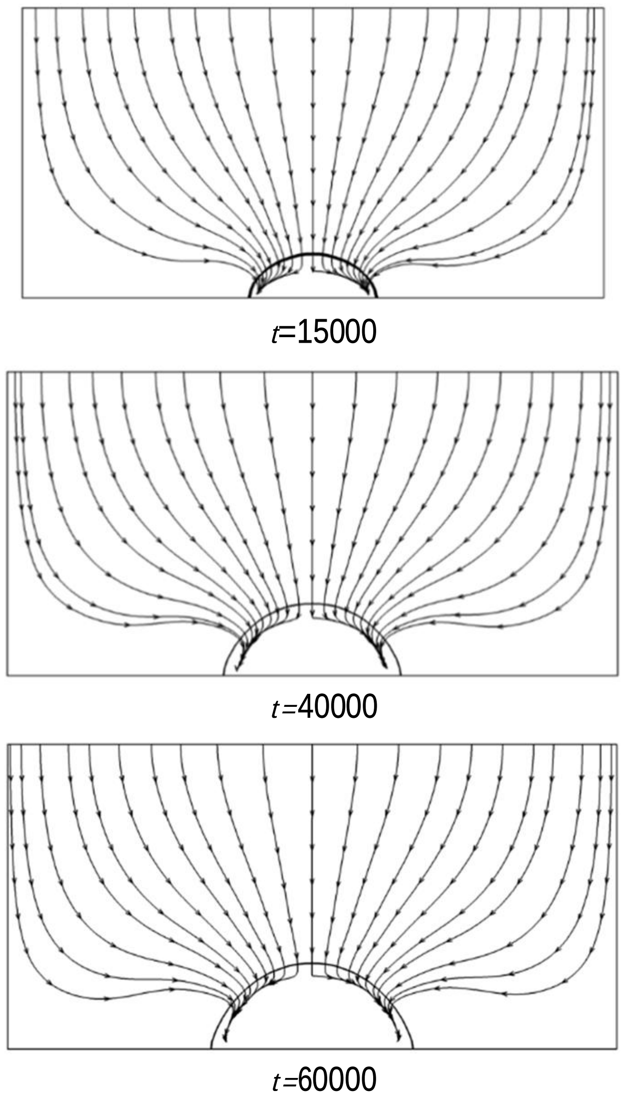
شکل8 اثر تغییرات عدد ارشمیدس بر روی رشد قطره به ازای st=0.085،



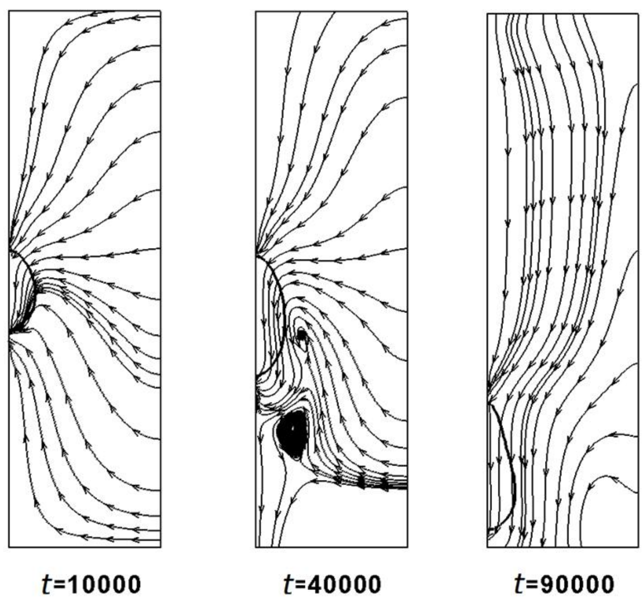
شکل 9 رشد و افتادن قطره از روی صفحه عمودی به ازای 0.001 =σ، 90= ϑ

3-6- میدان جریان

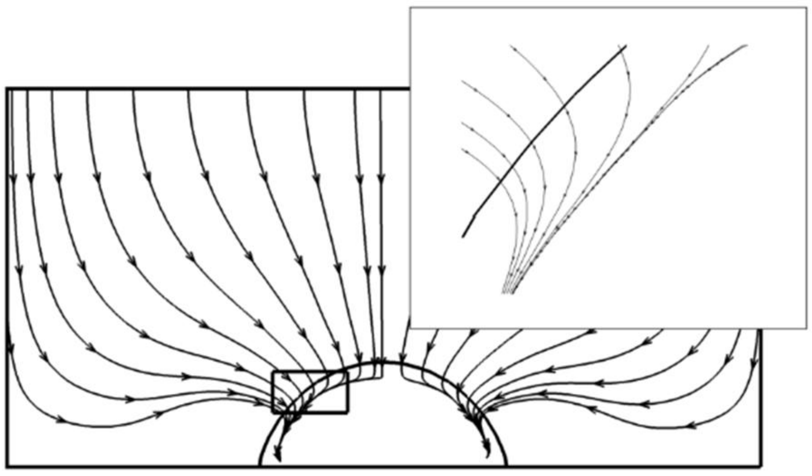
در شکل 10، خطوط جریان برای رشد قطره روی صفحه تخت افقی نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود خطوط جریان به سطح قطره وارد می‌شوند. با گذشت زمان این عمل تکرار می‌شود. در شکل 11، خطوط جریان برای تقطیر بخار بر روی صفحه عمودی آورده شده است. خطوط جریان ابتدا به نقطه فعال تقطیر همگرا شده و بعد از غلبه نیروی وزن بر قطره تشکیل شده و ریزش قطره خطوط جریان در جهت حرکت قطره قرار می‌گیرند. از آنجا که فاصله بین هر دو خط جریان نشان دهنده دبی جرمی عبوری است، این فاصله در فاز گاز به علت چگالی پایین، خیلی بیشتر از فاز مایع می‌باشد. خطوط جریان که وارد سطح قطره می‌شوند همدیگر را قطع نمی‌کنند و فقط فاصله بین آنها بسیار کم می‌شود که علت آن افزایش چگالی ناگهانی است. در شکل12، بزرگ نمایی خطوط جریان ورودی به سطح قطره دیده می‌شود. شکل نشان می‌دهد که خطوط جریان همدیگر را قطع نمی-کنند.



شکل10 خطوط جریان روی صفحه افقی به ازای 60 = θ



شکل 11 خطوط جریان روی صفحه عمودی



شکل12 بزرگنمایی قسمتی از خطوط جریان ورودی به سطح قطره

4- جمع‌بندی

در پژوهش حاضر، تقطیر و رشد قطره بر روی یک صفحه افقی سرد و افتادن قطره از روی صفحه عمودی با استفاده از روش بولتزمن شبکه‌ای شبیه‌سازی شده است. این شبیه‌سازی بر اساس مدل دو فازی لی که برای شبیه‌سازی در نسبت چگالی و ویسکوزیته بالا معرفی شده است به همراه مدل اسکالر منفعل و اضافه کردن ترم تغییر فاز به معادلات اساسی انجام شده است. در کارهای گذشته نسبت چگالی و ویسکوزیته یک در نظر گرفته شده است. در تحقیق حاضر تقطیر در نسبت چگالی و ویسکوزیته بالا شبیه‌سازی شده است ک این مزیت این تحقیق می‌باشد. در نتایج شبیه‌سازی برای دو عدد بی بعد بررسی شده و نتایج همبستگی خوبی با تغییرات این اعداد دارد و همچنین قانون پایستگی جرم نیز بررسی شد که کاملا جرم پایستار است.

5- پیوست

برای اعمال شرط $\partial P_h/\partial_n = 0$ روی مرز ورودی، فشار هیدرودینامیکی روی مرز بوسیله اختلاف محدود رو به عقب محاسبه می‌شود:

$$P_{h,b} = P_h(x_b) = \frac{4P_h(x_b - e_n\delta t) - P_h(x_b - 2e_n\delta t)}{3} \tag{48}$$

فرض می‌شود توابع توزیع فشار_مومنتوم($\bar{g}_\alpha$) مجهول برابر با مقدار تعادلی هستند و با استفاده از ترکیب معادله های (23) و (20) معادله (49) بدست می‌آید.

$$\bar{g}_\alpha^{eq} = P_h\Gamma_\alpha(0) + \rho c_s^2\big(\Gamma_\alpha(u) - \Gamma_\alpha(0)\big) - \frac{\delta t}{2}(e_\alpha - u)\cdot[\nabla(\rho c_s^2)\big(\Gamma_\alpha(u) - \Gamma_\alpha(0)\big) - C\nabla(\mu)\Gamma_\alpha(u)] \tag{49}$$

حال با جایگذاری فشار هیدرودینامیکی مجهول ($\acute{P}_h$) به جای P_h در معادله (48) و با به کار گیری معادله (32) می‌توان توابع توزیع مجهول با استفاده از معادله (50) محاسبه کرد:

$$\sum_\alpha \bar{g}_\alpha = \sum_{\text{unknown}} \bar{g}_\alpha + \sum_{\text{known}} \bar{g}_\alpha = P_{h,b} - \frac{\delta t}{2} u\cdot\nabla(\rho c_s^2) \tag{50}$$

که در آن $\sum_{\text{unknown}} \bar{g}_\alpha$ تقریب زده شده با $\sum_{\text{known}} \bar{g}_\alpha^{\text{eq}}$ می‌باشد. با استفاده از معادله (50) می‌توان مقدار $\acute{P}_h$ را محاسبه کرده و با گذاشتن این مقدار در تابع توزیع تعادلی مقادیر توابع توزیع مجهول محاسبه می‌شود. باید توجه داشت که با حضور سرعت در سمت راست معادله (50) برای محاسبه فشار مجهول یک فرایند تکرار باید به کار گرفته شود.

6- مراجع

[1] W. Nusselt, Die oberflachen condensation des Wasserdamfes. Z des ver 4(541-46), pp. 569-75, 1916.
[2] IG .Shekriladze, VI. Gomelauri, Theoretical study of laminar film condensation of flowing vapor. *International Journal Heat Mass Trans ,* Vol. 9, No. 5, pp. 81-91, 1966.
[3] T. Fujii, H. Uehara, Laminar filmwise condensation on a vertical surface. *International Journal Heat Mass Trans,* Vol. 15, No. 2, pp. 17-33, 1972.
[4] T. Fujii, H. Uehara, C. Kurata, Laminar filmwise condensation of flowing vapor on a horizintal cylinder. *International Journal Heat Mass Trans,* Vol. 15, No. 2, pp. 35-46, 1972.
[5] ES. Gaddis, Solution of the two phase boundary-layer equation for laminar film condensation of vapor flowing perpendicular to a hoeizontal cylander. *International Journal Heat Mass Trans,* Vol. 22, No. 3, pp. 71-82, 1979.
[6] JW. Rose, Effect of pressure gradient in forced convection film condensation on a horizontal tube. *International Journal Heat Mass Trans,* Vol. 27, pp. 39–47, 1984.
[7] HP. Hu, An analysis of turbulent film condensation on a sphere with variable wall temperature under the effect of local shear stress. *Appl Math Model,* Vol. 31, No. 25, pp. 77–88, 2007.
[8] HP. Hu, Mixed convection turbulent film condensation on a sphere. *Appl Math Comput,* Vol. 170, No. 1, pp. 194–204, 2005.
[9] HP. Hu, Chen CK. Forced convection in film condensation on a horizontal elliptical tube. *Heat Trans Eng,* Vol. 27, No. 9, pp. 60–70, 2006.
[10] SA. Yang, CK. Chen, Laminar film condensation on a horizontal elliptical tube with variable wall temperature. *Journal Heat Mass Trans,* Vol. 116, pp. 1046–9, 1994.
[11] CH. Hsu, SA. Yang, Mixed convection film condensation from downward flowing vapors onto a sphere with variable wall temperature. *Journal Heat Mass Trans.* Vol. 33, pp. 85–91, 1997.
[12] TB. Chang, WY. Yeh, GL. Tsai, Film condensation on horizontal tube with wallsuction effects. *Journal Mech Sci Technol,* Vol. 23, No. 3, pp. 399–406, 2009.
[13] TB. Chang, WY. Yeh ,Theoretical investigation into condensation heat transferon horizontal elliptical tube in stationary saturated vapor with wall suction. *Appl Therm Eng,* Vol. 31, No. 9, pp. 46–53, 2011.
[14] TB. Chang, WY. Yeh ,Effects of uniform suction and surface tension on laminar filmwise condensation on a horizontal elliptical tube in a porous medium. *International Journal Therm Sci,* Vol. 48, No. 23, pp. 23–30, 2009.
[15] WJ. Minkowycz, EM. Sparrow, Condensation heat transfer in the presence ofnoncondensables, interfacial resistance, superheating, variable properties, and diffusion. *International Journal Heat Mass Trans,* Vol. 9, No. 11, pp. 25-44, 1966.
[16] WJ. Minkowycz, EM. Sparrow, The effect of superheating on condensation heat transfer in a forced convection boundary layer flow. *International Journal Heat Mass Trans,* Vol. 12, No. 1, pp. 47–54, 1969.
[17] DY. Shang, BX. Wang, An extended study on steady-state laminar film condensation of a superheated vapor on an isothermal vertical plate. *International Heat Mass Trans,* Vol. 40, No. 9, pp. 31–41, 1997.
[18] SA. Yang, Superheated laminar film condensation on a nonisothermal tube. *Journal Therm Heat Tran,* Vol. 11, No. 5, pp. 26–32, 1997.
[19] CH. Hsu, Laminar film condensation from downward flowing superheated vapors onto a non-isothermal sphere. *Heat Mass Trans,* Vol. 38, pp. 151–8, 2001.
[20] T.Lee, L. Liu, Lattice Boltzmann simulations of micron-scale drop impact on dry surfaces, *Journal Comput Phys,* Vol. 229, No. 80, pp. 45-63, 2010.
[21] H. Safari, MH. Rahimian,M Krafczyk, Extended lattice Boltzmann method for numerical simulation of thermal phase change in two-phase fluid flow, *Physical Review* E ,88:013304, 2013.
[22] T.Lee, Effects of incompressibility on the elimination of parasitic currents in the lattice Boltzmann equation method for binary fluids, *Computers Mathematics with Applications,* Vol. 58, pp. 987-994, 2009.
[23] A. Wagner, THE ORIGIN OF SPURIOUS VELOCITIES IN LATTICE BOLTZMANN, *International Journal of Modern* Physics B, Vol. 17, pp. 193-6, 2003.
[24] X.He,S.Chen,R. Zhang, A Lattice Boltzmann Scheme for Incompressible Multiphase Flow and Its Application in Simulation of Rayleigh–Taylor, *Journal Comput Phys,* Vol. 219, No. 70, pp. 5-61, 2011.
[25] S.Hardt,F. Wondra, Evaporation model for interfacial flows based on a continuum-field representation of the source terms, *Journal of Computational Physics,* Vol. 227, No. 58, pp. 71-95, 2008.
[26] A. J. Briant, P. Papatzacos† and J. M. Yeomans, Lattice Boltzmann simulations of contact line motion in a liquid–gas system, *Theoretical Physics,* Oxford University, 1 Keble Road, Oxford OX1 3NP, UK.
[27] H Huang., Thorne Jr D.T., Schaap M.G., and Sukop M.C., Proposed approximation for contact angles in Shan-and-Chen-type multicomponent multiphase lattice Boltzmann models, *Physical Review,* Vol. 76, pp. 66-73, 2007.