



بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق ناهمگن تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای

محمد جعفری^{1*}، مهدی قنّاد¹، امین عامری²

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

* شاهرود، کد پستی 3619995161، m_jafari821@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 24 دی 1393

پذیرش: 07 فروردین 1394

ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:

ورق FGM

مواد ناهمگن

گشودگی دایروی

توابع پتانسیل

تمرکز تنش

چکیده

بخاطر تغییرات پیوسته‌ی خواص مکانیکی مواد ناهمگن تابعی و در نتیجه کاهش اثر تمرکز تنش، محققان زیادی علاقه‌مند به بررسی رفتار و استفاده از این قبیل مواد در صنایع مختلف هستند. طراحی درست ورق ناهمگن حاوی گشودگی، مستلزم دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل و توزیع تنش در نقاط مختلف صفحه به‌ویژه در اطراف گشودگی است. در این مقاله سعی می‌شود به کمک روش توابع پتانسیل مختلط، حلی تحلیلی برای محاسبه توزیع تنش دوبعدی اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق بلند ناهمگن ارائه شود. بار بصورت کشش ثابت و یکنواخت تک‌محوری و دومحوری به صفحه اعمال می‌شود؛ در مرز گشودگی نیز بار بصورت فشار یکنواخت به گشودگی اعمال می‌شود. بررسی تأثیر مقدار بار فشاری اعمال شده بر مرز گشودگی در توزیع تنش اطراف آن یکی از اهداف مهم این تحقیق است. تغییرات خواص مکانیکی به‌خصوص مدول الاستیسیته، در جهت شعاعی و هم‌مرکز با گشودگی در نظر گرفته شده است؛ برای توصیف تغییر خواص مکانیکی ورق مورد نظر از یک تابع نمایی که دارای شعاع همگرایی مشخصی است، استفاده می‌شود. از روش اجزای محدود برای راستی‌سنجی نتایج حل تحلیلی، در تمام حالات بارگذاری برای ورق همگن و ناهمگن استفاده شده است. باوجود بارگذاری فشاری در داخل گشودگی دایره‌ای علاوه بر تنش محیطی، مقدار تنش شعاعی نیز قابل توجه است؛ لذا از تنش فون میزز برای بررسی تنش در اطراف گشودگی استفاده شده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته تحت بارگذاری درون صفحه‌ای، ظرفیت تحمل بار بهتری نسبت به ورق همگن دارد.

Study of the stress distribution around a circular hole in a heterogeneous plate subjected to in-plane loading

Mohammad Jafari^{1*}, Mehdi Ghannad¹, Amin Ameri²

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, m_jafari821@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 14 January 2015
Accepted 27 March 2015
Available Online 29 April 2015

Keywords:
FGM Plate
Heterogeneous Materials
Circular Hole
Potential Functions
Stress Concentration

ABSTRACT

Because of the continuous changes of mechanical properties of functionally graded materials and therefore, reductions in the effects of stress concentration, many researchers are interested in studying the behavior and use of these materials in various industries. For the correct design of perforated inhomogeneous plate it is necessary to have accurate information about the deformation and stress distribution in different points of the plate, especially around the hole. In this paper, an attempt is made to present the analytical solution to calculate the 2D stress distribution around the circular hole in long FG plate using the complex potential functions method. The plate is subjected to constant uniaxial or biaxial stress; in addition, the boundary of hole is subjected to uniform pressure loading. One of the most important goals of this research is to study the effect of compression load applied to the hole boundary on stress distribution around the hole. The variation of material properties, especially Young's modulus is in a radial direction and concentric to the hole. The special exponential function, with specific convergence radius, is used to describe the variation of mechanical properties. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results for homogeneous and heterogeneous plates, also for all loading cases. In the presence of applied load at the boundary of circular hole, amount of radial stress in addition to hoop stress is considerable. Therefore, the Von Mises stress is used to study the stress around the hole. The results showed that inhomogeneous plate with increased modulus of elasticity has greater load bearing capacity with respect to homogeneous plate.

1- مقدمه

هوافضا را می‌توان نام برد. تنوع کاربرد، وجود انواع شیارها و گشودگی‌ها را با ابعاد و شکل‌های مختلف، در ورق‌ها می‌طلبند. برای نمونه، می‌توان به گشودگی پنجره‌ها در بدنه هواپیماها، هلی‌کوپترها و زیردریایی‌ها، محل اتصال دو ورق به یکدیگر توسط پیچ‌ها، پرچ‌ها و پین‌ها، وجود سوراخ‌ها در پره‌های

ورق‌ها به‌دلیل کاربرد وسیع در صنایع مختلف، از اهمیت بسیاری برخوردار هستند. ازجمله کاربرد آن‌ها، استفاده در ساخت انواع مخازن، بدنه ماشین-آلات، ساختمان‌سازی، کشتی‌سازی، صنایع دریایی، صنایع نظامی و سازه‌های

Please cite this article using:

M. Jafari, M. Ghannad, A. Ameri, Study of the stress distribution around a circular hole in a heterogeneous plate subjected to in-plane loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 6, pp. 249-256, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تمرکز تنش در ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی دایره‌ای بررسی کردند. ورق مورد بحث آن‌ها تحت کشش تک‌محوری بود. نتایج تحقیقات آن‌ها نشان داد، وقتی که مدول یانگ با دور شدن از مرکز گشودگی افزایش می‌یابد، تمرکز تنش کاهش می‌یابد. در پژوهش مذکور، تابع مورد استفاده برای نشان دادن تغییر خواص، تابعی توانی بود. کائو و همکارانش [18] از روش اجزای محدود، ورق FG با هندسه‌های مختلف مانند ورق بیضوی، دایره‌ای و چندضلعی دارای گشودگی‌هایی به شکل‌های گوناگون را بررسی کردند. حسینی و همکارانش [19] به بررسی نحوه توزیع و گسترش ترک در ورق با مواد تابعی تحت بارگذاری حرارتی - مکانیکی پرداخت. وی از روش اجزای محدود توسعه‌یافته² برای محاسبه و تحلیل شکست مواد تابعی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک تحت بارگذاری مکانیکی و حالت دمای پایدار استفاده کرد. با توجه به کاربرد مواد ناهمگن بعنوان موادی مقاوم در برابر تغییرات زیاد دما، تحلیل تنش حرارتی ورق‌های حاوی گشودگی مورد توجه پژوهشگران بوده است. ژانگ و همکارانش [20] به حلی دقیق برای محاسبه تنش حرارتی در یک ورق نامحدود FG دارای گشودگی دایره‌ای پرداختند. در تحقیق آن‌ها، خواص مواد و دمای اعمال شده در جهت شعاعی تغییر می‌کرد. در مقاله‌ای کوآن و گان [21] به تحلیل تنش دینامیکی یک ورق از جنس مواد ناهمگن با گشودگی دایره‌ای پرداختند. آن‌ها با استفاده از روش متغیرهای مختلط، توزیع تنش دینامیکی ورق ناهمگن با تغییر خواص ماده در جهت شعاعی را بدست آوردند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد، که توزیع تنش دینامیکی اطراف گشودگی دایره‌ای، بطور چشم‌گیری به انتخاب تابع مناسب برای تغییر خواص مواد وابسته است. همچنین یانگ و همکارانش [22-23] به بررسی تنش دوبعدی یک ورق ناهمگن محدود و نامحدود حاوی گشودگی دایره‌ای و تحت بارگذاری یکنواخت پرداختند. در مقاله‌ای توسط کوبایر [24]، ضریب تمرکز تنش در نتیجه حضور گشودگی دایره‌ای در یک ورق ناهمگن تحت بار برشی برون‌صفحه‌ای بررسی شد؛ خواص مواد در جهت شعاعی و با فرض آنکه مبدأ در مرکز ورق قرار دارد، تغییر می‌کرد. در این تحقیق، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها برای ورق بدون گشودگی بصورت تابع تحلیلی به‌دست آمد. وی نتیجه گرفت که وقتی مدول کشسانی با فاصله از مرکز گشودگی، کاهش پیدا کند، وجود گشودگی دایره‌ای باعث افزایش تمرکز تنش می‌شود. کاهش مؤثر تمرکز تنش درحالتی که مدول کشسانی با فاصله از مرکز گشودگی افزایش پیدا می‌کند، نتیجه مفیدی در طراحی به‌حساب می‌آید.

در اتصالات ورق‌های مختلف از طریق پیچ و پرچ، معمولاً گشودگی تحت فشار خارجی قرار می‌گیرد. تأثیر بار فشاری در مرز گشودگی بر تحلیل تنش ورق‌های ناهمگن تاکنون بررسی نشده است. در این پژوهش سعی می‌شود، نحوه توزیع تنش در اطراف گشودگی دایره‌ای در یک ورق بلند و محدود تحلیل شود. بارگذاری اعمال شده بر ورق در مرزهای بیرونی بصورت درون صفحه‌ای و در مرز گشودگی دایره‌ای بصورت فشار یکنواخت می‌باشد. مطالعه تأثیر نسبت بار و روند تغییرات خواص مکانیکی در جهت شعاعی از دیگر پارامترهای مورد بررسی می‌باشد. در پژوهش حاضر از توابع پتانسیل مختلط و روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز³ برای تحلیل استفاده شده است.

2- روابط حاکم بر مسأله

مسأله مورد مطالعه در این پژوهش، یک ورق بلند محدود از جنس مواد FG با

توربین جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده و غیره اشاره کرد. وجود گشودگی‌ها در جسم، باعث ایجاد تمرکز تنش در اطراف گشودگی می‌شود. دستیابی به طرحی بهینه و توانایی مقابله با شکست‌های مکانیکی، نیازمند دانستن اطلاعات دقیق در مورد نحوه توزیع تنش در اطراف گشودگی است.

مواد متغیر تابعی (FGM)¹، مواد ناهمگنی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها به‌صورت تابعی پیوسته از موقعیت تغییر می‌کند. برخلاف چندلایه‌ها، تغییرات پیوسته‌ی خواص مکانیکی این مواد، باعث جلوگیری از ناسازگاری خواص مواد در امتداد سطح مشترک بین‌لایه‌ای در چندلایه‌ها شده و نیز باعث کاهش تمرکز تنش و آثار نامطلوب در مرز لایه‌ها می‌شود. معمولاً این مواد بعنوان مواد مقاوم در برابر گرمای بسیار زیاد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. معمولاً برای توصیف تغییر خواص مواد ناهمگن از یک تابع توانی و یا تابع نمایی استفاده می‌شود. بخاطر تغییرات سریع این دو تابع، کاهش تمرکز تنش نسبت به زمانی که تغییر خواص با دو تابع توانی به‌صورت خیلی ملایم صورت می‌گیرد؛ کمتر است. لذا چی و چانگ [1] بیان کردند که استفاده از مواد ناهمگن که تغییرات خواص مکانیکی آن با دو تابع توانی ارائه می‌شود، کاهش چشم‌گیری در ضرایب شدت تنش در یک جسم حاوی ترک دارد. مطالعات نشان داده است که تنش‌های پسماند حرارتی بطور چشمگیری با بکارگیری این نوع از مواد آزاد می‌شوند [2].

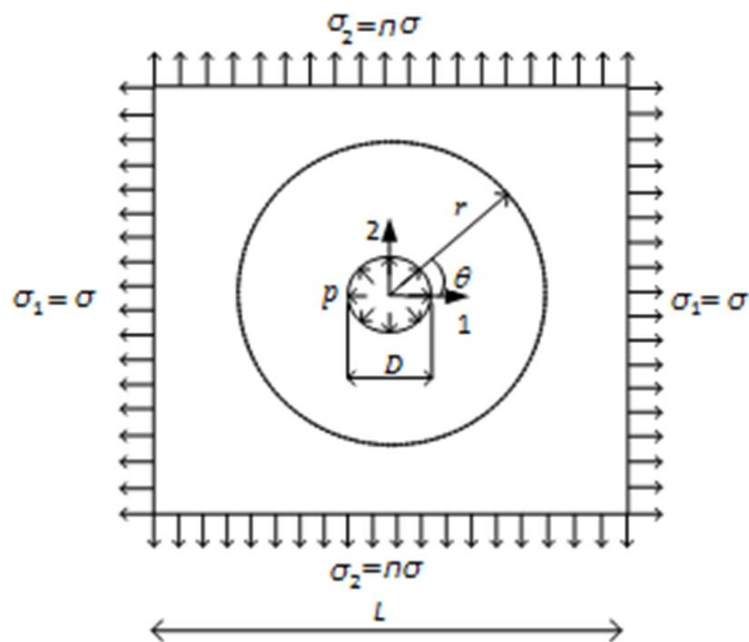
در مورد بررسی توزیع تنش در ورق‌های همسانگرد و ناهمسانگرد دارای گشودگی از روش‌های گوناگون اعم از تجربی، عددی و تحلیلی استفاده شده است. بکارگیری روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته دوبعدی، نخستین بار توسط موشخلی‌شوایی در سال 1949 برای مواد الاستیک همسانگرد به زبان روسی ارائه و در سال 1962 به زبان انگلیسی ترجمه شد [3]. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط وی در مطالعات ساوین [4] بر روی ورق‌های همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای ورق‌های ناهمسانگرد با گشودگی بیضوی و دایروی، مطالعاتی را انجام داد. توسعه کامل روش موشخلی‌شوایی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد ناهمسانگرد، توسط اشلبای و همکارانش [5]، اشترو [6] و لخنیتسکی [7] انجام شد. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط آن‌ها، به مطالعه ورق‌های نامحدود ناهمسانگرد دارای گشودگی پرداختند [8-12]. یکی از کاربردهای عمده‌ی تمرکز تنش در اتصالات ورق‌های مختلف به‌یکدیگر می‌باشد. در اتصال‌های ورق‌ها به وسیله پیچ‌ها و پین‌ها، غالباً از طرف پیچ یا پین نیرویی به مرز گشودگی وارد می‌شود. تحلیل این گونه مسائل با استفاده توابع پتانسیل مختلط در پژوهش‌های مختلفی انجام شده است [13-15]. در مورد ورق‌های محدود حاوی گشودگی، تحقیقات کمی صورت گرفته است. در این زمینه، پن و همکارانش [16] ورق محدود مربع از مواد همگن و همسانگرد دارای گشودگی به شکل مربع در مرکز ورق را بررسی کردند. در این تحقیق با استفاده از تابع نگاشت، ورق مذکور به ورق مربعی با گشودگی دایره‌ای تبدیل شد و به کمک معادلات به‌دست آمده توسط موشخلی‌شوایی، تحلیل تنش این ورق بررسی شد؛ ورق مذکور تحت بار کششی تک‌محوری قرار داشت. آن‌ها معادلات لازم را از شرایط مرزی ورق به کمک روش حداقل مربعات خطا در مرز، به‌دست آوردند.

در مورد تمرکز تنش ورق‌های ناهمگن حاوی گشودگی، پژوهش‌های بسیار کمی انجام شده است. کوبایر و چاندار [17] با استفاده از فرمول‌بندی اجزای محدود ایزوپارامتریک، تأثیر ناهمگنی خواص مواد را بر روی ضریب

2- Extended Finite Element Method

3- Least Square Boundary Collocation Technique

1- Functionally Graded Material (FGM)



شکل 1 شماتیک کلی ورق مربعی با گشودگی دایره‌ای

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi'(z) + \psi'(z)] \quad (6)$$

برای اعمال شرایط مرزی نیرویی و جابه‌جایی بر حسب توابع تنش در نقطه z از روابط (7) و (8) استفاده می‌شود [4].

$$\phi(z) + z\bar{\phi}'(z) + \bar{\psi}'(z) = \pm i \int_s (X_n + iY_n) ds \quad (7)$$

$$K\phi(z) - z\bar{\phi}'(z) + \bar{\psi}'(z) = 2G(u + iv) \quad (8)$$

که در آن X_n و Y_n مؤلفه‌های نیرو، u و v مؤلفه‌های جابه‌جایی در نقطه مرزی z هستند. در روابط فوق، G مدول الاستیسیته برشی مربوط به هر حلقه است. با توجه به تعریف مدول یانگ، مطابق رابطه (4) و رابطه (9)، G تابعی از r است.

$$G(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \quad (9)$$

ν نسبت پواسون، که برای ورق ناهمگن، مقداری ثابت فرض شده است. علت این فرض تغییرات بسیار کم نسبت پواسون در ورق ناهمگن نسبت به مدول الاستیسیته می‌باشد. K ضریبی است، که تابعی از نسبت پواسون بوده و برای فرض تنش‌صفحه‌ای و کرنش‌صفحه‌ای تابع آن متفاوت می‌باشد.

$$K = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{تنش صفحه‌ای} \\ \frac{3-4\nu}{3-4\nu} & \text{کرنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (10)$$

با توجه به مستقل بودن توابع پتانسیل مختلط در هر حلقه، در فصل مشترک بین حلقه‌های مجاور باید شرایط پیوستگی برقرار باشند.

$$\begin{cases} u_i = u_{i+1} & , & v_i = v_{i+1} \\ X_i = X_{i+1} & , & Y_i = Y_{i+1} \end{cases} \quad (11)$$

با قرار دادن روابط (11) در معادلات (7) و (8)، روابط (12) و (13) حاصل می‌شود.

$$\phi_i(z) + z\bar{\phi}'_i(z) + \bar{\psi}'_i(z) = \phi_{i+1}(z) + z\bar{\phi}'_{i+1}(z) + \bar{\psi}'_{i+1}(z) \quad (12)$$

$$\frac{1}{G_i} [K_i \phi_i(z) + z\bar{\phi}'_i(z) + \bar{\psi}'_i(z)] = \frac{1}{G_{i+1}} [K_{i+1} \phi_{i+1}(z) + z\bar{\phi}'_{i+1}(z) + \bar{\psi}'_{i+1}(z)] \quad (13)$$

روابط بالا در فصل مشترک بین هر دو لایه مجاور، منجر به ایجاد 4 معادله خواهد شد. با اعمال معادلات فوق در تمامی فصل مشترک‌های لایه‌ها، در مجموع $4M(N-1)$ معادله به دست می‌آید. با توجه به تعداد مجهول‌ها که برابر $4MN$ است، برای تعیین تمام مجهول‌ها نیاز به $4M$ معادله مستقل دیگر است.

گشودگی دایره‌ای در مرکز آن است. ورق تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای یکنواخت می‌باشد. در حالت کلی به مرکز گشودگی بار فشاری اعمال می‌شود (شکل 1).

روش حل مورد استفاده در این مقاله بر پایه حل تحلیلی ارائه شده توسط موشخلی‌شوایی [3] است. او این روش را برای مواد همگن و همسانگرد ارائه کرد. در این تحقیق سعی شده است برای استفاده از روش مذکور در حل ورق ناهمگن FG حاوی گشودگی، مطابق شکل 2 ورق به N حلقه هم‌مرکز با مرکز گشودگی و با شعاع‌های مختلف تقسیم‌بندی شود. بطوری که در هر حلقه، ماده همسانگرد و همگن در نظر گرفته می‌شود.

موشخلی‌شوایی برای حل ورق‌های همسانگرد حاوی گشودگی از تابع تنش ایری $U(x,y)$ استفاده کرد. این تابع شامل دو تابع پتانسیل $\phi(z)$ و $\psi(z)$ بصورت زیر می‌باشد. توابع $\phi(z)$ و $\psi(z)$ به شکل سری مختلط با تعداد جملات نامحدود هستند [3].

$$U(x,y) = \text{Re}(\bar{z}\phi(z) + \psi(z)) \quad (1)$$

با توجه به اینکه ورق به N حلقه مطابق شکل 1 طوری تقسیم شده است که در هر حلقه بتوان ماده را همگن در نظر گرفت؛ آنگاه در داخل هر حلقه، توابع پتانسیل مربوط به ورق محدود بصورت (2) و (3) نوشته می‌شود [3].

$$\phi(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \left(\frac{z}{R}\right)^i \quad (2)$$

$$\psi(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \left(\frac{z}{R}\right)^i \quad (3)$$

در روابط (2) و (3)، a_i و b_i ضرایب جملات توابع پتانسیل برای هر حلقه، R یک طول مرجع و z متغیر مکان است.

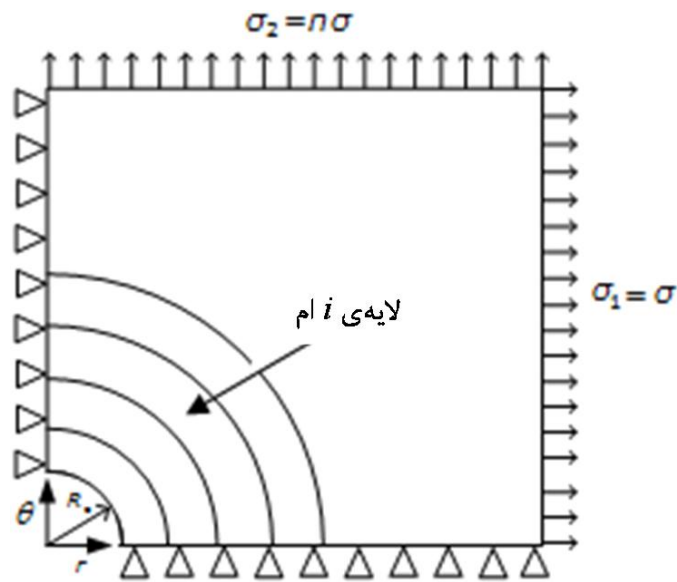
تابع ناهمگنی پیشنهاد شده، برای نشان دادن تغییرات پیوسته مدول یانگ، تابعی نمایی مطابق رابطه (4) است. طبق این رابطه، تغییرات مدول الاستیسیته در جهت شعاعی می‌باشد.

$$E(r) = E_0 \left[1 + (k-1)e^{m\left(1-\frac{r}{R_0}\right)} \right] \quad (4)$$

که در آن $k = \frac{E_i}{E_0}$ نسبت مدول‌ها و m ضریب میرایی برای کنترل دامنه‌ی

ناحیه‌ی ناهمگنی در ورق می‌باشد. همچنین مطابق شکل 2، R_0 برابر شعاع گشودگی دایره‌ای در نظر گرفته شده است. فزاینده و کاهنده بودن خواص با معکوس شدن ضریب k و جایگزینی مقادیر مدول الاستیسیته در تابع بجای یکدیگر، امکان‌پذیر است. از مزیت‌های این تابع، انعطاف‌پذیری در کنترل محدوده ناهمگنی و تعیین مدول الاستیسیته در ابتدا و انتهای آن، می‌باشد. با توجه به اینکه در هر حلقه، دو تابع پتانسیل $\phi(z)$ و $\psi(z)$ بصورت مجزا در نظر گرفته شده است و هر کدام از توابع مذکور دارای $2M$ جمله با ضرایب مجهول می‌باشند (M جمله شامل توان‌های مثبت و M جمله شامل توان‌های منفی از z)؛ بنابراین تعداد مجهول‌ها در هر حلقه و برای هر تابع پتانسیل، $2M$ خواهد شد. اگر تعداد کل حلقه‌ها N باشد، تعداد کل مجهول‌ها $4MN$ خواهد بود. برای به دست آوردن کل ضرایب مجهول نیاز به $4MN$ معادله مستقل داریم. این معادلات از شرایط مرزی ورق و شرایط پیوستگی، در فصل مشترک لایه‌های مجاور به دست می‌آید. رابطه بین مؤلفه‌های تنش حاکم بر کل ورق با فرض تنش صفحه‌ای بر حسب توابع تنش بصورت (5) و (6) خواهد بود [3].

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\phi'(z)] \quad , \quad z = x + i \quad (5)$$



شکل 2 شماتیک ربع ورق ناهمگن و تقسیم‌بندی آن به حلقه‌های هم‌مرکز همگن

جدول 1 خواص مکانیکی مواد ورق FG [25]

نسبت پواسون	مدول الاستیسیته (GPa)	
0/34	200	فولاد
0/33	73	آلیاژ آلومینیوم TA-2024
0/24	410	آلومینا ARP

درحالتی که ورق تحت نیروهای درون‌صفحه‌ای در مرزهای خارجی ورق می‌باشد و فشار در داخل گشودگی نیز صفر باشد (گشودگی فاقد بارگذاری است)؛ تنش‌های شعاعی و برشی در مرز گشودگی صفر هستند. ولی در صورت اعمال بار فشاری به مرز گشودگی دایره‌ای، مقدار تنش شعاعی در اطراف گشودگی، برابر مقدار بار فشاری وارد شده است. این مقدار قابل توجه بوده و به همین دلیل علاوه بر بررسی تنش محیطی در اطراف گشودگی دایره‌ای، از تنش معادل فون‌میزز² برای محاسبه تنش معادل در این نقاط استفاده می‌شود، تا علاوه بر تنش محیطی، در صورت حضور تنش شعاعی در اطراف گشودگی بتوان بصورت کلی، تنش را در نقاط مختلف اطراف گشودگی، مورد بررسی قرار داد.

4- بررسی نتایج

در این مقاله سعی شده است تا برای بارگذاری‌های مختلف، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق‌های همگن و ناهمگن بررسی شود. خواص مکانیکی ورق‌های ناهمگن می‌توانند با دور شدن از گشودگی افزایش (تابع ناهمگنی افزایشنده) و یا کاهش (تابع ناهمگنی کاهشنده) یابند. همان‌طور که قبلاً بیان شد، ورق تحت بار تک‌محوری و دومحوری است. درحالت کلی به مرز گشودگی بار P اعمال می‌شود. در تمام حالت‌ها نتایج بدست آمده از روش تحلیلی با روش عددی مقایسه شده است. به دلیل تقارن مقادیر تنش نسبت به محور افقی r و محور عمودی θ ، تنها یک چهارم نقاط اطراف گشودگی مورد بررسی قرار خواهند گرفت (شکل 2). جهت زاویه θ مطابق شکل 1 از محور r شروع می‌شود.

4-1- ورق تحت بارگذاری کشش تک‌محوری

با توجه به شکل‌های 3، 4 و 5، مشاهده می‌شود که مقدار تنش محیطی و به دنبال آن، تنش معادل فن‌میزس در اطراف گشودگی برای ورق با روند کاهشی مدول الاستیسیته، بیشتر از ورق همگن بوده است. برای ورق با روند افزایشی مدول الاستیسیته، مقدار تنش محیطی کمتر از ورق همگن می‌باشد. افزایش درصد جذب انرژی کرنشی لایه‌های داخلی ورق ناهمگن با روند

این تعداد معادلات از شرایط مرزی در محیط خارجی ورق و شرایط مرزی در اطراف گشودگی دایره‌ای، به روش حداقل مربعات خطا در نقاطی با تقسیم‌بندی منظم در مرز، استخراج خواهند شد. با استخراج این تعداد معادلات، می‌توان حل را کامل کرد و مجهول‌ها را به‌دست آورد. با بدست آمدن جملات توابع پتانسیل و جایگذاری این توابع در روابط (5)، (6) و (8) تمام مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در تمام نقاط ورق قابل محاسبه خواهند بود.

3- مطالعه موردی

برای مثال، یک ورق مربعی دارای گشودگی دایره‌ای در مرکز با نسبت $\frac{L}{D} = 20$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن L طول ورق و D قطر گشودگی است (شکل 1). این ورق تحت بارگذاری کششی تک‌محوری و دومحوری قرار می‌گیرد؛ همچنین فشار یکنواخت در داخل گشودگی به بارگذاری ورق اضافه خواهد شد (شکل 2). سه حالت تغییرات مدول الاستیسیته برای ورق در نظر گرفته شده است که حاصل آن سه صورت ورق ناهمگن کاهشی (E_-)، ورق همگن (E_{hom}) و ورق ناهمگن افزایشی (E_+) است.

$$E_-(r) = 73 \left[1 + 1.74 \exp \left(0.65 \left(1 - \frac{r}{1} \right) \right) \right] \text{ GPa}$$

$$E_{hom} = 200 \text{ GPa}$$

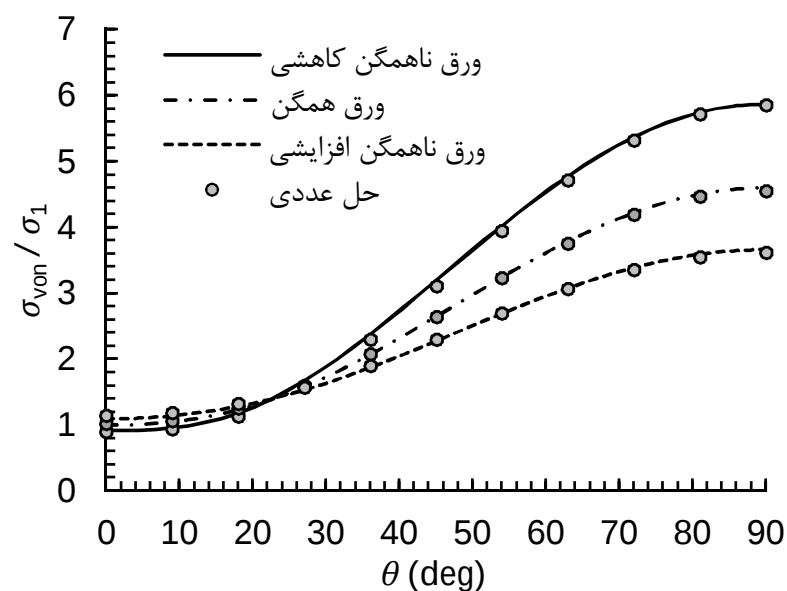
$$E_+(r) = 403 \left[1 - 0.635 \exp \left(0.65 \left(1 - \frac{r}{1} \right) \right) \right] \text{ GPa} \quad (14)$$

ماده در اطراف گشودگی در هر دو حالتی که ورق همگن و ناهمگن در نظر گرفته می‌شود، دارای خواص مکانیکی فولاد ساختمانی است. همچنین برای ورق ناهمگن با تابع ناهمگنی کاهنده، از آلیاژ TA-2024 آلومینیوم و برای ورق ناهمگن با تابع ناهمگنی افزایشنده، از سرامیک آلومینا بعنوان ماده در مرزهای بیرونی استفاده می‌شود. جدول 1 خصوصیات مکانیکی این سه ماده را نشان می‌دهد.

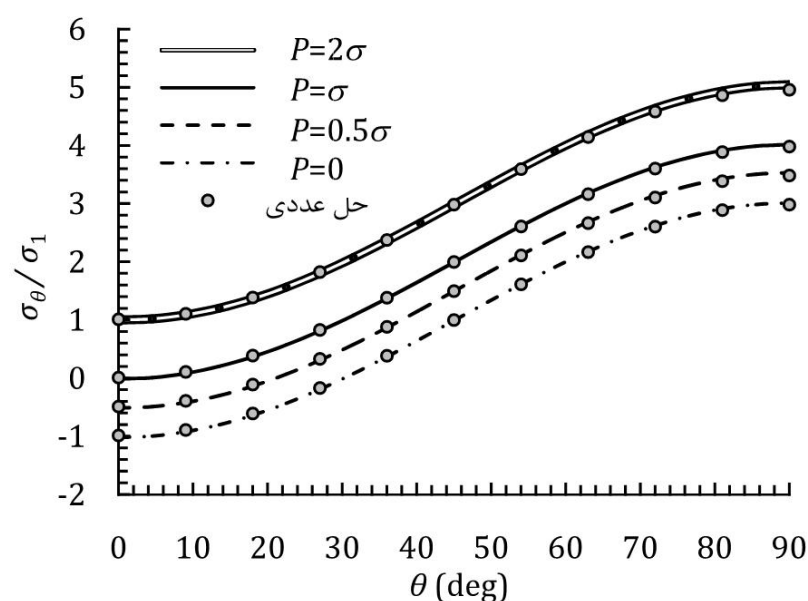
با در نظر گرفتن ضریب میرایی $m=0/65$ شعاع دایره ناهمگنی در هر دو حالت افزایشنده و کاهنده، 10 برابر شعاع گشودگی می‌شود. در فاصله بیش از 10 برابر شعاع گشودگی، ورق همگن در نظر گرفته می‌شود. با دور شدن از گشودگی به اندازه کافی، توزیع تنش در ورق، یکنواخت خواهد بود. این فاصله برای ورق همگن در مراجعی مانند پینکلی آورده شده است [24]. با توجه به یکنواختی تنش خارج از این شعاع، نیازی به تقویت ماده وجود ندارد؛ بنابراین در خارج از این شعاع، ورق به‌صورت یک ماده همگن در نظر گرفته می‌شود. همچنین با تغییر مقدار ضریب m ، امکان بررسی تأثیر شعاع همگرایی بر مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی وجود دارد. برای راستی‌سنجی نتایج به‌دست آمده در این پژوهش، از روش اجزای محدود استفاده شده است. در شکل 2 شماتیک مدل‌سازی ورق در نرم‌افزار آباکوس¹، نشان داده شده است. تطابق نتایج حاصل از دو روش، نشان‌دهنده درستی روش حل مورد بررسی است.

جهت بی‌بعدسازی محور قائم در شکل‌ها، از نسبت $\frac{\sigma_\theta}{\sigma_1}$ استفاده شده

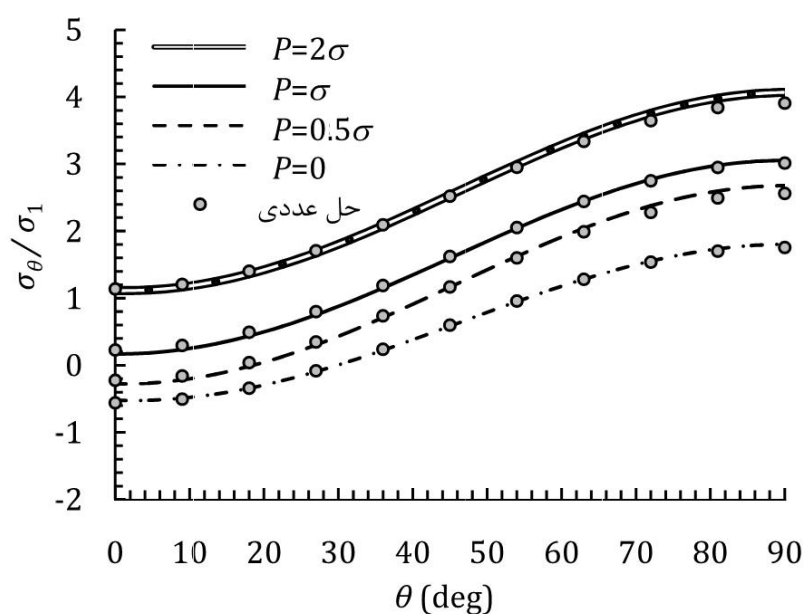
است. در اینجا σ_1 تنش اعمالی در مرز ورق در جهت محور 1 است (شکل 1). بارگذاری مورد مطالعه در این مقاله به دو صورت می‌باشد: نوع اول بارگذاری کششی تک‌محوری، که در جهت محور 1 به مقدار σ_1 وارد می‌شود. نوع دوم بارگذاری دومحوری، که در جهت محور 1 به مقدار σ_1 و در جهت محور 2 به مقدار $n\sigma_1$ وارد می‌شود $n=\{-1, -2, 0, 1, 2\}$.



شکل 5 توزیع تنش فون میزز در اطراف گشودگی تحت فشار یکنواخت (کشش تک محوری)



شکل 6 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت فشار یکنواخت (کشش تک محوری)



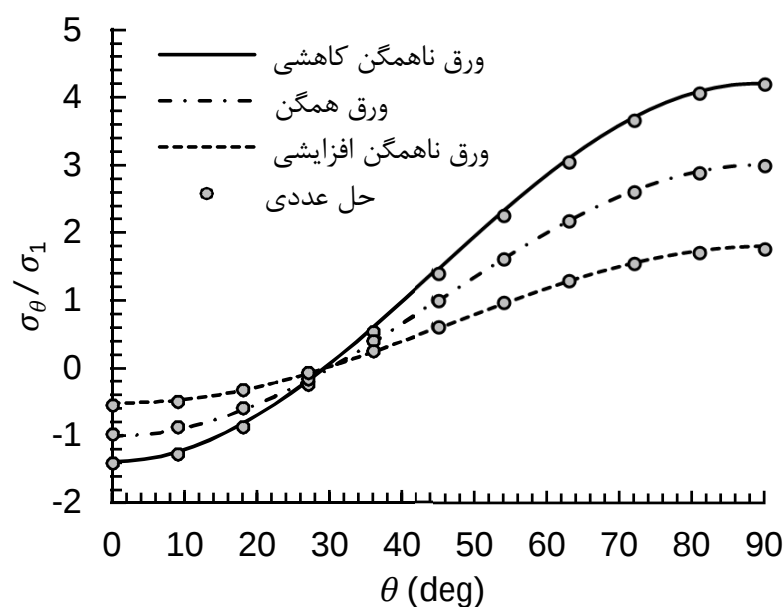
شکل 7 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت (کشش تک محوری)

مطابق آنچه که در شکل 9 مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار m ، شعاع همگرایی ناحیه ناهمگنی برای ورق با روند صعودی مدول الاستیسیته، کم می‌شود. تغییر شعاع همگرایی مربوط به ورق ناهمگن با روند نزولی مدول الاستیسیته نیز مشابه با شکل 9 است. به دلیل این شباهت از آوردن نمودار مربوط به آن چشم‌پوشی شده است. در جدول 2، شعاع همگرایی متناسب با ضریب m آورده شده است. شکل‌های 10 و 11 تأثیر مقدار m را بر توزیع تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی، برای ورق ناهمگن با مدول الاستیسیته افزایشی و کاهنده، نشان می‌دهند.

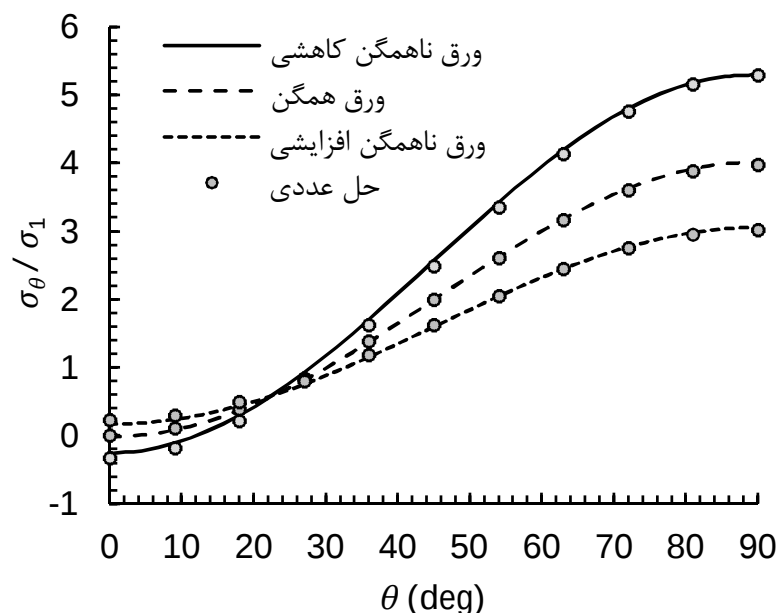
افزایشی مدول الاستیسیته و کاهش درصد جذب آن در لایه‌های داخلی ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته، نسبت به ورق همگن، عامل اختلاف رفتار تنش محیطی در نقاط اطراف گشودگی در شکل‌های یاد شده است. به همین دلیل، اثر بارگذاری در مرز خارجی ورق در اطراف گشودگی دایره‌ای، ضعیف‌تر از ورق همگن می‌باشد. در مورد ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته، این مسأله برعکس می‌باشد.

نتایج شکل‌های 4 و 5 برای حالتی است که به مرز گشودگی، بار فشاری $P = \sigma_1$ اعمال می‌شود. از مقایسه تنش محیطی و تنش معادل فن میزز در شکل‌های 4 و 5 می‌توان دریافت که، مقدار تنش فن میزز نسبت به تنش محیطی تقریباً به یک مقدار ثابتی افزایش داشته است. علت آن حضور تنش شعاعی می‌باشد که در اطراف گشودگی به علت حضور بارگذاری فشاری در داخل گشودگی به وجود می‌آید. با توجه به شکل‌های 6، 7 و 8 می‌توان دریافت که حضور فشار ثابت در داخل گشودگی باعث افزایش تنش محیطی می‌شود. مقدار این افزایش با مقدار افزایش فشار یکنواخت در داخل گشودگی دایره‌ای برابر است. همچنین با مقایسه این شکل‌ها با یکدیگر، می‌توان نتیجه گرفت که جنس ورق در مقدار افزایش تقریباً بی‌تأثیر می‌باشد. علت آن تأثیر مستقیم بارگذاری فشاری درون گشودگی بر نقاط اطراف گشودگی است. در این حالت بارگذاری، جنس لایه‌های میانی ورق تأثیر چندانی بر مقدار انرژی منتقل شده به لایه‌ی داخلی ورق ندارد.

همان‌طور که پیشتر گفته شد، با تغییر ضریب m در رابطه (4)، شعاع همگرایی ناحیه ناهمگنی تغییر می‌کند.



شکل 8 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی بدون فشار (کشش تک محوری)



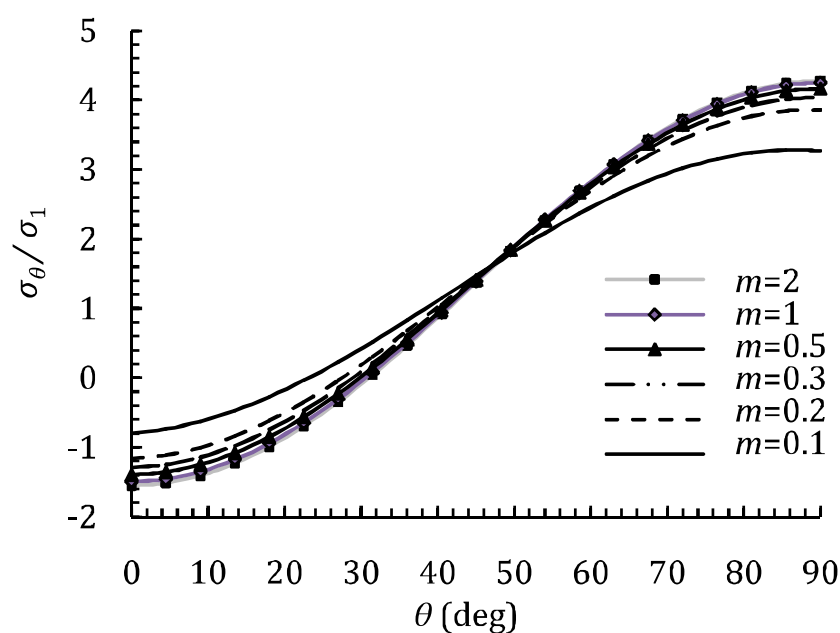
شکل 9 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی تحت فشار یکنواخت (کشش تک محوری)

از ورق دارای خواص مکانیکی قوی‌تر می‌باشند. این پدیده در ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته به‌صورت معکوس رخ می‌دهد. در شکل 11، درحالتی که $m=2$ است، به‌دلیل ضعیف‌تر بودن خواص مکانیکی در لایه‌های بیشتری از ورق ناهمگن، تنش محیطی در اطراف گشودگی دایره‌ای، مقدار بیشتری می‌یابد.

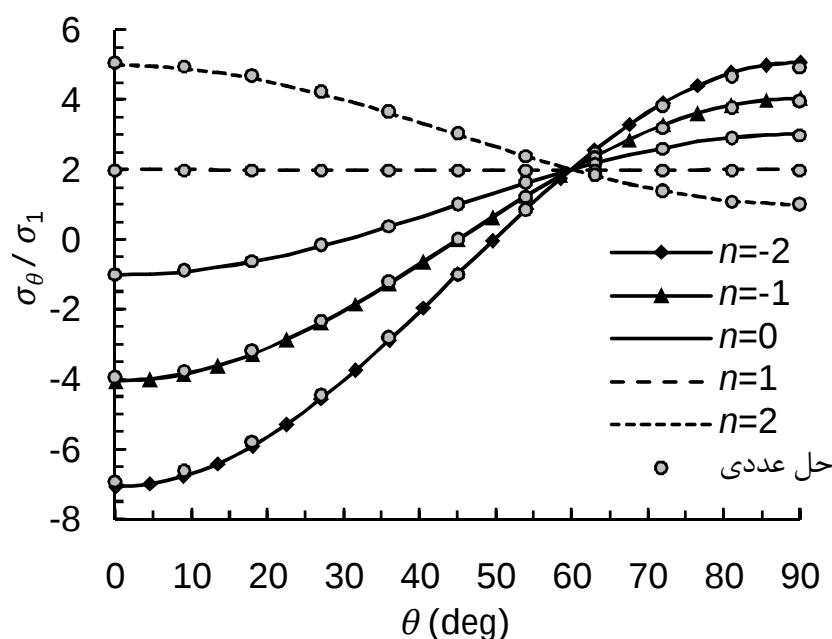
با توجه به دو شکل 10 و 11 می‌توان دریافت، که از شدت تغییرات تنش محیطی نسبت به افزایش مقدار m ، کاسته می‌شود، به‌طوری که تغییرات تنش محیطی برای $m=1$ و $m=2$ بسیار کم و قابل چشم‌پوشی است.

4-2- ورق تحت بار کشش دوماحوری

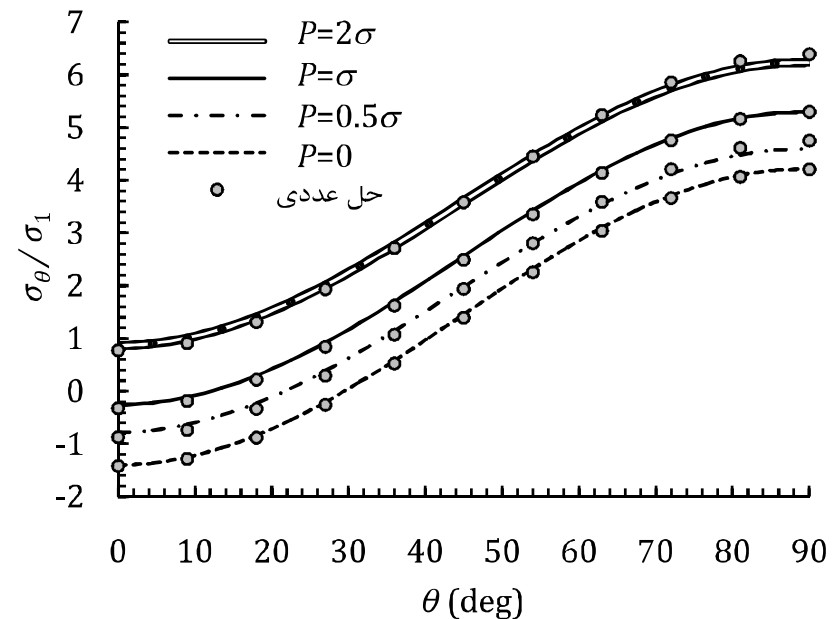
در شکل‌های 12 تا 17 تأثیر بارگذاری دوماحوری در محیط خارجی ورق بر روی تنش محیطی در اطراف گشودگی بررسی شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار n از 2- تا 2، اختلاف میان مقدار تنش محیطی بیشینه و کمینه در اطراف گشودگی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد، به‌طوری که در $n=1$ در تمام نقاط اطراف گشودگی، این تنش دارای مقداری ثابت می‌باشد. علت این امر، رابطه مستقیم تنش محیطی در اطراف گشودگی نسبت به بارگذاری محوری در محیط خارجی ورق می‌باشد. این رفتار با توجه به رابطه ارائه شده در مرجع [26] برای ورق همگن قابل پیش‌بینی بود. حل مورد بررسی در این مقاله نشان داد، که این روند بصورت مشابه برای ورق ناهمگن نیز وجود دارد.



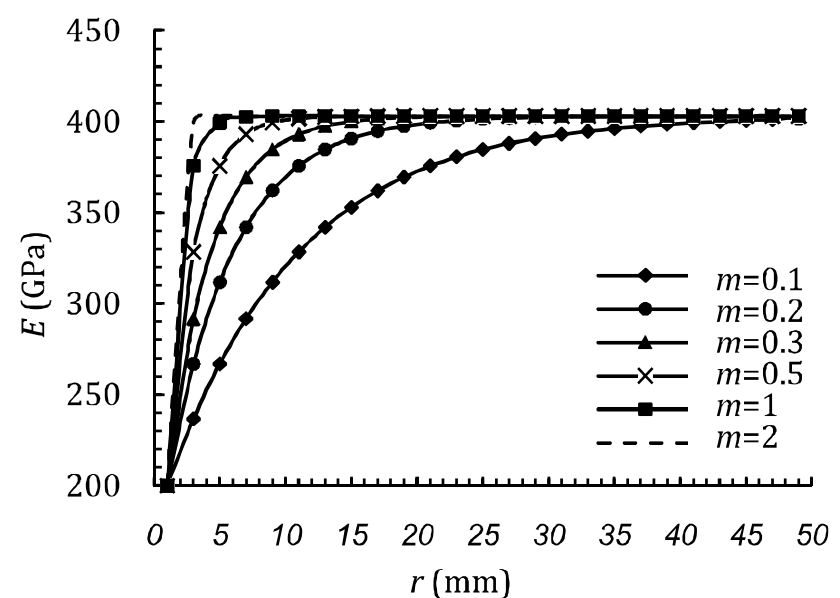
شکل 11 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته برای شعاع‌های مختلف همگرایی



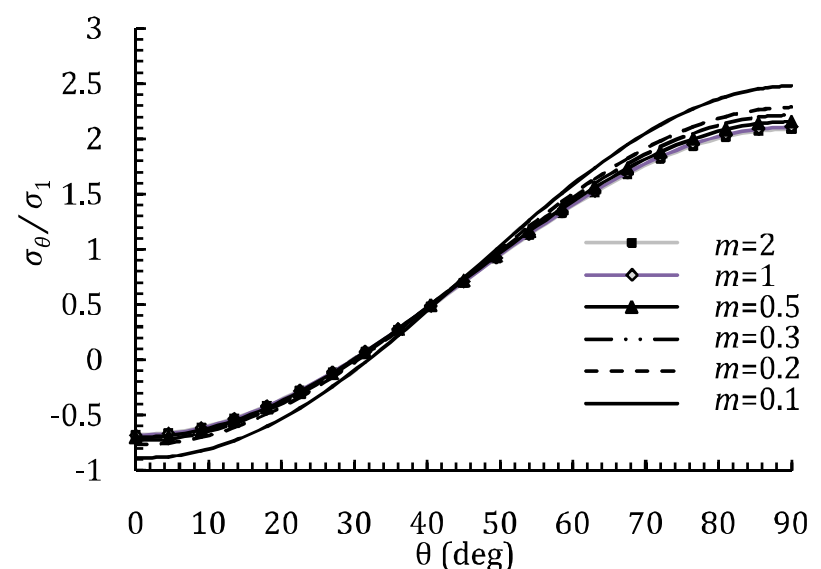
شکل 12 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن بدون فشار (کشش دوماحوری)



شکل 8 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت (کشش تک محوری)



شکل 9 تغییرات شعاع همگرایی مدول الاستیسیته برای ورق ناهمگن با روند صعودی مدول الاستیسیته

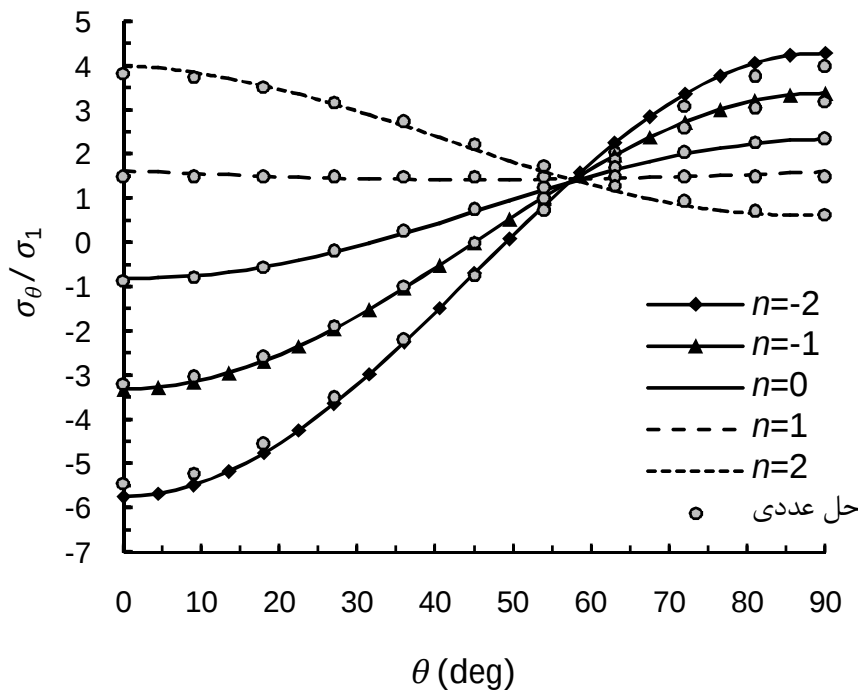


شکل 10 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی برای ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته برای شعاع‌های مختلف همگرایی

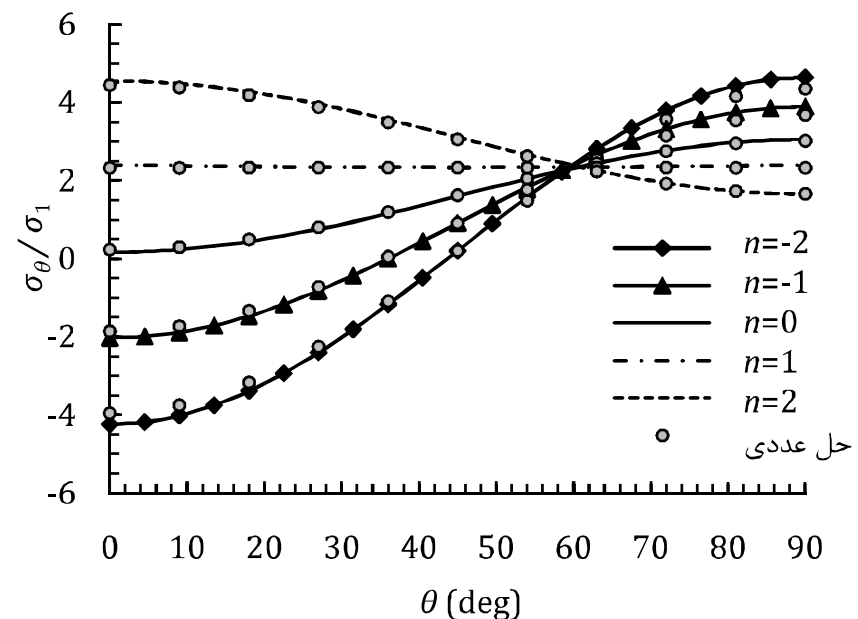
جدول 2 شعاع همگرایی ورق ناهمگن نسبت به ضریب m

ضریب m	شعاع همگرایی (mm)	ضریب m	شعاع همگرایی (mm)
0/1	43	0/5	11
0/2	29	1	7
0/3	17	2	4

همان‌گونه که در شکل 10 مشاهده می‌شود، این افزایش مقدار m باعث کاهش مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی در ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته می‌شود، زیرا در حالتی که $m=2$ است، لایه‌های بیشتری



شکل 16 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته بدون فشار (کشش دوماحوری)

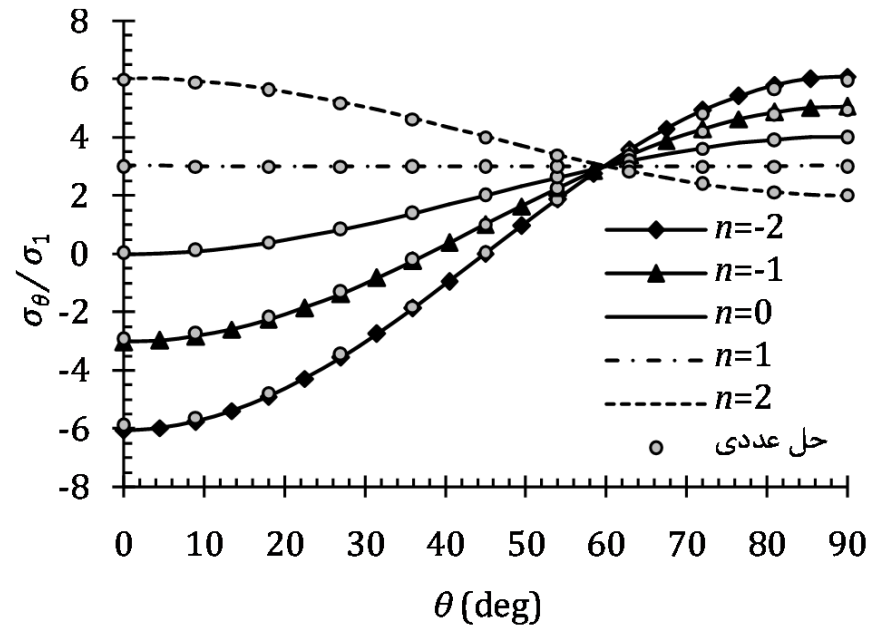


شکل 17 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت (کشش دوماحوری)

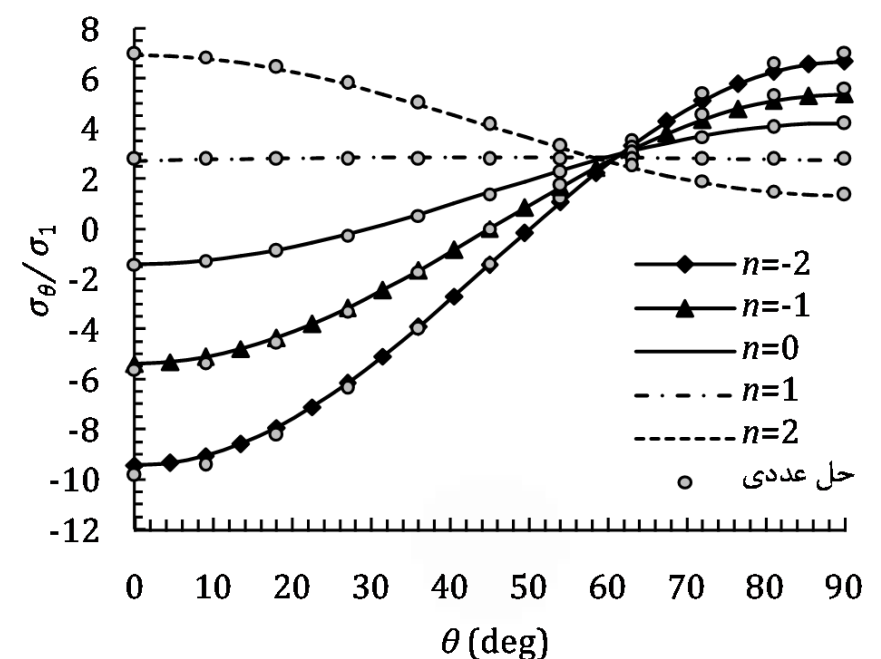
در تمام شکل‌ها، مشاهده می‌شود که به ازای $n=1$ ، مقدار تنش محیطی، ثابت می‌ماند، روند کاهشی مدول الاستیسیته، باعث افزایش تمرکز تنش و روند افزایش مدول الاستیسیته، باعث کاهش تمرکز تنش می‌شود.

5- نتیجه گیری

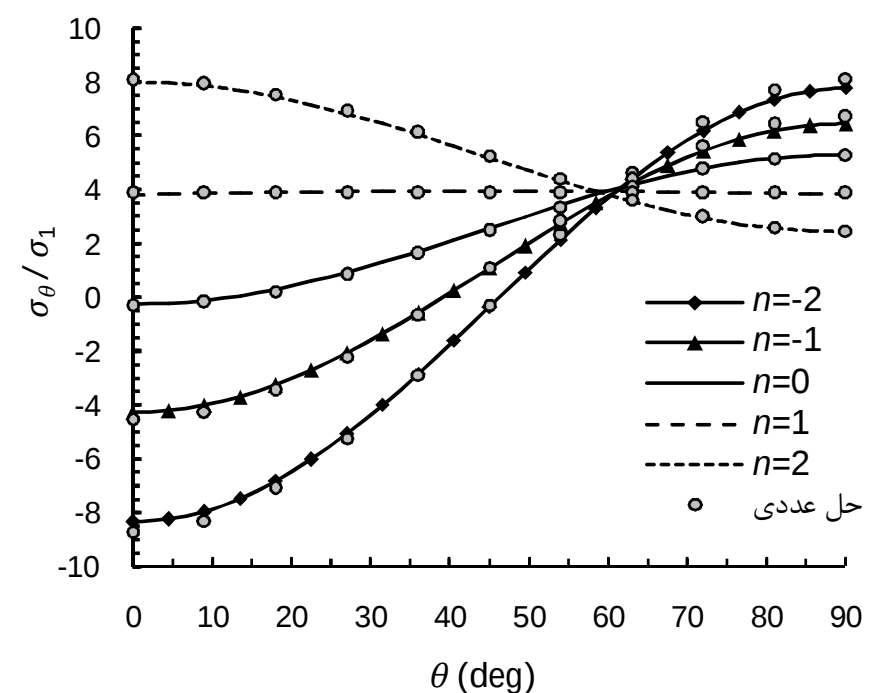
در این مقاله با استفاده از یک روش حل تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق ناهمگن بررسی شده است. با مقایسه حل عددی انجام شده به کمک نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس و حل بالا برای تمام بارگذاری‌ها، درستی حل پیشنهادی بررسی و تأیید شد. همچنین با بررسی شکل‌ها، این نتیجه حاصل شد، که ورق ناهمگن با روند افزایشی مدول الاستیسیته، عملکرد بهتری نسبت به ورق همگن برای کاهش مقدار تنش محیطی در اطراف گشودگی دایره‌ای دارد. در حالت بارگذاری فشاری در مرز گشودگی دایره‌ای، مقدار تنش شعاعی مورد توجه است و در هنگام طراحی ورق و بررسی تنش در اطراف گشودگی، می‌باید در نظر گرفته شود. بدین منظور پیشنهاد می‌شود، برای بررسی تنش در اطراف گشودگی دایره‌ای در ورق بلند بجای استفاده از تنش محیطی، از تنش معادل فون میز استفاده شود. اعمال بار فشاری بر مرز گشودگی در نحوه تغییرات تنش بی‌بعد تأثیر چندانی ندارد ولی مقدار تنش بی‌بعد معادل را به شدت تغییر می‌دهد. مقدار ضریب میرایی m تأثیر بسزایی بر کاهش تمرکز تنش در اطراف



شکل 13 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق همگن تحت فشار یکنواخت (کشش دوماحوری)



شکل 14 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته بدون فشار (کشش دوماحوری)



شکل 15 توزیع تنش محیطی در اطراف گشودگی ورق ناهمگن با روند کاهشی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت (کشش دوماحوری)

جنس ورق و روند صعودی و نزولی مدول الاستیسیته، تنها در مقدار تنش، مؤثر است و در روند تغییر تنش محیطی در اطراف گشودگی، تأثیر نمی‌گذارد. همچنین با توجه به شکل‌های 15 تا 17 نتیجه می‌شود، که در این نوع بارگذاری نیز حضور فشار یکنواخت در داخل گشودگی، اثری مشابه با بارگذاری تک‌محوری، بر مقدار تنش محیطی دارد.

- [13] H. K. Rangavittal, A. C. B. Naidu, B. Dattaguru, T. S. Ramamurthy, Analytical solutions for load transfer through smooth elastic pin in an infinite orthotropic plate, *Composite Structures*, Vol. 30, pp. 329-339, 1995.
- [14] E. Madenci, L. Ieri, Analysis of pin-loaded holes in composite laminates under combined bearing-bypass and shear, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, pp. 2053-2062, 1995.
- [15] B. Okutan Baba, Behavior of pin-loaded laminated composites, *Experimental Mechanics*, Vol. 46, pp. 589-600, 2006.
- [16] Z. Pen, C. Yuansheng, J. Liu, Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions, *International Journal of Mechanical Sciences*, No. 75, pp. 265-277, 2013.
- [17] D. V. Kubair, B. Bhanu-Chandar, Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, No. 50, pp. 732-742, 2008.
- [18] Z. Y. Cao, S. G. Tang, G. H. Cheng, 3D analysis of functionally graded material plates with complex shapes and various holes, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 13-18, 2009.
- [19] S. Hosseini, H. Bayesteh, S. Mohammadi, Thermo-mechanical XFEM crack propagation analysis of functionally graded materials, *Materials Science & Engineering A*, No. 561, pp. 285-302, 2013.
- [20] X. Z. Zhang, S. Kitipornchai, K. M. Liew, Thermal stresses around a circular hole in a functionally graded plate, *Journal of Thermal Stresses*, No. 26, pp. 379-390, 2003.
- [21] Y. Quanquan, G. Cun-Fa, Dynamic stress analysis of a functionally graded material plate with a circular hole, *Meccanica*, No. 48, pp. 91-101, 2013.
- [22] Q. Yang, C. F. Gao, W. T. Chen, Stress concentration in a finite functionally graded material plate, *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, Vol. 55, No. 7, pp. 1263-1271, 2012.
- [23] Q. Yang, C. F. Gao, W. T. Chen, Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole, *Archive of Applied Mechanics*, No. 80, pp. 895-907, 2010.
- [24] D. V. Kubair, Stress concentration factor in functionally graded plates with circular holes subjected to anti-plane shear loading, *Journal of Elasticity*, pp. 179-196, 2011.
- [25] *Material characteristics of Alumina, Zirconia, Sic and more*, Accessed 24 June 2014; <http://www.asuzac.jp/en/ceramics/material/material1.htm>.
- [26] W. D. Pilkey, D. F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, Third Edition, New Jersey, John Wiley, 2008.

گشودگی در ورق ناهمگن دارد. بسته به اینکه ورق ناهمگن با مدول الاستیسیته فزاینده باشد یا کاهنده، مقدار ضریب میرایی تأثیر متفاوتی بر مقدار تنش محیطی اطراف گشودگی دارد. روند کاهشی مدول الاستیسیته، باعث افزایش تمرکز تنش و روند افزایش مدول الاستیسیته، باعث کاهش تمرکز تنش می‌شود.

6- مراجع

- [1] S. H. Chi, Y. L. Chung, Cracking in coating-substrate composites with multi-layered and FGM coatings, *Engineering Fracture Mechanics*, No. 70, pp. 1227-1243, 2003.
- [2] S. H. Chi, Y. L. Chung, Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load, Part I: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, No. 43, pp. 3657-3674, 2006.
- [3] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Second English Edition, Netherlands: P. Noordhoff, 1962.
- [4] G. N. Savin, *Stress Concentration Around Holes*, New York: Pergamum Press, 1961.
- [5] J. D. Eshelby, W. T. Read, W. Shockley, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metallurgica*, Vol. 1, pp. 251-259, 1953.
- [6] A. N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philosophical Magazine*, Vol. 7, pp. 625-646, 1958.
- [7] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, Second Edition, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.
- [8] C. Hwu, Anisotropic plates with various openings under uniform loading or pure bending, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 700-706, 1990.
- [9] W. Hufenbach, M. Schäfer, A. S. Herrmann, Berechnung des spannungs und verschiebungsfeldes anisotroper scheiben mit elliptischem ausschnitt, *Ingenieur Archiv*, Vol. 60, Iss. 8, pp. 507-517, 1990.
- [10] J. Daoust, S. V. Hoa, An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes, *Composite Structures*, Vol. 19, pp. 107-130, 1991.
- [11] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of perforated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 71, pp. 463-468, 2005.
- [12] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, Stress analysis of composite plates with quasi-square cut out subjected to uniaxial tension, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 29, pp. 2015-2026, 2010.